The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	＜文献紹介＞帰結関係という視座から関連論理を観る為に
Author(s)	澤邊, 興平
Citation	メタフュシカ. 2017, 48, p. 117-123
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/67699
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

《文献紹介》

帰結関係という視座から関連論理を観る為に

澤邊興平

本稿では、定理の集合として扱われる事が多い関連論理を帰結関係（consequence relation）という関係性で捉えて研究する為の参考文献を紹介する。

まず「関連論理」という用語から始める。「関連論理」という日本語に対応する名称は、英仏独語等では relevance logic, relevant logic, logique pertinente, Relevanzlogik などとなるが、主たる研究が行われてきた地域および分野の発祥地は主に英語圏そして一部独語圏にある[1]。そして、大きく 2 つのグループに分けられる。1 つ目の系譜（比較的ポピュラーな研究者らの頭文字をとって ABRM と呼んでおく）には、おおまかな年代順に並べると、Orlov, Church, Kripke, Prawitz, Ackermann, Anderson, Belnap, Routley, Meyer, Dunn, Brady ... といった論理学者らが属し、Orlov のものは 1920 年代、それ以外は 50 年代以降である。一方、2 つ目のグループ（やはり研究者の名にちなんで WSS と略称する）では、Weingartner, Schurz, Stelzner らが代表格で、又 Gemes も含められるかもしれない。さらに Angell や Diaz は、第 1 グループと接触する所もあるが本質的には 2 つ目のグループに属するだろう。

双方の間の違いは、「公理化を目指す」vs「目指さない」というキーワードで捉えられる。まず前提として、両グループとも「関連性の違和」を回避するという共通目的がある[2]。

関連性の違和の回避法として、関連論理の研究者らは、違和をもたらすような定理式を除外する複数のアプローチを採る。

何処から除外するのか？彼らが妥当・正当とみなす推論の原理原則の集合から、である（この原理原則の集まりを、厳密にフォーマルな仕方で定める 1 方法が、ヒルベルト流提示法であり、そこでは、問題の集合は「証明」される定理式の集合となる）。

どうやって除外するのか？ ABRM においては、目標とする定理集合から望ましくない式を取り除く為、公理や規則らを減らすなど、定理の生成過程に手を入れることで、最終的な定理集合

1　独仏語で Shramko 1999, Rivenc 2005 等もあるが。

2　この違和には複数種類あるが具体例等、詳細は略す。

を、違和のある式を含まないよう制限縮小する、という方策をとる。新たな公理と規則のセットを定める訳なので、新たな公理系を作り出す、即ち、違和のない定理式のみから成る集合を「公理化」する、というのが、この立場である。

WSS の方針では、違和のある式をもっと直截・明示的に、目標とする式集合から排除する。彼らは、古典論理による定理集合を出発点として前提し、そこに或る種のフィルター条件を課して、望みの物のみを漉し取ることで、目標たる集合を得られたものとする。そうして得られた集合が、何らかの（アルゴリズミックな）かたちで「公理化」される・捉えられ得る、かどうかということは後回しである。

フィルター条件とは何か？とりあえず厳密に定められる物であればよい。例えば「式に含まれる命題変項の出現の延べ回数は奇数である」は厳密に定められる。よって、例えば、p と q を命題変項とするとき、p ⊃（q ⊃ p）は此のフィルター条件に適うし古典論理の定理でもあるので、目標たる式集合の要素になる。一方、（p ⊃ p）⊃［（q ⊃ q）⊃（p ⊃ p）］は命題変項の延べ出現回数が偶数になるので目標の式集合の要素たりえない。この 2 つ目の式は 1 つ目の式の命題変項 p に p ⊃ p を、q に q ⊃ q を一様に代入して得られる。つまり、目標の集合は代入に関して閉じていない事になる。一般に、定理の集合として定義された論理は、一様代入に関して閉じているべし、と考えられるので、この目標集合は、「論理」と呼ばれ難いのではないか、と想像できるだろう。

前段落の「式に含まれる命題変項の出現の延べ回数は奇数である」というフィルター条件は、人工色が濃かった。別の例を 1 つ挙げておく。「思惟の結論に現れる概念はそもそも全て其の思惟の前提の中に含まれている」という分析的思惟の特徴をフォーマルな研究で捉え直す試みである「含意式の後件に出現する命題変項は必ず前件の中にも現れる」という要請である。Anderson & Belnap & Dunn らが主に研究した E，R，T といった比較的強い関連論理において、この要請は満たされない。一方 Parry らによる AI（Analytical Implication）はこの条件を満たし、又、公理化もされている。この要請（フィルター）には、弱められた親類もある。「含意式の前件内に出現する命題変項と、後件内に現れる命題変項には、共通するものが存在する」であり、この弱い要請は ABRM の扱う諸論理も満たしている。

先述のとおり、一般のフィルター条件は（強ければ強いほど）、それをクリアする式たちの集合が上手く（例えば、代入に関して閉じている等の良い性質を伴って）公理化されることを保証しない。分析性つまり「含意式の後件に出現する命題変項は必ず前件の中にも現れる」という要請は、稀な例外ケースなのだろう：分析性要請により AI は、関連性の違和のみならず添加の違和（paradox of addition）すなわち、選言肢から選言を導けるという違和[3] もクリアすることが出来る程フィルターは強力なのに、幸運にも公理化できているのだから。

では WSS が用いるフィルター（それによって漉しとられた式集合は、既出の「関連性」と「添加」の違和以外の、問題な定理式も除去されてしまう程、強力なフィルターである）はどういう

[3] 形式的には A →（A ∨ B）と表される原理で、義務論理における Ross のパラドックス等の原因となる。

ものだろうか。参考までに1つ挙げる。[4]

Γが式の集合でAが式のとき、Aに出現している命題変項のどれか1つでも、それをどれか適当な別の命題変項に置き代えた後も、シーケントが「古典論理的に」成立するとき、Γ ⊢ Aは非関連的（irrelevant）と呼ぶ。問題のフィルター条件は、Γ ⊢ Aが非関連的でないことを要請する。

例えば上出のA, ¬A ⊢ Bにおいて B内の或る命題変項出現を任意に置き代えたものをB′とする時、古典論理的にA, ¬A ⊢ B′が成り立つから、シーケント表現A, ¬A ⊢ Bは、上のフィルター条件によって弾かれることになる。同様に、A ⊢ B ⊃ AやA ⊢ A ∨ Bなどにおいても、B内の任意の命題変項出現を適当に置き換えて出来る式B′についてA ⊢ B′ ⊃ AおよびA ⊢ A ∨ B′は古典論理において成立するので、A ⊢ B ⊃ AとA ⊢ A ∨ Bの双方ともフィルター条件によって除外される。一方、例えば、上のフィルター条件の提示部においてΓ = {p & q}, A = pとしよう（p, q, rは命題変項とする）。勿論、古典論理的にはp & q ⊢ pは成立し、右辺のpをrで置き換えたp & q ⊢ rは不成立であるから、このシーケント表現は先のフィルター（つまりΓ ⊢ Aが上述の意味で非関連的でない事の要請）では除外されない、つまり「関連的」な推論シーケントであるとなる。一方Γ′ = {p & ¬p} としてみると、Γ′ ⊢ Aつまりp & ¬p ⊢ pは右辺のpを代入で如何変えようが古典論理的に成立する、つまりフィルター条件に引っかかってしまう。結局p & q ⊢ pはOKだがp & ¬p ⊢ pは駄目となり、後者が前者から代入「q ⇒ ¬p」で得られることから、このフィルター条件によって濾過された式集合は代入に関して閉じていない、となる。

では表題中のキーワード「帰結関係」に進もう。まず本論では、Shoesmith & Smiley 1978が単肢関係（single-conclusion relation）と呼ぶものに限定しておく[5]。単肢関係とは、片や式の集合たち、他方で式たち、といった両者の間の任意の2項関係である。そして帰結関係とは、一定の条件をみたした特別な単肢関係のことだと定義していくが、それには複数の等価な方法がある。

まず意味論的な方法は、式に対する「解釈」の概念を定める即ち式がその解釈によって真となる、という事を定義[6]した上で、単肢関係（例えばR）が帰結関係であるとはΓ R A（Γは式の集合、Aは式）が成立するのは、Γの全ての要素が真になるような全ての解釈においてAも真となる時である事を意味する、とするのだ。

一方、統語論的な方法では、（ヒルベルト流提示法では）公理と導出規則を定めた上で、（典型的には、公理と規則に則ったステップ達によって前提たちから結論へと繋げられていく列として）

---

4 彼らは定理式ではなく帰結関係で、推論を捉えている、例えば「AとBからCが推論される」を「(A & B) ⊃ Cという式が定理である」ことで捉えるのではなく「A, B ⊢ Cが妥当な「シーケント」表現である」ことでもって捉える、という立場。ゆえに、彼らのいうフィルターは、古典論理として妥当な「シーケント」表現から、違和のあるものら、例えば「A, ¬A ⊢ B」などを取り除く為に用いられる。以下そのように御理解願う。

5 多肢（multiple-conclusion）の場合については同書の他、Scottの諸論文やGabbay 1981, Bochman 2001らを参照。

6 典型的には、論理定項（connective等）には固定した意味を（真理値表などにより）与える一方、残りの語彙は任意に（付値関数などにより）変動可能とすることで。

証明の概念を定め、単肢関係Γ R A が帰結関係であるとは、Γを部分集合として含んだ前提集合から A への証明が存在することを意味する、として定義する。

3 つ目の方法は、純粋に抽象的に、即ち、意味論や統語論とは独立に、R が以下の性質を持つ時、帰結関係と呼ぶ、として定義する：A ∈Γならば Γ R A（Overlap）、（Γ∪Δ）R A かつ全ての B ∈Δにつき Γ R B ならば Γ R A（Cut）、そして Γ R A ならば（Γ∪Δ）R A（Weakening）但しここでΔは式の集合、B は式である。

さらに 4 つ目の方法として、意味論的方法の一般化として、論理定項に対する意味も固定せずに解釈というものを考える（但し、解釈によって公理が真となり、規則が真理性を保存することは要求しておく）というものがある。

以上 4 つの定義法が全て同一の概念「帰結関係」を定めることは、この分野における基本的事実であり、以降、帰結関係 R はターンスタイル「⊢」で表記しよう。

Avron 1991 は、Kleene の 3 値論理を引き合いに出して以下のように言う。

3 値（{0, 0.5, 1}）の真理値表[7]において、1 のみを真（designated value）とし、0.5 と 0 は偽とすると、恒真な式は 1 つも無いことになる（詳細は略す）。一方、1 と 0.5 を真とした場合[8]、恒真な式たちの集合は、古典（2 値）論理の恒真式の集合と一致する（詳細はやはり略す）。つまり、恒真式（完全性を前提すれば定理式）の集合が即ち論理であるという立場では、Kleene の 3 値論理は、先の前者の場合は、定理集合が空なので、存在しない（？）或いは、空なる論理という事になるのか？そして後者の場合、Kleene の 3 値論理は、古典論理と同一という事になる。しかし古典論理がパラコンシステントでない事から、これは明らかに不合理であろう。

さて Gabbay 1973 は、彼が entailment logic と呼ぶものを帰結関係という視点から調べることを提唱する。なぜなら彼が採りあげる幾つかの例が、トートロジーを持たない論理であり、トートロジー（或いは定理）の集合として論理をみなす視点からでは相互に弁別できないからだ。ここでトートロジーの、よって「解釈」の定義は、先に帰結関係の 4 つ目の定義法として紹介したものを、Routley & Meyer が開発した 3 項的到達可能性関係可能世界フレーム意味論に援用したものに依っている。この、到達可能性関係として 2 項関係の代わりに 3 項関係を用いるフレーム意味論は、Routley, Meyer, Gabbay らがそれぞれ独立に着想に至ったようだが、前 2 者らは、主に、定理の集合とみなした弱い関連論理の解釈のために用いた。つまり公理系から導かれる定理式の集合と一致するように、妥当式（トートロジー）の概念を定めることによって[9]。つまり、少なくとも彼らの主著[10]においては Routley & Meyer の関心は、帰結関係としての関連論理ではなく、定理の集合としての関連論理にある。

---

7 例えば否定に関しては、0.5 は不動で、0 と 1 が入れ替わる、連言は数として小さい方、選言は大きい方になる、等々。

8 ゆえにパラコンシステントとなる。パラコンシステントとは、或る式 A があり、任意の B につき A, ¬ A ⊢ B とはならないこと、つまり或る A, B について A, ¬ A ⊢ B でないことを意味する（ここで ⊢は左辺が全て真なら右辺も真を意味することを先程の帰結関係の 1 つ目の定義法から思い起こそう）。A に 0.5、B に 0 を付値すれば、左辺が全て真、右辺が偽となるから、A, ¬ A ⊢ B ではなくなる。

9 フレーム各点での真理値評価法を定め、フレーム内の正規世界に相当する任意の点で真と評価されることでもって、そのフレームにおいて妥当式である、とする等。

10 Routley 他 1982 等。

こういった観方は、関連論理周辺においては珍しくなく実は多数派である。例外としては、ポーランド流の代数的な論理学の研究に携わる人々、例えば Wojcicki 1988 や Font & Rodriguez 1994 以外には、パラコンシステント論理のベルギー学派の立役者 Batens が一時期（80 年代）著した、関連論理に関する 2 本の論文[11] ぐらいであろうか。

とはいっても、単なる定理の集合としてではなく、帰結関係（統語論的にいえば derivability「導出関係」）という点について関連論理に関して考える時、様々な問題が残されている事について無関心でなかった研究者らは他にもいる。例えば Brady には *Rules in Relevant Logic I&II* という 2 論文があるが、I の方の p.113 で彼は標題にある（derived）rules とは deductions ないし derivations のことであると述べ、関連論理において従来注目されがちな定理ではなく見過ごされがちだった帰結関係（derivability）について、3 項関係可能世界フレームによる意味論的アプローチで[12] 分析している。

また、上出の Avron 1991 は、帰結関係についての一般的な立ち位置からの論文だったが、彼には、二部構成から成り、その第二部では Anderson & Belnap と Routley & Meyer のいずれからも一線を画した独特の関連論理を提唱する *Whither Relevance Logic?* という論文がある。そこでは既存の関連論理の問題点、彼が感じる迷走の原因を第一部で指摘し、第二部におけるオリジナルな着想へと繋げていっている。そして其の第一部で為される批判の 1 つに、derivability（proof from assumptions）の概念が Anderson & Belnap & Dunn らの主著作においては安定せず、少なくとも 5 種類の定義が散見されるという点がある。参考までに少し事情を見ると、「仮定からの証明」においては、仮定たちから結論へと至る、公理と規則に則った有限個のステップ達が存在するが、関連論理においては、古典論理も持つ Modus Ponens 以外に Adjunction と呼ばれる規則（A, B ／ A & B）が存在し、これら規則の使用に関して無条件なのか（つまり証明列の中で、この 2 つの規則は、先行する列メンバーに自由に適用して新たな列メンバーを作り出して良いのか）、それとも、規則を適用できる先行の列メンバーは定理式に限る（つまり仮定式やそれに依存するメンバーには適用できない）とするのか、その場合は、どちらの規則にこの制限を課すのか、あるいは両方にか、. . . といった可能性の組み合わせから、Avron の調べでは、Dunn & Restall の *Relevance Logic* 及び Anderson & Belnap の *Entailment vol.1* において 5 通りの定義が混在するということである。

Avron の批判は、第二部で己が提唱する「関連論理」への援護射撃的なもので、また其の論理も、帰結関係という視点から（少なくとも Gabbay のようには）深く掘り下げてはなく、この論文だけで、関連論理の帰結関係的視座からの研究へ直結する大きな示唆が得られる訳ではないだろう。

---

[11] 例えば、Batens & Van Bendegem の冒頭には、Anderson & Belnap の *Entailment* について、『導出可能性【derivability】という概念そのものについての直接的な関心は、本書ではごく僅かしか払われていない。Fitch 流の定式化の全ては、定理を証明する為に造られており、前提たちの集合から結論を導く為にではない。』と書かれている。「derivability」とは、先に挙げた Shoesmith & Smiley の帰結関係を定義するやり方の 2 番目、統語論的方法のことである。

[12] 例えば、規則（rule）が真理性を保存するのか、妥当性を保存するのか、またフレームの全てのポイント（可能世界）にてそうするのか否か、などの組み合わせで、規則を 5 種類に分類するなどして。

だが、何故 derivability の定義が 5 種類も存在するのかの理由の Avron による分析は、Brady の derived rules の複数種類への分類分析などと合わせて精査していくことで、「関連論理」という分野において、統語論的また意味論的に定義された帰結関係が、いかなる姿を見せるか、また先に紹介した Gabbay による、Shoesmith & Smiley の第四の方法による帰結関係定義の関連論理への応用と、どのような関りを見せるのか、といった点の解明につながり、代数的アプローチや Batens による少数の例外を除けば、比較的陽の目を見ることが少なかったこのテーマに、新たな光を当ててくれるのではないだろうか。そして究極的には、公理化が難しい WSS の諸成果についても斯様な視座から新たな定式化への示唆が得られる事を期待するものである。

（さわべこうへい　哲学哲学史・博士後期課程）

参考文献

Anderson, A.R. and N.Belnap. *Entailment vol.1*. Princeton UP, 1975.

Angell, R.B. “Three Systems of First Degree Entailment,” *Journal of Symbolic Logic* 42, 147, 1977.

Avron, A. “Simple Consequence Relations,” *Journal of Information and Computation* 92, 105-139, 1991.

“Whither relevance Logic?” *Journal of Philosophical Logic* 21, 243-281, 1992.

Batens, D. “Rich Relevant Logics Based on a Simple Type of Semantics”, *Logique et Analyse* 29, 437-457, 1986.

Batens, D. and J.P.Van Bendegem. “Relevant Derivability and Classical Derivability in Fitch-Style and Axiomatic Formulations of Relevant Logics”, *Logique et Analyse* 28, 21-31, 1985.

Bochman, A. *A Logical Theory of Nonmonotonic Inference and Belief Change*. Springer, 2001.

Brady, R.T. “Rules in Relevant Logic I”, *Journal of Philosophical Logic* 23, 113-137, 1994.

Diaz, M.R. *Topics in the Logic of Relevance*. Philosophia Verlag, 1981.

Dunn, J.M. and G. Restall. “Relevance Logic”, in *Handbook of Philosophical Logic 2nd ed. vol.6*. Kluwer, 2002.

Font, J.M. and G.Rodriguez. “Algebraic Study of Two Deductive Systems of Relevance Logic”, *Notre Dame Journal of Formal Logic* 35, 369-397, 1994.

Gabbay, M.D. “Applications of Scott’s Notion of Consequence to the Study of General Binary Intensional Connectives and Entailment.” *Journal of Philosophical Logic* 2, 340-351,1973.

Semantical Investigations in Heyting’s Intuitionistic Logic. Reidel, 1981.

Gemes, K. “A New Theory of Content I”, *Journal of Philosophical Logic* 23, 595-620, 1994.

“A New Theory of Content II”, *Journal of Philosophical Logic* 26, 449-476, 1997.

Rivenc, F. *Introduction a la logique pertinente*. Presses Universitaires de France, 2005.

Routley, R., et al. *Relevant Logics and their Rivals, vol.I*. Ridgeview, 1982.

Schurz, G. “Relevant Deduction”, *Erkenntnis* 35, 391-437, 1991.

Scott, D.S. “On Engendering an Illusion of Understanding”, *Journal of Philosophy* 68, 787-807, 1971.

"Rules and Derived Rules", in *Logical Theory and Semantic Analysis* ed.by Stenlund, 147-161, Reidel, 1974.

"Background to Formalization", *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics* 68, 244-273, 1973.

Shoesmith, D.J. and T.J.Smiley. *Multiple-Conclusion Logic*. Cambridge UP, 1978.

Shramko, Y. *Intuitionismus und Relevanz*. Logos Verlag, 1999.

Stelzner, W. "Relevant Deontic Logic", *Journal of Philosophical Logic* 21, 193-216, 1992.

Sylvan, R., et al. *Relevant Logics and their Rivals, vol. II*. ed.by Ross Brady. Ashgate, 2003.

Weingartner, P. and G.Schurz. "Paradoxes Solved by Simple relevance Criteria", *Logique et Analyse* 113, 3-40, 1986.

Wojcicki, R. *Theory of Logical Calculi*. Kluwer, 1988.