OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	カレツキの景気循環モデルへのフィリップス型安定化政策の導入
Author(s)	景山, 悟
Citation	大阪大学経済学. 2016, 66(1), p. 33-43
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/57206
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

カレツキの景気循環モデルへのフィリップス型安定化政策の導入*

景　山　　悟†

要　約

本稿ではカレツキの景気循環モデルを拡張してフィリップス型安定化政策を導入する。ランゲは資本主義経済における国民所得の動学的不安定性を経済サイバネティクス研究の一環として指摘した。その分析においては成長か不安定か，あるいは安定か停滞か，というジレンマが示された。ところが，ランゲによってもまたカレツキ自身によっても，政府支出による経済の安定化については考察されることがなかった。本稿の定式化においてフィリップス型安定化政策が国民所得の定常状態に与える効果を検証し，ランゲのジレンマについて再考する。さらに，貯蓄に対する投資決定の敏感さと政策ラグの長さが経済の安定性に及ぼす影響について議論する。

1　序論

カレツキはケインズと独立して有効需要の原理に到達した経済学者として知られている。ケインズの静学的な『一般理論』に先行して1933年に発表された彼の景気循環モデルは（Kalecki，1935）[1]，経済動学の振動を扱う研究領域では今もなお関心を集めるモデルである[2]。乗数・加速度モデルの描像と異なる点として，カレツキの景気循環モデルは投資決定が貯蓄と資本ストックとに直接依存するという，資本主義経済の安定性分析において決定的に重要な特徴を有する。そのような長所にもかかわらず，安定化政策の観点からそのモデルの解を特徴付けることについてはほとんど注意が払われていない。このように，資本主義経済における安定化問題は，いまだ多くの議論の余地がある問題である。

フィリップスは乗数・加速度モデルの枠組みを用いて（Phillips，1954），安定化政策ルールの研究の端緒を開いた。ここでは総需要管理を目的とした政府支出の量が内生変数として扱われた。当時すでにサミュエルソンの乗数・加速度モデルから，政府支出が国民所得の安定に必ずしも寄与しないことは明らかであったが，サミュエルソンの体系では政府支出は外生変数として扱われるのみであり，安定化政策ルールをここから導くことはできなかった。それに対しフィリップスは，需要の外生的な減少により生ずる産出量の均衡水準の低下とその経路の振動を抑制するための政府支出を内生変数として導入した。この枠組みにおける結論として，たと

* 本稿の執筆に際して，終始ご指導いただいた浦井憲教授，有益なコメントをくださった竹内惠行准教授，葛城政明准教授に深謝申し上げる。

† 大阪大学大学院経済学研究科博士後期課程
E-mail: qge803ks@student.econ.osaka-u.ac.jp

1 当初はポーランド語で発表された。

2 Krawiec and Szydlowski（1999），Szydlowski（2002），Szydlowski and Krawiec（2005），Ballestra et al.（2013），Ercolani（2014）などを見よ。

え政策ラグが存在してもフィードバックルールに基づく政府支出により均衡の回復が可能であることが示された。しかしながら，フィリップスが扱ったのは乗数・加速度モデルであり資本ストックを含まないため，資本主義経済の分析としては不十分であり，このフィリップス型安定化政策が資本ストックを含む経済においても有効であるかについては，いまだ明らかにされていない。ところでLucas（1976）は政策の変更自体が経済の構造に変化を及ぼすことを懸念したが，経済構造が変化してもなおフィリップスの政策は安定化政策として有効であり得る。なぜなら，フィリップスの提示した枠組みにおいて，その政策ルールの変更は政策関数の三つの政策パラメータを変更することに相当するが，この変更は必ずしも安定化政策としての機能を損なうものではないからである。そうした経済構造の変化が生じ得る状況下で政策の機能を保証するためには，安定性が保証されるために満たされるべき，一種のトレード・オフとしての，政策パラメータと経済の構造パラメータとの間の関係を明らかにせねばならない。すなわち，安定条件を導出する必要がある。

ランゲは，彼の経済サイバネティクス研究の一環として，また資本主義経済に内在する不安定性を明らかにするため，カレツキの景気循環モデルの漸近安定条件に焦点を当てた（Lange, 1970）[3]。ランゲの分析においては，安定条件についての考察が経済政策論ないしは経済体制論としての含意をカレツキの動学モデルから引き出す際に中心的な役割を果たしている。ランゲが導出した安定性を保証するための必要条件は，経済が安定であるためには総貯蓄に対する投資量の決定に強い制限があることを含意する。さらに資本ストックの成長にはその振動の増大が伴い，振動が減少する場合には資本ストックは減少する。すなわち成長と不安定か，安定と停滞ないしは後退か，というジレンマがある。確かにこのような不安定性はカレツキモデルから見た資本主義経済の欠陥ではあるが，その一方でランゲはこれに対する解決策を示さず，外生的な投資の供給を通じて資本ストックの成長が可能であるということを示唆するにとどまるのであった。したがって，経済が定常状態にあるときに，万が一外生的に需要の減少が生じたときに，安定化政策を通じて所得水準を元の定常水準へ安定的に成長させることができるか，そしてその際に投資決定のあり方が安定性にどのような影響を与えるかについては，カレツキの原モデルにおいては明らかとはならない。加えて，フリードマンによる政策ラグの存在が不安定化に寄与するという直観的な主張（Friedman, 1948）がわれわれの定式化において妥当するかどうか，政策ラグが安定性にどのように影響を及ぼし得るか注視する必要があろう。

以上のことから，本稿ではランゲの安定化条件についての議論を再考しながら，(1) フィリップス型安定化政策は資本ストックが存在する経済においても定常均衡の回復に有効であるか，(2) そこでの漸近安定化を保証するために満たされるべき安定条件は何か，(3) 政策ラグの存在ならびに貯蓄と投資決定との関係がどのように安定性に影響を与えるか，これらの問題に取り組む。本稿では投資決定としてカレツキが提案したような貯蓄と資本ストックに依存する線形関数を想定するが，資本財の生産関数については次の修正を与える。すなわち資本財の生産に要するラグとして，カレツキが提案した

[3] サイバネティクスとは1948年に数学者N.ウィーナーにより著された『Cybernetics: Or Control and Communication in the Animal and the Machine』において展開された科学方法論である。これは動物の自己調整機能に着目して着想されたものであり，またライプニッツの普遍数学構想に影響を受けたものである。その動機は，制御理論と通信理論の諸概念を通じて，神経生理学，生物学，工学，社会科学といったあらゆる学問の普遍言語を構築することであった。ランゲの研究はこの方法論を体系的に経済学において展開する試みであり，そこでの動学的安定性の分析は制御理論の数理的方法をカレツキが考察した安定性の問題に導入したものである。

離散的ラグの代わりに，指数関数により記述される連続的なラグを導入する。そしてフィリップスが乗数・加速度モデルに与えた拡張と同様にして，外生的に変化する独立需要と政策ラグを伴う政策関数をモデルに導入する。これにより，カレツキのモデルの特徴を保持しながら統一的な枠組みのもとに，資本ストックが存在する経済に対する政策の効果と乗数・加速度モデルに対するそれとを比較できる。実際，これはフィリップスの提示したラグを伴う加速度原理に基づく投資関数を拡張したものとなっている。

本稿ではさらにこの拡張した体系のラプラス変換を与え，その定式化のもとでフィリップス型安定化政策の有効性を検証する。定常水準についての比較静学分析を通じて，フィリップス型安定化政策の定常均衡の回復機能を調べる。さらにラウス・フルヴィッツの定理により安定条件を導出すると，ランゲの示した安定条件は政府支出が無視される場合の特殊ケースに相当することが見出される。すなわち総貯蓄に対する投資量の制限は政策の実施により緩和される。本稿で示す安定条件のもとであれば，万が一需要におけるショックが生じて所得が一時的に減少した場合にも，フィリップス型安定化政策の実施によって安定的に元の定常水準まで漸近的に成長できる。その意味においてランゲのジレンマは解消する。さらに，フリードマンが懸念したような政策ラグの存在による不安定化効果が安定条件において明示的に現れることを見る。政策ラグの長さが特殊な場合において不安定化の要因であり得ることが見出されるものの，ほとんどの場合にそれは政策の実施によって相殺され得ることが示される。

2　カレツキの景気循環モデルにおける漸近安定の必要条件

本章ではカレツキの景気循環モデルにおける安定性の必要条件についてのランゲの議論を概説する[4]。経済変数は，連続時間 t の連続関数であるとする。時点 t における国民所得 $Y(t)$ は総消費 $C(t)$ と総純投資 $I(t)$ との和で表される。

$$Y(t) = C(t) + I(t) \tag{1}$$

その消費量は

$$C(t) = (1 - l)Y(t) \tag{2}$$

で表される。l は貯蓄性向であるとし（$0 < l < 1$），$lY(t)$ は総貯蓄を表す。

$L(t)$ は資本財の純生産を表し，$K(t)$ は資本ストックを表す。$K(t)$ と $L(t)$ との関係は

$$K'(t) = L(t) \tag{3}$$

である。すなわち資本財のストックの増加分は資本財の純生産に等しい。

$B(t)$ は投資決定を表すとする。資本財の生産を完了するには期間 θ を要する。すなわち時点 t におけるその純生産と時点 $t - \theta$ における投資決定は等しく，

$$L(t) = B(t - \theta) \tag{4}$$

と表される。θ は正の定数である。

$B(t)$ の値は以下のように決定される。

$$B(t) = alY(t) - bK(t) \tag{5}$$

ここで a と b は正の定数である。投資決定は貯蓄 $lY(t)$ に比例する。また資本ストックが大きいほど投資決定量は小さくなる。

資本財への支払いはその生産期間に分散される。すなわち t における総投資は，期間 $[t - \theta, t]$ においてなされるすべての投資決定の平均に等しく，

$$I(t) = \frac{1}{\theta}\int_{t-\theta}^{t} B(\tau)d\tau \tag{6}$$

[4] この微分差分方程式の解についてはAllen（1966）とFrisch（1935）においても議論されている。

と表される。この期間に決定されるすべての投資 $\int_{t-\theta}^{t} B(\tau)d\tau$ は，t 時点において実行に移されるが，$1/\theta$ 分が実現されるということである。$I(t)-L(t)$ は形成途中の資本財の量に相当する。もし資本財の生産ラグが存在しない場合には $B(t)=I(t)$ である。

ランゲは以上の微分差分方程式を

$$\left[(D-a)e^{D}+a+b\right]K(t)=0 \tag{7}$$

と記述した。D は微分演算子である。この微分演算子による記法は厳密ではないが正しい解を与えることが知られており，Phillips（1954）においてもこの記法が用いられている。次章に示す拡張モデルでは，この微分演算子の数学的正当化であるラプラス変換による記述を与える。

$K(t)=K(0)e^{\lambda t}$ を式（7）に代入すると以下の特性方程式を得る。

$$(\lambda-a)e^{\lambda t}+a+b=0 \tag{8}$$

この方程式の根（特性根）の実部の符号を吟味することで，安定条件を明らかにすることができる[5]。

式（8）の実数の特性根は $f(\lambda)=(\lambda-a)e^{\lambda}$ と $-(a+b)$ との交点で与えられる。$f'(\lambda)=(1+\lambda-a)e^{\lambda}$ であるから，$f(\lambda)$ は $\lambda=a-1$ で最小値をとる。交点を得るにはその最小値が $-(a+b)$ を下回ればよい。したがって実数の特性根は，$a+b\leq e^{a-1}$ のとき存在する。不等号が成立する場合には実根は二つであり等号のとき一つである。そして明らかに特性根 λ が負であるのは $a<1$ のときであり，$a>1$ の時には正である。もし $a=1$ であれば，特性根は重根の 0 である。

言い換えると，もし $a+b<e^{a-1}$ ならば，$a<1$ のとき二つの負の実根が存在し，$K(t)=K_0e^{\lambda t}\to 0$，すなわち資本ストックは減少し，単純再生産を保持できない。よってこれを避けるには $a+b\geq e^{a-1}$ が成立せねばならない。すなわち $b=e^{a-1}-a$ で一つの実根が存在するときか，$b>e^{a-1}-a$ で実根が存在しないときかである。現実には，カレツキは統計資料より $a=0.95$，$b=0.12$ との試算を行っており，$0.95+0.12>e^{-0.05}$ である。これは複素根を持つ場合に相当する。

その複素根の場合について考える。$\lambda=\alpha+i\beta$ と置きオイラーの公式 $e^{-i\beta}=\cos\beta-i\sin\beta$ を考慮すると，式（8）より

$$(\alpha-a+i\beta)e^{\alpha}=-(a+b)(\cos\beta-i\sin\beta) \tag{9}$$

が得られる。両辺の実部と虚部を比較することで直ちに

$$\tan\beta=\frac{\beta}{a-\alpha} \tag{10}$$

を得る。この両辺の交点であって，$\beta\neq 0$ のときに複素根が定まる。左辺の傾きを求めると，

$$\frac{d\tan\beta}{d\beta}=1+\tan^2\beta \tag{11}$$

であり，$\beta=0$ において傾きはその最小値 1 であることがわかる。したがって $\beta/(a-\alpha)$ が $\tan\beta$ と交わるには，$1/(a-\alpha)>1$ でなければならない。この複素根の存在条件はすなわち $a-1<\alpha<a$ である。そして存在するときには，共役根 $\alpha+i\beta$ と $\alpha-i\beta$ が得られる。もし $a\geq 1$ なら $\alpha>0$ であり，複素根は正の実数部分を持ち振動は増大する。$a<1$ ならば，α は負または 0 であり得る（正の場合もある）。すなわち振動が減衰する場合も一定の振幅を持つ場合もあり得る。以上の議論は，カレツキの景気循環モデルにおける安定性の必要条件が $a<1$ であるということを示している。投資決定の総貯蓄に対する敏感さを表す a は経済の安定性を維持するためにこのような制約を受ける。

[5] Bellman（1963），James（1938），Hayes（1950）を見よ。

3　フィリップス型安定化政策の導入

本章ではカレツキの景気循環モデルの拡張を与えてこれにフィリップス型安定化政策を導入する。まず式（1）に，独立需要 $A(t)$ と政策変数 $G(t)$ を導入し，

$$Y(t) = C(t) + I(t) + A(t) + G(t) \tag{12}$$

とする。$t \leq 0$ で定常状態が保たれているとみなし，基準点として

$$Y(t) = 0 \quad (t \leq 0) \tag{13}$$

とする。独立需要は所得の定常状態に対する撹乱要因であり，$t \geq 0$ における外生的な総需要の減少を表す。

$$u_d(t) = \begin{cases} 1 & (t > d) \\ \frac{1}{2} & (t = d) \\ 0 & (t < d) \end{cases} \tag{14}$$

を考える。$d = 0$ とおくことにより $t = 0$ に発生する定数 $-A$ 分の需要ショックとして，$A(t) = -Au_0(t)$ を与える（$A > 0$）。

資本財の生産ラグとして，式（4）の代わりに以下の指数関数ラグを用いる。

$$L'(t) = \frac{1}{\tau_L}(B(t) - L(t)) \tag{15}$$

τ_L はその生産ラグの長さを表す正の定数である。ただし資本財への支払いは資本財形成時間で分散されないと仮定し，$B(t) = I(t)$ とする。

式（5）と（15）がPhillips（1954）により提案されたラグを伴う加速度原理に基づく投資関数の拡張となっていることは容易にわかる。すなわち資本財の生産ラグが存在しない場合の投資関数はフィリップスの投資関数と一致する。フィリップスの投資関数は

$$I'(t) = \frac{1}{\tau_I}\left(kY'(t) - I(t)\right) \tag{16}$$

と書ける。ここで τ_I と k はそれぞれ投資ラグを表す正の定数と加速度係数である。資本財の生産に要するラグが存在しない場合は $L(t) = B(t)$ である[6]。よって，

$$\begin{aligned} I'(t) &= alY'(t) - bK'(t) \\ &= b\left(\frac{al}{b}Y'(t) - I(t)\right) \end{aligned} \tag{17}$$

を得る。加速度係数は al/b に相当し，ラグを表す定数は $1/b$ に相当する。

ランゲは資本ストック $K(t)$ に着目したが重要なのは $Y(t)$ のほうであるので，$Y(t)$ について明示的に議論する。したがって，国民所得の漸近安定性 $\lim_{t\to\infty} Y(t) = 0$ を問題とする。再び注意を要するが，$t = 0$ における定常状態にある経済変数の値を 0 として基準にとっており，経済変数の値はその基準点からの乖離を表すので，所得の値は負になり得る。フィリップスが定義した政府支出による安定化政策を表す関数 $P(t)$ は

$$P(t) = -\mu_1 Y(t) - \mu_2 \int_0^t Y(\tau)d\tau - \mu_3 Y'(t) \tag{18}$$

である。μ_1，μ_2，μ_3 は正の定数である。政策ラグは

$$G'(t) = \frac{1}{\tau_G}(P(t) - G(t)) \tag{19}$$

で表される。τ_G は政策ラグの長さを表す正の定数である。

以上の方程式にラプラス変換を施す。ラプラス変換の定義は，

$$\hat{f}(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ T\to\infty}} \int_{-\varepsilon}^{T} f(t)e^{-st}dt \tag{20}$$

である。ε と T は正の定数である。ラプラス変換が線形演算子であること，すなわち $\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1\mathcal{L}[f_1(t)] + a_2\mathcal{L}[f_2(t)]$ という性質を用い，微分演算と積分演算がそれ

[6] もし $B(t)$ が定数 B であるなら，（15）の解として $L(t) = B\left(1 - e^{-t/\tau_L}\right)$ を得る。ここで $t \to \infty$ とすると，$L(t) = B(t)$ を得る。

ぞれ s と $1/s$ を掛けることに対応することに着目すると，以下のラプラス変換を得る。初期値はすべて 0 である。

(21) $$\hat{Y}(s) = \hat{C}(s) + \hat{I}(s) + \hat{A}(s) + \hat{G}(s),$$

(22) $$\hat{C}(s) = (1-l)\hat{Y}(s),$$

(23) $$\hat{L}(s) = \frac{1}{\tau_L s + 1}\hat{B}(s),$$

(24) $$s\hat{K}(s) = \hat{L}(s),$$

(25) $$\hat{B}(s) = al\hat{Y}(s) - b\hat{K},$$

(26) $$\hat{B}(s) = \hat{I}(s),$$

(27) $$\hat{G}(s) = \frac{1}{\tau_G s + 1}\left(-\mu_1\hat{Y}(s) - \mu_2\frac{1}{s}\hat{Y}(s) - \mu_3 s\hat{Y}(s)\right)$$

式（23）は $\mathcal{L}\left[L'(t)\right] = s\mathcal{L}\left[L(t)\right] - L(0^-)$ と $s\hat{L}(s) = \frac{1}{\tau_L}\left(\hat{B}(s) - \hat{L}(s)\right)$ から得られる。同様にして式（24）が得られる。式（27）の導出には，

$$\mathcal{L}\left[Y(t)\right] = \mathcal{L}\left[Q'(t)\right] = s\mathcal{L}\left[Q(t)\right] - Q(0^-) = s\mathcal{L}\left[\int_0^t Y(\tau)d\tau\right]$$

という関係を利用すればよい。ここで $Q(t) = \int_0^t Y(\tau)d\tau$ である。

需要ショック $A(t) = -Au_0(t)$ のラプラス変換は

(28)

$$\hat{A}(s) = \mathcal{L}\left[-Au_0(t)\right] = -A\int_{0^-}^{\infty} u_0(t)e^{-st}dt = -A\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}dt = \frac{-A}{s}$$

により得られる。

式（23），（24），（25），（26）より，

(29) $$\hat{I}(s) = \frac{als(\tau_L s + 1)}{s(\tau_L s + 1) + b}\hat{Y}(s)$$

が得られる。

4　安定化政策の有効性

本章では，比較静学的な視点から拡張モデルにおけるフィリップス型安定化政策の効果について検証する。まず政策を実施しない場合に外生的な需要の減少が所得の定常水準に及ぼす影響を，最終値の定理 $\lim_{s\to 0} s\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \lim_{t\to\infty} f(t)$ を用いて調べる。

定理 1：外生的な需要の減少 $A(t) = -Au_0(t)$ が生じた場合，国民所得の定常水準は，もしそれが定常状態へ収束するなら元の 0 から $-A/l$ に移動する。

証明：式（21）において $\hat{G}(s) = 0$ とすると，式（21），（22），（29）より

(30) $$\hat{Y}(s) = \frac{\tau_L s^2 + s + b}{l\tau_L(1-a)s^2 + l(1-a)s + lb}\hat{A}(s)$$

が得られる。

これに式（28）を代入し最終値の定理を考慮すると，

(31)

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = \lim_{s\to 0} s\hat{Y}(s) = s\cdot\frac{1}{l}\cdot\frac{\tau_L s^2 + s + b}{\tau_L(1-a)s^2 + (1-a)s + b}\cdot\frac{-A}{s} = \frac{-A}{l}$$

を得る。

以上のように外生的に $-A$ の需要低下が生じると，政策を実施しない場合には定常所得水準は $-A/l$ に低下する。したがって当然のことながら，安定化政策を実行し得るかという問題は，乗数・加速度モデルと同様にカレツキの景気循環モデルにおいても扱われて然るべきである。また，この定常水準の値は Phillips（1954）で示された乗数・加速度モデルにおけるそれと同一の値であり，投資関数として加速度原理を選ぶかカレツキの関数を選ぶかは定常水準の値に寄与しないことがわかる。

以下では，政策を施す場合について考察する。次の定理は拡張モデルにおける比例，微

分，積分政策のすべてを含む安定化政策の有効性を主張する。

定理 2： $A(t) = -Au_0(t)$ の需要減少に対して，フィリップス型安定化政策 $(\mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \mu_3 > 0)$ により国民所得の定常水準は，もしそれが定常状態へ収束するなら元の水準 0 に回復する。

証明： $N(s)$ と $D(s)$ を s についての多項式とする。いま， $\hat{Y}(s)$ を

$$\hat{Y}(s) = \frac{N(s)}{D(s)}\hat{A}(s) \tag{32}$$

と書く。すると，式（21），（22），（29），（27）より

(33)

$$\begin{aligned} D(s) = &[\tau_L\tau_G l(1-a) + \mu_3\tau_L]\, s^4 \\ &+ [(\tau_L + \tau_G)l(1-a) + \mu_1\tau_L + \mu_3]\, s^3 \\ &+ [l(b\tau_G + 1 - a) + \mu_1 + \mu_2\tau_L + \mu_3 b]\, s^2 \\ &+ [b(l + \mu_1) + \mu_2]\, s + \mu_2 b \end{aligned}$$

(34)

$$N(s) = \tau_L\tau_G s^4 + (\tau_L + \tau_G)s^3 + (1 + b\tau_G)s^2 + bs$$

を得る。式（28）と最終値の定理より，

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{N(s)}{D(s)} \cdot \frac{-A}{s} = 0 \tag{35}$$

を得る。

ところで，もし積分政策を導入しなかった場合には，定常水準は完全には回復しない。次の定理はそのことを示している。

定理 3： $A(t) = -Au_0(t)$ の需要減少に対して，比例政策および微分政策 $(\mu_1 > 0, \mu_2 = 0, \mu_3 > 0)$ により得られる国民所得の定常水準は，もしそれが定常状態へ収束するなら $-A/(l + \mu_1)$ に移動する。

証明：式（33）において $\mu_2 = 0$ とすると，

$$\begin{aligned} D(s) = &[\tau_L\tau_G l(1-a) + \mu_3\tau_L]\, s^3 \\ &+ [(\tau_L + \tau_G)l(1-a) + \mu_1\tau_L + \mu_3]\, s^2 \\ &+ [l(b\tau_G + 1 - a) + \mu_1 + \mu_3 b]\, s + b(l + \mu_1) \end{aligned} \tag{36}$$

(37)

$$N(s) = \tau_L\tau_G s^3 + (\tau_L + \tau_G)s^2 + (1 + b\tau_G)s + b$$

を得る。多項式の次数が下がるのは積分項を無視したことに対応する。

式（28）と最終値の定理より，

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{N(s)}{D(s)} \cdot \frac{-A}{s} = \frac{-A}{l + \mu_1} \tag{38}$$

を得る。

この定常水準も乗数・加速度モデルにおいて比例政策と微分政策を実施した場合と同一の値である[7]。拡張したわれわれのカレツキモデルにおいても，積分政策が定常水準を完全に回復する働きを担っていることがわかる。

5　漸近安定化の必要十分条件

本章では，フィリップス型安定化政策を実施した場合の漸近安定のための必要十分条件を導出し，その政策論的な含意について論述する。

定理 4：フィリップス型安定化政策を実施した経済の漸近安定のための必要十分条件は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} &a < 1 + \frac{\mu_3}{\tau_G l}, \\ &a < 1 + \frac{\mu_1\tau_L + \mu_3}{(\tau_L + \tau_G)l}, \\ &a < 1 + b\tau_G + \frac{\mu_1 + \mu_2\tau_L + \mu_3 b}{l} \end{aligned} \tag{39}$$

であり，かつ

$$\begin{pmatrix} (\tau_L+\tau_G)l(1-a)+\mu_1\tau_L+\mu_3 & b(l+\mu_1)+\mu_2 & 0 & 0 \\ \tau_L\tau_G l(1-a)+\mu_3\tau_L & l(b\tau_G+1-a)+\mu_1+\mu_2\tau_L+\mu_3 b & \mu_2 b & 0 \\ 0 & (\tau_L+\tau_G)l(1-a)+\mu_1\tau_L+\mu_3 & b(l+\mu_1)+\mu_2 & 0 \\ 0 & \tau_L\tau_G l(1-a)+\mu_3\tau_L & l(b\tau_G+1-a)+\mu_1+\mu_2\tau_L+\mu_3 b & \mu_2 b \end{pmatrix}$$

(40)

[7] Kageyama（2015）を見よ。また，ラプラス変換による導出ではないが，これらの定常水準は Allen（1967）においても示されている。

の主小行列式がすべて正であることである[8]。

証明：ラウス・フルヴィッツの定理（Hurwitz, 1895）を適用して，式（33）で表した分母多項式のすべての根の実部が負であるための必要十分条件を求めればよい。まず式（33）の係数すべてが正であることが要求される。$b(l+\mu_1)+\mu_2>0$，$\mu_2 b>0$ は定義より常に成立する。残りの係数について，$\tau_L\tau_G l(1-a)+\mu_3\tau_L>0$，$(\tau_L+\tau_G)l(1-a)+\mu_1\tau_L+\mu_3>0$，$l(b\tau_G+1-a)+\mu_1+\mu_2\tau_L+\mu_3 b>0$ でなければならない。これより直ちに不等式（39）を得る。さらにこの分母多項式についてのフルヴィッツ行列のすべての主小行列式が正であることが漸近安定の必要十分条件である。$c_4s^4+c_3s^3+c_2s^2+c_1s+c_0$ のフルヴィッツ行列は

$$\begin{pmatrix} c_3 & c_1 & 0 & 0 \\ c_4 & c_2 & c_0 & 0 \\ 0 & c_3 & c_1 & 0 \\ 0 & c_4 & c_2 & c_0 \end{pmatrix}$$

であり，式（40）は式（33）のフルヴィッツ行列である。

この安定化条件は政策パラメータと経済構造パラメータとの間のトレードオフを表している。とくに不等式（39）は漸近安定のための必要条件に相当する。貯蓄率 l が大きい場合には，安定性を保証する a（総貯蓄に対する投資決定の敏感さ）の値の範囲が制限されることがわかる。同様に $\mu_1=\mu_2=0$ の場合には，資本財の生産ラグ τ_L が大きいと安定性のために許容される a の値が制限される。逆に b（資本ストックに対する投資決定の敏感さ）の値が小さいほど a の範囲は制限される。

ここで政策実行が安定性に与える影響について考察する。μ_1，μ_2，μ_3 を調整することは，元の定常水準への短期的な素早い回復，目標水準への長期的な一致，振動の抑制の三つの目標のバランスを変更することに相当する。いま $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \to 0$ とすると，ランゲが導出した必要条件 $a<1$ が導かれる。すなわちランゲの必要条件は，政策の効果がほとんど無視できる極限の場合であるということがわかる。これは投資決定の大きさが総貯蓄より小さければならないことを意味する（$B(t)<lY(t)$）。このような状況がランゲのジレンマであった。しかしながら，政策実行により政策パラメータそれぞれに値が与えられれば，投資決定の貯蓄に対する敏感さについての制約は緩和されるため，$a\geq 1$ であっても必ずしも経済の不安定性を帰結しない。定理 2 において示したように，たとえ一時的に需要ショックにより国民所得が低下しても元の定常水準に安定的に成長し得る。したがって安定条件のもとであれば安定的にその成長が達成される。この意味でランゲのジレンマは解消される。さらに，たとえ政策変更により経済構造パラメータ l, a, b, τ_L が変化しても安定条件が満たされているならばその定常状態の回復機能は損なわれることはない。

一方，政策ラグの長さ τ_G は a の許容範囲を制限する。より大きな τ_G の値はより長い政策ラグを表している。フリードマンは短期的な景気の回復よりも長期的な安定性を問題とし，政策ラグの存在が経済の不安定化要因になり得ることを直観的に主張した（Friedman, 1948）。われわれの安定化条件においては政策ラグの長さが不安定化要因となることが明示的に表されている。とくに $a\geq 1$ のとき必要条件（39）が満たされないように大きな τ_G の値をとることができる。すなわち投資が極端に活動的である場合には長すぎる政策ラグが不安定化を引き起こし得る。同様に，Asada and Yoshida（2000）は積分政策を含まない，定数項

---

[8] 主小行列式がすべて正であるとはすなわち，n 次までの以下の行列式について

(41) $c_{n-1}>0,\quad \begin{vmatrix} c_{n-1} & c_{n-3} \\ c_n & c_{n-2} \end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix} c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} \\ c_n & c_{n-2} & c_{n-4} \\ 0 & c_{n-1} & c_{n-3} \end{vmatrix}>0,\quad \cdots$

である。

と比例項のみからなる政策関数を動学的なケインジアンIS-LMモデルに導入し，長過ぎる政策ラグは安定化を実現できないことを示した。しかしながらわれわれのフィリップス型政策を含む経済においては，こうした政策ラグの長さによる不安定化は，安定条件を満たすように政策パラメータが選ばれるかぎりにおいては生じない。すなわち政策ラグに起因する不安定化は政策パラメータの適切な選択により相殺し得る。政策パラメータの取り得る範囲は，他の経済パラメータの値に依存するもののかなり広い範囲を取り得ることは容易に確認できる。たとえば $l=0.5$， $a=1$， $b=0.1$， $\tau_L=1$， $\mu_1=\mu_2=\mu_3=1$ のとき，定義である $\tau_G>0$ を満たすかぎりはその値のいかんによらず，必要条件としての（39）と（40）の主小行列式がすべて正であるという条件はいずれも満たされる。すなわちこの数値例においては，政策ラグの長さは安定性にまったく影響を及ぼさない。

6 結論

本稿では，ラプラス変換に基づいて資本ストックが存在する経済におけるフィリップス型安定化政策の有効性を議論した。ランゲにおいて資本主義経済における成長と安定の間のジレンマは重大な意義を持つテーマであったが，本稿はそうしたかつての経済体制論を再考しながらも，政策実行が安定性へ与える影響についての形式的な議論の枠組みを与えるものである。フィリップスの乗数・加速度モデルでは扱われなかった，資本主義経済の特徴である貯蓄と資本ストックに依存する投資決定が経済の安定性に与える影響について議論した。定理1，2，3で示されたように，外生的な需要低下による定常水準の低下と政策による定常水準の回復水準は，乗数・加速度モデルにおけるそれらと同一である。すなわち資本ストックと投資決定の導入は定常水準に影響しないという結果が得られた。定理4において示したように，ラウス・フルヴィッツの定理により漸近安定化の必要十分条件を導出し政策パラメータと経済構造パラメータの間のトレードオフについて明らかにした。ランゲが導出した安定性のための必要条件，すなわち投資決定における総貯蓄に対する敏感さが1未満であるという制約は，われわれの定式においては政策実施が無視された極限の場合の必要条件として導出された。しかしながら安定化政策の実施によりこの制約は緩和され，乗数・加速度モデルと同じく，外生的な需要の減少による国民所得の減少は安定化政策により相殺できる。投資決定の総貯蓄に対する敏感さと政策ラグの長さはたしかに特殊な場合においては不安定化要因ではあるものの，政策パラメータを適切に選択することによりその不安定化効果を相殺できる。以上を要約すると，適切な安定化政策の実施により，総需要のショックを原因として減少した国民所得を元の定常水準へと回復的に成長させることが可能であり，なおかつ投資決定と政策ラグに起因する資本主義経済の不安定性が緩和され得るということが，カレツキの思想に沿った投資と資本の定式化に基づく本稿の結論である。これは政策ラグが存在する経済に対してのフィリップス型安定化政策の有効性を示すものであり，また政策実行による定常均衡の回復という点においてはランゲのジレンマが解消されることを意味する。

References

Allen, R. G. D. (1966): *Mathematical Economics*. Macmillan & Co.

Allen, R. G. D. (1967): *Macroeconomic Theory: A Mathematical Treatment*. Macmillan & Co.

Asada, T. and Yoshida, H. (2000): “Stability, instability and complex behavior in macrodynamic models with policy lag,” *Discrete Dynamics in Nature and Society 5* (4),

281-295.

Ballestra, L. V., Guerrini, L., and Pacelli, G. (2013): "Stability switches and Hopf bifurcation in a Kaleckian model of business cycle," *Abstract and Applied Analysis 2013*.

Bellman, R. E. and Cooke, K. L. (1963): *Differential-difference Equations*. Rand Corporation.

Ercolani, J. S. (2014): "Cyclical activity and gestation lags in investment," *The Manchester School 82* (5), 620-630.

Friedman, M. (1948): "A monetary and fiscal framework for economic stability," *The American Economic Review 38* (3), 245-264.

Frisch, R. and Holme, H. (1935): "The characteristic solutions of a mixed difference and differential equation occuring in economic dynamics," *Econometrica 3* (2), 225-239.

Hayes, N. (1950): "Roots of the transcendental equation associated with a certain difference-differential equation," *Journal of the London Mathematical Society 1* (3), 226-232.

Hurwitz, A. (1895): "Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt," *Mathematische Annalen 46* (2), 273-284.

James, R. and Belz, M. (1938): "The significance of the characteristic solutions of mixed difference and differential equations," *Econometrica 6*(4), 326-343.

Kageyama, S. (2015): "On the Application of the Laplace Transform in the Study of Phillips-Type Stabilization Policy," *Theoretical Economics Letters 5*(06), 691-696.

Kalecki, M. (1935): "A macrodynamic theory of business cycles," *Econometrica, Journal of the Econometric Society 3*(3), 327-344.

Krawiec, A. and Szydlowski, M. (1999): "The Kaldor-Kalecki business cycle model," *Annals of Operations Research 89*, 89-100.

Lange, O. (1970): *Introduction to Economic Cybernetics*. Pergamon Press.

Lucas, R. E. (1976): "Econometric policy evaluation: A critique," *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy 1*, 19-46.

Phillips, A. W. (1954): "Stabilisation policy in a closed economy," *The Economic Journal 64*(254), 290-323.

Szydłowski, M. (2002): "Time-to-build in dynamics of economic models I: Kalecki's model," *Chaos, Solitons & Fractals 14*(5), 697-703.

Szydłowski, M. and Krawiec, A. (2005): "The stability problem in the Kaldor-Kalecki business cycle model," *Chaos, Solitons & Fractals 25*(2), 299-305.

An Introduction of a Phillips-type Stabilization Policy into Kalecki's Business Cycle Model

Satoru Kageyama

Abstract

This paper presents an extended Kalecki's business model and introduces a stabilization policy into the model. Lange has pointed out the dynamic instability of national income in capitalism economy in conjunction with his study of economic cybernetics. His analysis indicates a dilemma of whether to choose growth and instability, or stability and stagnation. Nevertheless, Lange and Kalecki himself did not considered a feasibility of stabilization through government spending. We examine the effects of a Phillips-type stabilization policy on the stationary level of national income and rethink Lange's dilemma in our setting. Moreover, we discuss the effects of the sensitivity of investment decision to total savings and the length of policy lag on stability of economy.

JEL Classification: C62, E11, E61

Keywords: Phillips-type stabilization policy; Kalecki's business cycle model; Economic cybernetics