OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	選好飽和点の存在する経済におけるコア極限定理
Author(s)	村上, 裕美; 浦井, 憲
Citation	大阪大学経済学. 2016, 66(1), p. 24-32
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/57208
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

選好飽和点の存在する経済におけるコア極限定理*

村 上 裕 美†・浦 井 憲‡

要　約

選好が飽和的である経済を含めた一般的な均衡概念として，Aumann and Drèze（1986）等によるスラック条件付き競争均衡（dividend equilibrium）がある。この均衡概念に対し，Konovalov（2005）はrejective coreという概念を用いたコア一致定理を示した。ただしKonovalovが示しているのは，atomless large economyにおける一致定理であり，Debreu-Scarf型のコア極限定理としてスラック条件付き競争均衡への収束定理を示すという問題は解決されておらず，また証明においても多くの困難を有している。近年著者らは，世代重複モデルにおける貨幣的均衡に対するDebreu-Scarf的な極限定理を示した。本稿では，そこで用いられた概念および手法を通じて，スラック条件付き競争均衡に対するrejective coreの極限定理を含む，一般的なコア極限定理を証明する。

JEL分類：C71，D50

キーワード：Dividened Equilibrium，コア極限定理，レプリカ経済

1　イントロダクション

選好が飽和的である経済を含めた一般的な均衡概念として，Aumann and Drèze（1986）等によるスラック条件付き競争均衡（dividend equilibrium）がある[1]。この概念を含めたコア同値定理が，Konovalov（2005）によってrejective coreという概念を通じて示されている。Konovalovが示しているのは，atomless large economyにおける一致定理である。一方，Debreu and Scarf（1963）タイプの極限定理としてdividend equilibriumが与えられるかという問題は解決されておらず，また証明においても多くの困難を有している[2]。近年著者らは，世代重複モデルにおける貨幣的均衡に対するDebreu-Scarf的な極限定理を示した。本稿では，そこで用いられた概念および手法を通じて，上述したdividend equilibriumに対するrejective coreの極限定理を含む，一般的なコア極限定理を証明する。

2　モデル

I を主体の名前の非空な有限集合とし，K を財の名前の非空な有限集合とする。$(\succsim_i, \omega_i)$ で各主体 $i \in I$ を表す。ここで $\succsim_i$ は，主体 i

* 本稿は，JSPS特別研究員奨励費15J01034およびJSPS科研費25380227の助成を受けた研究成果の一部である。

† 大阪大学大学院経済学研究科博士後期課程

‡ 大阪大学大学院経済学研究科教授

1 均衡の存在証明については，Mas-Colell（1992）等を見よ。

2 Aumann and Drèze（1986）は，Sharpley Valueの概念を用いて，Debreu-Scarf的極限定理によるdividend均衡の特徴づけをMain Theoremとして与えているが，本稿で与えるようなコアの意味をもたせた極限定理を得ることには成功していない。

の消費集合 R^K_+ 上の選好を表し，反射性，推移性，完備性，連続性および厳密な凸性を満たす[3]。ゆえに，選好は効用関数表現が可能である。加えて，選好には個人単位では飽和点が存在し得るものとし，飽和点以外では，局所非飽和性が成立しているものとする。個人の選好に飽和点が存在し得る場合でも，極限定理を示すために最も簡単な工夫として次の条件を課す。

（**選好の社会的非飽和性 SNS**：socially non-satiated preference configuration）
すべての財 $k \in K$ およびすべての資源配分 $x = (x_i)_{i\in I}$ について，ある消費者 i が存在して，財 k を増加させたとき，i の効用が厳密に増大する。

ここで ω_i は各主体 $i \in I$ の初期保有を表し，R^K_{++}の要素とする。経済 $\mathcal{E} = (\succsim_i, \omega_i)_{i\in I}$ に対して，資源配分 $(x_i \in R^K_+)_{i\in I}$ が

(1)
$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} \omega_i$$

であるとき，$(x_i)_{i\in I}$は**実現可能**であるという。

2.1　スラック条件付き競争均衡

経済 $\mathcal{E}$ のスラック条件付き競争均衡とは，与えられた価格 $p = (p_k)_{k\in K} \in R^K_+$ と，非負のdividends $d = (d_i)_{i\in I} \in R^I_+$ の下で，全主体の効用最大化と，資源配分の実現可能性によって定義される。

実現可能な資源配分 $(x_i)_{i\in I}$ について，任意の主体 $i \in I$ に対し，x^*_i が集合

(2)
$$\{x_i \in R^K \mid p^* \cdot x_i \leqq p^* \cdot \omega_i + d^*_i\}$$

における $\succsim_i$ の意味での最大要素，すなわち上記の集合内の点であって，その集合内の任意の x_i に対して，$x^*_i \succsim_i x_i$ を満たすとき，価格ベクトル $p^* \in R^K_+$，dividends d^*，および資源配分 $(x^*_i)_{i\in I}$ の組を，$\mathcal{E}$ の**スラック条件付き競争均衡**と呼ぶ。スラック条件付き競争均衡資源配分のすべてからなる集合を，$\mathcal{SW}alras(\mathcal{E})$ と記する。

この均衡概念は数量規制の条件を含めた競争均衡（coupons equilibrium）などを特殊なケースとして含むものであり，選好が飽和的な場合も含めた，有限経済の最も一般的な競争均衡概念として極めて重要なものである。Coupons equilibriumは，Drèze and Müller（1980）において，Grandmont（1977）の一時的均衡における数量調整の問題等との関連を持って紹介されたものである[4]。Aumann and Drèze（1986）では，そのcoupons equilibriumが，財概念を変更し，財空間の次元を一次元落とした世界でのスラック条件付き競争均衡に帰着することが指摘されている。

3　コア概念とレプリカ経済

通常のコア概念に加えて，本稿では，レプリカ経済におけるコア概念に特別な役割と意味付けを与える。まずは通常のコア概念，および本稿の議論のきっかけとなるKonovalov（2005）のrejective core の定義を与える。その後，本稿の議論で中心的役割を果たす，再契約レプリカ経済という概念を与える。

3.1　コア資源配分

経済 $\mathcal{E} = (\succsim_i, \omega_i)_{i\in I}$ における主体の**結託**を，$S \subset I$ で表す。このとき，以下の条件を満たすいかなる結託 S および他の資源配分 y

[3] $\sharp K$ 次元のベクトル空間の記述として，それが集合 K から R への関数の集合と見なせることから，本稿では $R^{\sharp K}$ ではなく，R^K という記法を用いる。

[4] スラック条件付き競争均衡資源配分において，個々人の予算制約の定義は，(2) のようなものであるが，coupons equilibriumにおいては，一つの固定価格 $\bar{p} \in R^K_+$と，coupons price vectorと呼ばれる$q \in R^K$ならびにcoupons endowment $c_i \in R$を与えられたものとして，$\{x_i \in R^K \mid \bar{p} \cdot x_i = \bar{p} \cdot \omega_i \text{ and } q \cdot x_i \leqq q \cdot \omega_i + c_i\}$となる。

も存在しないような，実現可能な資源配分 x を，**コア資源配分**という。

(a)　$\sum_{i\in S} y_i = \sum_{i\in S} \omega_i$

(b)　すべての $i \in S$ について $y_i \succsim x_i$ かつ，少なくとも一人の $i \in S$ について $y_i \succ x_i$

これらコア資源配分すべてからなる集合を，経済 $\mathcal{E}$ における**コア**と呼び，$\mathcal{C}ore(\mathcal{E})$ で表す。また，条件（a）(b) が結託 S に関して成立するとき，S は資源配分 x を**ブロック**すると言う。上のブロック条件（b）を「すべての $i \in S$ について，$y_i \succ x_i$ 」に強めた場合，そのような結託にブロックされずに残る資源配分全体からなる集合を**weak core**と呼び，$\mathcal{W}core(\mathcal{E})$ で表す。

3.2　Rejective Core資源配分

Konovalov（2005）は，large economyにおいて，rejective core と呼ばれるコア資源配分と競争均衡資源配分との同値定理を示した。経済 $\mathcal{E} = (\succsim_i, \omega_i)_{i\in I}$ において，以下の条件を満たすいかなる結託 S とそのパーティション (S_1, S_2)，他の実現可能な資源配分 y も存在しないような，実現可能な資源配分 x を，**rejective core資源配分**と言う[5]。

(c)　$\sum_{i\in S} y_i = \sum_{i\in S_1} \omega_i + \sum_{i\in S_2} x_i$

(d)　すべての $i \in S$ について $y_i \succsim x_i$ かつ，少なくとも一人の $i \in S$ について $y_i \succ x_i$

(e)　すべての $i \in I \setminus S$ について $y_i \succsim \omega_i$

$S_2 = \emptyset$ で，(e) 条件を除いた形での改善可能性が存在しないような資源配分が，通常のコア資源配分である。$S = S_1$ の場合には，$I \setminus S$ に ω_i を与え，結託 S に属する主体については，そのブロックする資源配分を与えると，全体として実現可能な資源配分にすることが可能なので，通常のコアの定義の意味でブロックされる場合には，rejective coreの意味でもブロックされる。ゆえに，rejective core allocationであれば，コア資源配分である。

3.3　レプリカ経済と再契約レプリカ経済

著者らはUrai and Murakami（2015）において，再契約レプリカ経済という概念を用い，世代重複モデルにおける貨幣的均衡のコア極限定理を示した。そこで用いられた再契約レプリカ経済の概念を再述し，本稿の議論に必要な設定を与える。

経済 $\mathcal{E} = (\succsim_i, \omega_i)_{i\in I}$ に対して，その I に属する各主体を n 人ずつに増やした経済を，$\mathcal{E}^n$ と書き，$\mathcal{E}$ の n **倍レプリカ経済**と呼ぶ。

経済 $\mathcal{E} = (\succsim_i, \omega_i)_{i\in I}$ における実現可能な資源配分 $x = (x_i \in R^K_+)_{i\in I}$ について，**初期保有 ω を x で置き換えた経済**を，$\mathcal{E}(x)$で表す。すなわち，$\mathcal{E}(x)$とは，$\mathcal{E}$ における初期保有のみが x に変更され，その他はすべて元の経済 $\mathcal{E}$ の設定と変わらないような経済を表す。したがって，$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\omega)$ である。本稿では次のようなレプリカ経済を考える。

(3)
$$\mathcal{E}^m(\omega) \oplus \mathcal{E}^n(x)$$

これは，任意の非負の整数 m と n について，経済 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\omega)$ を m 倍した，m 倍レプリカ経済 $\mathcal{E}^m(\omega)$ の主体すべてと，経済 $\mathcal{E}(x)$ を n 倍した，n 倍レプリカ経済 $\mathcal{E}^n(x)$ の主体すべてから構成される経済である。このような経済を，元の経済 $\mathcal{E}$ の $(m+n)$ 倍**再契約レプリカ経済**と呼ぶ。

経済 $\mathcal{E}(x)$ への資源配分 y に対して，経済 $\mathcal{E}^n(x)$ に対する y の n 倍レプリカ資源配分 y^n とは，すべてのレプリカ経済の主体に対し

[5] Konovalov（2005）は，極限における同値定理を取り扱っているので，選好は必ずしもorderedではなく，またブロック条件（d）も，すべてのrejective coreの成員について厳密に好ましい（weak core）という形となっているが，本稿では，選好はorderedで，またブロック条件も通常のコア概念に合わせたもので証明を行う。

て，元の経済 $\mathcal{E}(x)$ における，y の下での資源配分をそのまま与えたものを表す。同様に，経済 $\mathcal{E}(\omega)$ および $\mathcal{E}(x)$ 共通の資源配分 y に対して，再契約レプリカ経済 $\mathcal{E}^m(\omega)\oplus\mathcal{E}^n(x)$ に対する y の $m+n$ 倍レプリカ資源配分 y^{m+n} とは，すべての再契約レプリカ経済の主体に対して，元の経済 $\mathcal{E}(\omega)$ あるいは $\mathcal{E}(x)$ における，y の下での資源配分をそのまま与えたものを表す。

4　再契約レプリカコア極限定理

本稿の主定理において，再契約レプリカ経済 $\mathcal{E}^m(\omega)\oplus\mathcal{E}^n(x)$ のコア資源配分が，スラック条件付き競争均衡に収束することを示す。それに先立って，その主定理が，レプリカ経済における rejective core の収束定理を含んでいることを確認しておく。

補題： x を経済 $\mathcal{E}$ の実現可能な資源配分とし，m を正の整数，n を非負の整数とする。レプリカ資源配分 x^{m+n} が，レプリカ経済 $\mathcal{E}^{m+n}$ の rejective core 資源配分であるとき，x^{m+n} は，再契約レプリカ経済 $\mathcal{E}^m(\omega)\oplus\mathcal{E}^n(x)$ のコア資源配分である。当該主張は，weak core と weak rejective core の場合にも成立する。

Proof：ある実現可能な資源配分 x' について，もし $\omega_i\succ_i x'_i$ となる主体が一人でも存在するなら，その主体のみからなる結託によって，x' は通常のコアの意味でブロックされるので，そのような x' の $(m+n)$ 倍レプリカ資源配分は再契約レプリカ経済 $\mathcal{E}^m(\omega)\oplus\mathcal{E}^n(x)$ のコアには入り得ないし，$\mathcal{E}^{m+n}$ の rejective core 資源配分にもなり得ない。したがって，補題の対象とする資源配分 x は，すべての $i\in I$ について $x_i\gtrsim_i\omega_i$ である，すなわち個人合理性を満たしているとしてよい。

$m\geqq 1$，$n\geqq 0$ を任意として，$\mathcal{E}$ の個人合理性を満たす実現可能な資源配分 x の $(m+n)$ 倍レプリカ資源配分 x^{m+n} が，$\mathcal{E}^m(\omega)\oplus\mathcal{E}^n(x)$ における結託 $S=S_1\cup S_2$ によってブロックできたとする。結託 S は，元の経済 $\mathcal{E}$ の m 倍レプリカ経済 $\mathcal{E}^m(\omega)$ における結託 S_1 に属する主体と，x を初期保有とする n 倍レプリカ経済 $\mathcal{E}^n(x)$ における結託 S_2 に属する主体で構成される。再契約レプリカ経済の全主体を表す集合を N とし，$N\setminus S$ に属する主体については，初期保有にあたる ω_i あるいは x_i をそのままに与え，結託 S に属する主体については，そのブロックする資源配分を与えた経済 $\mathcal{E}^m(\omega)\oplus\mathcal{E}^n(x)$ の資源配分を y と呼ぶ。

まず，結託 $S=S_1\cup S_2$ については，この S，S_1，S_2 を rejective core の定義の結託 S とそのパーティション (S_1,S_2) としてそのまま読み替えれば，条件（c）（d）が成立していることになる。

続いて，$N\setminus S$ に属する主体のうち，$\mathcal{E}^m(\omega)$ に属する主体については，$y_i=\omega_i$ なので，$y_i\gtrsim_i\omega_i$ であることは自明である。さらに $N\setminus S$ に属する主体のうち，$\mathcal{E}^n(x)$ に属するすべての主体についても，$y_i=x_i$ であり，x_i が個人合理性を満たしていることから，$y_i\gtrsim_i\omega_i$ である。したがって，rejective core の定義における三番目の条件（e）も成立していることになる。

以上より，資源配分 y が，レプリカ経済 $\mathcal{E}^{m+n}$ におけるレプリカ資源配分 x^{m+n} を rejective core の意味でブロックすることは明らかである。ここまでの証明は，weak core と weak rejective core の場合においても，全く同様に成り立っている。■

補題の成立により，レプリカ資源配分が rejective core 資源配分であるなら，それは，再契約レプリカ経済のコア資源配分である。した

がって，次の再契約レプリカ経済のコア極限定理が示されれば，rejective coreのレプリカコア極限定理が示されることになる。

Theorem 1：経済 $\mathcal{E}$ の実現可能な資源配分 x は，任意の整数 $m \geqq 1$, $n \geqq 0$ に対して $(m+n)$ 倍レプリカ資源配分が $\mathcal{C}ore(\mathcal{E}^m(\omega) \oplus \mathcal{E}^n(x))$ に入るとき，そのときに限って $\mathcal{SW}alras(\mathcal{E})$ に入る。この主張は weak core の場合にも成立する[6]。

Proof：**（必要性）** 経済 $\mathcal{E} = (\succsim_i, \omega_i)_{i \in I}$ の実現可能な資源配分 $\bar{x} = (\bar{x}_i)_{i \in I}$ を，任意の整数 $m \geqq 1$， $n \geqq 0$ について， $\bar{x}$ の $(m+n)$ 倍レプリカ資源配分が $\mathcal{C}ore(\mathcal{E}^m(\omega) \oplus \mathcal{E}^n(x))$ に属するような資源配分であるとする。すべての $i \in I$ について，Γ_i を $\Gamma_i = \{\beta_i z_i^1 + (1-\beta_i) z_i^2 \mid z_i^1 + \omega_i \succ_i \bar{x}_i,\ z_i^2 + \bar{x}_i \succ_i \bar{x}_i,\ 0 \leqq \beta_i \leqq 1\} \subset R^K$ と定義する。ここで，Γ_i の有限和 $\bigcup_{i \in I} \Gamma_i \subset R^K$ の凸包 Γ を考える。任意の i について Γ_i は凸集合であり，またSNS条件から，少なくとも一人の主体について Γ_i は非空であるので，Γ も非空凸集合であり，その要素を z で表す。ここで，$\Gamma_i \neq \emptyset$ であるような $i \in I$ の集合を，I' とすると，$\bigcup_{i \in I'} \Gamma_i = \Gamma$ であり，Γ は，次のようなベクトル $z = \sum_{i \in I'} \alpha_i (\beta_i z_i^1 + (1-\beta_i) z_i^2)$ の全体からなる。ただし，ここで，$\alpha_i \geqq 0$，$\sum_{i \in I'} \alpha_i = 1$，および $z_i^1 + \omega_i \succ_i \bar{x}_i$ かつ $z_i^2 + \bar{x}_i \succ_i \bar{x}_i$ がすべての $i \in I'$ で成立しているとする。

Debreu and Scarf（1963:Theorem 3）の証明の手順と同様にして，$0 \notin \Gamma$ であることを示す。仮に $0 \in \Gamma$ であるとする。すると，任意の $i \in I'$ について $\alpha_i \geqq 0$，$\sum_{i \in I'} \alpha_i = 1$ および $z_i^1 + \omega_i \succ_i \bar{x}_i$ かつ $z_i^2 + \bar{x}_i \succ_i \bar{x}_i$ を満たし，$\sum_{i \in I'} \alpha_i (\beta_i z_i^1 + (1-\beta_i) z_i^2) = 0$ とすることができる。十分大きな κ について，$a_i^{1\kappa}$ と $a_i^{2\kappa}$ をそれぞれ $a_i^{1\kappa} > \kappa \alpha_i \beta_i$ と $a_i^{2\kappa} > \kappa \alpha_i (1-\beta_i)$ となる最小の整数であるとする。また，$\alpha_i > 0$ であるすべての $i \in I'$ からなる集合を J とする。各 $i \in J$ について，$z_i^{1\kappa}$ を $z_i^{1\kappa} = \frac{\kappa \alpha_i \beta_i}{a_i^{1\kappa}} z_i^1$ ，$z_i^{2\kappa}$ を $z_i^{2\kappa} = \frac{\kappa \alpha_i (1-\beta_i)}{a_i^{2\kappa}} z_i^2$ と定義する。すると，$z_i^{1\kappa} + \omega_i$ は区間 $[\omega_i,\ z_i^1 + \omega_i]$ の要素であり，$z_i^{2\kappa} + \bar{x}_i$ は区間 $[\bar{x}_i,\ z_i^2 + \bar{x}_i]$ の要素である。

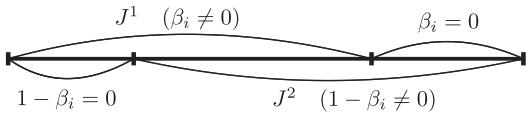

Figure 1：$\alpha_i > 0$ かつ $0 \leqq \beta_i \leqq 1$ の範囲における $J = J^1 \cup J^2$

ここで，$\beta_i \neq 0$ であるすべての $i \in J$ からなる集合を J^1 とし，$1-\beta_i \neq 0$ であるすべての $i \in J$ からなる集合を J^2 とする。したがって，$J^1 \cup J^2 = J$ である（Figure 1を見よ）。κ を無限に大きくしていくと，各 $i \in J^1$ について，$z_i^{1\kappa} + \omega_i$ は $z_i^1 + \omega_i$ に収束し，各 $i \in J^2$ について，$z_i^{2\kappa} + \bar{x}_i$ は $z_i^2 + \bar{x}_i$ に収束する。選好の連続性より，κ を十分大きく取ると，すべての $i \in J_1$ について $z_i^{1\kappa} + \omega_i \succ_i \bar{x}_i$,およびすべての $i \in J_2$ について $z_i^{2\kappa} + \bar{x}_i \succ_i \bar{x}_i$ とできる。そのような κ を一つ固定すると，以下の等式を得る。

$$
\begin{aligned}
(4)\quad 0 &= \kappa \sum_{i \in J} \alpha_i (\beta_i z_i^1 + (1-\beta_i) z_i^2) = \sum_{i \in J} \kappa \alpha_i (\beta_i z_i^1 + (1-\beta_i) z_i^2) \\
&= \sum_{i \in J^1 \setminus J^2} \kappa \alpha_i \beta_i z_i^1 + \sum_{i \in J^1 \cap J^2} \kappa \alpha_i (\beta_i z_i^1 + (1-\beta_i) z_i^2) + \sum_{i \in J^2 \setminus J^1} \kappa \alpha_i (1-\beta_i) z_i^2 \\
&= \sum_{i \in J^1 \setminus J^2} a_i^{1\kappa} z_i^{1\kappa} + \sum_{i \in J^1 \cap J^2} (a_i^{1\kappa} z_i^{1\kappa} + a_i^{2\kappa} z_i^{2\kappa}) + \sum_{i \in J^2 \setminus J^1} a_i^{2\kappa} z_i^{2\kappa}
\end{aligned}
$$

いま，$m = \max_{i \in J} a_i^{1\kappa}$ および $n = \max_{i \in J} a_i^{2\kappa}$ とした，再契約レプリカ経済 $\mathcal{E}^m(\omega) \oplus \mathcal{E}^n(x)$，

[6] 十分性，すなわちスラック条件付き競争均衡資源配分ならば，コアに入るということについては，通常のコア場合，選好の厳密な凸性（無差別曲線に厚みがないこと）に強く依存する。ただし，weak coreの場合は，厳密な凸性がなくとも十分性を示すことができる。

ならびに経済$\mathcal{E}$の$\left((\max_{i\in J}\ a_i^{1\kappa})+(\max_{i\in J}\ a_i^{2\kappa})\right)$倍レプリカ経済を考える。$J^1$に属する主体それぞれを$a_i^{1\kappa}$倍レプリカし，その各主体に$z_i^{1\kappa}+\omega_i$を割り当て，$J^2$に属する主体それぞれを$a_i^{2\kappa}$倍レプリカし，その各主体に$z_i^{2\kappa}+\bar{x}_i$を割り当てる結託を組むとする。等式（4）と，すべての$i\in J^1$について$z_i^{1\kappa}+\omega_i\succ_i\bar{x}_i$であること，およびすべての$i\in J^2$について$z_i^{2\kappa}+\bar{x}_i\succ_i\bar{x}_i$であることから，この結託が資源配分$(\bar{x}_i)_{i\in I}$をブロックすることは明らかである[7]。しかし，このことは$\mathcal{C}\mathit{ore}(\mathcal{E}^m(\omega)\oplus\mathcal{E}^n(x))$の定義に矛盾する。したがって$0\notin\Gamma$である。

価格の集合πを，$\pi=\{p\in R^K\cap\Delta\mid$すべての$z\in\Gamma$について$p\cdot z\geqq 0\}$と定義する。ここで，$\Delta$は$R^K$の$\#K-1$次元基本単体，すなわち$\Delta=\{p\mid p=(p_1,p_2,\cdots,p_{\#K})\in R^K_+$かつ$\sum_{k\in K}p_k=1\}$である。$\pi$は$R^K_+$の閉部分集合であり，分離超平面定理より$p\in R^K_+\setminus\{0\}$なる$p\in\pi$が存在するので非空である[8]。

いま，すべての$i\in I$について，$p\in\pi$であり，$\omega_i\in R^K_{++}$であることから，$p\cdot\omega_i>0$である。このとき，ある財kの価格が0であるとすると矛盾が生じることを以下に示す。SNS条件より，$\bar{x}$の下で財kを需要する主体が存在するので，その主体をiとして固定する。まず$p\cdot\bar{x}_i=0$であるとして，$p\cdot\omega_i>0$であることから，δを$p\cdot\omega_i>p_k\delta$を満たす十分小さな$\delta\in R_{++}$とする。財kの座標だけを$+\delta>0$とする$(0,\cdots,0,+\delta,0,\cdots,0)$を$\bar{x}_i$に加えた，$\bar{x}_i+(0,\cdots,0,+\delta,0,\cdots,0)$は，$\bar{x}_i$より厳密に好ましくなっているが，$p\cdot(\bar{x}_i+(0,\cdots,0,+\delta,0,\cdots,0)-\omega_i)<0$となるので，これは$\Gamma$の定義に矛盾する。次に$p\cdot\bar{x}_i>0$のとき，$\bar{x}_i$において，財$k$については仮定より$p_k=0$であり，さらに$p$の下で正に評価される財$k'\neq k$が存在して，$\bar{x}_{ik'}>0$である。すると，第$k$座標を$+\epsilon>0$，第$k'$座標を$-\eta<0$としたベクトル$(0,\cdots,0,+\epsilon,0,\cdots,0,-\eta,0,\cdots,0)$を$\bar{x}_i$に加えた，$\bar{x}_i+(0,\cdots,0,+\epsilon,0,\cdots,0,-\eta,0,\cdots,0)$は，$\bar{x}_i$より厳密に好ましくなっているが[9]，$p\cdot(\bar{x}_i+(0,\cdots,0,+\epsilon,0,\cdots,0,-\eta,0,\cdots,0)-\bar{x}_i)=-p_{k'}\delta<0$となるので，やはり$\Gamma$の定義に矛盾する。したがって，任意の$p\in\pi$について，$p\in R^K_{++}$が成立する。以下そのような$p$を任意に一つ選び，$p^*$と書く。

I'に属するような主体において，$x_i\succ_i\bar{x}_i$であることは，$x_i-\omega_i$および$x_i-\bar{x}_i$がΓ_iの要素であることを意味するので，$p^*\cdot x_i\geqq p^*\cdot\omega_i$かつ$p^*\cdot x_i\geqq p^*\cdot\bar{x}_i$である。さらに，$p^*$が非負であるので，$I'$に属する主体において，$\bar{x}_i$は飽和点ではないことと，この点における局所非飽和性を通じて，x_iを$\bar{x}_i$に十分近く取れ，$p^*\cdot\bar{x}_i\geqq p^*\cdot\omega_i$とできる。主体$i\in I'$について，$d_i^*\geqq 0$を$d_i^*=p^*\cdot\bar{x}_i-p^*\cdot\omega_i$と定義する。すると，$p^*\cdot\bar{x}_i=p^*\cdot\omega_i+d_i^*$を得る。加えて，すべての$i$について$\omega_i\in R^K_+\setminus\{0\}$であるから，$p^*$が厳密に正であることとあわせて，$p^*\cdot\omega_i>0$である。$x_i\succ_i\bar{x}_i$であることは，

[7] 証明中，コアの定義が意味を持つのはこの箇所だけであり，上記のブロック概念は，結託，すなわち各$i\in J^1$について，$a_i^{1\kappa}$人ずつ取り，さらに各$i\in J^2$について$a_i^{2\kappa}$人ずつ揃えた集合の参加者全員の効用が厳密に増大しているので，weak coreの場合でも証明は成立している。

[8] Γの中で，例えばすべてのiについて$\beta_i=0$であるような任意の点zに対しては，SNS条件より，すべての座標の非負方向に向けて，いずれかの主体にとって$\bar{x}_i+z_i$より好ましい点としての$\bar{x}_i+z_i+e^k$が存在し，$z+e^k$というΓの要素が存在する。ここでe^kとは，第k座標を1とするR^Kの単位ベクトル$e^k=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$である。したがって，$\Gamma$の凸性を考慮すると，$\Gamma$は内点を持つ。分離定理としては，例えば（Schaefer 1971；p. 46, Theorem 3.1）を見よ。

[9] SNS条件より，任意の$+\epsilon>0$について$(\bar{x}_i+(0,...,0,+\epsilon,0,...,0))\succ_i\bar{x}_i$であるので，選好の連続性から，十分小さな$\eta>0$についても$\bar{x}_i+(0,\cdots,0,+\epsilon,0,\cdots,0,-\eta,0,\cdots,0)\succ_i\bar{x}_i$である。

$p^* \cdot x_i \geqq p^* \cdot \bar{x}_i$ を意味するので，選好の連続性と $p^* \cdot \omega_i + d_i^* > 0$ より，任意の $i \in I'$ について，価格 p^* およびdividen d_i^* の下で，$\bar{x}_i$ は個人の最大化点である。

$I \setminus I'$ に属する主体については，$\bar{x}_i$ が効用の飽和点になっていることに注意して，以下のように d_i^* を定義する。I'' を $I \setminus I'$ に属する主体のうち，$p^* \cdot \bar{x}_i - p^* \cdot \omega_i > 0$ であるすべての主体からなる集合とし，各 $i \in I''$ については，$d_i^* = p^* \cdot \bar{x}_i - p^* \cdot \omega_i$ とする。残りのすべての主体，すなわち $p^* \cdot \bar{x}_i - p^* \cdot \omega_i \leqq 0$ となる $i \in I \setminus (I' \cup I'')$ については，$d_i^* = 0$ とする。このように定めると，$\bar{x}_i$ は価格 p^* およびdividen d_i^* の下での予算制約を満たし，飽和点であることから効用最大化点となることが確かめられる。以上のことから，資源配分 $\bar{x}$ は $\mathcal{SW}\!\mathit{alras}(\mathcal{E})$ の要素である。

（十分性） 資源配分 $x^* = (x_i^*)_{i \in I}$ を，価格 p^* と非負のdividens d^* の下での $\mathcal{SW}\!\mathit{alras}(\mathcal{E})$ の要素とする。ここで，ある $m \geqq 1$，$n \geqq 0$ について，再契約レプリカ経済 $\mathcal{E}^m(\omega) \oplus \mathcal{E}^n(x^*)$ における x^* の $(m+n)$ 倍レプリカ資源配分をブロックする結託 $S = S_1 \cup S_2$ が存在するとして矛盾を導く。結託 S は，元の経済 $\mathcal{E}$ の m 倍レプリカ経済 $\mathcal{E}^m(\omega)$ における結託 S_1 に属する主体と，x^* を初期保有とする n 倍レプリカ経済 $\mathcal{E}^n(x^*)$ における結託 S_2 に属する主体で構成される。定義によって，S がスラック条件付き競争均衡資源配分 x^* をブロックすることから，$\sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in S_1} \omega_i + \sum_{i \in S_2} x^*{}_i$ であり，すべての $i \in S$ について $x_i \succsim_i x_i^*$ かつ，ある $j \in S$ について $x_j \succ_j x_j^*$ となる $(x_i)_{i \in S}$ を考えることができる。ここで，選好のSNS性より，均衡価格 p^* は厳密に正であることに注意すると[10]，均衡条件から，$x_j \succ_j x_j^*$ ならば $p^* \cdot x_j > p^* \cdot x_j^*$ である。また，$x_i \succsim_i x_i^*$ である主体 $i \in S$ については，もしも $p^* \cdot x_i < p^* \cdot x_i^*$ であるならば，当然 $x_i^* \neq x_i$ なので，選好の厳密な凸性により x_i と x_i^* を結ぶ線分上の両端を除く点はすべて予算制約を満たし，x_i^* より厳密に好ましいことになる。これは x^* がスラック条件付き競争均衡資源配分であることに矛盾する。したがって，すべての $i \in S$ について $p^* \cdot x_i \geqq p^* \cdot x_i^*$ が成立し，少なくとも $j \in S$ については，$p^* \cdot x_j > p^* \cdot x_j^*$ である。これは $p^* \cdot (\sum_{i \in S_1} x_i + \sum_{i \in S_2} x_i) > p^* \cdot \sum_{i \in S_1} x_i^* + p^* \cdot \sum_{i \in S_2} x_i^* \geqq p^* \cdot (\sum_{i \in S_1} x_i^* + \sum_{i \in S_2} \omega_i)$ となることを意味し，$\sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in S_1} x_i^* + \sum_{i \in S_2} \omega_i$ であることに矛盾する。

（Weak Coreの場合） Weak coreの場合，必要性の証明については注（7）で述べた通り，上記のものと全く同じである。十分性の証明については，上の j に対して成立している条件が，結託 S の全員について成り立つので，厳密な凸性を用いなくても，同様の矛盾を導くことができる。 ■

[10] 必要性証明の第6段落を参照せよ。

REFERENCES

Aumann, R. J. and Drèze, J. H. (1986): “Values of Markets with Satiation or Fixed Prices,” *Econometrica 53*, 1271-1318.

Debreu, G. and Scarf, H. (1963): “A limit theorem on the core of an economy,” *International Economic Review 4*, 235-246. Reprinted in G. Debreu, *Mathematical Economics*, pp. 151-162. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

Drèze, J. H. and Müller, H. (1980): “Optimality Properties of Rationing Shemes,” *Journal of Economic Theory 23*, 131-149.

Grandmont, J.-M. (1977): “Temporary general equilibrium theory,” *Econometrica 45*(3), 535-572.

Konovalov, A. (2005): “The Core of an Economy

with Satiation," *Economic Theory 25*, 711-719.

Mas-Colell, A. (1992): "Equilibrium theory with possibly satiated preferences," in *Equilibrium and dynamics: Essays in honor of David Gale*., (Majumdar, M. ed), Chapter 9, pp. 201-213, Macmillan, London.

Schaefer, H. H. (1971): *Topological Vector Spaces*. Springer-Verlag, New York/Berlin.

Urai, K. and Murakami, H. (2015): "Replica Core Equivalence Theorem: An Extension of the Debreu-Scarf Limit Theorem to Double Infinity Monetary Economies," Discussion Paper No. 14-35-Rev.2, Faculty of Economics and Osaka School of International Public Policy, Osaka University.

A Replica Core Equivalence Theorem for Economy with Satiation

Hiromi Murakami and Ken Urai

Abstract

Dividend equilibrium defined by Aumann and Drèze (1986) is one of the most general competitive equilibrium concept for the market with satiation. Konovalov (2005) shows that a core equivalence theorem to the dividend equilibrium by using the concept of rejective core. However, Konovalov's argument is based on the setting of the atomless large economy and the core limit theorem for dividend equilibrium remains unproved. In the previous paper, Urai and Murakami (2015), the authors provided a generalization of Debreu-Scarf core limit theorem for monetary overlapping generations economies under an extended concept of the replica core allocation. In this paper, we show that the concept also provide a generalization of Debreu-Scarf core limit theorem for economies with satiation.

JEL Classification: C71, D50
Keywords: Dividend Equilibrium, Core Equivalence, Replica Economy