The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	推論規則と二項論理をめぐって
Author(s)	澤邊, 興平
Citation	メタフュシカ. 2017, 48, p. 29-46
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/67693
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

推論規則と二項論理をめぐって

澤邊興平

序

本論は、論理学における、規則と二項論理という互いに近しい所のある二つの概念の重要性を、基本的定義と例を与え、そして、古典命題論理のヒルベルト流諸公理化に Post 完全と不完全の両方があるという状況が二項論理の視点から整理できる様を紹介する事で、示す。さらに、この 2 概念からの視点が、論理上に構築する諸理論の研究に資する事を、Dunn による（二項論理的に提示された）量子論理上の算術についての結果が一項論理的には成立しないだろうという彼の（根拠が明示されていない）予想について、彼の証明を一項論理的に翻訳する過程で生じる問題点を指摘して其れでもって予想の 1 つの裏付けを与える事で、立証する。Dunn の予想の成否についてもコメントする。

1 節　規則（推論規則・導出規則　rule of inference, rule of derivation）

まず形式的定義を少し与える[1]：

――規則（a rule）とは、規則インスタンス（a rule instance）達を要素とする集合である、そして

――規則インスタンスとは、或る種の順序対である、そして

――その順序対の 1 座目は、式の有限集合であり、

――その順序対の残りの部分すなわち 2 座目は、或る式である。

具体例を 1 つ挙げる。A と B を何らかの式とする時、有限集合 ｛A ⊃ B，A｝ を 1 座目、式 B を 2 座目に持つ順序対＜｛A ⊃ B，A｝，B ＞は、分離則（rule of detachment）別名 Modus Ponens（略して MP）と呼ばれる規則の要素であるような規則インスタンスとなる。しかし一般には、MP は、任意の式を表す記号 A と B を用いて（かつ 1 座目と 2 座目の間をスラッシュ「／」で区切って）、「A ⊃ B，A／B」という図式で表される。（A や B は何らかの式そのものではなく、

[1] Wojcicki1988 参照。

それら式たちの上を渡るメタ記号である点にも注意。）

公理系の具体例を挙げる前に、本論全体においての記号の使い方について触れておこう。まず大文字のローマンアルファベットは一般に式を表す為に用いる。これらは、その用いられる文脈と相対的に一定の任意性を持たされており、式そのものというよりは、式を表すメタ記号と見るべきなのは、前段落末で指摘したとおり。一方、connective[2] らと組み合わせる事で式を造り上げてゆく最も基本的な材料すなわち原子とみなせるものらを命題変項（propositional variables, sentential parameters）と呼び、p, q, …または、p_0, p_1, p_2, …などと、アルファベット p 周辺の小文字または自然数の下添え字付きで表記する。本論では、簡便の為、命題変項を以上のように固定した表記で扱うことから p_0, p_1 などを命題変項そのものと（同一視）して論じることがある。

参考の為、古典命題論理肯定断片（否定記号を含まない部分）に対する公理化のうち Lukasiewicz によるものの 1 つを以下に示す：

公理図式　1）$A \supset (B \supset A)$

2）$[A \supset (B \supset C)] \supset [(A \supset B) \supset (A \supset C)]$

規則 MP　　$A \supset B$　　A ／ B.

２節　二項論理の紹介

二項論理（binary logic）とは、一項論理（monadic logic）との対比で捉えられる概念なので、まず一項論理が何であるかから見てゆく。

一項論理とは「x は定理である」ないし「x はトートロジー（論理的真理）である」という、メタ言語内の一項述語によって述定されるものである。ゆえに、定理である或いはトートロジーであるという性質を持つ式たちについて、選別･生成･分析することに主眼があるようなアプローチが一項論理（学）であるといえる。例えば前節で示した Lukasiewicz による古典命題論理肯定断片の公理化は、公理（図式）を与え其れらを出発点たる定理とし、そこに導出規則を適用することで其の他の定理を余さず全て生成してゆくことで「公理化する」という事から、まさしく一項論理の典型といえよう。

一方、二項論理とは「x から y が（論理的に）推論される」ないし「x から y が論理的に出てくる（導き出される）」といった、メタ言語内の二項述語で表されるような二項関係に最大の焦点を当てるものである。ゆえに、古典命題論理のヒルベルト流提示法において、定理である（空なる前提から証明される）ことを示すために用いられるメタ記号「$\vdash$」（ターンスタイル）を用いれば、「x は定理である」は「$\vdash x$」と表記でき、これが一項論理に関して典型的な記号法となるのに対し、「x から y が導かれる」は、「$x \vdash y$」と書くことができ、これは二項論理において最も基本的な形式となる。よって一項論理において「$\vdash x$」における「$\vdash$」はメタ記号にすぎないが、二項論理において「$x \vdash y$」と書くときの「$\vdash$」は、まさに研究対象そのものつまり（二項論理にとっての）対象言語内の記号となる。

---

[2] 「接合子」などと訳される。

以上、一項論理との対比で、二項論理とは何か、について粗略に紹介した。本論では、論述の都合、上で説明した「二項論理」という概念について 1 つ修正（変更）して、以降の議論に繋げる事にする。変更とは、上で「x が y から導かれる」というメタ言明において、未知数 x と y は、両方とも 1 個ずつの式で埋められるものであるよう語ってきた点である。元々の二項論理については、その理解で正しいが、本論では、このメタ言明の 1 座目の未知数 x については、式から成る或る集合（典型的には、有限集合）で埋められる、と一般化しておく。他方、y に関しては、従来どおり、1 つの式で埋められる、とする。

さらに大文字ギリシャ文字で式の集合を表せば、今後、二項論理を論じる際には、「A ⊢ B」といった表記以外に、「Γ ⊢ A」といったものが重要になり、又、空集合（通常通り ϕ で表記する）も集合であることから、「ϕ ⊢ A」も二項論理の枠内で扱う事になる。ここで「⊢」は対象言語の一部である。ゆえに「ϕ ⊢ A」を一項論理における「⊢ A」（こちらにおいては「⊢」はメタ言語）と同一視するかどうか否か、は別個に論じられるべき事となる。

以上みてきたように、二項論理というアプローチは、一項論理ではメタ記号にすぎないターンスタイルを、対象言語の中核に位置づける、という特徴がある。両者の間のこの違いについて、（十全に整った）一項論理においては、二項論理にて中核的なターンスタイルという論理的推論関係が、対象言語内の適当な含意式が定理である事[3] でもって代替されうる、とも形容できる。この形容の一端として、いわゆる「演繹定理」の難しい方向「x ⊢ y ならば ⊢ x ⊃ y」を、前提部の「⊢」を二項論理のもの、結論部の「⊢」を一項論理のものとして読み下すこともできるだろう。[4]

さて勿論、対象言語内やその周辺の環境が「十全に整って」いない場合、推論関係を対象言語内の何らかの含意式の定理性として捉えることが取りあえず望み薄な事態も当然あり得る。古典論理という範疇の外では、その方が普通かもしれない。いずれにせよ、そのような場合でも、メタ一項述語言明「～が定理である」という枠組みに拘らなければ、一定レベルの定式化は可能で、その際「～から…が導かれる」という二項述語的言明をそのまま形式化する、即ち二項論理の出番となるのである。具体例をいくつか挙げる（順不同）。

1）量子論理

量子論理の対象言語内の含意概念が何であるべきかは、1980 年代頃より Sasaki hook を推す勢いが強まるが、未だ広い合意が成っているようではない。例えば Goldblatt1974 や Dunn1980 では、x，y ともに式である x ⊢ y という形式表現を基本とする（狭い意味での）二項論理的提示法を用い、より最近の Dalla Chiara2004 では上で修正を注意した（広い意味での）二項論理で量子論理の定式化を与えている。「論理的に導かれる」という概念が量子物理という文脈で、どのように対象言語内の含意式として結晶されるべきか未だ意見が別れており、（一項論理の立場からみれば）外側のメタ文脈における、推論関係という二項関係のレベルのみでの形式が最大公約数であるという事なのだろう。

3　つまりメタ記号であるターンスタイルをその左に置くことで表示できるような其の事実。

4　10 節における Sasaki hook についての等価原理がこの一例といえる。

２）非単調論理

非単調推論に対する、1980 年代末ころより活発になった、いわば公理論的アプローチともみなせる研究[5]、又、その先駆とみなせる Gabbay による定式化においては、対象言語内における非単調的含意式とは何か？を考察するよりも其の前に、まず（二項的）推論関係として、非単調な推論とは何なのか、を最優先分析対象としている。ゆえに、こういったアプローチでは、一項論理的な意味での非単調論理定理は何か、という問題意識より、二項論理的な意味での、非単調な二項推論関係として妥当なものはどれか、という事に最大の関心が持たれてきた。それゆえ、KLM 理論の基本諸文献における提示法はおしなべて二項論理によるものである。

３）FDE や Analytical Implication（Entailment）

（一項論理による）古典論理の核心ともいえる質料含意（material implication）が持つ、素朴な直観に反する違和の分析・解消を目指す研究には、20 世紀様相論理の創始者 C.I. Lewis の厳密含意（strict implication）の論理、Ackermann の研究に啓発された Anderson & Belnap の relevant logic[6]、Routley & Meyer 他の relevance logic[7] などがあり、質料含意の代替として、厳密含意や伴立、種々の関連含意などが開発・提唱されていった。彼らの研究は、対象言語内の含意式として定理たるにふさわしいものを選別して其れらのみから成る集合を再帰的な公理系で特徴づける（つまり公理化する）、要は、定理という性質を持つ式のみに注目する、という点であくまでも一項論理的な方向性に主眼が置かれている。しかし、そこに至るまでの過程において、対象言語内の含意 connective とは何であるべきかが未解明・未解決の段階でも、推論関係を定式化できるようにする為 First Degree Entailment（略して FDE）というシステムが研究された。これはターンスタイルの左右に式の集合を置き、かつこれらの式集合に含まれる式には、連言、選言そして否定記号以外の connective は一切使われない、つまり、いかなる含意記号も現れない、とした形式表現である。ゆえに FDE という定式化は、関心の対象である、何とか掴みとりたい、推論関係という研究対象を、ターンスタイルという 1 点のみに集約させた形式である、といえる。比較的弱い論理である事から、足らない点も多いが、量化の構造を付与した、つまり一階の FDE 述語論理なるものさえ研究されている[8]。

４）否定の研究

Beziau, DaCosta らによる Paraconsistent 論理の基礎付け的な考察において、含意記号を用いずに二項論理（広い意味でのもの、かつ、右辺を式ではなく式の集合にすることも許した「さらに」広い意味での二項論理）の形式という枠組みのみに頼る、という一連の研究が存在する。彼らは、否定概念が、純粋に、推論関係と如何に相互作用するのかを見たかった、言い換えると、論理シ

---

5 Kraus, Lehmann, Magidor の頭文字をとって KLM と略称される研究。Kraus 他 1990 参照。

6 Anderson & Belnap1975 参照。

7 Routley 他 1982 参照。

8 Routley1979 参照。

ステムの最小限の前提として、推論関係のみ存在する場において、否定概念がどのように振る舞うのかを検証したかった、と述べている。直観主義論理以上においては、矛盾記号「⊥」を用いることで否定は或る種の含意としてみなせる：¬ A は A ⊃⊥と同値であるから。しかし、これは否定概念が、そもそも内在的に含意概念の 1 種であることを意味するとは限らず、直観主義論理など比較的強い（含意概念を持つ）論理における特殊事情に由来するものかもしれない。ならば、そういった特殊な事情に影響されず純粋に、一般的な否定概念を研究するには、含意記号を含まない形で分析するべきである。但し、論理学の研究であるから、推論関係は外せない。よって（広い意味での、或いは「さらに」広い意味での）二項論理の枠組みが最適であろう。と彼らは判断したそうである[9]。

5）シーケント計算

あまりにも有名なので、論者の未熟な見識で紙幅を浪費することは避けるが、証明論の大黒柱たる一大分野である。又、20 世紀論理学の最重要成果の 1 つ、Cut 除去定理は、7 節で登場するシステム H に先駆けて、「定理の集合として同一でも推論関係も含めて考えるならば異なる」事例を示していた（Cut という規則があるシステムと無いシステムという 2 つの異なるシステムが、それらが生成する定理シーケントの集合、という点では同一であるのだから）。

6）確証の理論（theory of confirmation）

式が表す命題（実験事実など）が理論の傍証となるケースを理論的に扱った Popper や Hempel らの研究の、フォーマルな扱いにおいて、量的評価に基づく inductive logic（確率論理･帰納論理）によるものとは一線を画する、質的なアプローチが若干存在する[10]。2 項論理的なフォーマリズムがそこにおいて採用されるのは、2）で挙げた非単調推論のケースと類似の理由（確証関係そのものを対象言語内に取り込んで論じる事を意図していない）によるのだろう。

3節　規則と二項論理の共通点と差異

さて、前々節でみた「規則」の概念と、前節でみた「（広い意味での）二項論理」の概念の間に顕著な相同性が見てとれるのは殆ど自明だろうか。前者は、1 座目が式の集合で 2 座目が式であるような順序対、例えば＜Γ，A ＞らを要素とする集合であると定義され、後者は、左辺が式集合、例えばΓ、右辺が式、A、であるような二項関係的な形式表現Γ ⊢ A で表されるような論理学的研究対象であった。前者における山括弧「＜」や「＞」の使用、後者におけるターンスタイル記号「⊢」の使用、といった表面的差異らを取りあえず脇に置くとすれば、形式的にいって、「規則」と「二項論理」は概念的対象としてほぼ重なる、つまり同型（isomorphic）である事は明白ではないだろうか。

しかし、純粋な、数学的あるいは構造的視座を離れると、規則と二項論理はやはり区別する方

9　Beziau1994 参照。

10　Zwirn & Zwirn1996 参照。

が望ましいとも言えるので、その点についても若干記しておく。まず、二項論理は、2つのものの間の推論関係として、いわば客観的事実、実態あるいは実体として、ただ単に実在する、比喩的にいうならば静的に、あるいは時間を超越して存在するのに対して、規則は、与えられた入力（式の集合）に対し所定の出力（式）を出す、動的なプロセス、あるいは其の為のレシピ・処方箋としてみる事ができる。また二項論理が、単に中立的にターンスタイルの左辺と右辺を関係づけるだけなのに対し、規則は「1座目の入力が与えられたら、2座目のものを生成し出力せよ」という指令、しかも「もし入力されたら」という条件付きの命令である、と採ることもできよう。つまり二項論理が中立的（ニュートラル）なのに対し、規則には義務的（deontic）な側面があり、しかもそれは「もし～されたら」という、場合によっては反実的かもしれない仮定法的な要素が組み込まれた側面なのである。

４節　派生規則と可認容規則の定義

まずは標準的定義を与える。

派生規則（derived rule）とは、与えられた論理の提示法における基本規則及び公理らを組み合わせる事で得られる規則である[11]。「組み合わせる」とは、有限回、適宜、逐次適用していくことを意味するが、この概念と密な即応関係にある「仮定からの証明」の概念を復習し具体例を与えることにする。

「証明」とは、式から成る有限列（その最後尾に現れる式を、この証明によって証明される「定理」式と呼ぶ）であり、この列の構成メンバーは全て、公理であるか、先行する1つないし2つ以上のメンバー式から規則の適用によって得られているか、の最低どちらかである、という条件を満たしているような列である。

例えば、A ⊃（B ⊃ A）という1つだけのメンバーから成る短い列は、唯一の構成メンバーが公理式であるから、証明であり、この証明は、A ⊃（B ⊃ A）という式が定理であることを証明するような有限列である。又、A ⊃（B ⊃ A），［A ⊃（B ⊃ A）］⊃［（A ⊃ B）⊃（A ⊃ A）］，（A ⊃ B）⊃（A ⊃ A）という3つのメンバーから成る有限列は、左の2つのメンバーが（1節で与えたLukasiewiczによる古典命題論理肯定断片の公理化の提示法の1つにおける）公理であり、右端のメンバーが、それら2つからMPの適用によって得られるので、証明であり、（A ⊃ B）⊃（A ⊃ A）が定理式である事を証明している。

「仮定からの証明」の定義は、「証明」の定義において、「全て、公理であるか、先行する1つないし2つ…」の部分を「全て、公理であるか、仮定であるか、先行する1つないし2つ…」という文言で置き換えることによって得られ、この場合、列の右端の式は「定理式」ではなく「仮定から導出される式」とされる。例えば、Aを仮定（の式）とするとき[12]、A，A ⊃（B ⊃ A），

[11] 「規則」の定義は1節で与えた。

[12] 一般に「仮定」は単一の式とは限らず、式の集合であることも許される。

B ⊃ A は、仮定式 A から、式 B ⊃ A が導出される事を示す「仮定からの証明」となる。[13]

さて派生規則とは、規則や公理を組み合わせることで得られる「規則」と先に述べたが、その本質において、直近に例示した「仮定からの証明」の概念における、仮定（式の集合）と、有限列の右端の式つまり「仮定から証明される式」から成る順序対を規則インスタンスとするような規則であるとも言うことができる。ゆえに例えば、入力である或る式 A に対し B ⊃ A を出力するようなレシピ／指令は、（MP が基本規則で A ⊃（B ⊃ A）が公理であるような環境において）仮定 A からの B ⊃ A の証明と対応するのだ。

次に可認容規則（admissible rule）とは、規則のうち、入力（順序対の 1 座目）が定理ないし定理のみから成る式集合であるならば、出力（順序対の 2 座目）も必ず定理式である、という条件を満たしているようなものである。

上で、派生規則と「仮定からの証明」との即応関係をみた。また、「仮定からの証明」と「証明」の定義によれば、前者において仮定（式集合）が全て公理式から成るならば、これは後者のケースに他ならない。つまり、公理を仮定とする「仮定からの証明」は端的な「証明」なのであり、その右端の式すなわち「仮定から証明される」式は端的に定理式である。以上により、派生規則において「入力が全て公理式ならば、出力はかならず定理である」が成り立つ。

さらに、入力が 1 つを除き全て公理であり、この唯一の例外は定理式であるケースを考える。この例外は定理なので、この式を右端とする証明列が存在する。よって、最初の有限列（「仮定からの証明」列）において、件の定理式が出現している箇所を、この（件の定理式を右端とする）証明列で置き換える。つまり、問題の箇所に式の有限列を挿入してゆくという有限の操作を行えば、結果として得られる有限列は、公理のみを仮定とする証明、つまり前段落の結果より、端的な証明となり、その右端の式は定理式である。結局「入力が 1 つの例外を除き全て公理式であり、唯一の例外も定理式ではある、ならば、出力はかならず定理である」という事実が成り立つ。

同様の操作[14] を繰り返すことで、一般に派生規則において「入力が全て公理式か定理式であるならば、出力はかならず定理である」が成り立つが、これは（公理式は、それ自体を唯一のメンバーとする証明列によって証明されるので、定理式でもあるから）可認容規則の満たすべき条件そのもの。つまり派生規則は可認容規則なのである。この逆は一般に成り立たないが詳細は略す。

５節　意味論的に見た派生性と可認容性

前節でみた派生規則と可認容規則という対比は、意味論的に性格付けできる。簡略には、真理性保存と恒真性保存という対比である。

規則 Γ ／ A が「真理（性）を保存する」とは、Γ の要素である各式が全て真である時は、A も必ず真である、という性質が成り立つ事をいう。同様に、Γ の要素式がどれも恒真式であるならば A もかならず恒真式、となるならば「恒真性が保存される」というのである。

---

[13] 仮定の集合が空集合である場合の有限列のみを証明列と呼び、それ以外の場合を導出列と呼んで区別する流儀もあるが、本論では、おしなべて「証明」と呼ぶことにする。

[14] 定理式が出現している箇所に、その定理式の証明列を挿入或いは接ぎ木してゆくイメージ。

正しい推論においては前提が真ならば結論も真な筈という直観は、きわめて強固なものだ。それゆえ論理的な推論のかなめである推論規則も又、真理保存という性質を持つべきという事は、論理の哲学的考察において最も重要かつ有力な立場である。

もっとも、真理保存性が、推論規則が規則たる為の必要かつ十分な条件であるのかという点については、様々な、深い議論が philosophical logic において続いている[15]が、本節ではそれには立ち入らず、派生規則は当然、真理性を保存するだろうという直観に訴えるに留める（より正確には、派生規則が真理を保存できるように「式が真である」ことを定めてゆく事で意味論を構築するのである）。

一方、恒真性保存に関しては、意味論に対する統語論の（弱い）完全性及び健全性をメタ定理として前提すれば、前節の定義から、可認容な規則とは、恒真性を保存する規則であり、恒真性を保存する規則は可認容規則である、となる。メタ定理により、定理式とは恒真式であり、恒真式とは定理式だから。

以上の意味論的性格付けのもと、前節でみた「派生規則は可認容規則である」という事実を意味論的に示しておく。Γ／A は派生規則であると仮定。つまりΓの要素が全て真な時は A も真である、とする。Γ／A が可認容である事をみる為、Γの要素は全て恒真であると仮定。ここから A も恒真である事がいえればよい。

Γの任意の要素が恒真式、という仮定から、Γの任意の式は真である事がわかる（恒真な式は真だから）、ゆえにΓ／A が派生規則（即ち真理性を保存する規則）である事から、A も真である。

前段落における論証は、一般的な形であり、A に対する特定の付値（真理値割り当て）に依存しない。いいかえると、いかなる真理値割り当てについても、A が真、と結論できる。即ち A は恒真である。証明終わり。

６節　一項論理と二項論理

一項論理とは「定理である」という一項述語的性質をもつ式たち全てからのみ成る集合、あるいは、この集合に最大の焦点を置いた研究のことを指すものであり、ターンスタイル記号を用いて「A は定理である」というメタ言明を「$\vdash A$」と表記するのであった。ゆえに、A_1, A_2, …で定理すべての数え上げとする時（命題変項 p_0, p_1, p_2, …は可算無限の濃度なので、式全体から成る集合も可算であり、定理全体の集合も自然数を下添え字として枚挙できるのである）、それらが定理である事を明示的に表わすべく「$\vdash$」を左に付したフォーマルな表現 $\vdash A_1$, $\vdash A_2$, …全体から成る集合 $\{\vdash A_1, \vdash A_2, \cdots\}$ でもって、或る一項論理である、としてみる。

一方、対比的に、二項論理とは、「～から…が導き出される」という二項述語で表される二項関係インスタンスたち $\Gamma_1 \vdash A_1$, $\Gamma_2 \vdash A_2$, …全てからのみ成る集合、及びその研究を指すのであった。ゆえに二項論理とは、集合 $\{\Gamma_1 \vdash A_1, \Gamma_2 \vdash A_2, \cdots\}$ であると、取りあえず考えておくこ

[15] 一例だけ挙げると、Analytical Implication という論理は、全うな推論は、真理性を保存するだけでなく analytic（分析的）でなければならない、という立場に基づく。

とにする[16]。

さて、ここで「Γを仮定してAが証明される」というメタ言明でもってΓ ⊢ Aという二項述語的メタ表現に意味付けする、つまり解釈する事にすれば、Γが空集合ϕのとき、「空なる仮定からAが証明される」は4節でみた定義によれば、端的に「Aが証明される」ことそのものであるから、少なくとも目下の文脈においては、$\phi \vdash A$と$\vdash A$の同一視は十分許されるであろう。すると、一項論理 $\{\vdash A_1,\ \vdash A_2,\ \cdots\}$ は、二項論理 $\{\phi \vdash A_1,\ \phi \vdash A_2,\ \cdots\}$ と同一視できる、つまり一項論理とは、要素であるターンスタイル表現$\Delta_j \vdash B_j$らの左辺のΔ_jらが全て空集合であるような特殊な二項論理に他ならない、ということになる。

このことは、「空なる仮定ϕから…が導き出される」という、1座目がϕで埋められた二項述語が「…から導き出される」という一項述語と同義であり、後者は「…が証明される」即ち「…は定理である」という一項述語と等価であるという事実を、集合表記を用いて言い換えたものだといえよう。

さて、以上の流れからすると、ターンスタイル表現例えば$\Delta_j \vdash B_j$などを集めて作った任意の集合は二項論理である、という主張（定義）につながりそうだが、この詳細はさておき（二項論理と表裏一体である「規則」については、1節の定義が、まさにこの事を言っていた）、以下では、二項論理の方が一項論理より、より一般で、より情報量に富むという明白な事実を確認する。

まず、先に見たように、一項論理が二項論理の特殊なタイプと同一視できるという点から、二項論理が一項論理の一般化であることは明らかだろう。

さらに、次のような2つの二項論理を考えてみよう：

$M_1 = \{\phi \vdash A_1,\ \phi \vdash A_2,\ \cdots\}$, $M_2 = \{A_1 \vdash A_1,\ A_2 \vdash A_2,\ \phi \vdash A_1,\ \phi \vdash A_2,\ \cdots\}$.

これら2つは、明らかに異なる集合である。M_2には、$A_1 \vdash A_1$, $A_2 \vdash A_2$という、M_1には含まれない2つのターンスタイル表現が含まれているから。ゆえにM_1とM_2は二項論理としては別物であるが、両者に含まれる（一項論理的）定理に関しては、（$\phi \vdash A$と$\vdash A$を同一視することで）いずれもA_1, A_2, …であるから共通であり、M_1とM_2は一項論理としては同一となる。つまりM_1とM_2は二項論理的には弁別できるが、一項論理的には区別不可能ということだ。

M_1とM_2は、人工的な例であったが、古典論理の基本中の基本といってよい古典命題論理において、このような事例すなわち一項論理として同一だが二項論理としては相異なるというケースが20世紀半ば以降見つかっている。具体例を次節で紹介する前に、又少し復習しておく。1節で紹介した古典命題論理肯定断片のLukasiewiczによる公理系に、もう1つ、公理（$\neg B \supset \neg A$）$\supset$（$A \supset B$）をつけ加えると、古典命題論理全体に対する公理化として最もポピュラーなものの1つが得られる：

公理図式　1）$A \supset (B \supset A)$

2）$[A \supset (B \supset C)] \supset [(A \supset B) \supset (A \supset C)]$

3）$(\neg B \supset \neg A) \supset (A \supset B)$

---

[16] Γ_1, Γ_2, …らは一般に、有限集合に限定してはなかったので、可算集合となるかは一概にいえず、自然数による下添え字表記については若干、問題あり。

規則（図式） MP　　A ⊃ B　　A／B.

このシステム（L_1と呼んでおく）によって証明[17]される定理式全体から成る集合を今後 Cl と表記することにする。一方、意味論的に、スタンダードな真理値表[18]を用いて真理値を計算したとき、命題変項に対する付値（真理値割り当て）がいかなるものであっても式全体は常に真となるような式を恒真式（トートロジー）と呼び、全ての恒真式らのみから成る集合を Taut と名付けるならば、Cl ⊆ Taut であるという主張は健全性そして Taut ⊆ Cl の方は完全性と呼ばれ、両方とも成り立つというメタ定理が前述の所謂（弱い）完全性定理である。

７節　Post 不完全性

さて前節末でシステム L_1 による定理集合 Cl は、集合としては Taut そのものである事をみたが、本節では、集合としては Taut とイコールなのだが、定理を生成するシステムとしては、L_1 とは大きく区別されるべきであるような体系を紹介しよう。ここで「大きく区別されるべき」という点に注意が要る。前節末で挙げたシステム L_1 は、古典命題論理の公理化として（主にその簡潔さ等から）ポピュラーなものだが、他にも多くの公理化が知られている。比較的単純な例では、L_1 の 3 番目の公理（図式）（¬ B ⊃ ¬ A）⊃（A ⊃ B）を図式（¬ A ⊃ ¬ B）⊃［（¬ A ⊃ B）⊃ A］で置き代えた、システム L_2 や[19]、L_1 の 3 番目の公理図式を取り除いて、代わりに（B ⊃ A）⊃（¬ A ⊃ ¬ B），¬ ¬ A ⊃ A，A ⊃ ¬ ¬ A という 3 つの公理図式を新たに足したもの（Frege による公理化、名付けて L_3）、などを挙げることができる。L_1，L_2 そして L_3 も規則としては MP を使うことで共通だが、公理は異なるものら（L_1 と L_2 は 3 つ、L_3 は 5 つ）を採用しており、この点で 3 者は相異なるシステムだが、定理の集合としては Cl という同一のものである。

上で述べた「大きく区別される」とは、こういった相違の事ではない。定理の集合としては Cl と同一だが、システムとしては L_1〜L_3 間相互の違いよりも遥かに本質的な差異があるシステムが存在するのだ。ヒルベルト流提示法における斯様なケースの存在に言及したのは Slupecki1953 が嚆矢であるとされるが、英語圏で最も早く関心を惹いたのは Hiz1959 によるシステム H である：

公理（図式）　1）¬（A ⊃ B）⊃ A
　　2）¬（A ⊃ B）⊃ ¬ B

規則　　1）A ⊃ B　　B ⊃ C ／ A ⊃ C
　　2）A ⊃（B ⊃ C）　　A ⊃ B ／ A ⊃ C
　　3）¬ A ⊃ B　　¬ A ⊃ ¬ B ／ A.

17　4 節の定義参照。

18　connective は目下「⊃」と「¬」のみなので、真理値表は合計 2 つ。例えば「⊃」については、前件が真で後件が偽のとき含意式全体は偽、これ以外の 3 つの組み合わせの場合は、真と定める、等。

19　他の公理図式はそのまま、又、規則も MP のまま。

同じような特質を持つシステムのうち、より簡明な（しかし恐らくあまり知られていない）例としてはPorte1965によるシステムPがある：

公理（図式） 1）$\neg\neg[A \supset (B \supset A)]$

2）$\neg\neg([A \supset (B \supset C)] \supset [(A \supset B) \supset (A \supset C)])$

3）$\neg\neg[(\neg B \supset \neg A) \supset (A \supset B)]$

規則 1）$\neg\neg(A \supset B)$　$\neg\neg A$ ／ $\neg\neg B$

2）$\neg\neg A$ ／ A.

HもPも、そこから定理として証明される式全体から成る集合がClである点ではL_1～L_3と同様である。しかし規則に関してはMPではない規則がHでは3つ、Pでは2つ採用されており、結果、或るメタ論理的性質に関して、L_1～L_3とは真逆なふるまいを見せることになった。この性質とは、古典命題論理における、Post完全性定理と呼ばれるメタ定理の成否である。

Post完全／不完全とは、与えられた論理システムに、そのシステムでは証明されない式、つまり定理でない式を新たな公理として付け加えて拡張した時[20]、この拡張したシステムで、あらゆる式が証明可能となるか、否か、という性質をいう。前者すなわち全ての式が証明可能なシステム（Trivial logicトリビアル論理とも呼ぶ）になってしまう場合、元の、拡張前のシステムは既に充分に完全、いわば飽和状態にあったとみなし、Post完全である、と呼び、後者の場合、つまり拡張後のシステムがトリビアル論理でない場合をPost不完全と呼ぶのである。[21]

そして証明は略すが、L_1～L_3はPost完全、つまり定理でない式（Tautの要素ではない式）を公理として付け加えて拡大するとトリビアル論理に成ると、容易に示される。一方、HとPはPost不完全なのである。Pに関して、その定理集合がClと一致すること、又、PにClに含まれない式を足して拡張してもトリビアル論理にならない拡張法がある事を以下に見よう。

システムPの顕著な特徴は、L_1との類似であろう。Pの3つの公理図式は、L_1の3つの公理図式の前に2重否定を加えたものであるし、Pの1つ目の規則（¬¬MPと名付けよう）は、L_1の唯一の規則、MPの各構成要素の前に2重否定をかけたものだからである。（Pの2つ目の規則は、2重否定除去の効果があるので、英語Double Negation EliminationからDNEと名付けておく。）

では、Clの任意の要素、式Dが与えられたとする。これは古典命題論理の定理であるから、L_1における証明（列）が存在する。この証明列において、L_1の3つの公理が出現する箇所を全て、それぞれPの対応する3つの公理で置き換える。又、列の中途に登場する導出された式たちには2重否定を前置する。（結局、列の全メンバーに2重否定を前置する事になる。）さらに、列内でMPが適用されている箇所も全て¬¬MPの適用で置き代える。こうしてでき上がった新たな有限列が、Pにおける¬¬Dの証明列になることは、L_1とPの公理の相同性、及びMPと¬¬MPの対応関係を考えれば半ば以上明らかだろう（帰納法による厳密な証明は略）。この（Pにお

[20] 元からある公理や規則はそのまま受け継ぐとする。

[21] 命題変項で定理であるものが存在するときPost不完全、そうでないときPost完全と呼ぶ、という少し異なる用語法も在るが、本論では採用しない。

ける）証明列の右端に DNE の適用によって D をつけ加えれば、P における D の証明の完成である。逆に、P において証明される式が L_1 の定理（つまり Cl の要素）でもあることは、P と L_1 の証明列たちの相同性と、2 重否定導入が古典命題論理の定理である事から証明される（証明、略）。

次に、P の定理ではない式（前段落で見たことにより、Cl の要素ではない式）として、例えば命題変項 p_0 をとる。明らかに、この式には否定記号は一切出現していない。そしてシステム P に p_0 を新たな公理[22] として付け加えたシステム P′ を考えよう。P′ はトリビアル、つまり任意の式がそこで証明されるだろうか？　P′ の規則は P のものを踏襲している、つまり¬¬ MP か DNE のみである。両者とも、入力となる式たちは全て 2 重否定がかかった式たちである。つまり、否定記号を一切含まない式 p_0 を入力とするような¬¬ MP 及び DNE の適用インスタンスは有り得ない。すなわち、P′ であらゆる式が証明可能になるどころか、P′ において、P では証明不可能だった式が、新たに証明可能になることは一切ない（唯一の例外は p_0 そのものの証明である。唯一のメンバー p_0 から成る有限列 p_0 が p_0 の証明列である）。よって P′ はトリビアル論理ではないので P は Post 不完全である。

さて、H と P は、L_1 ～ L_3 とは、Post 完全性という点に関して真逆なメタ性質を持つという違いがある事がわかった。5 つとも、定理の集合という観点からは、Cl（＝Taut）と同一であるにも関わらず。先に見たように、H と P は MP を規則としない点で L_1 ～ L_3 と異なるのであった。つまり、定理の集合という一項論理的観点からは同一としかいえないが、「規則」という二項論理的観点からなら、はっきり弁別できる訳である。それでは、¬¬ MP や DNE そして H の 3 つの規則らと対比される MP、という点でもって P 及び H が、L_1 ～ L_3 と区別されるのだと了解するとして、これら 6 つの規則は、4 節で得た知見からすると如何なる規則たちなのだろうか。

詳細は略すが、H と P の 5 つの規則が、定理（Taut の要素）を入力すれば定理を出力する事はすぐに見てとれる。つまり 5 つとも可認容規則である。では派生規則であるのはどれか。MP が L_1 ～ L_3 の派生規則であるのは自明。又、詳細は略すが¬¬ MP や DNE そして H の 3 つの規則らが L_1 ～ L_3 にとっての派生規則であることも示せる（それぞれに対応する含意式、例えば DNE に対しては¬¬ A ⊃ A, が L_1 ～ L_3 の定理である事を見ればよい）。逆に、MP が H や P において派生規則とならない事、これこそ Slupecki, Hiz, Porte らの研究の肝要と言えるが、紙幅ゆえに割愛する。[23]

８節　論理と理論

本節では、派生規則 vs 可認容規則という対比に関して、論理と理論の区別について触れておく。この 2 つのものに関して、論理がより基本的なものであり、論理という基盤の上に、個々の理論の為の固有公理を付け足してゆく事によって、諸々の理論、というフォーマルな諸体系が構築されてゆく、という描像自体に異論は少ないと思う。又、様々な個別理論たちの間で共有されてい

22　もちろん図式ではなく、式。

23　本節において、P についての証明の一部は（Porte の著作での説明が簡略な為）論者のオリジナルであるが、其れ以外の議論は本質的に全て既存の研究によるものである。

る最大公約数的な部分それこそが論理だ、という逆方向からの捉え方、こちらの方も広く支持されるのではないだろうか。

では、この「論理」対「理論」の対比を、「派生」対「可認容」の対比と関係づけよう。

ある論理の派生規則が、その論理を基盤とする任意の理論においても妥当である事は直ぐに頷ける。理論は、（基盤となる）論理に理論固有の公理を付け加えて拡張する事で作られるが、元からある論理自体の公理や規則は（適切に）継承されるのだから、そういった公理や規則を組み合わせてできる派生規則が、拡張された理論において成立するのはほぼ明らかだからだ。つまり論理の派生規則は、その論理から拡張して得られた理論においても派生規則なのである。

他方、可認容規則については、元の論理においては妥当でも、拡張後の理論においてもそうであるかは分からないし、又、1 つの理論において妥当であっても、別の理論で、可認容規則として妥当であるかどうかも分からないので、個別のケースで 1 つ 1 つ確認されなければならない。1 つ単純な例を考えてみる。

或る論理 L_j と、それに適当な式 A_1 を公理として付け加えてできた理論 T_1、A_1 とは別の或る式 A_2（ここで A_1 と A_2 の間に、片方が他方を L_j において導出するような関係は無いものとする）を L_j に付け加えて得られる理論 T_2 があったとする。そして前提が空な 2 つの規則「ϕ／A_1」と「ϕ／A_2」を考える。前提が空な規則が可認容となる為には、可認容規則の定義の「入力が全て定理ならば」の部分が空にみたされるのだから、規則の結論の部分が定理でありさえすれば良い。ゆえに、「ϕ／A_1」が T_1 で可認容、そして「ϕ／A_2」が T_2 で可認容なことは明らかだろう。一方で、A_1 と A_2 の間に（L_j での）導出関係は無いので、「ϕ／A_1」が T_2 で可認容となったり「ϕ／A_2」が T_1 で可認容となることはない。（この例は論者のオリジナルだが、古典論理においては（$A_1 \supset A_2$）$\vee$（$A_2 \supset A_1$）が定理なので、L_j はこの式が定理でないような論理、例えば関連論理 E，R などである事が必要。）

以上、見てきたように、派生規則は、どの理論においても（基盤となる論理が同じである限り）妥当な規則であり続けるが、可認容規則は、それぞれの理論（そして最小の理論たる「論理」）において固有のものであり、成立するかどうかは個々に確かめられねばならない。言い換えると（誤解を招きかねない言い方かもしれないが）、論理の可認容規則は、その論理だけのものだが、論理の派生規則は任意の理論のものでもある。

5 節の意味論的性格付けによれば、「派生」対「可認容」の対比は、「真理性保存」対「恒真性保存」の対比だった。ゆえに前段落の言い換えと組み合わせると：論理の「恒真性保存」規則は、その論理だけに保証されるのだが、論理の「真理性保存」規則は任意の理論のものでもある、と言える。

さらに見方を変えると、論理のことだけを考えるなら「恒真性保存」のみあればよい。他方、理論への拡張も視野に入れるなら「真理性保存」も要求すべきである、と形容できるだろう。

さて本節初めの数段落における、論理と理論についての考察は、基礎となる論理が二項論理であっても全く相同に展開できる事に留意しておこう：規則は、ターンスタイル表現（シーケントと呼ぼう）達からシーケントを導く；公理シーケント達から規則によって得られる物が定理シー

ケント;定理シーケント達を入力すれば定理シーケントを出力する規則は可認容規則である;等々となる。

９節　恒真性と真理性

式と若干のメタ記号のみから成る、禁欲的な（純粋に統語論的な）枠組みにおいて、恒真性 vs 真理性という両者を認識する事はできるだろうか？（以下しばらくの間、完全性定理のような、意味論と統語論の間の整った対応関係を暗黙に前提する。）前者に関しては明らかだろう：「⊢」が定理である事を示すメタ記号だとすると、⊢A は、A の恒真性を意味するからだ。しかし後者、真理性については如何だろう。意味論を前面に出さずに式の真理性を認識できるだろうか？答えは、部分的には可能、である。より正確には、条件的に可能、なのである：⊢B ⊃ A は（⊃は質料含意）、B ⊃ A が恒真である事を意味するが、⊃の真理値表により、B が真なら A も間違いなく真な事を意味する。つまり、A が端的に真である事を表すのは無理でも、B が真である条件下の A の真理性は ⊢B ⊃ A という純粋に統語論的表記で表せるのである。

ここで B を命題定項「T」（常に真な命題を表すもの）で置き換え、上の表記の B への依存性を断つ誘惑に駆られるかもしれない。しかし、⊢T ⊃ A は、意味論的には、T ⊃ A が如何なる付値の下でも常に真である事を表すので、T が常に真である事から、やはり⊃の真理値表により A も常に真である事を帰結する。つまり A の恒真性まで含意し、これは言い過ぎである：我々は A の只の真理性だけを言いたかったのだから。結局、真理性は、何らかの付値が与えられた上で定まる（つまり意味論的装置が前面に出る）のが基本で、それ無しで示すには、先ほどの様に、何らかの式 B と相対的に、B が真ならば A に真理性がある、という条件的な表現法しか無いようである。

比較の為に、B ⊢A が何を表すか（又、表すべきか）について確認しておく。（一項的な）論理を構築する為の導出規則と相似に B ⊢A という表現を解するならば、（4 節で見た）B を仮定した上での A の導出、と採るものが先ず考えられ、この時、左辺の定理性が右辺へと保存される事が最低条件だろう。完全性定理を前提すれば、これは左辺の恒真性が右辺へと保たれる事を意味する。一方、シーケントの意味論として一般的なもの[24] によれば、「左辺を真にする任意の付値は右辺も真にする」が満たされるべき、となる。つまり真理性の左辺から右辺への保存である。後者の解釈が前者の解釈を含意する事は 5 節においてと同様に示される（規則を二項論理に言い換えるだけである）。

本節最初の段落にて、⊢A は、A が常に真である事、⊢B ⊃ A は B が真であるという条件下 A が真である事をそれぞれ表す事をみた。すると、純粋に抽象的な議論においては、前者から後者がいえるのは当然のようだと思われる。つまり「⊢A ならば ⊢B ⊃ A」は、もっともな原理だろうと思われ、事実、古典論理において、規則「A／B ⊃ A」は可認容なだけでなく派生規則でもある（既出の Lukasiewicz の体系では公理 A ⊃（B ⊃ A）と MP から明らか）。しかし、量子

[24] シーケント計算や多肢論理（multiple-conclusion logic）、帰結関係（consequence relation）等の諸文献、例えば Shoesmith & Smiley1978 参照。

論理における対応する原理「$\vdash$ A ならば $\vdash$ B → A（ここで→は Sasaki hook）」は成り立たず[25]、他方「$\vdash$ A ならば B $\vdash$ A（ここで $\vdash$ X は T $\vdash$ X の略記である）」の方は成立するという、一項論理的推論 $\vdash$ B → A と二項論理的推論 B $\vdash$ A との対比に由来する、対照的な結果について次節、本論最終節で紹介しよう。

10 節　量子論理上の算術理論

Dunn1980 は量子論理（但し命題論理ではなく一階述語論理）の上に数論（古典述語論理上に造られるペアノ算術と相似なもの）を構築した時、この理論の式たちに関して、連言の選言に対する分配性が成り立つ（つまり A，B，C をこの理論の式とすると、A ∧（B ∨ C）→［(A ∧ B) ∨ (A ∧ C)］が理論の定理となる）事を証明した。量子論理の古典論理からの最大の差異が、この分配性の不成立であるにも関わらず[26]。論理においては不成立だが、理論においては成立するという此の対比は、前々節の L_j と T_1 という少々人工的だった例になぞらえて言い換える事ができる：L_j を量子論理とする時、規則「ϕ／A ∧（B ∨ C）→［(A ∧ B) ∨ (A ∧ C)］」は、L_j にて可認容ではないが、L_j ＋｛算術の公理と規則｝という理論においては、この規則は可認容となる。A ∧（B ∨ C）→［(A ∧ B) ∨ (A ∧ C)］は量子論理 L_j の定理ではないが、量子算術「L_j ＋｛算術の公理と規則｝」においては定理なのだから。

さて Dunn は、論文 1 節末で、量子論理上で理論を考えるにあたり自分は Rationalist の立場（そこでは数学的公理などは必然的真理とみなされる）を採り、Empiricist 的立場（同上は、単なる真理としてのみ扱われる）は採らないと宣言し、2 節でその為に二項論理的（以下、「二項的」と略すことがある。「一項的」も同様）な枠組みで量子論理及びその上の算術を公理化する。そして 2 節末にて、もし Empiricist 的立場からアプローチするならば、（論者の推測では、「A $\vdash$ B と $\vdash$ A → B は等価、但し「→」は Sasaki hook，又、$\vdash$ X という表記は T $\vdash$ X の略記、そして T は、直観的には、論理的真理を表す」という等価原理を用いて）一項論理的に公理化すべきだろうと述べる。

彼の云わんとする所を推し量れば、二項論理的に $\vdash$ A（つまり T $\vdash$ A）という時は、A は論理的真理から導かれるという事だから其れ自体論理的真理つまり必然的な真理だと言える。一方、単に一項論理的に $\vdash$ A と或る理論（例えば算術や量子論）にて云った場合、これは、その理論の公理や定理たちのみから他の前提は用いずに A が導き出される事を云うに過ぎない。そしてそういった公理には例えば、量子力学の有名な「2 －スリット実験」のように、純粋な思弁・思考実験だけでは予想だにし得ないような、経験的観測事実に基づく原則も含まれるのだから、この場合、A は現実に真であるとは言えても、必然的真理とまでは言えないのではないか。これが論者の理解した、Dunn による、二項論理的 vs 一項論理的アプローチの区別である。

25　これはオーソモデュラー束による代数意味論において A ≦ B → A が valid でないという、既知の事実から。Georgacarakos1979 参照。直観的な説明としては量子物理的には、A と B が compatible でないと、A から B → A への弱化（条件化）はできない、という言い方ができよう。

26　それゆえ、量子論理に分配則を公理として足すと古典論理になると、大まかには考えてよい。つまり Dunn は、算術に関しては、古典論と量子論の間に差異は無い即ち両者は理論として同じ定理集合を生成する事を示した訳だ。

さて、Dunn は 2 節末にて、Empiricist 的立場としては一項論理的定式化が望ましいだろうと述べた上で、但しその場合、自身の 3 節と 4 節での論証は成功しないだろう事をほぼ確信する（morally certain）、と書いている。そして其の 3 節で上出の「量子算術における分配性成立つまり一階述語論理上の算術理論は、量子論理上でも古典論理上でも同じ定理集合を与える」（以下、彼にならい「第一定理」と呼称する）という事実が証明されている。すなわち彼は、Empiricist 的立場つまり一項的アプローチでは第一定理は証明できないだろうという予想をしているのだ。但し、証明の不可能性を証明する事はおろか、量子論理を一項的に、具体的にどう定式化するかについて一切、説明してはいない。

論者は澤邊 2017 の Part IV section 2 で、Dunn の二項論理的システムの内、命題論理の部分のみを先述の Sasaki hook による等価原理によって一項論理に翻訳したものを紹介した。同様の翻訳は、量化の公理と規則そして算術の公理と規則についても、ほぼ機械的に可能である。本論では、このシステム自体の提示は紙幅の為、略し、Dunn が 3 節において（彼の二項論理的枠組みで）詳述する第一定理の証明を一項的枠組みに翻訳しようとする時、何処で証明の流れに不具合が生じるのかを指摘しよう（明晰化の為ターンスタイルに数字を下添えして二項的「$\vdash_2$」なのか一項的「$\vdash_1$」なのか示す事にする。繰り返しておくと、Dunn の提示法は $\vdash_2$ によるもので、澤邊 2017 はそれの $\vdash_1$ を使う翻訳である）。

3 節 p.518 で行（37）$\vdash_2 A \rightarrow B$（a´）から水増し則（Weakening）「$\vdash_2 X$ ／ $Y \vdash_2 X$ 但し、$\vdash_2 Z$ は $T \vdash_2 Z$ の略」によって、行（38）$A \rightarrow B$（a）$\vdash_2 A \rightarrow B$（a´）が導かれている。この過程を一項論理的に翻訳すると（但し節約のため $A \rightarrow B$（a）は C、$A \rightarrow B$（a´）は D と表記する）、$\vdash_1 D$ から（一項論理的）水増し則「$\vdash_1 X$／$\vdash_1 Y \rightarrow X$」によって $\vdash_1 C \rightarrow D$ が得られる、となる。

しかし、この一項的水増し則の根拠は、先述の等価原理を用いて遡ってみると、「$T \vdash_2 X$／$T \vdash_2 Y \rightarrow X$」となる。ここで若し $T \vdash_2 Y \rightarrow X$ が $T \wedge Y \vdash_2 X$ から得られている（強い演繹性と呼ぶ）なら、Dunn の二項的量子論理の基本公理 $U \wedge V \vdash_2 U$ と規則「$U \vdash_2 V$, $V \vdash_2 W$／$U \vdash_2 W$」により、$T \vdash_2 X$ から $T \vdash_2 Y \rightarrow X$ が証明される[27]が、肝心の $T \wedge Y \vdash_2 X$ ／ $T \vdash_2 Y \rightarrow X$（強い演繹性）は、量子論理的、正確にはオーソモデュラー束的には許されないものだと Dunn 自身が 3 節の途中 p.516 最下段で注意を促している。ゆえに、一項的水増し則「$\vdash_1 X$ ／ $\vdash_1 Y \rightarrow X$」は根拠を失うので、Dunn の二項的枠組みでの証明の一項的枠組みへの翻訳は、証明の行(37)から行(38)への部分で論証が途切れる。よって、少なくとも、Dunn の証明をそのまま一項的になぞるだけでは、量子算術においての分配則の成立は示せない。そして論者の考えでは、以上のような不具合を念頭に Dunn は、量子一階算術が古典一階算術と等価である事の論証が Empiricist 的立場からはできない事をほぼ確信する、と書いた可能性がある。

第一定理の Dunn による 3 節における証明は、帰納法「$\vdash_2 A(0), A(a) \vdash_2 A(a')$／$\vdash_2 \forall xA(x)$」[28]と愚者の帰納法（Fool's Induction）「$A \vdash_2 B(0)$, $A \vdash_2 B(a')$／$A \vdash_2 \forall xB(x)$」[29]を駆使する精巧

27　言い換えると「$T \vdash_2 X$ ／ $T \vdash_2 Y \rightarrow X$」は派生規則となる。

28　算術理論の基本規則として与えられているので派生規則。

29　算術理論の可認容規則である事が p.518 で証明されている。

なもので直観的に何が起こっているのか把握しづらい。そこで論者は澤邊 2017 の Part IV setion1 で、より自身の直観にとって平易な別証明を試み、Dunn の算術に「$a = b \wedge b \neq c \vdash_2 a \neq c$」という公理を 1 つ付け加えれば、帰納法の使用をメタ論証に取り込んで証明をより平明な形で行える事を示した。

前々段落で、Dunn の予想の（少なくとも 1 つ）の根拠を示したが、彼が想定しなかった別証明が、一項論理的枠組み内において第一定理に対して決して有り得ないとまでは言えない。実際、前段落で紹介した別証明の一項論理への翻訳の可否については未確認だが、可能性は否定できないだろう。よって論者は彼の予想の正否について現時点では五分五分ではなかろうかと考えている。前段落の別証明の一項論理への翻訳が成功するか否か、又、一項論理的手法による其の他の別証明が無いかどうか等の点は、今後の課題として、検討は別の機会に譲る事にする。

（さわべこうへい　哲学哲学史・博士後期課程）

参考文献

Anderson, A.R. and N.Belnap. *Entailment vol.1*. Princeton UP, 1975.

Beziau, J-Y. “Theorie legislative de la negation pure”, *Logique et Analyse* 147-148, 209-225, 1994.

Dalla Chiara, M-L., R.Giuntini and R.J.Greechie. *Reasoning in Quantum Theory*. Kluwer, 2004.

Dunn, J.M. “Quantum Mathematics”, *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*. Vol.1980. No.2, 512-531, 1980.

Georgacarakos, G.N. “Orthomodularity and Relevance”, *Journal of Philosophical Logic* 8, 415-432, 1979.

Goldblatt, I.R. “Semantic Analysis of Orthologic”, *Journal of Philosophical Logic* 3, 19-35, 1974.

Hiz, H. “Extendible Sentential Calculus”, *Journal of Symbolic Logic* 24, 193-202, 1959.

Kraus, S., D. Lehmann and M.Magidor. “Nonmonotonic Reasoning, Preference Models and Cumulative Logics”, *Artificial Intelligence* 44, 167-207, 1990.

Porte, J. *Recherches sur la theorie generale des systemes formels et sur les systemes connectifs*. Gauthier-Villars, 1965.

Routley, R. “Alternative Semantics for Quantified First Degree Relevant Logic”, *Studia Logica* 38, 211-231, 1979.

Routley, R., et al. *Relevant Logics and their Rivals, vol.I*. Ridgeview, 1982.

Shoesmith, D.J. And T.J.Smiley. *Multiple-Conclusion Logic*. Cambridge UP, 1978.

Slupecki, J. “Ueber die Regeln des Aussagenkalkuels”, *Studia Logica* 1, 19-40, 1953.

Wojcicki, R. *Theory of Logical Calculi*. Kluwer, 1988.

Zwirn, D. and H.P.Zwirn. “Metaconfirmation”, *Theory and Decision* 41, 195-228, 1996.

澤邊興平　『量子論理について（後編）』　大阪大学文学研究科哲学・哲学史　入江ゼミ発表、2017 年 6 月 2 日.

Rules of Inference and Binary Logic

Kohei Sawabe

We observe the importance of the two related notions, *rule* and *binary logic*: by first reviewing their basic definitions and examples; then seeing how they help distinguish the Post-complete formulations of the classical propositional logic from the incomplete ones; and finally by providing support for Dunn's conjecture to the effect that his theorem in the binary-logic framework stating the theorem-wise equivalence of his quantum arithmetic with its classical counterpart would not likewise hold in the monadic framework, by pointing out where the straightforward translation of the binary into the monadic happens to fail due to a peculiarity of the orthomodular lattices. Along the way, we discuss the crucial differences between derivable rules and admissible rules, noting their disparate semantic behavior: the former conserving truth, the latter validity. We also mention the Post-incomplete systems devised by Hiz and Porte, comparing them to the more standard, Post-complete ones by Lukasiewicz and Frege, among others.

Keywords: rules, binary logic, conservation of truth, Post-incompleteness, quantum arithmetic

「キーワード」
規則、二項論理、恒真性、ポスト不完全性、量子算術