The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	二次元乱流境界層に関する研究
Author(s)	辻, 裕
Citation	大阪大学, 1974, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/1006
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

二次元乱流境界層に関する研究

昭和48年12月

辻　　裕

目　　次

記　　号 …… 1

第1章　緒　　論 …… 7

1.1　ま　え　が　き …… 7

1.2　従来の研究の概要 …… 9

1.2.1　基　礎　的　研　究 …… 9

1.2.2　応　用　的　研　究 …… 10

1.3　本研究の概要 …… 23

第2章　平衡乱流境界層 …… 29

2.1　ま　え　が　き …… 29

2.2　第　1　の　方　法 …… 31

2.2.1　混合距離分布 …… 31

2.2.2　せん断応力分布 …… 34

2.2.3　平衡乱流境界層の速度欠損曲線 …… 41

2.2.4　剥離寸前流れの速度欠損曲線 …… 44

2.2.5　円管乱流の速度欠損曲線 …… 46

2.2.6　渦　粘　性　係　数 …… 47

2.3　第　2　の　方　法 …… 48

2.3.1　速度欠損に対する方程式 …… 49

2.3.2　べ　き　級　数　解 …… 50

2.4　結　　論 …… 58

第３章　粗面乱流境界層 …… 61
3.1　まえがき …… 61
3.2　解析 …… 61
3.2.1　y 座標 …… 61
3.2.2　速度欠損曲線 …… 62
3.2.3　壁法則と粗さ関数 …… 67
3.2.4　摩擦則 …… 69
3.3　結論 …… 75

第４章　逆圧力勾配非平衡乱流境界層発達計算 …… 77
4.1　まえがき …… 77
4.2　補助方程式 …… 80
4.3　計算方法 …… 86
4.4　計算結果 …… 91
4.5　結論 …… 97

第５章　零圧力勾配乱流境界層におよぼす主流の乱れの影響 …… 99
5.1　まえがき …… 99
5.2　実験装置および方法 …… 102
5.2.1　風胴および境界層測定板 …… 102
5.2.2　乱流格子 …… 104
5.2.3　流速測定装置 …… 105
5.3　実験結果および考察 …… 106

5.3.1 主流の乱れ …… 106
5.3.2 壁面静圧分布および壁面せん断応力 …… 111
5.3.3 平均速度分布 …… 113
5.3.4 せん断応力分布 …… 119
5.3.5 混合距離および渦粘性係数 …… 122
5.4 解析 …… 123
5.5 結論 …… 129

第6章 逆圧力勾配乱流境界層におよぼす主流の乱れの影響 …… 131

6.1 まえがき …… 131
6.2 実験装置 …… 133
6.3 実験結果および考察 …… 135
6.3.1 主流の乱れ …… 135
6.3.2 静圧分布 …… 138
6.3.3 壁面せん断応力 …… 138
6.3.4 運動量厚さおよび形状係数 …… 140
6.3.5 全圧分布と流れ関数 …… 141
6.3.6 ½乗法則 …… 143
6.3.7 平衡乱流境界層との比較 …… 147
6.3.8 乱れに関する考察 …… 148
6.3.9 粘性消散長さ …… 152
6.4 結論 …… 156

第7章　総　　括 …… 157

謝　　辞 …… 160

参　考　文　献 …… 161

記　　号

A　　$= I_2 / I_1^2$

A_E　平衡乱流境界層に対するA

A_0　Aの初期値

a　境界層外縁または円管中心部における混合距離

B　　$= \frac{2}{c_f} \times H \times \theta$

B_0　l_0^*に依存する定数（（3.8）′式参照）

B_1　l_0^*に依存する定数（（3.8）′式参照）

B_2　l_0^*に依存する定数（（3.8）′式参照）

C　　$= \frac{\delta}{\tau} \frac{dJ}{dx}$

C_0　定数＝5.1

C_1　速度欠損における定数（（2.20）式および図（4.8）参照）

C_r　粗さ関数における定数（（1.7）式参照）

C_t　乱れの減衰法則における勾配（（5.4）式参照）

c_f　摩擦係数$= \tau_w / \frac{1}{2} \rho u_e^2$

D　　円管乱流の速度欠損式における定数$= \left(\frac{2a}{\kappa - 2a} \right)^{\frac{1}{4}}$

E　　平衡乱流境界層の速度欠損式における定数

$= \left(\frac{2a}{\kappa - 2a} \right)^{\frac{1}{2}}$

$E(k)$　三次元エネルギ　スペクトル

F' $=\dfrac{u_e - u}{u_p}$

f' 速度欠損$=\dfrac{u_e - u}{u_\tau}$

$f_u(k)$ u'の一次元エネルギ スペクトル

G $=I_2/I_1$

g' 修正速度欠損$=\dfrac{u_e - u}{J u_\tau}$

H 形状係数$=\delta^*/\theta$

h 粗さ素子の高さ

h^+ $=\dfrac{h\,u_\tau}{\nu}$

I_1 $=\displaystyle\int_0^\infty \frac{u_e - u}{u_\tau}\,d\eta$

I_2 $=\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{u_e - u}{u_\tau}\right)^2 d\eta$

I_{1E} 平衡乱流境界層に対するI_1

i 間欠係数（*intermittency factor*）

J $=I_1$（ただし、内層の速度分布を外層の分布曲線を延長したもので置きかえた速度分布に対し、積分を行なう。図（5.20）参照）

K 無次元渦粘性係数$=\nu_T/u_\tau J\delta$

K' 一次元エネルギ スペクトルにおける定数（（6.11）参照）

k 波 数

L 粘性消散長さ（*dissipation length*）$=\dfrac{(\tau/\rho)^{\frac{3}{2}}}{\epsilon_d}$

l　　混合距離

l_0　　原点における混合距離

l^*　　無次元混合距離 $= l / \delta$

l_0^*　　$= l_0 / \delta$

l_0^+　　$= l_0 u_\tau / \nu$

l_ε　　乱れの特性長さ（（6.14）式参照）

M　　乱流格子のメッシュの大きさ

M_c　　合流型超幾何関数

m　　$= \delta_0^{*2} \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{-1}{u_e} \frac{du_e}{dx} \right) \right\}$

$N(m,n)$補助方程式における関数（（4.12）式参照）

n　　$= 1 - \frac{I_1}{I_{1E}}$

p　　静　圧

p_T　　全　圧

Q　　定数＝1.41（（6.3）式参照）

q　　$= \frac{1}{2(1-C)}$

q'^2　　乱れエネルギ　$= \overline{u'^2} + \overline{u'^2} + \overline{w'^2}$

R_{δ^*}　　$= u_e \delta^* / \nu$

R_{l_ε}　　$= l_\varepsilon \sqrt{\overline{u'^2}} / \nu$

S　　粗さ関数

S_f　　*Solidity factor*

T　すべり速度を与える式における定数（（6.4）式参照）

t　ステップの高さ

t_1　$=\int_0^\infty g' d\eta$

t_2　$=\int_0^\infty g'^2 d\eta$

U　$=C_0-u_1^+$

u　流れ方向の平均速度

u'　流れ方向の変動速度

u_e　主流の速度

u_p　圧力速度$=\sqrt{\frac{\delta^*}{\rho}\frac{dp}{dx}}$

u_τ　摩擦速度$=\sqrt{\tau_w/\rho}$

u^+　$=u/u_\tau$

u_1　すべり速度（（3.14）式参照）

v　厚さ方向の平均速度

v'　厚さ方向の変動速度

$W(\eta)$　後流関数（図（5.23）参照）

w'　スパン方向の変動速度

x　流れ方向の座標

x'　ステップ前面から上流側へ測った距離

x'_{step}　剥離点におけるx'

y　厚さ方向の座標

y_c　対数法則領域と½乗法則領域の接続点におけるyの値

y_i　内層と外層の接続点における y の値

y^+　$= y u_\tau / \nu$

y_1　$u^+ = y^+$ と $u^+ = \frac{1}{\kappa} l n y^+ + C_0$ の交点，11.12

y_1^+　$= y_1 u_\tau / \nu$

z　$= \eta^2 / 4 K J^2$

α　壁面近くにおけるせん断応力勾配 $= \frac{\partial(\tau/\rho)}{\partial y}$

β　圧力勾配パラメータ $= \frac{\delta^*}{\tau_w} \frac{dp}{dx}$

γ　$= \sqrt{c_f / 2}$

Δu　すべり速度（（6.2）式参照）

δ　境界層厚さ

δ^*　境界層排除厚さ $= \int_0^\infty (1 - \frac{u}{u_e}) dy$

ε　粗面乱流境界層における y 座標原点補正量

ε_d　乱れの粘性消散量

η　$= y / \delta$

η_c　$= y_c / \delta$

η_m　最大せん断応力 τ_{max} を与える η

η_1　$= I_1 y_1^+ / R_\delta^*$

η'　$= \frac{y + \varepsilon}{\delta + \varepsilon}$

θ　境界層運動量厚さ $= \int_0^\infty \frac{u}{u_e} (1 - \frac{u}{u_e}) dy$

λ　$= \frac{\delta}{\tau_{max}} \cdot \frac{dp}{dn}$

κ　　$Ka'rwa'n$ 定数 $= 0.40$

ν　　動粘性係数

ν_T　　渦動粘性係数

ρ　　流体の密度

τ　　せん断応力

τ_{max}　最大せん断応力

τ_w　　壁面せん断応力

$\varphi(\beta)$　　$= \tau_{max} / \tau_w$

ψ　　流れ関数 $= \int u\,dy$

第 1 章　緒　　論

1.1 まえがき

よく知られているように、臨界レイノルズ数を越えて不安定となった層流境界層は、遷移領域で非線形性、不規則性等の複雑な運動を加えながら、乱流境界層へと移行する。飛行機、船舶等の乗物表面の境界層は、レイノルズ数が非常に高いため、ほとんどの部分が乱流境界層となっている。また流体機械内における境界層は、種々の外乱にさらされているため、乱流境界層となっている場合が多い。乱流境界層になると、境界層厚さや摩擦が層流境界層に比べて明らかに増加するので、その確認は比較的容易である。

乱流を分類すれば、至る所平均速度が一定のものと、勾配をもつものとに大別される。前者は乱流格子を一様流中に置くことによって得られ、一様等方性乱れの近似として見ることができる。後者は乱流せん断流れと呼ばれ、乱流境界層はその中の一種類である。円管流、後流、噴流等、境界層の他にも乱流せん断流れはいくつかあるが、乱流境界層が構造的には最も複雑である。

後流や噴流のような自由境界の乱流では、乱れの構造は、その層全般にわたって大きく変化しない。円管流の場合、せん断応力の勾配と圧力勾配のつり合いが厳密に成り立つことがある程度解析を容易にしている。乱流境界層の壁に近い部分は円管乱流と、外側に近い部分は後流と類似した構造を有している。通常、壁に近い部分を内層と呼び、外側に近い部分を外層と呼ぶ。内層の中でも、非常に壁に近く、粘性力が支配的となる部分を粘性底層と名づけている。内層は主流の条件に対して比較的鈍感で、壁面上の条件に大きな影響を受けるしかし、内層では乱れのエネルギのつり合いに関して局所的な平衡が成り立つので、壁面上の条件の変化に対する応答ははやい。そして速度分布は簡単な法則に従う。一方、外層は後流領域または *historical region* と呼ばれる

こともあり、主流の条件の直接的な影響を受けるばかりでなく、上流側の条件の影響が長く残るため、その一般的な取扱いは困難である。これは外層において支配的な渦が大きく、かつ流れ方向に長いことによる。

多くの実用的な問題においては、流体の運動は乱流状態であることが多いので、古くから研究者の興味を引いてきた。現象的な解明は時代と共に着実に進歩を遂げてきたが、理論的に解明されている部分はわずかである。厳密にいえば、まだ乱れに関する根源的な説明はなされていない。このことは層流における問題と根本的に異なる。乱流境界層の運動方程式についてみれば、平均速度場を支配する方程式には必ずレイノルズ応力が関与し、レイノルズ応力に対する方程式には、さらに高次の相関量が関係する。この状態は乱流境界層に限らずあらゆる乱流に共通している。最も理想化された一様等方性乱れに対しては、かなり高度に理論の展開がなされているが、この原理的な困難に対し、最終的な解決はまだなされていない。したがって、乱流境界層の問題においては、厳密な理論の展開は現段階では不可能である。

したがって、乱流境界層に対する解析を行なう場合、必然的に用いられる方法は、乱流のモデル化である。本研究においても用いられる混合距離理論や渦粘性理論は代表的なもので最も古くから知られている。これらのモデルでは最終的には実験定数の助けを借りて解析を進めるので、乱流境界層に対する解法は、すべて半経験的である。これらの半経験的理論は、原理的な考慮を欠くため、適用範囲が限定され、普遍性を保ちにくい。半経験的理論を用いた従来の解析は、単純な条件におかれた乱流境界層を対象としたものが多く、実際に問題となる種々の外乱の作用がある場合の解析は少ない。本研究では、逆圧力勾配、表面粗さ、主流の乱れ等が二次元非圧縮性乱流境界層に作用する場合の速度分布、表面摩擦等について解析を試みる。主流の乱れと乱流境界層の関係については、実験的研究の例が比較的少ないため、本研究においてはおもに実験

を行ない、主流の乱れの影響を調べる。

1.2 従来の研究の概要

1.2.1 基礎的研究

工学的に解決をせまられてきた問題に対する研究が古くからあり、一方乱れの運動の本質を解明しょうとする研究の歴史も長い。応用的研究と基礎的研究の間の断絶が大きいことは乱流の研究の特徴であろう。目的意識や問題の取り扱い方の違いが両者の交流の大きな障害となっている。しかし近年、乱れの構造の物理的な把握を基礎とした実用的解法の必要性が痛感されており、基礎研究の成果を積極的に取り入れる姿勢は徐々にあらわれている。

乱れの理論においては、最も本質的な解決が、一様等方性乱れのように理想化された場合ですら困難であるので、乱流境界層の基礎的研究は、今のところ、乱れに関する実験事実の積み重ねに依存せざるを得ない。したがって他の多くの物理学の分野と同様に、実験技術の進歩と共に、基礎研究の発展がある。

熱線風速計の普及する前後で実験的研究の傾向はかなり異なる。いうまでもなく熱線風速計により乱れそのものの定量的な観測が可能となった。ちょうど同じ時期に一様等方性乱流理論が一応の段階に達したので、乱流せん断流れの中の乱れをその理論の結果と比較することが盛んに行なわれた。(32)、(33)、(38) しかし普遍平衡領域と呼ばれる一様等方性乱流の成り立つ波数領域が、乱流せん断流れの場合にも存在することを示すだけに終り、その後この方面の発展はあまりない。しかし、相関係数の測定結果とよく合う渦の模型を作ることにより、乱流せん断流れの中の大きな渦の形はある程度わかるようになった。(63)

近年、乱れのデーターの処理技術のめざましい進歩により、従来のような

乱れの平均量を扱うだけでなく、瞬間の乱れを詳しく調べることが可能となってきた。そしてその結果、乱流境界層中の乱れの規則的な部分と不規則な部分の区別が可能となり、現象的解明はますます進みつつある。この規則的な部分に対し、層流安定理論において用いられるのと同じ手法での説明が試みられているがまだ成功していない。(3)、(26)、(53) 熱線風速計の出現が飛躍的な進歩を与えたと同様に、データ処理技術の発達もまた多くの情報を提供することは確実である。その他に、圧力変動の測定技術、定量化と可視化を兼ね備えた水素気泡技術によってわかった事柄も数多い。特に後者は、壁近くの運動を非常に詳しく知る手段となった。すなわち、乱流境界層中の乱れのエネルギの供給のメカニズムがある程度明らかとなり、従来の粘性底層のイメージは大きく変った。(31)、(35)

1.2.2　応用的研究

乱れの性質を積極的に利用しょうとする研究は、燃焼、熱伝達、化学反応等の問題が関連してくる場合には多いが、乱流境界層の応用的研究のほとんどは受動的立場に立っている。すなわち、与えられた環境下で乱流境界層がどのように振る舞うかとか、工学的には不利な要素である摩擦や剥離現象に対し効果的な境界層制御の方法に関する研究が多い。

応用的研究は十分に基礎的研究の結果を活用していないが、これは工学的に問題となる乱流境界層に課せられている条件が、一般に複雑すぎることによる。工学的に研究される乱流境界層は、一般に複雑な外乱をいくつも含んでいるので、これらの外乱をすべてブラックボックスの入力と考え、その影響を出力として取り出し、半経験的に法則を見い出す方法が広く用いられているのが現状である。

応用的研究においては、最終的に求める必要のあるものは、境界層厚さ、

摩擦、剥離特性等である。半経験的理論はおもに平均量を扱う。平均速度分布の性質がわかれば境界層方程式を通じて境界層の発達法則や摩擦則は割合容易に知ることができる。したがって半経験的理論においては、まず平均速度分布に対し、その法則性を見い出すことが研究の第一歩となる。今までに法則性のわかっている場合は、主流の条件に制限がある場合や、境界層の内層における場合である。そのような場合に対し、混合距離理論や渦粘性理論によって説明することにより、統一的にとらえることが従来の解析の主要な目的であったが、本研究においても従来と同じ方向に研究を進め、古典理論による解析の可能性を追求する。

次に、本研究と特に関連の深い速度分布、表面粗さの問題、境界層発達計算および主流の乱れの影響について、従来の研究の概略を述べる。

(i) 速　度　分　布

一般に、壁面近くを除いて乱流境界層の構造は上流の条件に依存するため、乱流境界層の速度分布、せん断応力分布は局所的な因子だけでは決定できない。内層では、実験結果とよく一致する普遍的な速度分布則、いわゆる壁法則が知られている。すなわち、内層では、速度はその位置における壁面摩擦応力、壁面からの距離、流体の密度および粘性のみによって決定される。逆圧力勾配が非常に強い場合を除けば、内層における速度分布は次式のように表わすことができる。

$$u^{+} = f(y^{+}) \qquad (1.1)$$

内層では、乱れのエネルギの生成と粘性消散の局所的な平衡が成り立つことが構造を簡単にしている。壁法則の誘導は、混合距離理論、次元解析、乱れエネルギ方程式に基づく方法等、数種類あり、内層における平均速度分布則に関しては、主要な問題は解決されている。

粘性底層では（1.1）式は次式に漸近する。

$$u^+ = y^+ \qquad (1.2)$$

粘性底層を除いた内層の大部分で、（1.1）は次に示す対数直線関係となる。

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C_0 \qquad (1.3)$$

逆圧力勾配が強くなければ、内層の対数法則は成立するが、逆圧力勾配が強くなり壁面せん断応力が小さくなると、対数法則の成立する領域がせばまり、それに代って1/2乗法則の成立する領域が現われる。極端な場合には対数法則は完全に破れる。対数法則、1/2乗法則を包括的に表現する速度分布の誘導が*Mellor*と*Gibson*[44]、*Townsend*[64]、*McDonald*[43]によって行なわれた。

逆圧力勾配が強くない場合には適当な速度尺度である摩擦速度（*friction velocity*）u_τは剥離点で零となるため、逆圧力勾配の強い場合には、圧力速度（*pressure velocity*）u_pが適当な速度尺度として用いられる。1/2　乗法則においては速度分布を決定する重要なパラメータとして、$\partial\tau/\partial y$があるが、$\partial\tau/\partial y$の正確な決定は現在まだ困難であり、今後解決せねばならない問題である。

一方、外層では、主流の圧力勾配、乱れ、上流側の歴史等のさまざまの要素が直接影響するため、一般には平均速度分布に関して普遍的な法則は存在しない。古くは単純な指数法則を乱流境界層の全領域に適用し、種々の実用計算を行なってきた。現在においても、おゝよその計算では指数法則の単純さ故の有用性は失なわれていない。

しかし粘性底層、対数領域、外層等、異った流れの構造を有するそれぞれの領域に対し、同一の速度、長さ尺度を適用することは無理であるため、指数法則は利用するには便利であるが、その限界は明らかである。

外層部における速度と主流速度との差で速度分布を表わす速度欠損法則

が提案されたことにより指数法則から飛躍することが可能となった。まず零圧力勾配乱流境界層において、レイノルズ数が十分大きい場合、$(u-u_e)/u_\tau \sim \eta$ がレイノルズ数によらず相似形となることが示された。(58)

Coles(13) は外層部の速度分布が後流の速度分布と類似していることより、後流関数を導入し、一般の乱流境界層の速度分布の表現に有効な手段を与えた。後流関数$W(\eta)$を用いると、対数領域および外層における速度分布は次式で与えられる。

$$\frac{u-u_e}{u_\tau}=\frac{1}{\kappa}\ln\eta+\frac{\pi(x)}{\kappa}\{W(\eta)-2\} \qquad (1.3)$$

上式における$\pi(x)$は零圧力勾配で十分に発達した流れに対しては0.55の値をとる。(14) 逆圧力勾配の流れに対しても$W(\eta)$は不変であり、$\pi(x)$の値を適当に与えると実験結果とよく一致する。現在においても(1.3)式の表現は広く利用されている。

*Coles*とほぼ同じ頃、*Clauser*(10)、(11) は渦粘性の概念を用いて、速度欠損則の形状を計算した。また、特殊な圧力勾配、すなわち圧力勾配パラメータ$\beta=(\delta^*/\tau_w)(dp/dx)$が流れ方向に一定の場合、速度欠損の形状が$\beta$にだけ依存し、流れ方向に相似であることが実験的にも確かめられた。このような外層においても相似な速度分布を有する流れは一般に平衡乱流境界層と名づけられている。*Clauser* は外層における渦粘性を境界層排除厚さと主流の速度で無次元化した値がβの値に関係なく一定であることを示した。

速度欠損が相似であることは、境界層方程式を速度欠損について表現すればηを独立変数とする常微分方程式となることを意味する。*Townsend*(63) は主流が次式のように変化する場合、境界層方程式が常微分方程式となることを示し、平衡乱流境界層を自己保存流れと呼んだ。

$$u_e \propto x^{-a} \qquad (1.4)$$

このように平衡乱流境界層の成立の条件はβ＝一定と（1.4）式の2種類あるが、*Bradshaw*[6]によって、それらの違いは実験においては誤差の範囲内であることが述べられた。平衡乱流境界層の実験例としては、*Clauser*[10]による$\beta=2$および$\beta=8$の場合、*Bradshaw*[6]による$\beta=0.9$、$\beta=5.4$、*Herring* と *Norbury*[23]による$\beta=-0.35$、$\beta=-0.53$の負圧力勾配の場合が報告されている。

以上述べたように外層において相似則がわかっているのは、平衡乱流境界層だけである。外層において無次元化された渦粘性係数が定数であることは他の一般の場合に比べ、著しく解析を容易にする。*Clauser* は層流境界層の速度分布を用いて外層部の分布形状を求め、*Townsend* は零圧力勾配の場合に外層の分布に対し解析的表現を与えた。これまでになされた最も詳細な解析は*Mellor* と *Gibson*[44]によるものである。その解析においては、粘性底層から外層までの全領域の平均速度が内層では混合距離理論に基づき、外層部では渦粘性を用いて求められている。*Mellor* と *Gibson* の計算結果は、*Herring* と *Norbury*[23]による負圧力勾配の平衡乱流境界層の実験結果ともよい一致を示す。

Prandtl による混合距離理論の拡張に関する研究は多く、それらについては文献（24）、（56）に解説されている。しかし、それらの研究のほとんどは粘性底層と対数領域の間の遷移領域の速度分布を求めることを目的としている。外層に対する混合距離理論の適用の例は少ないが、流れ方向に静圧勾配がない場合、速度分布の相似性がはやくからわかっていたので、*Uchida* と *Matsumiya*[70] や *Matsui*[40] によって混合距離理論による速度分布の誘導がなされている。組面乱流境界層に対しては *Furuya* と *Fujita*[19] が実験より混合距離を求め、計算も試みている。

任意の圧力勾配のある場合の外層における混合距離理論の拡張は *McDonald* と *Camara*[36] が行なっているが、実測されたせん断応力分布と混合距離を用いて表わした分布は一致が悪い。

本論文、第２章では、平衡乱流境界層に対し、混合距離理論を適用し、速度欠損分布を求める。

(ii) 表面粗さの問題

粗面上の乱流境界層の問題は、摩擦抵抗に関して実用的に非常に重要であるため、円管流の場合と同様、数多くの研究がなされてきた。実際の物体表面の粗さの形状は種々雑多でその形を規定する因子はあまりにも多い。形だけでなく、その分布状態、密度等も重要な因子である。一般の粗さに対し、流体工学者が主に研究の対象に選んだ粗面は砂粒粗面であった。*Nikuradse* の砂粒管の研究[48] はレイノルズ数や砂粒粗さの種類を広範囲かつ、系統的に変化させており、以後の粗面上の流れの研究の基礎を与えていることで有名である。

粗面乱流境界層に関する系統的な研究としては、古屋等[17]、[18] による全網粗面、二次元針金粗面上の場合や、*Moore*[45] や *Perry*[49]、[51] 等による長方形や正方形断面を有する二次元粗面の実験等がある。これらはいずれも流体として空気を用いている。古屋等は金網粗面として針金直径が0.17㎜から1.08㎜、針金中心間距離と針金直径の比が約３から９の範囲にわたるものを用いている。そして主流の流速を約14 m/s、22 m/s の２種類の状態で実験を行なった。二次元針金粗面としては直径２㎜の鋼線を主流に対し垂直にならべたものを用い、針金中心距離と直径の比、すなわちピッチ比を１から６４に変化させて実験を行なった。*Moore* は一辺の長さが 3/2 in 、1/2 in 、1/8 in の正方形断面の粗さ素子をピッチ比４に並べた粗面について実験を行なった。主流の流速を

30 ft/s、60 ft/s、80 ft/s の三種類に変えている。。*Perry* 等は 1 in、1/2 in、1/8 in の高さの長方形断面の粗さ素子を用い、逆圧力勾配のある場合についても実験を行なった。二次元粗面では高さの他にピッチが主要なパラメータとなり、乱流境界層との関係は、砂粒粗面の場合に比べ一般性を欠く。

粗面乱流境界層の整理法としてこれまで広く採用されているのは、*Clauser*[11] によって提案された対数則に基づく方法である。粘性底層は粗面上では極端に粗さが小さい場合を除いて一般には存在しない。粗面上の流れにおいても対数領域が存在することは、対数法則の普遍的性質を意味する。対数法則による整理方法を簡単に述べると次のようになる。

粗面乱流境界層における壁法則は、y 座標の原点を適当に選べば次式で与えられる。

$$u^{+}=\frac{1}{\kappa}\ln y^{+}+C_{0}-S \qquad (1.5)$$

上式における S は粗さ関数と呼ばれるもので、従来の研究により無次元粗さ高さ h^{+} の関数とされている。内層と外層が重復する領域では一般に速度欠損は次式で与えられるが、粗面の場合にも、この関係は成立する。

$$\frac{u-u_{e}}{u_{\tau}}=\frac{1}{\kappa}\ln\eta+C_{1} \qquad (1.6)$$

古屋等の実験により、粗さによってわずかに C_1 の値が変化することが示されている。原点の補正は（1.5）、（1.6）のどちらに基づいても同じである。S は h^{+} の範囲によって異なる関数関係を示す。砂粒粗面の場合には S と h^{+} は次のような関係を示す。すなわち $h^{+}<5$ では流体力学的滑面と呼ばれ、$S=0$ となり粗さの影響は全く表われない。したがって、この値より表面粗さを少なくしても摩擦に関し何ら利益をもたらさない。$h^{+}=5$ は粘性底層の厚さの程度である。$h^{+}>70$ の粗さの範囲を完全

粗面領域と呼び、そこではSは次式で与えられる。

$$S=\frac{1}{\kappa}\,ln\,h^{+}-C_{r} \qquad (1.7)$$

砂粒粗面ではC_rは3.5の値をとる。C_rは一般には、粗さ要素の高さ以外のすべての因子に依存する量である。(1.7)式を(1.5)式へ代入すれば

$$u^{+}=\frac{1}{\kappa}\,ln\,\frac{y}{h}+C_{0}-C_{r} \qquad (1.8)$$

となり、無次元速度u^{+}に粘性が関与しなくなる。$5<h^{+}<70$を遷移領域と呼んでいる。(1.5)式に基づいて砂粒粗面の場合と同じSを与えるhを等価砂粒粗さと呼び、種々の粗面を統一的に扱う方法がとられている。

以上の方法においては速度分布の対数直線関係を前提としているため、y座標の原点補正を避けることができない。補正された原点の位置は、粗面素子の山と谷の間に限らず、時には壁面の内側にとらねばならない場合もある。*Nikuradse*は彼の実験データの整理の際、砂粒の体積の総和を平板の面積で除して砂粒の突起による平均の高さを求め、その位置を原点に選んだ。しかし砂粒以外の粗さに同様の補正を施こしても、対数直線関係が得られない場合が多い。原点補正量もまた粗面を規定する多くの因子の関数と考えられる。古屋等は二次元針金粗面において原点補正量とピッチの関係を調べ、最大の補正を必要とするピッチが8であり、その前後で補正量が減少することを明らかにしている。

以上が粗面乱流境界層について、これまでに確立され、広く利用されてきた方法の概略である。以上の方法において*Perry*等[51]は、ある種の粗面に対してはh^{+}が十分大きい場合でも(1.7)式が満たされないことを指摘した。粗面壁の近傍で異なった流れ模様を示す二種類の粗面につい

ての実験によって、そのことが明らかとなった。一つは*Clauser*による粗さ関数式（1.7）式を完全粗面領域で示すものであり、*Perry*等はそのような粗さのことを*k*型と呼んだ。他の一つは完全粗面領域においても（1.7）式を満たさない。そのような粗さを*d*型と呼んだ。*k*型と*d*型の流れの違いは次の通りである。*k*型は粗さ素子間の間隔が大きく、そのために粗さ素子の高さに比例した大きさの渦が粗さ素子の山からはき出される。一方、*d*型は粗さ素子が互いに密接に配置されており、そのために渦が粗さ素子の間の溝に閉じこめられ、*k*型のようにはき出される渦がほとんど無い。*Perry*等は完全粗面領域では*k*型、*d*型共に粗さ関数が次式で与えられることを示した。

$$S=\frac{1}{\kappa}\ln\varepsilon-C_r' \qquad (1.9)$$

上式においてεは対数法則を満たすように補正した原点と粗さ素子の頂点の間の距離である。

実験的研究や上述した整理法に関する考察に比べ、粗面乱流境界層に関する解析の例は少ないが、*Furuya*と*Fujita*[19]および*Rotta*[54]による研究が知られている。*Furuya*と*Fujita*はせん断応力分布に粗さの影響を考慮し、混合距離理論を用いて速度欠損曲線を求めている。そして原点補正後もわずかに粗面と滑面で異なる速度欠損分布を示す彼等自身による実験結果に対し解析を試みている。*Rotta*は内層の速度分布を導く際に、原点において零でない混合距離を仮定し、原点において$u=0$なる境界条件を与えて、粘性底層と対数領域の間の遷移領域における分布曲線を求めている。

(iii) 境界層発達計算

本論文で述べる発達計算とは、ある位置における境界層の特性がわかっ

ていて、流れ方向のすべての位置における圧力勾配が与えられたとき、以後の境界層の特性を予測する計算のことである。云いかえれば、問題における入力は、ある位置 x_0 における初期値と流れ方向の主流の状態であり、出力、すなわち得ようとする量は、通常、形状係数 H、運動量厚さ θ、摩擦係数 c_f である。

運動方程式に基づいて計算を行なうのであるが、運動方程式だけでは方程式系が閉じていないので、通常、摩擦則および補助方程式と呼ばれる式を仮定する。剥離点近くでなければ対数法則を利用した摩擦則は実験値とよく一致するので、摩擦則としてはそれを用いるのが普通である。実用的な観点からは、剥離点近傍こそ研究の必要のある領域であるので、そのような場所における摩擦則の確立は、今後解決せねばならない問題として残されている。

発達計算に関する研究例は、実に数多くあり、それら多くの研究例のレビューに関してもまた、いくらかの人々が行なっている。(25)、(36)、(55)、(56)、(62)

1968年に *Stanford* 大学で行なわれた会合は、従来の方法を大がかりに比較、検討を行なったことで有名である。これまでの方法を大きく分けると、積分法か微分方程式を扱うか、および平均速度場だけを扱うか、乱れ成分をも扱うかといった大きな分類ができる。

境界層方程式を y 方向に積分すると、運動量厚さ、排除厚さ、摩擦係数に関する常微分方程式が得られる。これは *Ka'rwa'n* の運動量積分方程式でこれまでの発達計算において、基礎方程式として、最も多く使われてきた式である。この式は境界層の内部構造に無関係に成り立つが、このことはいいかえれば、乱流の性質が隠されてしまうことになる。したがって乱流境界層であることを特徴づける式を必要とする。その際、摩擦係数に関する式や、補助方程式が乱流特有の性質を示す役割を果たす。補助方程式と

しては古くは、形状係数に対する全く経験的な式を用いていた。その後、平均流のエネルギ式を用いたり、境界層方程式のモーメントの積分を行なって、補助方程式を導く方法が用いられた。その他に境界層外縁部における乱れの *entrainment* に関し方程式を仮定する方法も考えられている。最近では乱れのエネルギ式を用いる方法が良好な結果を与えている。

直接に境界層方程式を解く方法では、方程式中のせん断応力に対し仮定を置く。*Bradshaw* 等はせん断応力を乱流エネルギと定数の積で表わし乱流エネルギ方程式と境界層方程式を連立させ、よい結果を得ている。それに対し渦粘性や混合距離を用いた方法では、それらの量が一般の乱流境界層ではどのような値をとるか不明であるので、強い圧力勾配の存在する場合には計算結果と実験との一致はよくない。

本論文の第4章では、第2章の結果を利用して、この問題に対し新らしい解法を試みる。

(V) 主流の乱れの影響に関する研究

主流の乱れに関する問題として、これまでなされてきたおもな研究は、乱流遷移と主流の乱れの関係、円柱まわりの流れや平板境界層の熱伝達と主流の乱れの関係、そして主流に強い乱れを有する乱流境界層に関する研究等である。遷移のような不安定な現象に対しては主流の乱れは顕著な影響を及ぼし、臨界レイノルズ数は主流の乱れによって非常に大きな変化をうける。層流境界層の遷移に影響を持ちはじめる主流の乱れの程度は約0.1％である。理論的に予測された *Tollmien－Schlichting* 波が長い間発見されなかったのが風胴の残留乱れのためであったことはよく知られているとおりである。境界層遷移に及ぼす主流の乱れの影響に関する研究については、*Tani*[61] により解説されている。

熱伝達を伴う流れにおいても、主流の乱れは微妙に、熱伝達特性に影響

を与える。熱伝達に関する研究の実験結果のばらつきの原因として、実験状態における主流の乱れの程度がまちまちであることが指摘されるほどである。これらの研究については、*Kestin*[30]によって詳細な解説がなされている。主流の乱れは熱伝達特性に比べると流体の速度場に対しては大きな影響をもたないため、速度分布に関する測定はあまりなされていない。*Junkhan* と *Serovy*[29]は圧力勾配を伴う境界層の速度分布や熱伝達特性に及ぼす主流の乱れに関し実験を行なっているが、層流境界層に対する測定がおもで、乱流境界層に対しては詳しく調べていない。

ターボ機械の内部にできる乱流境界層は、主流部に強い乱れを伴うのが普通であるため、特に最近主流の乱れと乱流境界層の関係についての研究が行なわれるようになった。しかし最近の研究を除けば、その研究例は非常に少ない。速度場に与える主流の乱れの影響は、遷移現象や熱伝達特性に与える場合に比べ弱く、一方乱流境界層の摩擦損失や剥離に対しては表面粗さや圧力勾配が非常に大きく影響を与えることが、乱流境界層と主流の乱れとの関係に関する研究が少なかった理由であろう。

主流に強い乱れがある場合の乱流境界層の速度分布に関する実験の古い例としては*Wieghard*[71]によるものがよく知られている。そこでは長方形断面流路と乱流境界層の速度分布の外層における違いについておもに考察されている。拡がり角が0.15°の流路では流れ方向の静圧勾配がほとんど零となるので、そのような流路内の流れと主流に乱れがある零圧力勾配の乱流境界層の速度分布が比較され、両者がよく似ていることが示された。

その後、*Kline*等[34]、*Charnay*等[9]、Горлин とЗраневский[26] *Pichal*[52]によって実験がなされた。*Kline*等の実験においては、風胴測定部の断面が140㎜角であり、乱れを発生する丸棒列の棒の直径が19㎜である。したがって境界層厚さは精度のよい測定値を得るには小さすぎ、

しかも丸棒の寸法が大きいため、非常に強く主流を乱した場合の実験となっている。しかし定性的にはその後の実験と大体似た結果が得られている。

Charnay 等の実験は本論文第５章の実験とよく似た条件で実験がなされている。結果も第５章の結果とほぼ一致している。*Charnay* 等は速度尺度に修正を施すことにより、速度欠損が主流の乱れの強さに関係なく相似になることを示した。また乱れの強さ、せん断応力もまた無次元化して比較すれば、内層では乱れの有無に関係なく相似になることを示した。

Горпин と Зраневский[11] は主流の圧力勾配、面の粗さ、主流の乱れに関係なく、乱れ強さの厚さ方向の分布が相似となる整理法を示した。しかし一般に乱れの強さは、壁近くで最大であり、主流に近づくに従って主流の乱れの強さに単調に減少しながら漸近するのが常である。その整理法においては、そのような曲線群に対し、単に幾何学的に相似になるように尺度を選んでいるだけであるので、物理的な興味は弱い。

Pichal は零圧力勾配のみならず逆圧力勾配のある場合に対しても主流の乱れの影響を調べている。彼の実験においては、主流の乱れは$\sqrt{\overline{u'^2}}$が$\sqrt{\overline{v'^2}}$の約７～８倍となっており非等方性であるが、平均速度分布や壁面摩擦に関しては本論文の結果とほぼ一致する結果が得られている。

乱れだけでなく主流にせん断が加わった実験として、*Masuda* 等[39]や藤田と豊倉[16]の実験がある。それらの実験は規準となる乱流境界層が十分発達したところでなされておらず、前縁の影響を強く受けている乱流境界層のまま測定を行なっているので、それらの実験の結果からはあまり一般的な結論は下せない。

円柱の後流に対する主流の乱れの影響に関する研究が *Komoda*[37] によってなされ、興味深い結果が得られた。

約２～1.２％の範囲に変化する主流の乱れが与えられ、平均速度分布、

乱れの強さの分布、せん断応力分布、さらに乱れの*flatness factor*等が測定され、詳細にその影響が調べられている。そして大きな渦はあまり主流の乱れの影響を受けず、小さな渦がより主流の乱れの影響を受けやすいことが示された。

1.3 本研究の概要

本研究は、実用上しばしば問題となる逆圧力勾配、表面粗さ、主流の乱れ等の外乱が非圧縮二次元の乱流境界層に作用する場合に関する研究である。工学的には境界層内の平均速度分布の性質を知ることが問題に対する基礎であるので、本論文ではおもにこれらの外乱が作用した場合の平均速度分布について考察する。逆圧力勾配および表面粗さに関しては、従来比較的豊富に実験がなされているので、これらの資料をもとに混合距離理論で解析する。主流の乱れに関しては、圧力勾配のない場合とある場合ともに実験を行ない、その影響を調べる。以下に各章の概要を述べる。

第２章　平衡乱流境界層

βをパラメータとする平衡乱流境界層の速度欠損曲線を二つの方法を用いて求める。第１の方法は、混合距離とせん断応力の厚さ方向の分布を仮定して、$\tau=\rho\, l^2(\frac{du}{dy})^2$ の関係より速度欠損曲線を得る方法である。混合距離lとして壁面近くで$l=\kappa y$を満たし、境界層外縁において$l=0.08\delta$と仮定した分布を用いた。せん断応力分布はβをパラメータとするηの４次式で近似した。第１の方法より比較的簡単な*logarithm－arctangent*分布式を得ることができる。第２の方法は、l/δ＝定数＝0.08と仮定して$\tau=\rho\, l^2(du/dy)^2$ の関係を境界層方程式に代入して近似的に解き、壁近くで対数分布則とつないで速度欠損曲線を求める方法である。この方法

では外層においてηの冪級数による表示式を得る。内層と外層の接合の条件より表面摩擦係数c_fとレイノルズ数$u_e\delta^*/\nu$の関係を得る。以上両者の結果はβの大きい値に対して多少食い違うが、*Clauser*[10]、*Bradshaw*[6]の実験との一致はほぼ良好である。

（1.2.2）節(i)項において述べたように平衡乱流境界層の速度分布の計算に関しては、*Mellor*と*Gibson*[44]によるものが非常に詳しく、その結果の適用範囲も広い。本章では、同じ問題に対する混合距離理論による試みを行なっている。しかし、*Mellor*と*Gibson*の方法に比べると、特に第1の方法は平衡乱流境界層の速度分布式を非常に簡単な形で与える。したがって、本論文第4章のように、平衡乱流境界層の速度分布を他の問題に応用する場合には、好都合である。

第3章　粗面乱流境界層

粗さが小さい場合には、原点の選択に対する問題は、それほど重要ではないが、粗さが大きい場合、その選び方によって、壁近くでは速度分布を整理した結果は大きな影響を受ける。これまでに知られている*Furuya*と*Fujita*[19]や*Rotta*[54]の解析においては、従来の整理法にならって、原点の問題に関しては速度分布の対数直線関係に基づいている。本章では粗面乱流境界層に対する解析の一つの試みとして、y座標の原点を粗さ素子の頂点に統一し、そこに一般には零でない混合距離l_0を仮定することによって、対数直線式に基づく従来の整理法でなされる原点補正の問題を避ける。本章では圧力勾配のない境界層を扱う。

第2章における第1の方法と同様に混合距離とせん断応力の仮定された分布を混合距離理論の関係式に代入し、速度欠損曲線および壁法則が求められる。速度欠損曲線は原点における無次元混合距離l_0^*をパラメータとする

ηの関数となる。l_0 は原点補正量εと等価となる。本解析で得られた速度分布にl_0より求まる原点補正を行ない、滑面上の乱流境界層と比較することにより、粗さ関数が$S=\frac{1}{\kappa}\ln\frac{\varepsilon u_\tau}{\nu}+U$のように得られる。$l_0^*$が大きくなれば上式における$U$は粗さの種類によらず一定となる。摩擦係数を求める方法として2種類の方法を示す。一つはレイノルズ数$u_e\delta^*/\nu$とl_0^*の関数として摩擦係数が与えられる。他の一つは最初の断面における$l_0 u_\tau/\nu$が与えられた場合、他の任意の位置における摩擦係数を速度分布$u\sim y$を用いて決定する方法である。

第4章　任意逆圧力勾配乱流境界層発達計算

運動量積分方程式、対数法則より導かれる摩擦則を用いている点では本方法は従来の多くの方法と同様であるが、平衡乱流境界層との関連より補助方程式を導いている点に特色がある。一般に任意の乱流境界層は平衡になろうとする傾向を有し、一方圧力勾配の変化はその傾向と逆の作用を及ぼすという考え方に基づいて補助方程式を作る。一般の乱流境界層の平衡乱流境界層からのずれの程度を示す尺度として積分厚さの比I_1/I_{1E} を用いる。I_{1E} は第2章、第1の方法でβの関数として求められている式により計算する。$\lambda=(\delta/\tau_{max})(dp/dx)$なる量を定義する。逆圧力勾配を有するいくつかの実験例においてI_1/I_{1E}とλの関係を調べると、いずれの場合もI_1/I_{1E}の流れ方向の変化はλの変化に対応していることがわかる。$d(I_1/I_{1E})/d\lambda$ を圧力勾配の変化とI_1/I_{1E}の関数と考え、その関数形を経験的に与え補助方程式としている。この補助方程式と運動量積分方程式および摩擦公式より成る連立常微分方程式を与えられた初期条件のもとに数値的に解き、いくつかの実験例と比較している。

第５章　零圧力勾配乱流境界層におよぼす主流の乱れの影響

本章では、主流に強い乱れがある場合の平均速度分布について実験と解析を行なっている。測定平板の前方に置かれた乱流格子により発生した乱れは測定平板に沿ってその強さが大きく変化する場合、外層においては非平衡となり速度欠損法則は成立しない。主流における強い乱れは壁面上における速度勾配を大きくさせるため、壁面摩擦は増加する。測定された平均速度分布を境界層方程式に代入し、適当な近似を用いて積分し、せん断応力分布が求められる。このようにして得られたせん断応力分布と平均速度分布より混合距離や渦粘性を求め、強い乱れによってそれらが増加することが示される。

本章で得られた実験結果に対し、渦粘性の概念を用いて外層における速度分布の解析を試みる。積分厚さを用いて修正した速度欠損を相似と仮定し、それに対する常微分方程式を誘導する。得られた方程式は平衡乱流境界層に対し成り立つ方程式と同一の形となり、積分厚さの流れ方向の変化率をパラメータとしている。

（1.2.2）節(iv)項において述べたように、最近になって、主流の乱れと乱流境界層の関係を調べた研究が盛んになってきたが、実験条件に問題があったり、測定結果に疑問の残る研究例も多い。ごく最近の研究(9)、(19)、(52)は本章の実験と同時期になされていたため、本章の実験遂行においてまえもってそれらを参考とすることができなかった。したがって、本章の実験結果は定性的には同時期に行なわれたこれらの実験結果とほとんど同じ傾向を示したことに終っている。しかし、主流に強い乱れを有する乱流境界層の平均速度分布や乱れ強さ分布に対する相似性を無次元化の方法に工夫をして得ようとする研究があるが、(9)、(20)無次元渦粘性係数Kの流れ方向の変化を考慮した本章の解析法はこれまでになされていない。

第６章　逆圧力勾配乱流境界層におよぼす主流の乱れの影響

主流の乱れと流れ方向の静圧勾配が同時に乱流境界層に作用する場合の実験例は、本章のものを除けば、*Pichal*[52]によるもののみである。しかしその報告においては、同じ静圧勾配に対する主流の乱れの強い場合と弱い場合との比較が十分なされておらず、その上静圧勾配が比較的穏やかであるため、静圧勾配の影響が明確になっていない。またレイノルズ応力の実測が熱線風速計によって行なわれているが、内層におけるレイノルズ応力の値が壁面上のせん断応力に比べ明らかに小さすぎるため、測定結果の誤差は非常に大きいと考えられる。したがって乱れのエネルギーバランスその他の考察に関してもまた、実験誤差による疑問が生じる。

工学的には流れ方向の静圧勾配は剥離の問題と密接な関係をもつことに重要な意味がある。したがって、特に剥離を伴う流れ場に対し、主流の乱れの影響を調べることが必要である。本章では、逆圧力勾配は測定平板上に高さ４４㎜のステップを置くことにより生じさせられている。したがって乱流境界層はステップの前方で剥離している。壁面摩擦の外挿により剥離点の位置を推定した結果、主流の乱れによって剥離点が後方へ移動することがわかる。外層における速度分布への影響は第５章の場合と定性的には同じである。逆圧力勾配の強い領域では、内層の速度分布則としては、対数則が成立せず、1/2乗法則がそれに代って成立することが知られている。本章の内層における実験結果を1/2乗法則に関して考察を加え従来の結果と比較する。第４章において補助方程式を作る際に用いた考え方、すなわち平衡状態からはずれるほど、それへ復元する傾向をもつという仮説は、主流の乱れがある場合にも矛盾なく適用できることが示される。境界層中の乱れのエネルギスペクトルを測定し、種々の考察を加える。さらに、いくつかの仮定を必要としたが、*Townsend*[64]により定義された粘性消散長さを求めたところ、混合

距離や渦粘性係数にみられるような主流の乱れによる顕著な影響はみられないことが示される。

第2章　平衡乱流境界層

2.1 まえがき

相似な速度分布を求める従来の計算法の多くは、外層において渦粘性を用いている。渦粘性と混合距離とはたがいに単純な関係で結ばれており、どちらの仮説も乱流の複雑さをそれらの量に背負わせている点において同じ立場に立っている。

Prandtl は分子運動との類推より次式に示される混合距離理論を導いた。

$$\tau = \rho\, l^2 \frac{\partial u}{\partial y} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \qquad (2.1)$$

上式に $l = \kappa y$、$\tau = \tau_w$ を代入すれば対数法則が容易に求まる。しかし、熱線風速計による乱れの実測が可能となり、その運動を調べると分子運動に類似した挙動を全く示さないことが明らかとなった。l が y だけに依存するという仮定は、せん断応力 τ が（2.1）式より局所的な量だけに依存することになり、これは特殊な場合を除き、一般的な事実と矛盾する。したがって混合距離理論に依存する研究方向に対する反省が盛んに述べられ、混合距離理論よりもさらに現実の乱れをよく記述するモデルが模索されて既に久しい。また混合距離に対する表現を複雑化することにより、その汎用性を高める努力も数多い。

一方、実験データより（2.1）式に基づいて l を求めると、平衡乱流境界層では外層において、ほぼ一定の値をもつこと、およびその値が圧力勾配に依存しないという単純な性質をもつことが示された。[6] 外層では du/dy は大きく変化しないので、このことは渦粘性係数が外層でほぼ一定であることと対応する。

Townsend[64] は次のようにして粘性消散長さを定義した。すなわち乱流境界層中の乱れエネルギ $\overline{q'^2}$ は次の方程式に従う。

$$u\frac{\partial(\frac{1}{2}\overline{q'^2})}{\partial x}+v\frac{\partial(\frac{1}{2}\overline{q'^2})}{\partial y}+\overline{u'v'}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{2}\overline{q'^2v}+\overline{pu})+\varepsilon_d=0$$

(2.2)

上式における左辺第1、2項の対流項や、右辺第1項の拡散項は内層では無視することができる。したがって

$$-\overline{u'v'}\frac{\partial u}{\partial y}=\varepsilon_d \qquad (2.3)$$

ここで彼はレイノルズ応力、粘性消散 ε_d を次のように仮定した。

$$\varepsilon_d=\sqrt{\overline{q'^2}}^{\,3}/L'_d \qquad (2.4)$$

$$\left|-\overline{u'v'}\right|=a_1\overline{q'^2} \qquad (2.5)$$

(2.4)、(2.5)式を (2.3)式へ代入し、$\overline{q'^2}$ を消去すれば

$$-\overline{u'v'}=(a_1^{\frac{3}{2}}L'_d)^2\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (2.6)$$

となる。上式において $-\overline{u'v'}\fallingdotseq\tau/\rho$ とおけば、(2.1)式と同等の式が得られる。したがって混合距離 l は L'_d と次の関係を有する。

$$l=a_1^{\frac{3}{2}}L'_d \qquad (2.7)$$

本論文では $L_d=a_1^{\frac{3}{2}}L'_d$ を粘性消散長さと呼ぶ。このように古典的な誘導とは全く異なった観点より (2.1)式が導かれた。

逆圧力勾配が強く、剥離しやすくなった乱流境界層では壁面せん断応力 τ_w は非常に小さくなるので、内層におけるせん断応力 τ は次式で近似できる。

$$\frac{\tau}{\rho}=\alpha y \qquad (2.8)$$

(2.8)式を (2.1)式へ代入し、$l=\kappa y$ と置けば、

$$\frac{du}{dy}=\frac{\alpha}{\kappa}y^{\frac{1}{2}} \qquad (2.9)$$

となる。

上式を積分すれば

$$u=\frac{2\alpha}{\kappa}y^{\frac{1}{2}}+\Delta u \qquad (2.10)$$

となる。上式による速度分布則を 1/2 乗法則と呼んでいるが、実験により強い逆圧力勾配下ではこの法則が成り立つことが証明されている。

したがって混合距離理論は多くの欠点を有することは事実であるが、混合距離を仮定することにより現象の合理的記述ができる場合も少なくない。

本章では、平衡乱流境界層の速度欠損曲線を求めるために、混合距離理論に基づく2種類の近似的手法を試みる。その一つは混合距離とせん断応力の双方の分布を仮定する方法であり、もう一方は混合距離分布を境界層方程式に代入し、速度欠損に関する常微分方程式を解く方法である。本論文では前者を第1の方法、後者を第2の方法と呼ぶ。

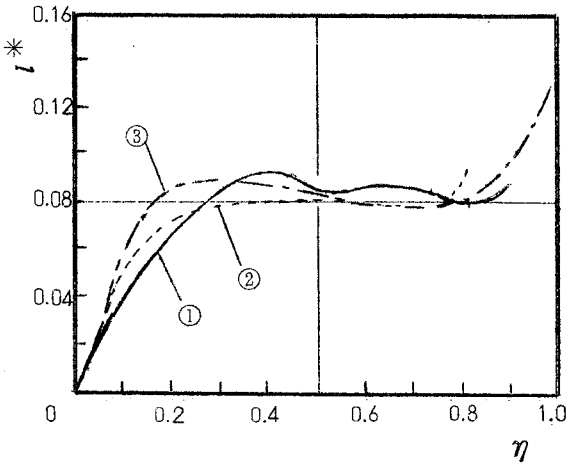
2.2 第1の方法

2.2.1 混合距離分布

壁面近くで $l=\kappa y$ であることは多くの実験事実により確定的である。最近の精密なデータにより *Kármán* 定数 κ の値には若干の幅があるが、通常これを普遍的定数として0.4と置く。外層では l は一般に y のみの関数ではあり得ない。たとえば任意の圧力勾配がある場合や、主流の乱れが変化する場合には l も変化を受ける。本章では平衡乱流境界層に話を限るので、外層においても l は y だけの関数と考える。

図(2.1)に *Bradshaw*[(6)] が平衡乱流境界層の実験データより逆算した

混合距離の分布を示す。$\eta = 0.2$ の前後で $\beta = 5.4$ の実験値が他の二つより大きな値を示しているが外層の大部分で l は大体等しい値を示している。$\eta = 1.0$ 付近でおのおのの l は急激に高い値を示す傾向があるが、境界層外縁付近における τ や du/dy はともに非常に小さな値をとるので実験データによる l の誤差はかなり大きい。零圧力勾配で壁面が粗い場合に l を求めると図（2.1）とほぼ同等の値を示すので、外層における混合距離は壁面上の条件に影響されない。



Bradshaw[6] の実験
①：$\beta = 0$、②：$\beta = 0.9$、③：$\beta = 5.4$
図 2.1　混合距離分布

本章では円管乱流に対する *Nikuradse*[47] の表現にならって境界層全域における混合距離分布を次式で仮定する。

$$l^* = a + b(1-\eta)^2 + c(1-\eta)^4 \qquad (2.11)$$

上式における b、c は壁面上の次の条件によって消去できる。

$$y = 0 \quad ; \quad l = 0 \quad , \quad \frac{dl}{dy} = \kappa \qquad (2.12)$$

したがって

$$b = \frac{\kappa}{2} - 2a \quad , \quad c = -\frac{\kappa}{2} + a \qquad (2.13)$$

上式を（2.11）式に代入し、書き換えれば

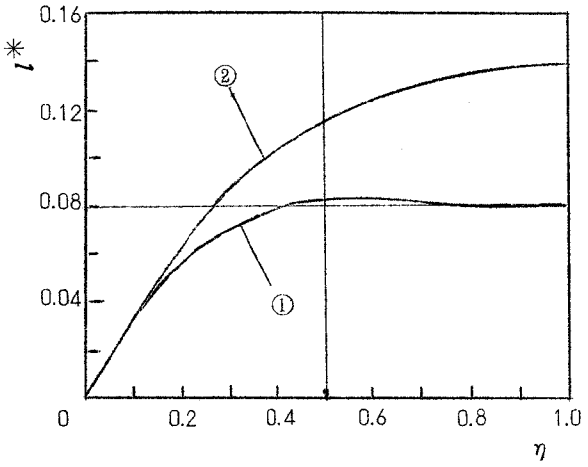
$$l^* = \kappa\eta\left(1-\frac{\eta}{2}\right)\left\{1-2\left(1-\frac{2a}{\kappa}\right)\eta+\left(1-\frac{2a}{\kappa}\right)\eta^2\right\} \qquad (2.14)$$

a は境界層外縁における l/δ の値である。

本論文では、*Kármán* 定数 κ は絶対定数として扱っているので、(2.14)式で仮定された混合距離分布は a をパラメータとしている。次節でせん断応力分布が β をパラメータとして与えられるので、それらの分布式を混合距離理論の関係式に代入すれば、速度分布が β と a をパラメータとした η の関数となる。円管乱流の場合、$a=0.14$ を(2.14)式に代入すれば実験結果とよく一致することが *Nikuradse*[47] によって示された。平衡乱流境界層では、β の値に関係なく $a=0.08$ を仮定すれば、計算結果は実験と一致することが(2.2.3)節で示される。

実際には、外縁付近ではせん断応力、速度勾配とも、非常に小さな値をとるため、外縁付近における混合距離の値を実験によって定めることは困難である。事実、各種の実験結果はまちまちの値を与えている。本論文では、境界層全体において実験とよく一致する結果を与えるように a の値を選んでいる。混合距離分布式として、(2.14)式と異なった関数形を用いれば、外縁に相当する位置での混合距離の値は若干本章で用いた値と違った値をとることがあり得る。

図(2.2)に(2.14)式による混合距離の分布を示す。円管乱流と平衡乱流境界層の場合における a の値の違いの原因の一つとして、円管中心部における乱れと境界層外縁部における乱れの強さの違いが考えられる。第5章の実験により主流に乱れが存在する場合、混合距離は明らかに大きな値を示す。



（２.１４）式による分布曲線

①：a＝0.０８（平衡乱流境界層）

②：a＝0.１４（円　管　乱　流）

図 2.2　混合距離分布

2.2.2　せん断応力分布

乱流境界層においては、壁のごく近傍を除けば全せん断応力のほとんどはレイノルズ応力によるものであり、レイノルズ応力は乱流境界層の平均速度場の解明の鍵ともいえる。したがって速度分布よりせん断応力分布がより本質的な要素である。また種々の外乱による影響は速度分布よりもせん断応力分布においてより顕著に表われる。円管流や長方形断面の流路の場合、全せん断応力の厚さ方向の勾配と流れ方向の圧力勾配がつり合っているので、せん断応力分布は壁からの距離に対し線形となり、その分布に対し仮定を必要としない。乱流境界層においては、慣性項が関与するために円管流のように単純ではない。

したがって実際の乱流境界層のせん断応力分布を調べた上で、それに対する妥当な近似式を求める。熱線によるレイノルズ応力の測定データが最も直接的であるが、平均速度分布を境界層方程式に代入し、積分することによっ

てもせん断応力分布は得られる。しかし境界層方程式の積分による求め方は平衡乱流境界層のように相似な速度分布を有する場合には有効であるが、一般の乱流境界層の場合、流れ方向の変化を正確に見積らないと誤差が大きくなる。逆圧力勾配の平衡乱流境界層のデータとして現在の所利用できるのは *Clauser*[10] と *Bradshaw*[6] によるものであるが、*Clauser* はせん断応力分布を示していないので *Clauser* のデータについては速度分布より境界層方程式を通じて求めた。

平衡乱流境界層の場合、速度欠損分布 $f' \sim \eta$ が与えられると、せん断応力分布は次のようにして得られる。

境界層方程式は一般に次式で与えられる。

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y} \qquad (2.15)$$

上式における v は次の連続の式により消去できる。

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (2.16)$$

速度欠損 $(u-u_e)/u_\tau$ の相似性より u は次式で与えられる。

$$u=u_e-u_\tau f'(\eta) \qquad (2.17)$$

v を（2.16）式により消去し、（2.17）式を（2.15）式へ代入すれば

$$\frac{\partial(\tau/\tau_w)}{\partial\eta}=\frac{\beta}{I_1}(2f'-\eta f''-\gamma f'^2+\gamma f f'')$$
$$-\frac{\delta}{\gamma}\frac{d\gamma}{dx}\left(\frac{f'}{\gamma}-f'^2+f f''\right)$$
$$+\frac{1}{\gamma}\frac{d\delta}{dx}(\eta f''-f f'') \qquad (2.18)$$

ただし、$f=\int_0^\infty f'\,d\eta$ ，（ $'$ ）は η に関する微分を意味する。

上式における $d\gamma/dx$ は乱流境界層の速度分布が内層と外層の重復してい

る領域で対数法則を満たすことを利用すれば、次のようにして求めることができる。内層と外層が重復している領域では、次の二式が同時に成立している。

$$\frac{u}{u_\tau}=\frac{1}{\kappa}\,ln\,\frac{y\,u_\tau}{\nu}+C_0 \qquad (2.19)$$

$$\frac{u-u_e}{u_\tau}=\frac{1}{\kappa}\,ln\,\frac{y}{\delta}+C_1 \qquad (2.20)$$

上の2式より u を消去すれば

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\kappa}\left(ln\,\frac{\delta\,u_e}{\nu}+ln\,\gamma\right)+C_0-C_1 \qquad (2.21)$$

(2.21)式を x で微分すれば

$$\frac{\delta}{\gamma}\frac{d\gamma}{dx}=\frac{\gamma^2}{\gamma+\kappa}\cdot\frac{\beta}{I_1}-\frac{\gamma}{\gamma+\kappa}\frac{d\delta}{dx} \qquad (2.22)$$

(2.22)式を(2.18)式へ代入すれば

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\tau/\tau_w)}{\partial\eta}=\frac{\beta}{I_1}\{&\left(2-\frac{\gamma}{\gamma+\kappa}\right)f'-\eta f''-\gamma\left(1-\frac{\gamma}{\gamma+\kappa}\right)f'^2\\&+\gamma\left(1-\frac{\gamma}{\gamma+\kappa}\right)ff''\}+\frac{1}{\gamma}\frac{d\delta}{dx}\{\eta f''\\&+\frac{\gamma}{\gamma+\kappa}f'-\frac{\gamma^2}{\gamma+\kappa}f'^2-\gamma\left(1-\frac{\gamma}{\gamma+\kappa}\right)ff''\}\end{aligned} \qquad (2.23)$$

上式を積分するにあたり、τ に対し次の境界条件を置く。

$$\left.\begin{aligned}\eta=0\quad,\quad\tau=\tau_w\\\eta=1\quad,\quad\tau=0\end{aligned}\right\} \qquad (2.24)$$

(2.23)を積分すれば

$$\frac{\tau}{\tau_w}=\frac{\beta}{I_1}\{\left(3-\frac{\gamma}{\gamma+\kappa}\right)f-\eta f'+\gamma\left(1-\frac{\gamma}{\gamma+\kappa}\right)ff'$$

$$-2\gamma\left(1-\frac{\gamma}{\gamma+\kappa}\right)\int_0^{\eta} f'^2\,d\eta\}+\frac{1}{\gamma}\frac{d\delta}{dx}\{-\left(1-\frac{\gamma}{\gamma+\kappa}\right)f$$

$$+\eta f'-\gamma\left(1-\frac{\gamma}{\gamma+\kappa}\right)ff'+\gamma\left(1-\frac{2\gamma}{\gamma+\kappa}\right)\int_0^{\eta} f'^2\,d\eta\}+1 \qquad (2.25)$$

ただし

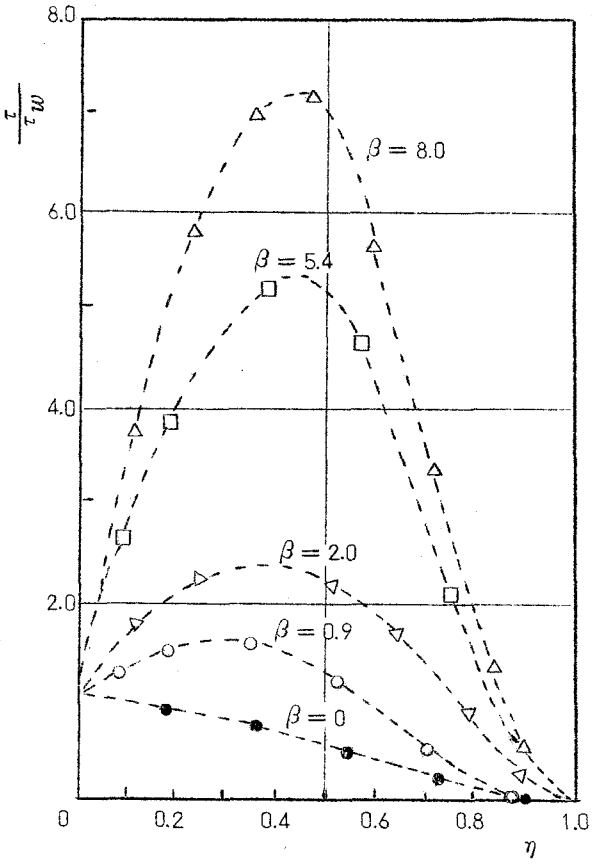
$$\frac{1}{\gamma}\frac{d\delta}{dx}=\frac{\frac{\beta}{I_1}\{(3\kappa+2\gamma)I_1-2\gamma\kappa I_2\}+\gamma+\kappa}{\kappa I_1-\gamma(\kappa-\gamma)I_2} \qquad (2.26)$$

(2.25)式に示されているように、速度欠損がηだけの関数の場合、τは摩擦係数に依存する。しかし一般に平衡乱流境界層は十分大きなレイノルズ数のもとで実現されるので、γおよび$d\gamma/dx$は非常に小さな値をとる。したがってγによる違いはわずかとなる。図(2.3)にせん断応力分布を示す。$\beta=2.0$、8.0に対する結果は *Clauser* の実験に[11]より得られた速度欠損分布 $f'\sim\eta$ を(2.25)式へ代入して求めたものである。$\beta=0$および$\beta=0.9$、5.4に対するせん断応力分布はそれぞれ *Klebanoff*[33]および *Bradshaw*[6]による熱線風速計による測定結果である。

次にせん断応力分布の近似式の誘導を試みる。せん断応力の表現の方法については、これまで多くの試みがなされている。境界層全体に対するτ/τ_wの近似的表現法として広く用いられたものに、壁面上と外縁におけるいくつかの境界条件を満たすηの多項式をτ/τ_wについて求める方法がある。この方法は層流境界層の速度分布に対する近似解法としてよく知られている *Pohlhausen*法において用いられるものとよく似た方法を乱流境界層のせん断応力分布に適用したものである。この方法においては、流れ方向の変化がある場合、τの壁面上の微係数をかなり高次まで考慮しなければ得られたせん断応力は実験と合わない。さらに乱流境界層においては、壁付近では速度の厚さ方向の変化が急激であるため、壁面上と外縁だけの条件で境界層全体のせん断応力分布の近似形を求めることに無理がある。

Coles[12]は壁法則に従う速度分布を境界層方程式に代入して壁付近におけるせん断応力の分布を求めているが、逆圧力勾配の強い場合、壁法則自体が確立されていないのでこの方法は穏やかな圧力勾配の内層にしか適用できない。

McDonald[43]もまた壁付近のせん断応力分布に対し、レイノルズ応力の実測値が厚さ方向に線形に増加し、しかもその勾配がdp/dxと一致しないことを考慮してその分布式を導いている。本章では外層を含むτの分布式を必要としているため、*Coles* や *McDonald* の分布式をそのまゝ使うことができない。



●：*Klebanoff*[33]の実験
▽，△：*Clauser*[10]の実験
○，□：*Bradshaw*[6]の実験

図 2.3　せん断応力分布

*McDonald*と*Stoddart*[41]は乱流境界層の発達計算の過程で$\int_0^1 \tau \, d\eta$の計算を必要とし、その際、境界層内でせん断応力が最大となる位置と外縁

までの分布の形を零圧力勾配の境界層の壁面から外縁までの分布形と相似であると仮定した。しかし最大せん断応力を与える位置と壁面までの分布形に対しては、具体的な分布曲線を与えず、単に積分値だけを求めている。

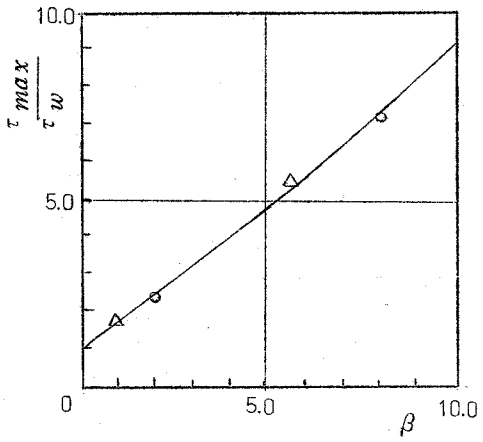
McDonald[42]はその後、境界層方程式に基づいてさらに詳しく$\int_0^1 \tau\, d\eta$について検討した。そして*Mellor*と*Gibson*が行なった平衡乱流境界層の計算結果より、τ_{max}/τ_wとβの間に次の関係が置かれた。

$$\frac{\tau_{max}}{\tau_w} = \phi(\beta) = 1 + 0.775\beta \qquad (2.27)$$

図(2.3)に示されている実験によるせん断応力分布の結果よりτ_{max}/τ_wを求め、図(2.4)にβについてプロットし、上式と比較すれば非常によい一致が認められる。

McDonald[42]はせん断応力積分に対する微分方程式を導いたが、せん断応力分布の具体的な形状は与えていない。したがって本章では、τ/τ_wの分布の近似式を得るためにτ/τ_wを次の二つの積に分割して考える。

$$\frac{\tau}{\tau_w} = \frac{\tau_{max}}{\tau_w} \cdot \frac{\tau}{\tau_{max}} \qquad (2.28)$$



○：*Clauser*[10]の実験
△：*Bradshaw*[6]の実験
——：(2.29)式

図2.4　τ_{max}/τ_wとβの関係

τ_{max}/τ_wに関しては(2.27)式がよい近似を与えることがわかったので、それを用いる。τ/τ_{max}の近似式を得るため、図(2.3)の実験値を図(2.5)にτ/τ_{max}の形でプロットする。τ/τ_{max}の近似式として次式を仮定する。

$$\frac{\tau}{\tau_{max}} = \left\{ 1 - \left(\frac{\eta - \eta_m}{1 - \eta_m} \right)^2 \right\}^2 \qquad (2.29)$$

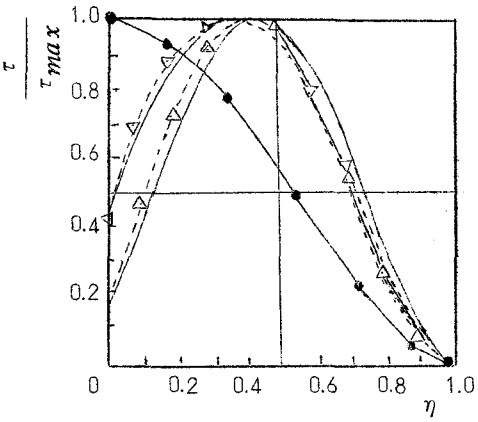
上式に $\eta = 0$ を代入すれば

$$\frac{1}{\varphi(\beta)} = \left\{ 1 - \left(\frac{\eta_m}{1 - \eta_m} \right)^2 \right\}^2 \qquad (2.30)$$

となるので、η_m は次式で決定される。

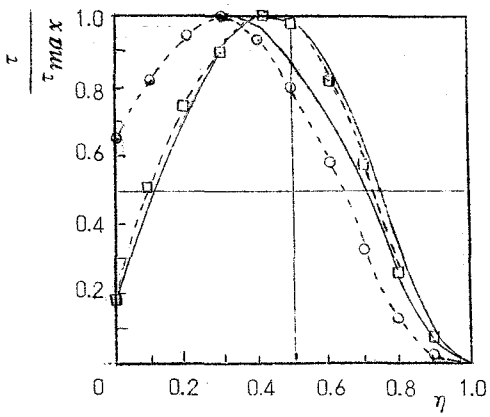
$$\eta_m = \frac{\{ 1 - \varphi(\beta)^{-\frac{1}{2}} \}^{\frac{1}{2}}}{1 + \{ 1 - \varphi(\beta)^{-\frac{1}{2}} \}^{\frac{1}{2}}} \qquad (2.31)$$

(2.31)式より得られる η_m と β の関係を図(2.6)に示し、実験値と比較する。図より実験との一致はよい。図(2.5)に(2.29)式、(2.31)式による結果を示す。図よりせん断応力に対する近似式は満足できるものである。しかし(2.29)式による表現は β が非常に大きい場合、すなわち剥離寸前の流れに対しては、内層において若干実際の分布と異なった傾向を示す。



●：$\beta = 0$ (*Klebanoff*[33]の実験)
▽：$\beta = 2.0$，△：$\beta = 8.0$ (*Clauser*[10]の実験)
——：(2.29)式

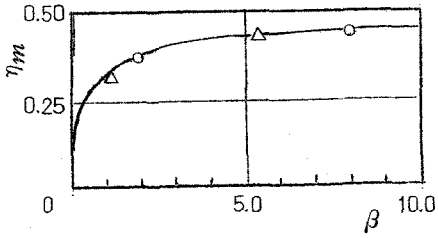
図2.5 *a*　τ / τ_{max} と η の関係



○：$\beta = 0.9$，□：$\beta = 5.4$ (*Bradshaw*[6]の実験)
——：(2.29)式

図2.5 *b*　τ / τ_{max} と η の関係

以上でせん断応力分布に対する表現が得られたが、一般の乱流境界層では、このような簡単な表現は求まらない。平衡乱流境界層の解析が容易であるのは、すべての量に対しβのみをパラメータとして考慮すればよいためである。



記号は図2.4と同じ

——：（2.31）式

図2.6　η_m とβの関係

2.2.3　平衡乱流境界層の速度欠損曲線

（2.2.1）節で混合距離分布がβやレイノルズ数に無関係にηのみの関数として与えられ、（2.2.2）節でせん断応力分布がβをパラメータとしたηの関数として求まったので速度欠損曲線は容易に得られる。すなわち（2.1）式を書き直せば、

$$-f'(\eta)=\int_1^{\eta}\sqrt{\frac{\tau}{\tau_w}}\;l^{*-1}\,d\eta \qquad (2.32)$$

となる。従って、

$$-f'(\eta)=\frac{\sqrt{\varphi(\beta)}}{\kappa}\int_1^{\eta}\frac{1-\left(\frac{\eta-\eta_m}{1-\eta_m}\right)^2}{\eta\left(1-\frac{\eta}{2}\right)\left\{1-2\left(1-\frac{2a}{\kappa}\right)\eta+\left(1-\frac{2a}{\kappa}\right)\eta^2\right\}}\,d\eta$$

$$=\frac{\sqrt{\varphi(\beta)}}{\kappa(1-\eta_m)^2}\Big[(1-2\eta_m)\ln\eta+(3-2\eta_m)\ln(2-\eta)$$

$$-2(1-\eta_m)\ln\left\{\left(\frac{1-\eta}{E}\right)^2+1\right\}-2E\tan^{-1}\left(\frac{1-\eta}{E}\right)\Big]$$

（2.33）

ただし　$E=\left(\frac{2a}{\kappa-2a}\right)^{\frac{1}{2}}$

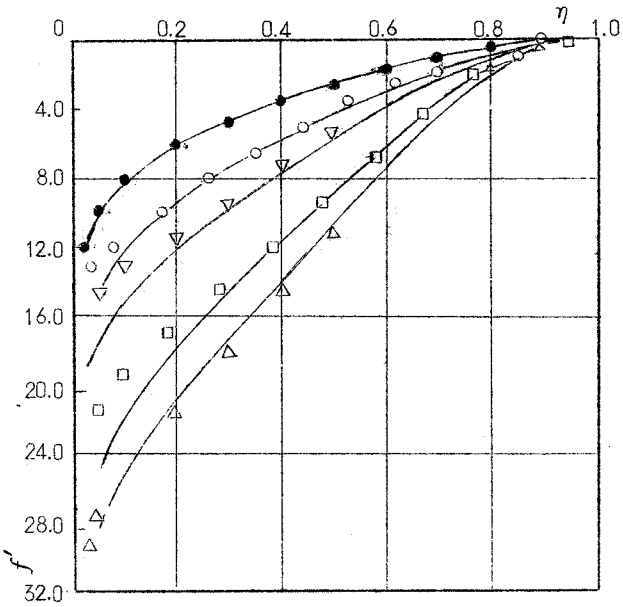
$\varphi(\beta)$、η_mはそれぞれ（2.29）、（2.31）式によりβの関数として与えられている。ここで前にも述べたようにκ、aとしてそれぞれ0.40、0.08を与えればβをパラメータとした速度欠損曲線が得られる。図(2.7)に（2.33）式の計算結果と*Clauser*[10] *Bradshaw*[6]の実験結果との比較を行なう。混合距離、せん断応力分布の近似式の誘導の段階で*Clauser* *Bradshaw*の実験結果との一致を十分確かめているので、（2.33）式の結果が彼等の実験結果とほぼ一致することは当然である。

（2.33）式は零圧力勾配の場合、すなわち、$\beta=0$の時、ある程度簡単化され次式となる。

$$-f'(\eta)=\frac{1}{\kappa}\left[\ln\eta+3\ln(2-\eta)-2\ln\left\{\left(\frac{1-\eta}{E}\right)^2+1\right\}-2E\tan^{-1}\left(\frac{1-\eta}{E}\right)\right] \qquad (2.34)$$

（2.34）式において$\eta\to 0$の極限をとれば、対数法則が得られる。

$$-f'(\eta)=\frac{1}{\kappa}\ln\eta+\frac{1}{\kappa}\left[3\ln 2-2\ln\left(\frac{1}{E^2}+1\right)-2E\tan^{-1}\frac{1}{E}\right] \qquad (2.35)$$



記号は図2.3と同じ

——：第1の方法による計算結果（2.33）式

図2.7　平衡乱流境界層の速度欠損曲線

したがって（2.20）式におけるC_1は次式で与えられる。

$$C_1=\frac{1}{\kappa}\left[3\,ln\,2-2\,ln\left(\frac{1}{E^2}+1\right)-2E\,tan^{-1}\frac{1}{E}\right] \qquad (2.36)$$

（2.21）式を書き直せば、摩擦則が次の形で与えられる。

$$\sqrt{\frac{2}{c_f}}=\frac{1}{\kappa}\,ln\,R_\delta{}^*+\frac{1}{\kappa}\left[ln\frac{1}{I_1}-\kappa C_0-3\,ln\,2+2\left(\frac{1}{E^2}+1\right)+2E\,tan^{+}\frac{1}{E}\right] \qquad (2.37)$$

上式における I_1 は（2.35）式の積分により、

$$I_1=\frac{1}{\kappa}\left[-6\,ln\,2+(2-E^2)\,ln\left(\frac{1}{E^2}+1\right)+6E\,tan^{-1}\left(\frac{1}{E}\right)\right] \qquad (2.38)$$

（2.37）式による c_f と $R_\delta{}^*$ の関係を図（2.8）に示す。

（2.22）節におけるせん断応力分布の表現は、零および逆圧力勾配の場合にのみ有効であるので、第1の方法の結果と負圧力勾配の平衡乱流境界層との比較はできない。

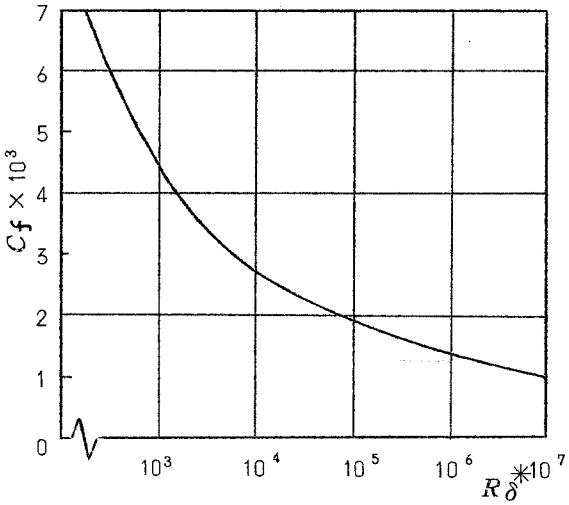


図2.8　零圧力勾配乱流境界層における摩擦則　（2.37）式

平衡乱流境界層の特性量として、しばしば I_1 や G が用いられる。I_1 は（2.33）式が積分可能であるので、次の解析的表現を有する。

$$I_1=\frac{\sqrt{\varphi(\beta)}}{\kappa(1-\eta_m)^2}\left[-2(3-2\eta_m)\,ln\,2+\{2(1-\eta_m)-E^2\}\,ln\left\{\frac{1}{E^2}+1\right\}+2E(3-2\eta_m)\,tan^{-1}\frac{1}{E}\right] \qquad (2.39)$$

I_2 は I_1 のように解析的に表現できない。（2.39）式による I_1 を図（2.9）

に示し、実験結果と比較する。（2.39）式による I_1 は第4章において利用する。

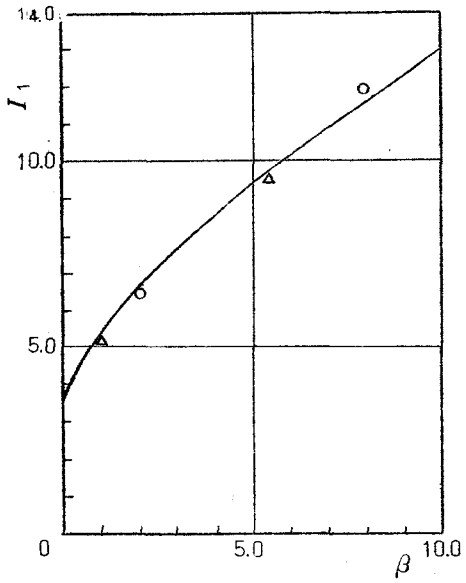
（2.33）式において、$\eta \to 0$ の極限をとれば

$$-f'(\eta)_{\eta\to 0}=\frac{\sqrt{\varphi(\beta)}}{\kappa(1-\eta_m)^2}\left[(1-2\eta_m)\ln\eta+(3-2\eta_m)\ln 2\right.$$

$$\left.-2(1-\eta_m)\ln\left(\frac{1}{E^2}+1\right)-2E\tan^{-1}\frac{1}{E}\right] \quad (2.40)$$

となる。上式は β の値が小さい場合は、実験との一致はよいが、β が大きくなれば一致しなくなる。β が非常に大きい場合、内層では1／2乗法則が成立することが実験的に示されているが、（2.40）式は1／2乗法則を与えない。したがって（2.33）式は β の大きい場合、内層に対しては適用できない。

次に $\beta \to \infty$ の極限における平衡乱流境界層の解析を試みる。



記号は図2.4と同じ

——：（2.39）式

図2.9　I_1 と β の関係

2.2.4　剥離寸前流れ(*incipient separating flow*)の速度欠損曲線

剥離寸前流れは *Stradford*[60] により始めて実験された流れである。彼は圧力回復の優れたディフューザを得るために、零圧力勾配の流れに急激な逆圧力勾配を加え、壁面上のせん断応力をほとんど零の状態にしたのち、その状態を維持するような流れを作った。急激な逆圧力勾配のあとは穏やかな圧力勾配となっているので、剥離寸前の状態が流れ方向に維持されている。

したがってこの場合、$\beta \to \infty$の平衡乱流境界層となっている。

このような流れに対しては速度尺度として摩擦速度u_τは用いることができないので、*Mellor*と*Gibson*[44]によって定義された圧力速度を用いる。

$$u_p = \sqrt{\frac{\delta^*}{\rho}\frac{dp}{dx}} \qquad (2.41)$$

u_pはu_τと次の関係で結ばれている。

$$u_p = \beta^{\frac{1}{2}} u_\tau \qquad (2.42)$$

u_pで無次元化した速度欠損を次式で定義する。

$$F'(\eta) = \frac{u_e - u}{u_p} \qquad (2.43)$$

(2.33)式より$F'(\eta)$を求めると、

$$-F'(\eta) = \frac{\sqrt{\varphi(\beta)/\beta}}{\kappa(1-\eta_m)^2}\Big[(1-2\eta_m)\ln\eta + (3-2\eta_m)\ln(2-\eta) - 2(1-\eta_m)\ln\{(\frac{1-\eta}{E})^2+1\} - 2E\tan^{-1}(\frac{1-\eta}{E})\Big] \qquad (2.44)$$

上式において$\beta \to \infty$とすれば

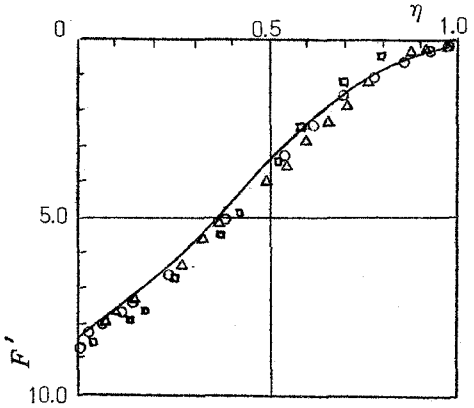
$$-F'(\eta) = \frac{4\sqrt{0.775}}{\kappa}\Big[2\ln(2-\eta) - \ln\{(\frac{1-\eta}{E})^2+1\} - 2E\tan^{-1}\frac{1-\eta}{E}\Big] \qquad (2.45)$$

となる。上式と*Stradford*の実験結果との比較を図(2.10)に行なう。図よりτ/τ_{max}の分布の近似式(2.30)式が$\beta \to \infty$の場合、壁面近くで適当でないにもかかわらず、全体としての一致はよい。

○：$x=42\,in$
△：$x=49\,in$
□：$x=63\,in$
} Stradford[60] の実験

———：（2.44）式

図2.10　剥離寸前流れ（*incipient separating flow*）の速度欠損曲線



2.2.5　円管乱流の速度欠損曲線

円管乱流の研究の歴史は非常に古く、乱れ等の微細な構造に関するものを除けば、非圧縮、定常の円管乱流の平均速度分布や摩擦公式に関しては、主要な問題は解決されている。十分に発達した円管乱流では、流れ方向の変化が完全に無視できるため、その解析は境界層に比べると簡単である。しかし速度欠損分布式として一般によく知られているのは *Prandtl* による対数直線式より導いたもの、*Kármán* の相似則より求めた式等[56]である。*Nikuradse* による混合距離分布式を用いて誘導される解析的表現は次のように容易に行なうことができる。

円管乱流ではせん断応力分布 τ/τ_w は次式によって厳密に与えられる。

$$\frac{\tau}{\tau_w}=1-\eta \qquad (2.46)$$

上式と（2.14）式による混合距離を（2.32）式へ代入し、積分すれば、速度欠損曲線は次式によって表わすことができる。

$$-f'(\eta)=\frac{1}{\kappa}\left\{-ln\frac{1+\sqrt{1-\eta}}{1-\sqrt{1-\eta}}+\frac{1}{\sqrt{2}D}\,ln\frac{1+D^2-\eta+\sqrt{2}D\sqrt{1-\eta}}{1+D^2-\eta-\sqrt{2}D\sqrt{1-\eta}}\right.$$

$$\left.+2\,tan^{-1}\sqrt{1-\eta}-\frac{\sqrt{2}}{D}\,tan^{-1}\frac{\sqrt{2}D\sqrt{1-\eta}}{D^2-1+\eta}\right\} \qquad (2.47)$$

ただし、　$D=\left(\dfrac{2a}{\kappa-2a}\right)^{\frac{1}{4}}$

積分厚さ I_1 は次式で与えられる。

$$I_1=\int_0^1 f'(\eta)\,d\eta=\frac{1}{\kappa}\left\{-\pi+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(D-\frac{1}{D}\right)ln\frac{1+\sqrt{2}D+D^2}{1-\sqrt{2}D+D^2}\right.$$

$$\left.+\sqrt{2}\left(D+\frac{1}{D}\right)tan^{-1}\frac{\sqrt{2}D}{D^2-1}\right\}\qquad(2.48)$$

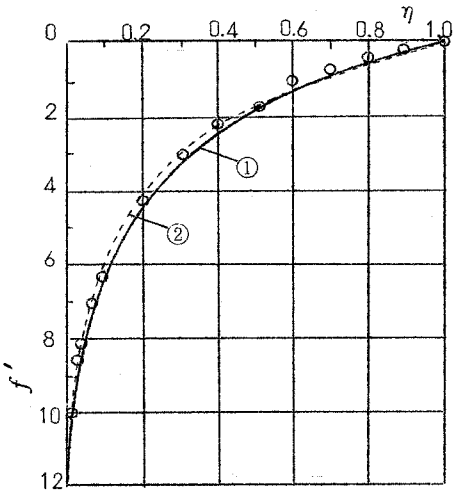
Nikuradse により与えられた値、$a=0.14$ を上式へ代入すれば、上式は実験と良好な一致を示す。図（2.11）にその結果を示す。

2.2.6　渦　粘　性

渦粘性は次式で定義される量である。

$$\tau=\nu_T\frac{\partial u}{\partial y}\qquad(2.49)$$

上式よりわかるように、渦粘性を用いる方法は、層流と類似した方法で乱流を扱うものである。いうまでもなく、一般には混合距離と同様、ν_T は局所的な因子のみによって決定されるものでなく、上流の条件に依存する。通常、渦粘性を用いた解析は外層において、ν_T は y によらず一定という仮定を置いて速度分布を計算する。混合距離理論や渦粘性理論を用いる方法は、y 方向に積分することにより速度分布を計算するものであるから、それらの量の y 方向の若干の変化は、結果にはあま



○：*Nikuradse*（47）の実験

①：（2.47）式

②：$f'=5.75\,log\dfrac{y}{r}$

図 2.11　円管乱流の速度欠損曲線

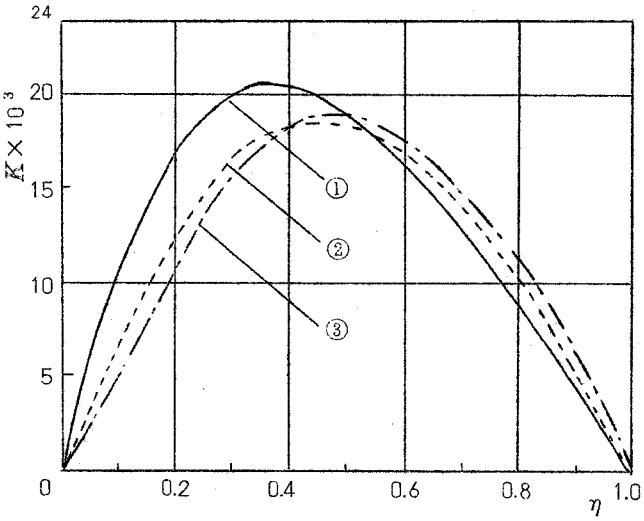
り影響しない。

平衡乱流境界層においては、δ^*とu_eで無次元化した　$K=\nu_T/\delta^* u_e$がβによらず一定と仮定することが妥当であり、外層においてほぼ0.02の値をとることが知られている。[10] 混合距離と渦粘性は次式の関係で結ばれているので、逆にl/δがβによらず一定と置く本章の仮定は、Kがβに依存することを意味する。

$$\frac{\nu_T}{u_e\,\delta^*}=\frac{\frac{l}{\delta}\sqrt{\frac{\tau}{\tau_w}}}{I_1}$$

本解析において用いたl/δやτ/τ_wの仮定を上式に代入し、渦粘性係数を求めると図（2.12）のようになる。図より、混合距離より求めたKは$\eta>0.5$では、ほとんどβに依存しない。

また、βの値がある程度大きくなれば、内層においてもβによる違いはわずかとなることがわかる。



①：$\beta=0$，②：$\beta=2.0$，③：$\beta=8.0$

図2.12　渦粘性係数

2.3 第2の方法

第1の方法では、*Clauser*[10] *Bradshaw*[6]の実験データをもとに、せん断応力分布の近似形を求めたが、第2の方法では混合距離理論の関係式（2.1）式を境界層方程式に代入し、連続の方程式と連続させることにより流れ方向の平均速度を求める。

この方法は既に*Townsend*[63]や*Mellor*と*Gibson*[44]により渦粘性の場合についてなされている。

2.3.1 速度欠損に対する方程式

境界層方程式に（2.1）式を代入すれば、

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\{l^2(\frac{\partial u}{\partial y})^2\} \qquad (2.50)$$

vを連続の式より消去し、$u=u_e-u_\tau f'(\eta)$を代入すれば

$$\frac{dl^{*2}}{d\eta}f''^2+2l^{*2}f''f'''-\frac{\beta}{I_1}(2f'-\eta f''-\gamma f'^2+\gamma ff'')$$

$$+\frac{\delta}{\gamma}\frac{d\gamma}{dx}(\frac{f'}{\gamma}-f'^2+ff'')-\frac{1}{\gamma}\frac{d\delta}{dx}(\eta f''-ff'')=0$$

$$(2.51)$$

$\frac{\delta}{\gamma}\frac{d\gamma}{dx}$、$\frac{1}{\gamma}\frac{d\delta}{dx}$は（2.2.2）節（2.22）式、（2.26）式により求まっているのでそれらを代入すれば

$$2l^{*2}(\kappa I_1-\gamma\kappa I_2-\gamma^2 I_2)f''f'''+(\kappa I_1-\gamma\kappa I_2-\gamma^2 I_2)\frac{dl^{*2}}{d\eta}f''^2$$

$$-\left[(2\beta+1)\kappa+\gamma\{2\beta+1-\kappa\beta\frac{I_2}{I_1}\}-\gamma^2\beta\frac{I_2}{I_1}\right]\eta f''$$

$$-\{2\kappa\beta+\gamma(2\beta+1-2\kappa\beta\frac{I_2}{I_1})+\gamma^2\frac{I_2}{I_1}\beta\}f'+\gamma\{\kappa\beta+\gamma(2\beta$$

$$+1-\kappa\beta\frac{I_2}{I_1})\}f'^2+\gamma\kappa(2\beta+1-\gamma\beta\frac{I_2}{I_1})ff''=0 \qquad (2.52)$$

次の境界条件を置く

$$\left.\begin{aligned} f(0)&=0\\ f'(1)&=0\\ f''(1)&=0\end{aligned}\right\} \qquad (2.53)$$

2.3.2　べき級数解

一般にγは非常に小さな値であるので、（2.52）式におけるf、I_1、I_2をすべてγについて展開する。

すなわち

$$\left.\begin{aligned} f &= f_0+\gamma f_1+\gamma^2 f_2+\cdots\cdots \\ I_1 &= I_1^0+\gamma I_1^1+\gamma^2 I_1^2+\cdots\cdots \\ I_2 &= I_2^0+\gamma I_2^1+\gamma^2 I_2^2+\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (2.54)$$

（2.53）式を（2.52）式に代入し、$O(\gamma^2)$を無視すれば

$$\begin{aligned} &\kappa I_1^0\{2l^{*2} f_0'' f_0'''+\frac{dl^{*2}}{d\eta} f_0''^2-\frac{2\beta+1}{I_1^0}\eta f_0''-\frac{2\beta}{I_1^0} f_0'\} \\ &+\kappa\gamma\Big[2l^{*2}\{I_1^0(f_0''f_1'''+f_0'''f_1'')+(I_1^1-I_2^0)f_0''f_0'''\} \\ &+\frac{dl^{*2}}{d\eta}\{2I_1^0 f_0''f_1''+(I_1^1-I_2^0)f_0''^2\}-(\frac{2\beta+1}{\kappa}-\beta\frac{I_2^0}{I_1^0})\eta f_0'' \\ &-(2\beta+1)\eta f_1''-(\frac{2\beta+1}{\kappa}-2\beta\frac{I_2^0}{I_1^0})f_0''-2\beta f_1'+\beta f_0'^2 \\ &+(2\beta+1)f_0 f_0''\Big]+O(\gamma^2)=0 \qquad (2.55) \end{aligned}$$

上式の$O(\gamma^0)$の項よりf_0'を求める。

$\beta=0$の時、式は比較的簡単になる。

すなわち

$$2l^{*2} f_0'''+\frac{dl^{*2}}{d\eta} f_0''-\frac{1}{I_1^0}\eta=0 \qquad (2.56)$$

上式よりf_0''を求めると、

$$f_0''=\frac{1}{l^*}\{\frac{1}{2I_1^0}\int_1^{\eta}\frac{\eta}{l^*}d\eta+A\} \qquad (2.57)$$

$f_0''(1)=0$なる境界条件より$A=0$である。（2.14）式のl^*を

（2.57）へ代入すれば

$$f_0''=\frac{-ln(2-\eta)+\frac{1}{2}ln\{(\frac{1-\eta}{E})^2+1\}-\frac{1}{E}tan^{-1}\frac{1-\eta}{E}}{\kappa^2 I_1^0\eta(1-\frac{1}{2}\eta)\{1-2(1-\frac{2a}{\kappa})\eta+(1-\frac{2a}{\kappa})\eta^2\}} \quad (2.58)$$

したがって速度欠損は上式をさらに積分すればよい。

$$f_0'=\int_1^{\eta}\frac{-ln(2-\eta)+\frac{1}{2}ln\{(\frac{1-\eta}{E})^2+1\}-\frac{1}{E}tan^{-1}\frac{1-\eta}{E}}{\kappa^2 I_1^0\eta(1-\frac{\eta}{2})\{1-2(1-\frac{2a}{\kappa})\eta+(1-\frac{2a}{\kappa})\eta^2\}}d\eta \quad (2.59)$$

（2.59）式におけるI_1^0は次式によって与えられる。

$$I_1^0=\frac{1}{\kappa}\sqrt{\int_1^0\int_1^{\eta}\frac{-ln(2-\eta)+\frac{1}{2}ln\{(\frac{1-\eta}{E})^2+1\}-\frac{1}{E}tan^{-1}\frac{1-\eta}{E}}{\eta(1-\frac{\eta}{2})\{1-2(1-\frac{2a}{\kappa})\eta+(1-\frac{2a}{\kappa})\eta^2\}}d\eta\, d\eta} \quad (2.60)$$

$\beta=0$の場合のf_0'は以上に示したように l^* として、（2.14）式の分布を用いて求めることが困難ではないが、f_1'や$\beta\neq 0$のf_0'、f_1'の場合には、その分布式を用いると非常に複雑となる。さいわいl^*は外層においてほぼ一定である。したがって$\beta\neq 0$の場合の解析を行なうために、

$$l^*=a \quad (2.61)$$

と仮定する。そして適当なηにおいて、内層を支配する壁法則と接続する。本解析では簡単にするため、すべてのβに対して、内層では対数法則が成立すると仮定する。

（2.50）式の解を得るために、f_0'、f_1'を次のように（$1-\eta$）のべき級数に展開する。

$$f_0'=\sum_{n=0}P_n(1-\eta)^n \quad (2.62)$$

$$f_1'=\sum_{n=0}Q_n(1-\eta)^n \quad (2.63)$$

（2.53）式の境界条件により

$$P_0 = P_1 = Q_0 = Q_1 = 0 \qquad (2.64)$$

である。

（2.62）式を（2.55）式の $O(\gamma^0)$ の項へ代入すれば

$$\sum_{N=1}\sum_{n=1}\Big[2a^2(n+1)(N-n+2)(N-n+1)P_{n+1}P_{N-n+2} + \left(\frac{2\beta+1}{I_1^0}N+\frac{2\beta}{I_1^0}\right)P_N - \frac{2\beta+1}{I_1^0}(N+1)P_{N+1}\Big](1-\eta)^n = 0 \qquad (2.65)$$

したがって P_n は順次求まる。

$$\left.\begin{aligned}
P_2 &= \frac{2\beta+1}{4a^2 I_1^0}\\
P_3 &= -\frac{1}{4a^2 I_1^0}\cdot\frac{3\beta+1}{3}\\
P_4 &= \frac{1}{4a^2 I_1^0}\cdot\frac{\beta(3\beta+1)}{36(2\beta+1)}\\
P_5 &= -\frac{1}{4a^2 I_1^0}\cdot\frac{\beta(3\beta+1)(10\beta+3)}{360(2\beta+1)^2}\\
&\text{----------}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.66)$$

次に（2.63）式を（2.55）式の $O(\gamma)$ の項へ代入すれば

$$\sum_{N=1}\Big[2a^2 I_1^0\Sigma(n+1)(N-n+2)(N-n+1)\{(P_{n+1}Q_{N-n+2} + P_{N-n+2}Q_{n+1}) + (1-\frac{I_2^0}{I_1^0})P_{n+1}P_{N-n+2}\} + (\frac{2\beta+1}{\kappa}-\beta\frac{I_2^0}{I_1^0}) \times$$

$$\{NP_N-(N+1)P_{N+1}\}+(2\beta+1)\{NQ_N-(N+1)Q_{N+1}\}$$

$$+(\frac{2\beta+1}{\kappa}-2\beta\frac{I_2^0}{I_1^0})P_N+2\beta Q_N-\beta\sum_{n=2}P_nP_{N-n}-(2\beta+1) \times$$

$$(N+1)P_{N+1}\left(\sum_{l=2}\frac{P_{l-2}}{l}\right)+(2\beta+1)\sum_{n=1}\frac{n+1}{N-n}P_{N-n-1}\times$$

$$P_{n+1}\Big](1-\eta)^N=0 \qquad (2.67)$$

したがってQ_nは次式のように得られる。

$$Q_2=\frac{1}{4a^2I_1^0}\left[(2\beta+1)\left(\frac{1}{\kappa}-1+\sum_{l=2}\frac{P_{l-2}}{l}\right)+(\beta+1)\frac{I_2^0}{I_1^0}\right]$$

$$Q_3=\frac{1}{24a^2I_1^0}\left[2(3\beta+1)-\frac{3(2\beta+1)}{\kappa}-2(\beta+1)\frac{I_2^0}{I_1^0}\right]$$

$$Q_4=\frac{1}{144a^2I_1^0(2\beta+1)}\left[\frac{49}{6}\beta+\frac{18\beta^2+10\beta+1}{2\kappa}-\right.$$

$$\left.\frac{\beta(348\beta^2+304\beta+60)}{12(2\beta+1)}\frac{I_2^0}{I_1^0}+\beta(3\beta+1)\sum_{l=2}\frac{P_{l-2}}{l}\right]$$

---------- (2.68)

内層との接続点$\eta=\eta_c$において対数法則と連続的に接続するためには次の条件が満たされねばならない。

$$f_0'(\eta_c)+\gamma f_1'(\eta_c)=-\frac{1}{\kappa}\ln\eta_c-C_1^0(\beta)-\gamma C_1^1(\beta) \qquad (2.69)$$

$$f_0''(\eta_c)+\gamma f_1''(\eta_c)=-\frac{1}{\kappa\eta_c} \qquad (2.70)$$

積分厚さI_1^0、I_2^0は定義により次式で表わされる。

$$I_1^0=\int_0^{\eta_c}\left(-\frac{1}{\kappa}\ln\eta-C_1^0\right)d\eta+\int_{\eta_c}^1 f_0'\,d\eta \qquad (2.71)$$

$$I_2^0=\int_0^{\eta_c}\left(-\frac{1}{\kappa}\ln\eta-C_1^0\right)^2d\eta+\int_{\eta_c}^1 f_0'^2\,d\eta \qquad (2.72)$$

(2.2.2)節の(2.21)式を変形し、高次の微少項を省略すれば

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\kappa}\ln R_\delta^*-\frac{1}{\kappa}\ln I_1^0-C_0-C_1^0 \qquad (2.73)$$

βとR_{∂}^{*}が与えられた時、（2.69）～（2.73）式によって、I_1^0、I_2^0 C_1^0、C_1^1、γ、η_c はすべて決定され、速度欠損曲線が得られる。以下にその具体的な手順を示す。

（2.69）式を用いてC_1^0を消去すれば、（2.71）式、（2.72）式は次式のようになる。

$$I_1^0=\eta_c\left(\frac{1}{\kappa}+f_0'(\eta_c)\right)+\int_{\eta_c}^{1} f_0'\,d\eta \qquad (2.74)$$

$$I_2^0=\eta_c\left\{\frac{1}{\kappa^2}+f_0'(\eta_c)\left(\frac{2}{\kappa}+f_0'(\eta_c)\right)\right\}+\int_{\eta_c}^{1} f_0'^2\,d\eta \qquad (2.75)$$

次に

$$P_n=\frac{A_n}{I_1^0} \qquad (2.76)$$

と置けば、A_nはβのみの関数となる。

したがって

$$f_0'(\eta_c)=\frac{1}{I_1^0}\sum_n A_n(1-\eta_c)^n \qquad (2.77)$$

$$\int_{\eta_c}^{1} f_0'(\eta_c)=\frac{1}{I_1^0}\sum_n \frac{A_n}{n+1}(1-\eta_c)^{n+1} \qquad (2.78)$$

$$f_0'^2(\eta_c)=\frac{1}{I_1^{0^2}}\sum_n\sum_m A_n A_m(1-\eta_c)^{n+m} \qquad (2.79)$$

$$\int_{\eta_c}^{1} f_0'^2\,d\eta=\frac{1}{I_1^{0^2}}\sum_n\sum_m \frac{A_n A_m}{n+m+1}(1-\eta_c)^{n+m+1} \qquad (2.80)$$

（2.77）、（2.78）式を（2.74）へ代入し、変形すれば

$$I_1^{0^2}-\frac{\eta_c}{\kappa}I_1^0-\sum_n\left(\eta_c A_n+\frac{A_{n-1}}{n}\right)(1-\eta_c)^n=0 \qquad (2.81)$$

I_1^0は常に正であるから、上式よりI_1^0は次式で与えられる。

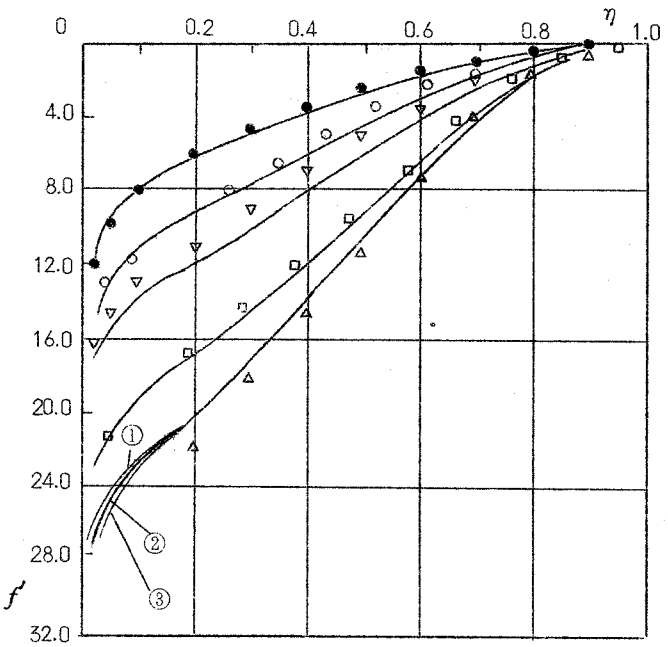
$$I_1^0=\frac{1}{2}\left\{\frac{\eta_c}{\kappa}+\sqrt{\left(\frac{\eta_c}{\kappa}\right)^2+4\cdot\Sigma\left(\eta_c A_n+\frac{A_{n-1}}{n}\right)(1-\eta_c)^n}\right\}$$

（2.82）

（2.79）、（2.80）、（2.82）式を（2.75）式へ代入すればI_2^0がやはりη_cとβの関数として与えられる。即ち、f_0'、f_1'の各項の係数がβとη_cの関数として決定される。したがって、（2.70）式によりγもまたβとη_cの関数として定まる。最後に（2.73）式の関数により$R_\delta{}^*$がβとη_cの関数として決定される。このことはβと$R_\delta{}^*$が与えられた場合、他のすべてのパラメータが決定されることと同義である。

第2の方法によって得られる速度欠損曲線は、以上の解析からわかるように$R_\delta{}^*$に依存することになる。

しかし結果的に$R_\delta{}^*=10^3\sim10^7$の範囲において計算された速度欠損曲線の$R_\delta{}^*$による変化はきわめてわずかとなり、平衡乱流境界層の相似性と矛盾するものでなかった。図（2.13）に各βに対する実験結果と第2の方法の結果を示す。図に示されている実験結果は約$R_\delta{}^*=10^4\sim10^5$の範囲内で測定されたものである。計算結果における$R_\delta{}^*$による変化は$\beta$の



記号は図2.3と同じ

———：第2の方法による計算結果

①：$R_\delta{}^*=10^4$、②：$R_\delta{}^*=10^5$、③：$R_\delta{}^*=10^6$

図2.13　平衡乱流境界層の速度欠損曲線

大きい場合には、図において識別できる程度となるので、$\beta=8$の場合についてのみ、$R_\delta^*=10^4$、10^5、10^6 の3種類の分布曲線を示す。R_δ^*への依存性は特に壁面近くにおいて相対的に大きくなるので、βをパラメータとしてR_δ^*とC_1の計算結果の関係を図(2.14)に示す。図(2.14)よりβが大きい場合、R_δ^*の増加とともに$-C_1$の値がやゝ増加する傾向を示す。

図(2.7)に示されている第1の方法による曲線に比べ、第2の方法による曲線の方は$\beta=8$の場合を除き、実験値との一致は良好である。第2の方法ではβが大きい値をとる場合に対しても、内層において対数法則を仮定していることが、$\beta=8$の場合の不一致の原因であろう。

次にせん断応力分布を第2の方法により求める。せん断応力は$\eta>\eta_c$においては次式で与えられる。

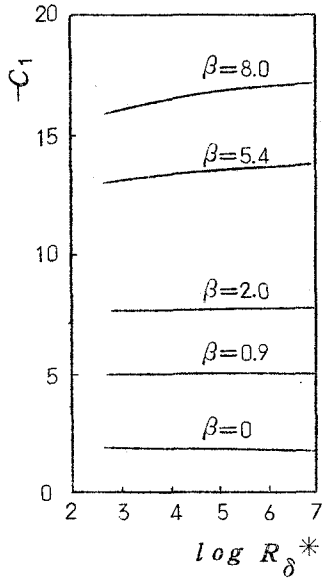


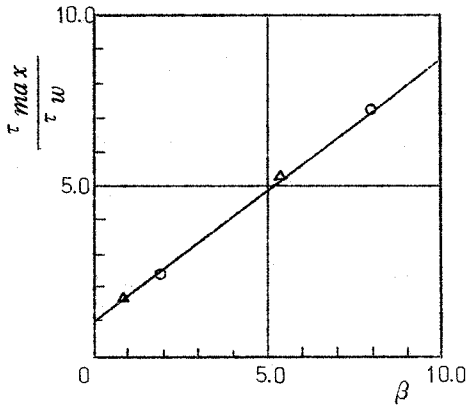
図2.14　C_1とR_δ^*の関係

$$\frac{\tau}{\tau_w}=l^{*2}\ f''^2 \qquad (2.83)$$

$\eta<\eta_c$に対しては、本節の方法で求まっている速度分布を(2.2.2)節(2.25)式に代入して求める。図(2.15)にその結果を示す。図より実験結果とほぼ満足な一致が得られていることがわかる。第2の方法より得られる$\varphi(\beta)$を図(2.16)に示す。I_1、Gを図(2.17)、図(2.18)にそれぞれ示す。第2の方法による摩擦係数とR_δ^*の関係を図(2.19)に示す。

以上の結果より、第2の方法は第1の方法とほぼ同等の結果を示し、実験結果をよく説明していることがわかる。しかしβの値が大きい場合、おのお

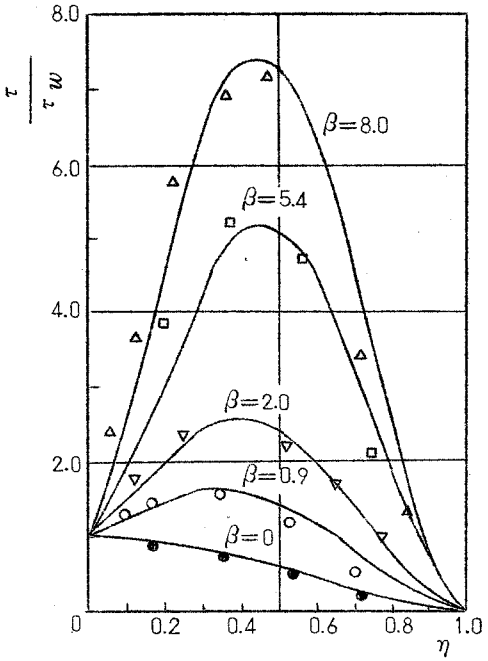
のの結果は若干の違いを示す。



記号は図 2.3 と同じ

——：第 2 の方法による計算結果

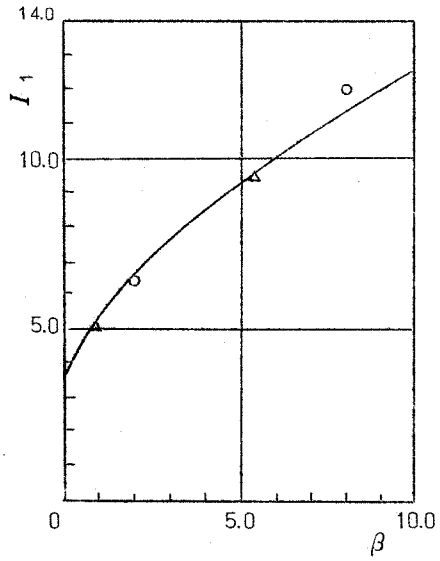
図 2.15　τ_{max}/τ_w と β の関係



記号は図 2.4 と同じ

——：第 2 の方法による計算結果

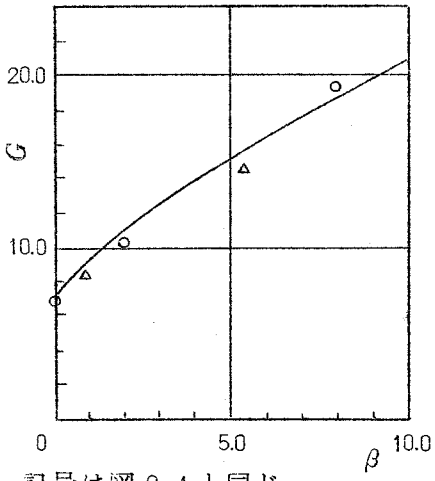
図 2.16　せん断応力分布



記号は図 2.4 と同じ

——：第 2 の方法による計算結果

図 2.17　I_1 と β の関係



記号は図 2.4 と同じ

——：第 2 の方法による計算結果

図 2.18　G と β の関係

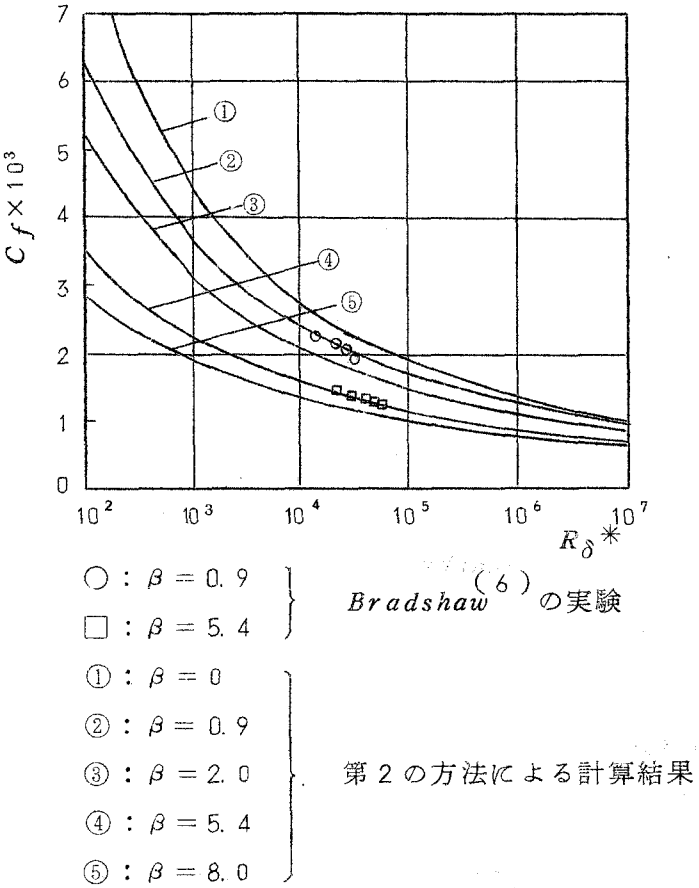


図 2. 1 9　平衡乱流境界層における摩擦則

2.4 結　　論

混合距離理論を用いて、平衡乱流境界層の平均速度分布を求めるために、二つの方法を試みた。第 1 の方法では、壁面上から境界層外縁にわたって混合距離およびせん断応力の分布の双方を η の 4 次式で近似的に表現し、それらを混合距離理論の関係式に代入し、速度欠損曲線を与える *logarithm—arctangent* 分布式を得た。同時に円管乱流、剥離寸前流に対しても速度分布を求め、実験結果と比較した。第 2 の方法では、外層で一定値を持つ混合距離を与え、境界層方程式に混合距離理論の関係式を代入して速度分布を求めた。速度欠損曲線

としては、外層ではべき級数解を得ることができ、内層では対数法則を適用した。外層と内層の接続の条件より摩擦則を求め、実験結果と比較した。第1、第2の方法ともそれぞれ境界層外縁および外層における混合距離の値としては $l = 0.08\delta$ を適用すれば、実験結果とよく一致することがわかった。

第３章　粗面乱流境界層

3.1 まえがき

本章では第２章と同様に混合距離理論による解析を粗面乱流境界層に対し行ない、粗さ素子の頂点に厚さ方向の原点を選んで整理した実験速度分布によく一致する速度分布式を導く。そのために、粗さ素子の頂点すなわち原点において一般に零でない混合距離を仮定する必要がある。よく似た解析を *Rotta*[54] が行なっており、粘性底層と対数法則の間の遷移領域の速度分布が求められている。本章では対数領域および外層の速度分布を解析の対象とする。

原点における混合距離 l_0 は原点補正量 ε と *Karman* 定数 κ の積に等しくなるので、本解析により求まった速度分布に $\varepsilon = l_0^*/\kappa$ なる補正を行ない、従来の対数直線式に基づいた粗さ関数との関連を調べることができる。さらに粗面上の摩擦法則を求める。

本章においては、粗さ要素の頂点に y の原点を統一しているので、本章の結果と実験との比較は、粗さ素子の高さの明確な粗面に限定する。比較のために引用した粗面乱流境界層の実験例は、金網粗面（古屋等[17]、*Scottron* と *Power*[59]）、二次元針金粗面（古屋等[18]）、正方形断面二次元粗面（*Moore*[31]）長方形断面二次元粗面（*Perry* 等[49]、[51]）である。

3.2 解　　析

3.2.1　y 座標

y 座標原点を図（3.1）に示したように選ぶ。原点付近では粗面素子の形状に強く依存した渦などが発生している。したがって通常の対数法則が成立する位置は原点よりある程度離れた所から外側の領域である。

ここで述べている対数領域とは、原点補正を行なった時、速度分布が対数

直線式となる領域のことである。滑面上の流れにおいては、速度分布は図（3.2）に示す（3.1）式の分布から連続的に（3.2）式の対数分布に移行する。

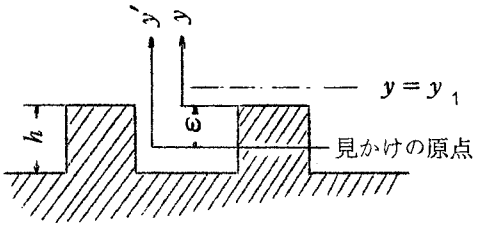


図3.1　粗さと座標

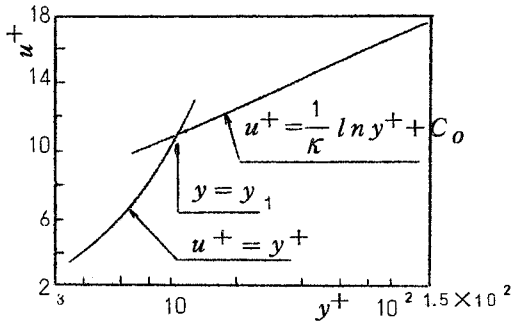


図3.2　滑面上の乱流境界層における壁法則

$$u^+ = y^+ \qquad (3.1)$$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C_0 \qquad (3.2)$$

（3.1）式と（3.2）式の交点における y^+ は11.12の値をとる。本解析においては、粗面上の流れに対し対数則の成立する下限を規定する。すなわち粗さの種類に関係なく、対数分布の下限を $y^+ = y_1^+ = 11.12$ に仮定する。$y < y_1$ の領域についての問題は本章では除外する。

3.2.2　速度欠損曲線

粗面乱流境界層の速度欠損曲線を求めるために、第2章の第1の方法と同じ方法を用いる。すなわち次式で与えられる混合距離理論において、混合距離とせん断応力の双方の分布を仮定し、次式を積分する。

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \qquad (3.3)$$

滑面の場合、$y = y_1$ の付近においては、粘性によるせん断応力とレイノル

ズ応力は同程度の大きさを持っているが、粗面の場合、粘性によるせん断応力はこの部分においては完全に無視しうる程度である。せん断応力分布に対し、次の分布式を仮定する。図（3.3）にその形状を示す。

$$\frac{\tau}{\tau_w}=(1-\eta^2)^2 \qquad (3.4)$$

上式は第2章における圧力勾配のない場合の平衡乱流境界層の分布と同形である。粗面上の流れにおいても零圧力勾配の場合、内層ではせん断応力はほぼ一定とみなすことができ、また外層では粗さの影響はあまり表われないので、境界層全域におけるせん断応力の分布として、(3.4)式は妥当である。

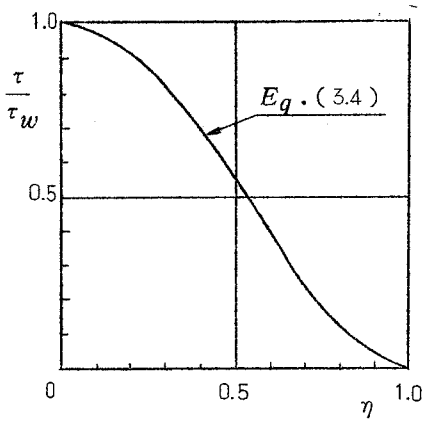


図3.3　せん断応力分布

混合距離分布に対しても、第2章と同様にηの4次式で仮定する。

$$l^*=a+b(1-\eta)^2+c(1-\eta)^4 \qquad (3.5)$$

滑面乱流境界層では、壁面上で、$l=0$、$dl/dy=\kappa$の条件より、b、cが求まり、結局l^*は境界層外縁における無次元混合距離aをパラメータとするηの関数となった。そしてaとして0.08を与えた場合、平衡乱流境界層に対して実験結果との一致がよいことがわかった。さきに述べたように粗さの影響は主に内層に限られるので、本章においても、aに対しては0.08を与える。

$y=0$において、混合距離に対する境界条件として、次式を与える。

$$\left.\begin{aligned} y=0 \quad ; \quad & l^*=l_0 \\ & \frac{dl^*}{d\eta}=\kappa \end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

粗さ素子の頂点が原点であるので、平均的にみれば、$y=0$において速度は零でない。むしろ、$y=0$の面上では流体の運動はかなり激しいことが予想される。したがって、ここに零でない混合距離を与えることは物理的にみれば妥当である。*Karman*定数の値が粗さによる影響を受けないことを砂粒管における実験では*Nikuradse*[48]が示し、乱流境界層の場合については、*Furuya*と*Fujita*[19]が示している。(3.6)式よりb、cは次のように求まり、結局、混合距離の分布は原点と外縁における値をパラメータとする。

$$b = 2\,l_0^* - 2\,a + \frac{\kappa}{2}$$

$$c = l_0^* + a - \frac{\kappa}{2} \qquad (3.7)$$

図(3.4)に種々のl_0^*に対するl^*を示す。図よりl_0^*の値が大きくなるにしたがって、l^*もまた全体的に大きな値を有する。

(3.4)式、(3.5)式、(3.7)式を(3.3)式に代入し、積分すれば速度欠損曲線が次式のように求まる。

$$-f'(\eta) = \int_1^{\eta} \frac{\sqrt{\dfrac{\tau}{\tau_w}}}{l^*}\,d\eta$$

$$= \frac{1}{B_0}\left[\frac{B_1}{2}\,ln\,\frac{1-\eta+B_1}{1-\eta-B_1} + ln\,\frac{\{(1-\eta)^2\ \ B_1^2\}B_2^2}{\{(1-\eta)^2+B_2^2\}B_1^2} - B_1\,tan^{-1}\,\frac{1-\eta}{B_2}\right] \qquad (3.8)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} B_0 &= \sqrt{2\,l_0^*\,\{\kappa - 2(a - l_0^*)\} + \frac{\kappa^2}{4}} \\ B_1 &= \sqrt{\frac{-b-B_0}{2c}} \qquad B_2 = \sqrt{\frac{b-B_0}{2c}} \end{aligned}\right\} \qquad (3.8)'$$

(3.8)式の積分により、積分厚さI_1は次式で与えられる。

$$I_1=\frac{1}{B_0}\left\{\frac{B_1+2}{2}\,ln\,\frac{B_1^2-1}{B_1^2}+\left(\frac{2-B_2^2}{2}\right)ln\,\frac{B_2^2}{1+B_2^2}-\frac{3B_1}{2}\,ln\,\frac{B_1-1}{B_1+1}\right.$$

$$\left.-3B_2\,tan^{-1}\frac{1}{B_2}\right\} \qquad (3.9)$$

以上より速度欠損曲線は l_0^* をパラメータとした η の関数となる。

速度欠損分布を表わす際に、無次元 y 座標として、しばしば $yu_\tau/\delta^* u_e$ がとられる。実験において境界層外縁が不明瞭な場合、δ を正確に定めることが困難であるためである。$yu_\tau/\delta^* u_e$ は η と次の関係にあるので、(3.9)式を使えば本章の計算式より容易に f' ～ $yu_\tau/\delta^* u_e$ を得ることができる。

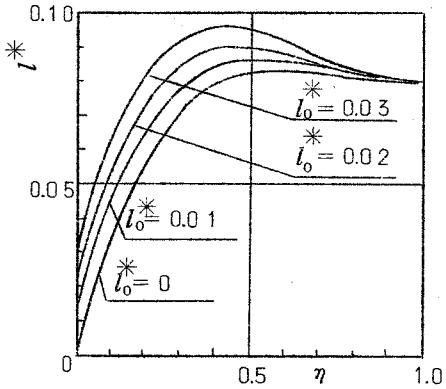


図 3.4　混合距離分布

$$\frac{yu_\tau}{\delta^* u_e}=\frac{\eta}{I_1}$$

図(3.5)において、二次元針金粗面と正方形断面二次元粗面の実験結果と計算結果の比較を上記の無次元 y 座標を用いて行なう。

図より l_0^* を適当に選ぶことにより、境界層の全域にわたって、よい一致が得られることがわかる。図(3.6)に I_1 と l_0^* の関係を示す。

(3.8)式は l_0^* をパラメータとした速度分布であるが、この l_0^* は原点補正量に対応しているものである。(3.8)式で得られた分布に対し次式の原点補正を行なったのち、その分布を図(3.7)に示す。

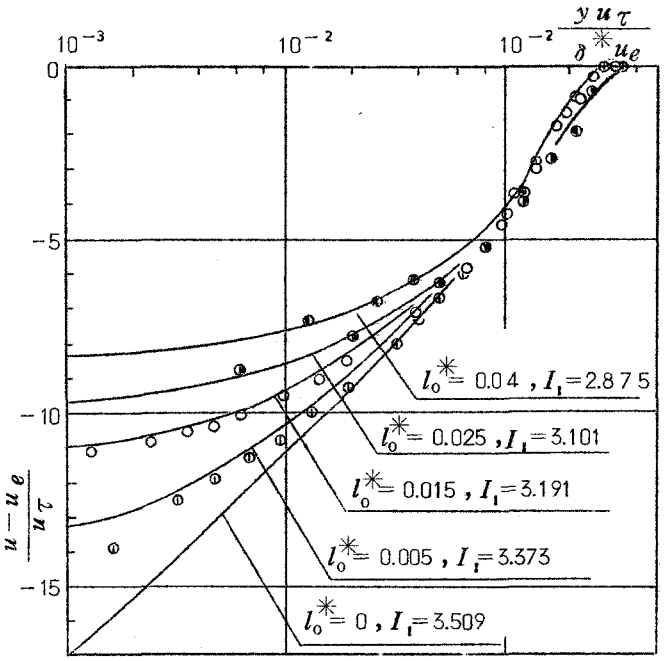
$$\varepsilon=\frac{l_0}{\kappa} \qquad (3.10)$$

したがって補正された η を η' とすれば、

$$\eta' = \frac{y'}{\delta'} = \frac{y+\varepsilon}{\delta+\varepsilon} = \frac{\eta + \dfrac{l_0^*}{\kappa}}{\dfrac{l_0^*}{\kappa}}$$

（3.11）

図（3.7）より（3.10）式なる補正を施せば、$l_0^* = 0$ の分布、すなわち滑面の速度欠損則と実験誤差の範囲内で一致する。



①：$p/h = 2$　古屋[18]等の実験

○：$p/h = 4$　$x = 1500$ mm

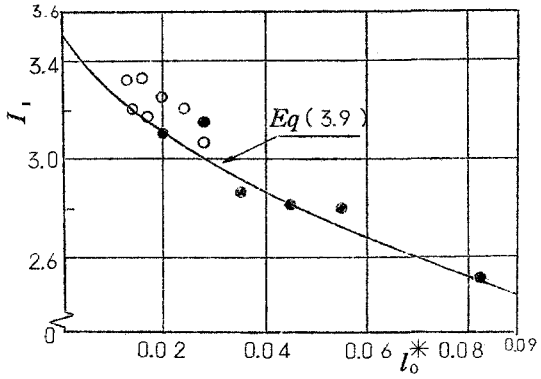
p：ピッチ

◐：$\frac{hue}{\nu} = 3.66 \times 10^3$, $\frac{x}{h} = 392$

◐：$\frac{hue}{\nu} = 14.8 \times 10^3$, $\frac{x}{h} = 132$

} Moore[45]の実験

図 3.5　速度欠損曲線



○：古屋と藤田[17]の実験

◉：Moore[45]の実験

図 3.6　I_1 と l_0^* の関係

○：$l_0^* = 0.01$

△：$l_0^* = 0.03$

□：$l_0^* = 0.05$

◉,▲,■，：原点補正を行なった場合

—：$l_0^* = 0$

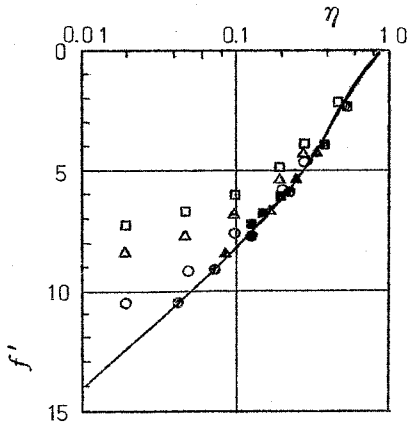


図 3.7　速度欠損曲線

3.2.3　壁法則と粗さ関数

粗面壁近傍の速度分布を求めるために、次の近似を用いる。

$$\tau = \tau_w \qquad (3.12)$$

$$l = \kappa y + l_0 \qquad (3.13)$$

（3.12）式、（3.13）式を（3.3）式に代入し、$y = y_1$において$u = u_1$の条件のもとに積分すれば、

$$u^+ = \int_{y_1}^{y} \frac{1}{l} dy + u_1^+$$

$$= \frac{1}{\kappa} ln\left(y^+ + \frac{1}{\kappa} l_0^+\right) - \frac{1}{\kappa} ln\left(y_1^+ + \frac{1}{\kappa} l_0^+\right) + u_1^+ \qquad (3.14)$$

（3.2.1）節で述べたように、本解析では、$y^+ = 11.12$に定める。u_1^+は滑面の場合はy_1^+と等しく11.12であるが、粗面の場合、u_1^+は一般に粗さの影響をうける。本章では、粗さの影響をl_0に含ませる立場を取っているので、u_1^+はl_0に依存する。u_1^+を本論文ではすべり速度と呼ぶ。

（3.14）式において

$$y' = y + \frac{l_0}{\kappa} \qquad (3.15)$$

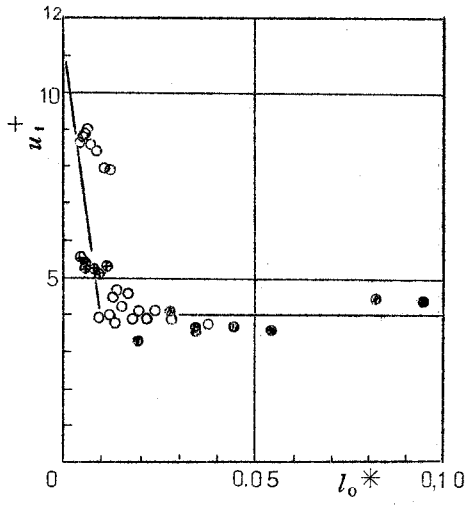
とおけば、u^+はy'^+に対し対数直線関係を有する。したがって壁法則に

基づけば、原点補正量と、原点における混合距離は完全に対応する。

各実験速度分布に対する l_0 は（3.2.2）節で得られた速度欠損曲線と実験結果との比較によっても、またあるいは、（3.13）式による分布曲線との比較によっても得られる。どちらによって求めても、誤差の範囲内で一致する。

次に（3.14）式における u_1^+ について考察を行なってみる。各実験速度分布において、$y=y_1$ の位置に相当する速度 u_1 を速度分布の外挿によって求め、それらを l_0^* についてプロットし、図（3.8）に示す。図より l_0^* の比較的小さな値に対しては、l_0^* の増加とともに u_1^+ は小さな値をとるが、l_0^* がほぼ0.01以上では u_1^+ は約4程度の一定値をとることがわかる。l_0^* が0の場合は滑面の場合に相当するので、u_1^+ は11.12の値をとる。u_1^+ と l_0^* の関係を詳しく論じるには現段階ではまだ実験の種類は十分といえないが、本章では u_1^+ と l_0^* の関係について、次の仮定を置く。

$$\left.\begin{array}{ll} 0 \leqq l_0 < 0.01 & u_1^+ = 11.12 - 7.5\times 10^2 \times l_0^* \\ l_0^* \geqq 0.01 & u_1^+ = 4.0 \end{array}\right\} \quad (3.16)$$



⊕：古屋と藤田[17]の実験
○：古屋等[18]の実験
●：*Moore*[45]の実験

図3.8　u_1^+ と l_0^* の関係

（3.16）式を図（3.8）に実線で示す。

粗さ関数Sは（3.14）式より

$$S=\frac{1}{\kappa}ln\left(y_1^+ + \frac{l_0^+}{\kappa}\right)+U \qquad (3.17)$$

ただし、　$U=C_0-u_1^+$　（3.18）

であるので、（3.16）式で与えられる。u_1^+を上式へ代入すれば、Sはl_0によって表現される。（3.16）式より$l_0^*>0.01$の場合、Uは1.1の一定値をとる。y_1^+に比べ、$\varepsilon^+=\frac{l_0^+}{\kappa}$が十分大きい場合、すなわち粗さの影響が大きい場合、（3.17）式は

$$S=\frac{1}{\kappa}ln\ \varepsilon^+ + U \qquad (3.19)$$

となり、*Perry* 等が与えた（1.7）式と全く等しくなる。（3.17）式と実験結果とを図（3.9）に比較する。図より$l_0^*>0.01$の場合、次式は粗さ関数の値の大きな実験結果と非常によい一致を示す。

$$S=\frac{1}{\kappa}ln\ \varepsilon^+ + 1.1 \qquad (3.20)$$

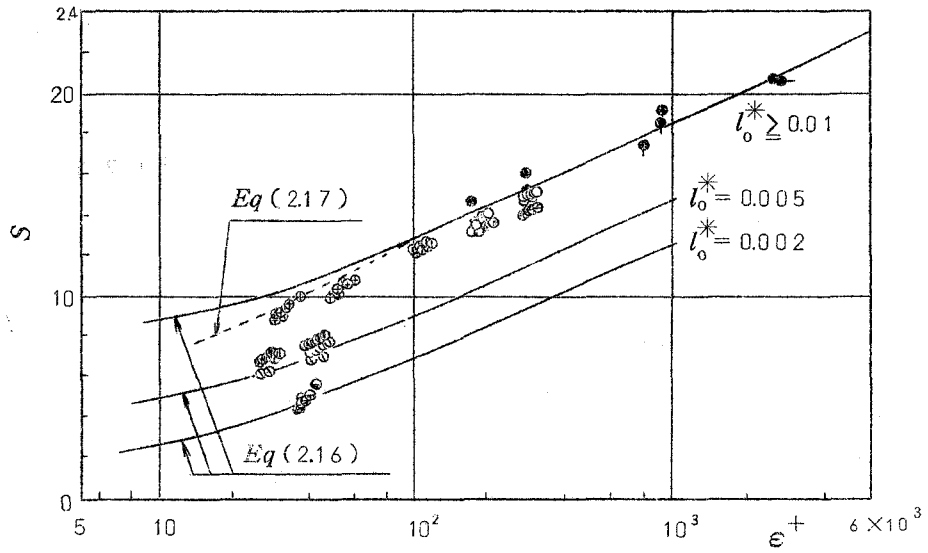
一般に小さな粗さ関数を有する実験結果に対しては、計算と実験との一致はあまりよくない。これは$l_0^*<0.01$に対する仮定（3.16）式が雑なためと考えられる。

3.2.4　摩　擦　則

速度欠損に対する分布式（3.7）式に$y=y_1$を代入すれば、u_1^+は次式で与えられる。

$$u_1^+=\sqrt{\frac{2}{c_f}}-\frac{1}{B_0}\left\{\frac{B_1}{2}ln\frac{1-\eta_1+B_1}{1-\eta_1-B_1}+ln\frac{\{(1-\eta_1)^2-B_1^2\}B_2^2}{\{(1-\eta_1)^2+B_2^2\}B_1^2}\right.$$
$$\left.-B_2\tan^{-1}\frac{1-\eta_1}{B_2}\right\} \qquad (3.21)$$

ただし　$\eta_1 = \dfrac{I_1 y_1^+}{R_\delta^*}$　，　$y_1^+ = 11.12$



⊖：$p/h = 1$，　$l_0^* = 0.013 \sim 0.05$
⊖：$p/h = 2$，　$l_0^* = 0.011 \sim 0.004$
⊖：$p/h = 4$，　$l_0^* = 0.029 \sim 0.01$
○：$p/h = 8$，　$l_0^* = 0.038 \sim 0.013$
⊖：$p/h = 16$，　$l_0^* = 0.034 \sim 0.013$
　　古屋等[18]の実験（二次元針金粗面）

⊕：$h = 2.16$，　$l_0^* = 0.015 \sim 0.004$，古屋と藤田[17]の実験

⊘：d 型粗さ，　$l_0^* = 0.004$，　Perry等[51]の実験

⊖：1/8 Roughness，$l_0^* = 0.035 \sim 0.02$
⊖：1/2 Roughness，$l_0^* = 0.082 \sim 0.035$
⊖：1・1/2 Roughness，$l_0^* = 0.095 \sim 0.055$
　　Moore[45]の実験

図 3.9　粗さ関数

一方（3.16）式によって、u_1^+はl_0^*によって経験的に与えられているので（3.21）式と（3.16）式よりu_1^+を消去すれば摩擦則が次のように得られる。

$$
\left.
\begin{aligned}
&0 \leqq l_0^* < 0.01 \\
&\sqrt{\frac{2}{c_f}} = 11.12 - 7.5\times 10^2 \times l_0^* - \frac{1}{B_0}\left\{\frac{B_1}{2} ln \frac{1-\eta_1+B_1}{1-\eta_1-B_1}\right. \\
&\qquad \left. + ln \frac{\{(1-\eta_1)^2 - B_1^2\} B_2^2}{\{(1-\eta_1)^2 + B_2^2\} B_1^2} - B_2 \, tan^{-1} \frac{1-\eta_1}{B_2}\right\} \\
&l_0^* \geqq 0.01 \\
&\sqrt{\frac{2}{c_f}} = 4.0 - \frac{1}{B_0}\left\{\frac{B_1}{2} ln \frac{1-\eta_1+B_1}{1-\eta_1-B_1} + ln \frac{\{(1-\eta_1)^2 - B_1^2\} B_2^2}{\{(1-\eta_1)^2 + B_2^2\} B_1^2}\right. \\
&\qquad \left. - B_2 \, tan^{-1} \frac{1-\eta_1}{B_2}\right\}
\end{aligned}
\right\} \quad (3.22)
$$

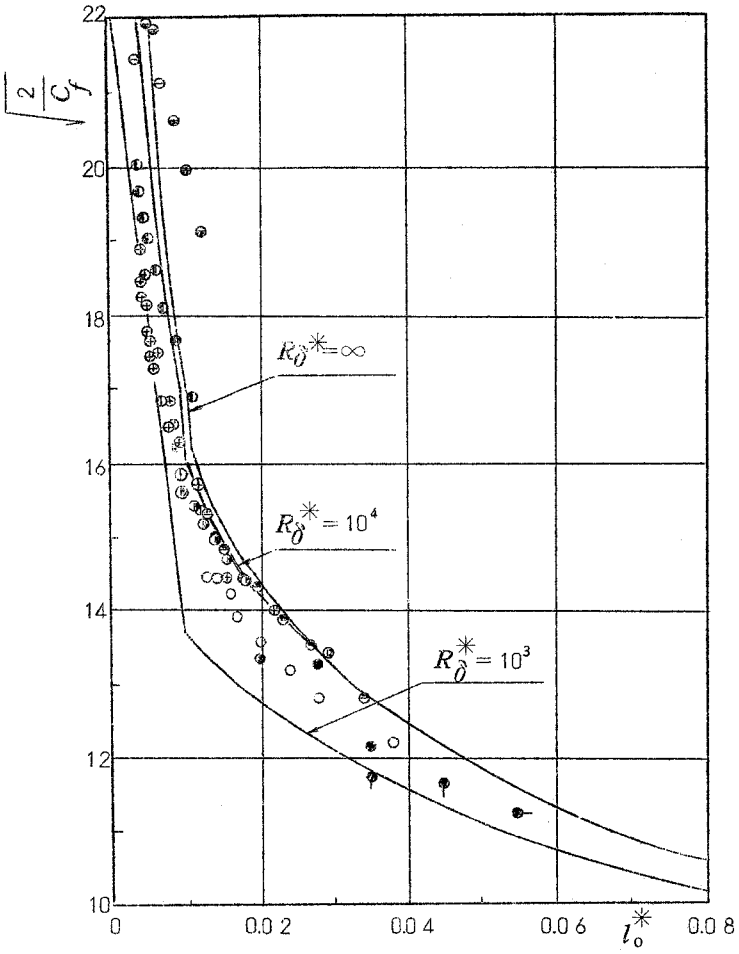
B_0, B_1, B_2 はすべて l_0^* の関数であり、η_1 は R_δ^* の関数である。したがって摩擦係数はレイノルズ数と l_0^* の関数となる。図（3.10）は（3.22）式と実験結果の比較を示す。（3.22）式による結果より、レイノルズ数 R_δ^* が 10^4 以上になると、摩擦係数は R_δ^* に依存せず、l_0^* にのみ強く依存することがわかる。

次に滑面乱流境界層の場合によく知られている *Clauser's chart* に相当する方法を粗面上の流れの場合に拡張することを試みる。まず各実験の l_0^+ の流れ方向の変化について調べる。図（3.11）にいくつかの結果を示す。図より l_0^+ は流れ方向には大きな変化を示さない場合が多いことがわかる。これは次のような理由によるものと考えられる。l_0^+ を書き直せば

$$
l_0^+ = \frac{l_0^* R_\delta^*}{I_1} \qquad (3.23)
$$

となる。粗さの形状が流れ方向に一定であれば、l_0^* は境界層の発達とともに減少する傾向にある。R_δ^* はいうまでもなく増加するが、I_1 は流れ方向にあまり変化しない。結局、l_0^+ は、l_0^* の減少と R_δ^* の増加が相殺し合

うため、ほぼ一定の値をとることになる。もちろん、非常に長い距離を考えたり、特殊な組面に対しては上記のことは成り立たないかも知れないが、一般の組面に対するおおよその近似としては許容される。



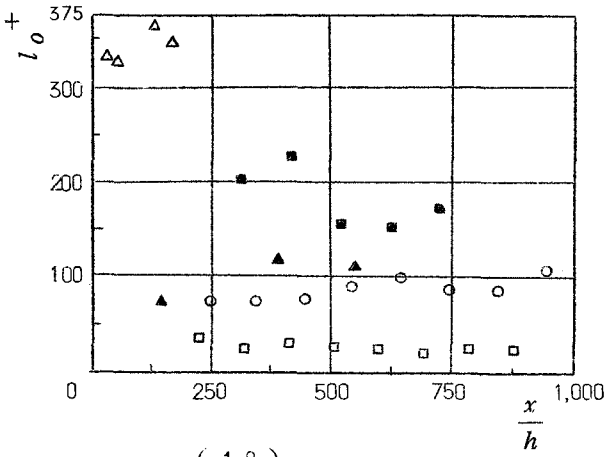
①：*Scottron* と *Power*[59] の実験

⊖：*Perry*[51] 等の実験

他の記号は図3.9と同じ

図3.10　組面乱流境界層における摩擦則

l_0^*の値が流れ方向のある位置で知ることができた場合、他の位置における摩擦係数は、速度分布u～yが与えられれば次のようにして求めることができる。古屋と藤田の実験[18]による針金粗面の場合を例にとり、図（3.12）によって示す。l_0^+が与えられ、その値は180である。x＝500㎜における摩擦係数は未知であり、u～yの実験結果および流体の動粘性係数が与えられているとする。u～yよりR_δ^*は求まる。（3.9）式よりI_1はl_0^*の関数であるので、（3.23）式よりl_0^+がわかっている時、l_0^*は決定される。したがってI_1も求まる。次にc_fに適当な値を仮定し、（3.21）式を用いれば、u_1^+が得られる。l_0^+、u_1^+を（3.14）式へ代入すれば（3.14）式による曲線が図（3.12）の実線のように求まる。図中の実線①、②、③はそれぞれ$\sqrt{2/c_f}$＝14.0、12.0、10.0を仮定した場合である。一方、c_fを仮定すれば実験速度分布u～yを次式を通じてu^+～y^+に書きかえることができる。



○：p/h＝4，古屋等[18]の実験

□：h＝2.16㎜，古屋と藤田[17]の実験

■：h＝5.33㎜，Scottron と Power[59]の実験

△：1/2 Roughness
▲：1/8 Roughness
} Moore[45]の実験

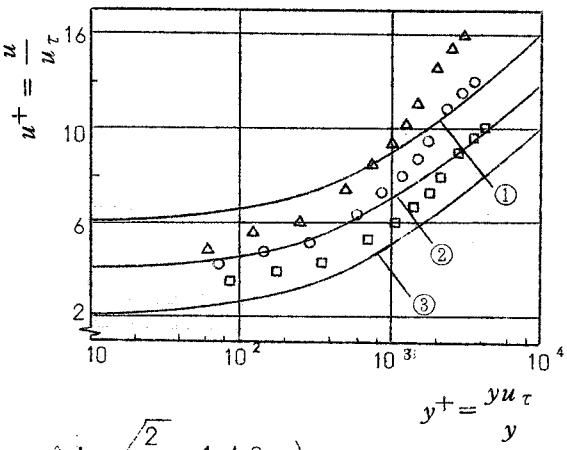
図3.11　l_0^+とx/hの関係

$$u^{+}=\frac{u}{u_{\tau}}=\frac{u}{u_{e}}\sqrt{\frac{2}{c_{f}}}$$

$$y^{+}=\frac{y\,u_{\tau}}{\nu}=\frac{y\,u_{e}}{\nu}\sqrt{\frac{c_{f}}{2}}$$

△，○，□’の記号は実験速度分布に上記の$\sqrt{2/c_f}$を仮定して求めたものを表わす。実験点と実線との比較により$\sqrt{2/c_f}$に12.0を与えた場合、両者がよく一致する。したがって$x=500$mmにおける摩擦係数としてその値をとればよい。

この方法は、*Clauser* が示した対数法則と合うようにc_fを決定する方法と対応しているが、まず与えられた粗面上の流れに対し、l_0^{+}が求まっていなければならないので、少なくともある断面における摩擦係数が求まっている必要がある。したがって、この



△：$\sqrt{\frac{2}{c_f}}=14.0$

○：$\sqrt{\frac{2}{c_f}}=12.0$

□：$\sqrt{\frac{2}{c_f}}=10.0$

古屋(18)等の実験

$p/h=8$，$x=500$mm

①：$\sqrt{\frac{2}{c_f}}=14.0$

②：$\sqrt{\frac{2}{c_f}}=12.0$

③：$\sqrt{\frac{2}{c_f}}=10.0$

(3.14)式

(3.21)式

$l_0^{+}=180$

図3.12　u^{+}とy^{+}の関係

方法は粗面乱流境界層に対する発達予測計算に応用する場合には有効であろう。

以上、本節では摩擦係数の２種類の決定法を示したが、その違いは、前者は（3.16）式で与えられる。u_1^+～l_0^*の仮定式に基づき、後者はl_0^+が流れ方向に不変であるという仮定に基づいていることである。

3.3 結　　論

粗さ素子の山の高さが一定である粗面乱流境界層に対し、混合距離理論を用いて解析を試みた。主流の状態は二次元非圧縮、零圧力勾配である。粗さ素子の山の頂点にy座標の原点を統一し、そこに零でない混合距離を仮定し計算を行ない、次の結果を得た。

(1) 原点における無次元混合距離l_0^*をパラメータとする速度欠損曲線が得られ、実験結果との一致はよかった。

(2) 内層に対する解析により、粗さ関数がl_0^+の関数として与えられた。本解析で得られた粗さ関数は、l_0^*の値が0.01より大となる場合、Perry[51]が与えた粗さ関数（1.7）式と同一の形をとった。

(3) すべり速度、u_1に対する経験式と、(1)で得られた速度欠損曲線より摩擦係数がR_δ^*とl_0^*の関数として得られた。

(4) l_0^+の流れ方向の変化がわずかであることを利用して内層の速度分布式を基準にした摩擦係数の決定法を示した。

第4章　逆圧力勾配非平衡乱流境界層発達計算

4.1　ま　え　が　き

乱流境界層の発達の予測の計算法は、乱流境界層に関する知識の蓄積が増すにつれて発展し、その手法の汎用性は高まってきている。今日の大型計算機の普及によって複雑な方程式の解が数値的には比較的容易に得られることになったので、過去のデータを十分考慮し、そして流れの微視的な構造すなわち乱れを考慮した解析が今日の一般的な傾向となっている。しかし第1章において述べたように、乱流せん断流れを支配する方程式が閉じていないために、その発達を予測する計算においても種々の仮定が必要となる。すなわち補助方程式の仮定を避けることはできない。

第2章で平衡乱流境界層の速度分布が他の場合に比べ単純な法則に従うことを述べた。本方法は、一般の乱流境界層を、平衡乱流境界層からのずれとしてとらえ、速度分布のずれ方に一定の関係をもうけることによって補助方程式を誘導する。零圧力勾配乱流境界層に対してある位置で局所的な外乱を加え、その後の境界層の発達をみた時、ある程度の距離を経ると、平均速度成分と乱れ成分でその距離に差があるが、本来の零圧力勾配の流れにもどる。すなわち零圧力勾配流れの平均速度分布あるいは渦粘性係数等は安定であると考えられる。外乱の一種として主流の圧力勾配が存在する場合にこの考え方を拡張し、次のように考える。

任意の乱流境界層の速度分布はそれ自体で平衡乱流境界層の速度分布になろうとする傾向を持ち、種々の外乱が平衡状態を乱す作用を及ぼす。したがって外乱が強ければ強いほど、平衡状態から遠ざかり、また平衡状態から離れるほど、平衡状態に復元する傾向も強い。

以上の仮説をせん断応力τについて適用した研究は、*Nash*[46]、*Goldberg*[21]

および*McDonald*[42]によってなされている。*Nash*と*Goldberg*はそれぞれ$T_i=\int_0^\infty\{\tau/(\frac{1}{2}\rho u_e^2)\}d\eta$、$T_p=\int_0^\infty\{\tau/(\frac{1}{2}\rho u_e^2)\}\{\partial(u/u_e)/\partial y\}dy$に対し、平衡乱流境界層からのずれの関係式（4.1）式、（4.2）式を仮定した。

$$\frac{\delta}{T_i}\frac{dT_i}{dx}=const\times\left(\frac{T_{ieq}}{T_i}-1\right) \qquad (4.1)$$

$$\frac{\delta}{T_p}\frac{dT_p}{dx}=const\times\left(\frac{T_{peq}}{T_p}-1\right) \qquad (4.2)$$

添字（eq）は平衡乱流境界層を示す。

*McDonald*は*Bradshaw*[5]が既に用いた仮定とほとんど同じ仮定を置いて乱れエネルギ方程式をせん断応力に関する方程式に変換し、*Nash*による補助方程式をさらに修正し、次式を得た。

$$\frac{\delta}{T_i}\frac{dT_i}{dx}=-\frac{\delta}{u_e}\frac{du_e}{dx}+\frac{2\times k'}{\left\{\frac{u}{u_e}\left(\frac{\ell}{\delta}\right)\right\}_{max}a^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{T_{ieq}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{1-\left(\frac{T_i}{T_{ieq}}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (4.3)$$

添字（max）は境界層内の最大値を示す。

*Nash*や*Goldlerg*の式に比べ、乱れエネルギ方程式に基礎を置いている点で、上式はより進んだものといえる。（4.3）式の右辺第2項は、非平衡乱流境界層のせん断応力積分が平衡乱流境界層の場合に復元する傾向をもつことを示している。しかし、上式を零圧力勾配平衡乱流境界層に適用すれば、T_iは流れ方向に不変となる。これは、レイノルズ数によって流れ方向にせん断応力が変化するという実験事実と矛盾する。

本章では、速度分布の積分厚さI_1に関し、平衡乱流境界層との比較を行ない、

数種類の実験データを参考にして経験的に補助方程式の誘導を行なう。補助方程式の誘導については（4.2）節において述べる。

次に本方法の概略について簡単に述べる。本章においては、乱れ成分については考慮せず、平均速度場の積分法である最も古典的な手法での計算を試みる。すなわち基礎式として次の*Kármán*の運動量積分方程式を用いる。

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{c_f}{2} - (H+2)\frac{\theta}{u_e}\frac{du_e}{dx} \qquad (4.4)$$

摩擦係数を与える経験式は*Ludwieg－Tillmann*の公式をはじめ多くあるが、[56] 本方法では、壁法則と速度欠損法則より得られる第2章（2.21）式をを用いる。（2.21）式を書き直せば

$$\sqrt{\frac{2}{c_f}} = \frac{1}{\kappa}\ln\frac{u_e\theta}{\nu} - \frac{1}{\kappa}\ln\left(1-\sqrt{\frac{c_f}{2}}G\right)+C_0-C_1(G) \qquad (4.5)$$

上式における積分厚さは形状係数Hおよび摩擦係数Gと次の関係で結ばれる。

$$H = \frac{1}{1-\sqrt{\frac{c_f}{2}}G} \qquad (4.6)$$

平衡乱流境界層では、C_1 はβの関数となるが、一般の乱流境界層ではGの関数と置く。（4.5）式は剥離点近くを除けば、実験結果と非常によい一致を与えるが、剥離点近くでは実験結果と合わない。これは（4.5）式を導く際に用いた対数法則が壁面摩擦が非常に小さい所では成立しないことによる。剥離点の予測は実用上重要なことであるので、発達計算の主要な目的の一つであるが、その近傍で適用できる摩擦則がまだ確立されていないので、全く別な手法で剥離点の予測を行なっている。[55] したがって本方法を含めて、（4.5）式の摩擦

則を用いる発達計算は剥離点近くでは適用はできない。

（4.4）式、（4.5）式における未知数はθ、c_f、Hであり、さらに一つの関係式を必要とする。これが先に述べた補助方程式である。

次節において本方法で使用された補助方程式の誘導を行う。

4.2 補助方程式

平衡乱流境界層では速度欠損$(u-u_e)/u_\tau \sim \eta$が流れ方向に相似となり、その形状は圧力勾配パラメータβにのみ依存していることは既に第2章で述べた。さらに第2章では、混合距離理論を用いてその分布式を得た。βに対応する平衡乱流境界層を特徴づける無次元積分厚さとしてI_1があるが、それは第2章の計算により次式で与えられる。

$$I_1 = \frac{\sqrt{\varphi(\beta)}}{\kappa(1-\eta_m)^2}\left[-2(3-2\eta_m)\ln 2+\{2(1-\eta_m)-E^2\}\ln\left(\frac{1}{E^2}+1\right)\right.$$

$$\left.+2E(3-2\eta_m)\tan^{-1}\frac{1}{E}\right] \qquad (4.7)$$

ただし、

$$E=\left(\frac{2a}{\kappa-2a}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad a=0.08、\qquad \kappa=0.40$$

$$\varphi(\beta)=1+0.775\beta$$

$$\eta_m = \frac{\{1-\varphi(\beta)^{-\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}}{1+\{1-\varphi(\beta)^{-\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}}$$

βもI_1も平衡乱流境界層以外の一般の乱流境界層に対しても定義できるが、一般の乱流境界層ではβが流れ方向に逐次変化し、I_1も逐次変化する。そして

β と I_{1i} は（ 4. 4 ）式の関係を必ずしも満たさない。すなわち一般の乱流境界層においては、それらの量は絶えず上流の条件に依存しながら変化している。

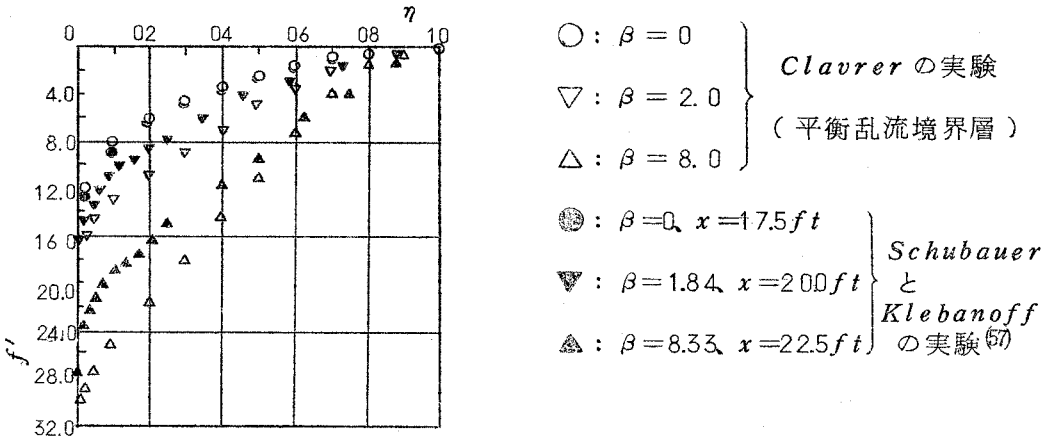


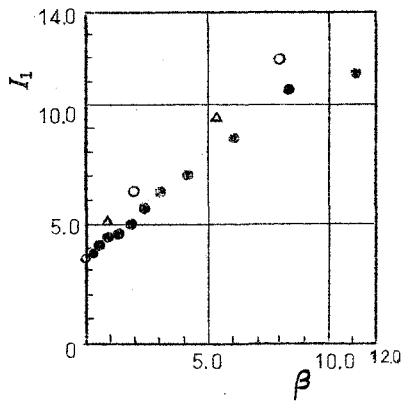
図 4. 1　速度欠損曲線

図（ 4. 1 ）に *Schubauer* と *Klebanoff*[57] の実験速度分布を速度欠損として表わし、同じ β を有する平衡乱流境界層の速度分布と比較する。*Schubauer* と *Klebanoff* の実験は翼型状の物体表面の乱流境界層について行なわれている。主流の圧力勾配は翼型前縁を過ぎてしばらくは負であるが、前縁から 8 ft の位置から約 1 7. 5 ft 位まではほぼ零となっている。そしてそれより後流では、正の圧力勾配が働き後縁近くで剥離している。図には x = 1 7. 5 ft より後流の位置における速度分布を示す。図より *Schubauer* と *Klebanoff* の実験の速度欠損は平衡乱流境界層より常に小さいことがわかる。これは、平衡乱流境界層が上流から β が一定である場合に対応するのに対し、*Schubauer* と *Klebanoff* の実験の場合、β の値の小さい上流側の影響が常に残っていることによる。このことを I_1 について図（ 4. 2 ）に示す。

次に平衡乱流境界層とさらに比較するために、I_1 / I_{1_E} なる量について考え

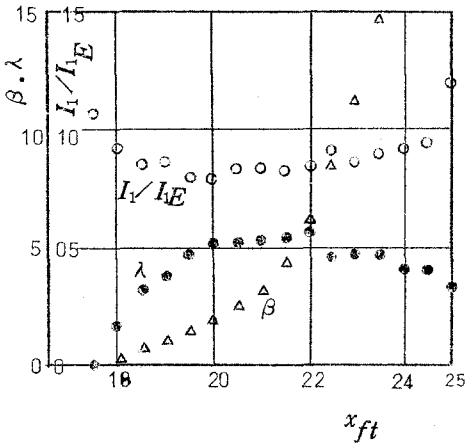
る。I_{1_E}は一般の乱流境界層のある点におけるβに対応する平衡乱流境界層のI_1であり、それは（4.7）式により得られる。したがって$1-I_1/I_{1_E}$は平衡乱流境界層からのずれを表わす。図（4.3）～図（4.5）にいくつかの実験例におけるI_1/I_{1_E}の流れ方向の値を示す。剥離点近くでは$\tau_w \to 0$となるため$\beta \to \infty$となり、I_1/I_{1_E}とβとの関連は見い出せない。

したがってこのような不都合を避け



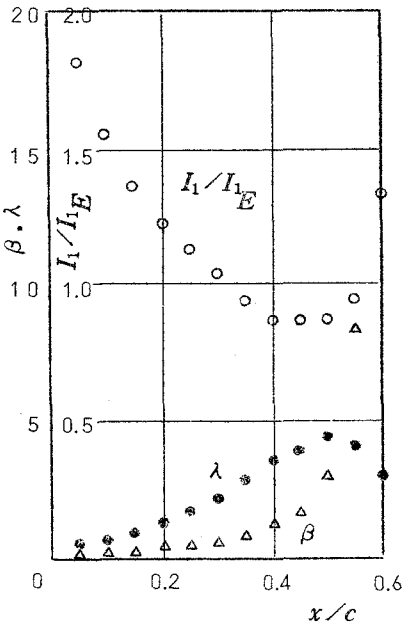
○：*Clauser*[10]の実験
△：*Bradshaw*[6]の実験
平衡乱流境界層
●：*Schubauer*と*Klebanoff*[57]の実験

図4.2　Iとβの関係



*Schubauer*と*Klebanoff*[57]の実験

図4.3　I_1/I_{1_E}、β、λとxの関係



*von Doenhoff*と*Tetervin*の実験
NACA 65(216)−222、$\alpha=8.1°$; $R=2.67\times10^6$（α：迎え角、R：レイノルズ数）

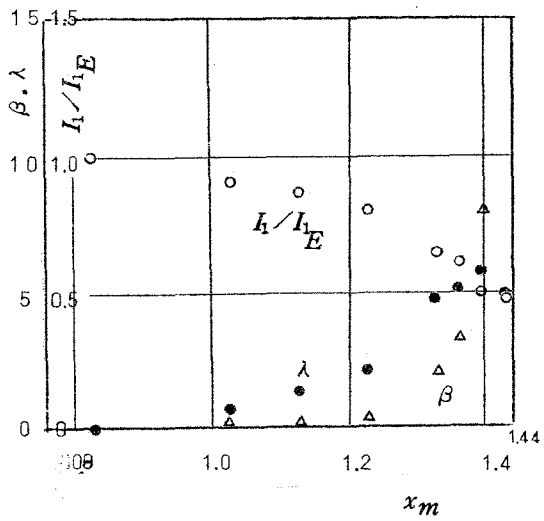
図4.4　I_1/I_{1_E}、β、λとxの関係

るために、次の量について考える。

$$\lambda = \frac{\delta}{\tau_{max}} \frac{dp}{dx} \quad (4.5)$$

λは明らかに流れを通じて有限である。λは次式のように書き直すことができる。

$$\lambda = \frac{\beta}{\left(\frac{\tau_{max}}{\tau_w}\right)} \frac{1}{\gamma I_1} \quad (4.9)$$



ステップ前面流れ

図4.5　I_1/I_{1_E}、β、λとxの関係

上式においてβ、γ、I_1は各実験データの壁面せん断応力と速度分布の測定結果より決定される量で知ることは容易であるが、τ_{max}/τ_wは一般に非平衡乱流境界層の場合、熱線による実測データの結果や、特殊な場合を除き、精度よく見積ることが困難である。したがってここでは第1近似として、平衡乱流境界層における関係式を代入する。

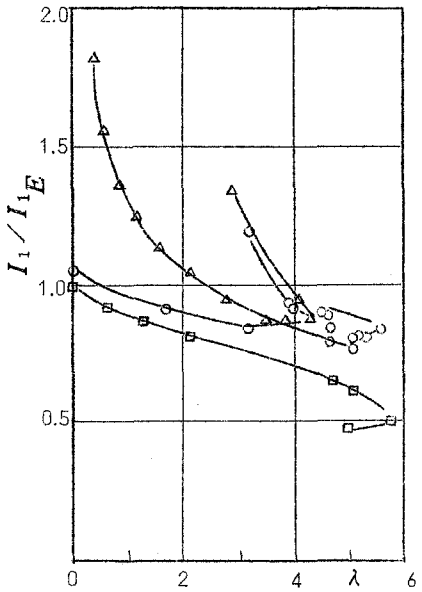
ゆえに

$$\lambda = \frac{\beta}{\varphi(\beta)} \frac{1}{\gamma I_1} \quad (4.10)$$

名実験例におけるλを図(4.3)〜図(4.5)に示す。I_1/I_{1_E}の変化とは無関係にβは急激に下流へ向かうにつれて増加するが、λはI_1/I_{1_E}の変化していることが、いづれの実験例によっても示されている。図(4.3)の*Schubauer*と*Klebanoff*の実験においては、$x=17.5\,ft$の位置では、流れはほぼ零圧力勾配平衡乱流境界層となっている。λが増加するにつれて

I_1/I_{1_E} は減少する。しかし λ がほぼ一定の状態の時、I_1/I_{1_E} は徐々に1に近づく傾向を示す。*von Doenhoff* と *Tetervin* の実験[15]は *NACA* 65(216)−222 の翼面上でなされている。図に示されている実験は迎え角 $\alpha=8.1^0$、レイノルズ数 $U_e c/\nu=2.67\times10^6$(c は翼弦長)においてなされた場合である。この場合境界層はどの部分においても平衡ではない。図(4.4)に示されているように、I_1/I_{1_E} が1よりかなり大きな値から出発している。一方 λ は流れ方向にふえるが、$x/c=0.5$ 付近で λ は最大値をとる。I_1/I_{1_E} は大きな値から急激に減少し、λ の最大付近で I_1/I_{1_E} は最少値をとる。図(4.5)は第6章で行なわれた実験結果の一部である。平板上に流れに垂直にステップを置き、流れを強制的に剥離させた場合の実験結果である。したがってこの場合、ステップより十分上流では零圧力勾配平衡乱流境界層が実現されている。図より I_1/I_{1_E} は λ の増加とともに、徐々に減少しはじめ、最少値は0.5にまで下がる。

次に図(4.3)から図(4.5)に示したのと同じ実験例を $I_1/I_{1_E}\sim\lambda$ の形で再度プロットし、図(4.6)に示す。理想的な平衡乱流境界層の場合、



○: *Schubauer* と *Klebanoff* の実験[57]

△: *von Donenhoff* と *Tetervin* の実験[15]

□: ステップ前面流れ

図 4.6　I_1/I_{1_E} と λ の関係

$I_1/I_{1_E}\sim\lambda$線図上では$I_1/I_{1_E}=1$の上のいずれかの一点が対応する。なぜならば、平衡乱流境界層は十分大きなレイノルズ数で実現されるので、摩擦係数の流れ方向の変化は非常に小さく、したがって（4.10）式におけるγはほぼ一定値をとる。βやI_1は定義より一定値であるのでλも一定となる。

von Doenhoff と *Tetervin* の翼型上のデータにおいては、$\left|d(I_1/I_{1_E})/d\lambda\right|$は$I_1/I_{1_E}$が1の値に近づくまでかなり大きな値を示す。これは$I_1/I_{1_E}$が1より離れていればいるほど、平衡状態への復元が急であると考えることができる。

一方、ステップ前方の流れではI_1/I_{1_E}は0.5まで下がるが、他の2例に比べ圧力勾配の変化が剥離近くまで急であることによる。翼面上の二つの実験結果が図（4.6）において、最終的にI_1/I_{1_E}の値のはね上りを示すが、その部分は剥離点に近い所であるので、摩擦係数に大きな誤差が生じている。したがってそのはね上りについては今の段階では断定的なことはいえない。

本章（4.1）節で述べられた仮説を表現するために、図（4.6）より$d(I_1/I_{1_E})/d\lambda$に注目する。すなわち$d(I_1/I_{1_E})/d\lambda$を平衡乱流境界層からのずれ$(1-I_1/I_{1_E})$と、圧力勾配の流れ方向の変化$\delta_0^{*2}\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{u_e}\frac{du_e}{dx}\right)\right\}$の関数と考える。

$$\frac{d(I_1/I_{1_E})}{d\lambda}=N\left[\delta_0^{*2}\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{u_e}\frac{du_e}{dx}\right)\right\},\quad 1-\frac{I_1}{I_{1_E}}\right] \qquad (4.11)$$

本章ではNに対し経験的に次式を仮定する。

$$N=-0.3m^{\frac{1}{8}}(\mathrm{sign}\,m)+0.47n^2(\mathrm{sign}\,n) \qquad (4.12)$$

$$m=\delta_0^{*2}\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{u_e}\frac{du_e}{dx}\right)\right\},\quad n=1-\frac{I_1}{I_{1_E}}$$

上式は図（4.6）の傾向と定性的に一致する。定量的にはまだ十分ではない。発達計算の新らしい一つの試みを行うために、単純な仮定を用いたが、今後（4.12）式を修正することは必要である。

4.3 計　算　方　法

以上によって方程式がすべて得られたので、次にその計算手順を述べる。補助方程式の形から判断すれば、未知数としてθ、H、c_f を直接用いるのは複雑であるので、次の変数を用いる。

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{\frac{c_f}{2}} \\ B &= \frac{2}{c_f} \times H \times \theta \\ I_1 &= \int_0^\infty \frac{u_e - u}{u\tau} d\eta \end{aligned}\right\} \qquad (4.13)$$

B、γ、I_1 を用いてθ、c_f、Hを表わせば

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \gamma^2 B (1 - \gamma I_1 A) \\ c_f &= 2\gamma^2 \\ H &= \frac{1}{1 - \gamma I_1 A} \end{aligned}\right\} \qquad (4.14)$$

ただし、上式におけるAは

$$A=\int_0^{\infty}\left(\frac{u-u_e}{I_1\ u_e}\right)^2 d\eta \qquad (4.15)$$

である。Aを用いるとGは

$$G=A\ I_1 \qquad (4.16)$$

となる。Aは（4.15）式の定義より、一般に流れ方向に大きな変化をしない。平衡乱流境界層ではAはβの関数として与えられ、それを図（4.7）に示す。一般の乱流境界層に対しては、AはβとAの初期値に依存すると考える。すなわち、ある初期状態β_0において$A=A_0$の時、任意のβに対するAを次式で与える。

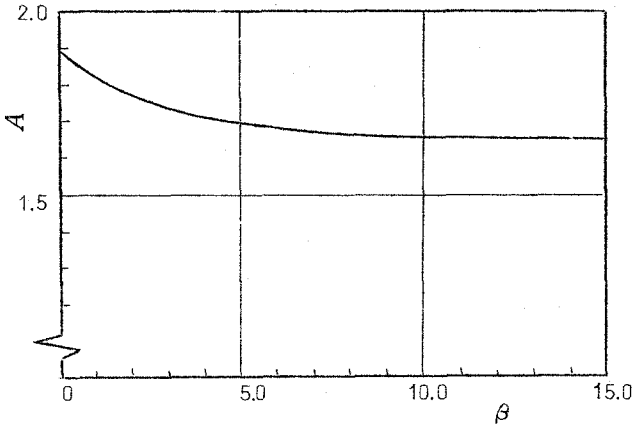


図4.7　Aとβの関係

$$A=\frac{A_0}{A_E(\beta_0)}\ A_E(\beta) \qquad (4.17)$$

上式における添字“0”は初期値を示し、添字“E”は同じβに対する平衡乱流境界層の値を示す。

$A_E(\beta)$に対しては次の多項式による表現を用いる。

$$0\leqq\beta<14 \qquad A_E(\beta)=C_1+C_2(\beta-14)^2+C_3(\beta-14)^3$$
$$+C_4(\beta-14)^4+C_5(\beta-14)^5$$

$$\left.\begin{array}{ll} \beta > 14 & A_E = \text{定数} = 1.65 \\ \text{ただし} & C_1 = 1.65、\quad C_2 = 7.693\times10^{-1}、\quad C_3 = 5.625\times10^{-5} \\ & C_4 = 1.259\times10^{-6}、\quad C_5 = -3.630\times10^{-7} \end{array}\right\}$$

以上によって、一般の乱流境界層のAが、初期値A_0が与えられればβのみの関数として表わすことができる。βとBは次式の関係で結ばれる。

$$\beta = B \times \left(\frac{-1}{u_e} \quad \frac{du_e}{dx}\right) \tag{4.16}$$

(4.14)式を運動量積分方程式(4.4)式に代入すれば

$$P_1 \frac{dB}{dx} + P_2 \frac{d\gamma}{dx} + P_3 \frac{dI_1}{dx} = P_4 \tag{4.17}$$

ただし

$$P_1 = 1 - \gamma I_1 \frac{A_0}{A_E(\beta_0)} \left\{ A_E + B \frac{dA_E}{d\beta} \left(\frac{-1}{u_e} \cdot \frac{du_e}{dx}\right) \right\}$$

$$P_2 = \frac{B}{\gamma} \left\{ 3 \left(1 - \gamma I_1 \frac{A_0}{A_E(\beta_0)} \cdot A_E \right) - 1 \right\}$$

$$P_3 = -\gamma B \frac{A_0}{A_E(\beta_0)} \quad A_E$$

$$P_4 = 1 + B \left\{ 1 - 2 \left(1 - \gamma I_1 \frac{A_0}{A_E(\beta_0)} \quad A_E \right) \right\} \left(\frac{-1}{u_e} \quad \frac{du_e}{dx}\right)$$

$$+ \gamma B^2 \; I_1 \frac{A_0}{A_E(\beta_0)} \quad \frac{dA_E}{d\beta} \left(\frac{-1}{u_e} \quad \frac{du_e}{dx}\right)$$

(4.14)式を補助方程式(4.11)式に代入すれば

$$Q_1 \frac{dB}{dx} + Q_2 \frac{d\gamma}{dx} + Q_3 \frac{dI_1}{dx} = Q_4 \tag{4.19}$$

ただし

$$Q_1=\left\{\frac{N}{\gamma\varphi(\beta)^2}+\left(\frac{I_1}{I_{1_E}}\right)^2\frac{dI_{1_E}}{d\beta}\right\}\left(\frac{-1}{u_e}\frac{du_e}{dx}\right)$$

$$Q_2=-\frac{NB}{\gamma^2\varphi(\beta)}\left(\frac{-1}{u_e}\frac{du_e}{dx}\right)$$

$$Q_3=-\left\{\frac{NB}{\gamma I_1\varphi(\beta)}\left(\frac{-1}{u_e}\frac{du_e}{dx}\right)+\frac{I_1}{I_{1_E}}\right\}$$

$$Q_4=-B\left\{\frac{N}{\gamma\varphi(\beta)^2}+\left(\frac{I_1}{I_{1_E}}\right)\frac{dI_{1_E}}{d\beta}\right\}\frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{u_e}\frac{du_e}{dx}\right)$$

上式における I_{1_E}、$\varphi(\beta)$、Nはそれぞれ（4.7）式、（4.7）′式、（4.12）式によって与えられる。$dI_{1_E}/d\beta$は（4.7）式、（4.7）′式より

$$\frac{dI_{1_E}}{d\beta}=\frac{0.3875(I_{1_E}-2.4428)}{\varphi(\beta)\{1-\varphi(\beta)^{-\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}} \qquad (4.20)$$

となる。$\beta\to 0$の時、上式の$\varphi(\beta)$は1に近づくため、$dI_{1_E}/d\beta\to\infty$となる。このことを避けるために、$0<\beta<0.25$の間を次式で近似する。

$$\frac{dI_{1_E}}{d\beta}=2.8588-2.7838\beta \qquad (4.21)$$

そして（4.20）式は$\beta>0.25$に対して適用する。I_{1_E}とβの関係は第2章図（2.9）に示す。本章ではI_{1_E}は第2章の第1の方法に基づいている。

（4.5）式をxに関して微分したのち（4.14）式を代入すれば

$$R_1\frac{dB}{dx}+R_2\frac{d\gamma}{dx}+R_3\frac{dI_1}{dx}=R_4 \qquad (4.22)$$

ただし

$$R_1 = \gamma\left\{\frac{2.5}{B} - I_1 \frac{A_0}{A_E(\beta_0)} \frac{dA_E}{d\beta} \frac{dC_1}{dG}\left(\frac{-1}{u_e} \frac{du_e}{dx}\right)\right\}$$

$$R_2 = \frac{1}{\gamma} + 5$$

$$R_3 = -\gamma\left(\frac{A_0}{A_E(\beta_0)} A_E \frac{dC_1}{dG} + \frac{2.5}{I_1}\right)$$

$$R_4 = 2.5\gamma\left(\frac{-1}{u_e} \frac{du_e}{dx}\right) + \gamma I_1 B \frac{A_0}{A_E(\beta_0)} \frac{dA_E}{d\beta} \frac{dC_1}{dG} \frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{u_e} \frac{du_e}{dx}\right)$$

上式におけるC_1は平衡乱流境界層ではGがβのみの関数であるのでC_1もまたβのみに依存する。図（4.8）に示されているように、C_1は速度欠損の対数則部分を延長した場合、$\eta = 1$の線と交わる点と$f' = 0$の間の差であるので、一般に速度欠損が大きくなるほど、C_1もまた大きな値をとる。一般の乱流境界層におけるC_1とGの関係を近似的に平衡乱流境界層の場合と同一と置く。図（4.9）に*Clauser*[10]の実験におけるC_1とGの関係を示す。

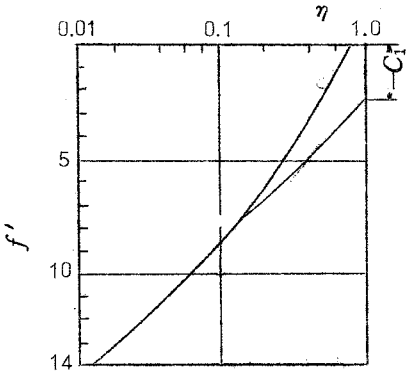
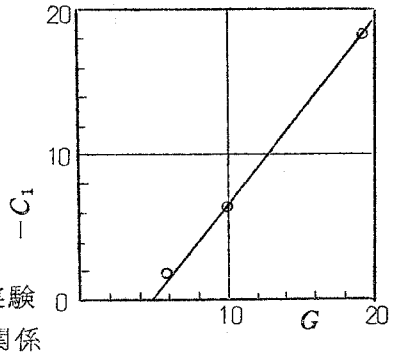


図 4.8　速度欠損曲線

図より

$$\frac{dC_1}{dG} = \text{一定} = -1.27 \qquad (4.20)$$

と置く。



○：*Clauser*[10]の実験

図 4.9　C_1とGの関係

以上で未知数B、γ、I_1に対する方程式のすべてが得られたので、主流の圧力勾配が与えられれば計算が実行できる。B、γ、I_1とθ、c_f、Hとの変換は（4.14）式によって行なえばよい。

4.4 計　算　結　果

計算結果は図（4.10）から図（4.19）に示す。*Clauser*の実験結果は平衡乱流境界層の実験として有名であるが、βの値は実験的には精確に一定でない。

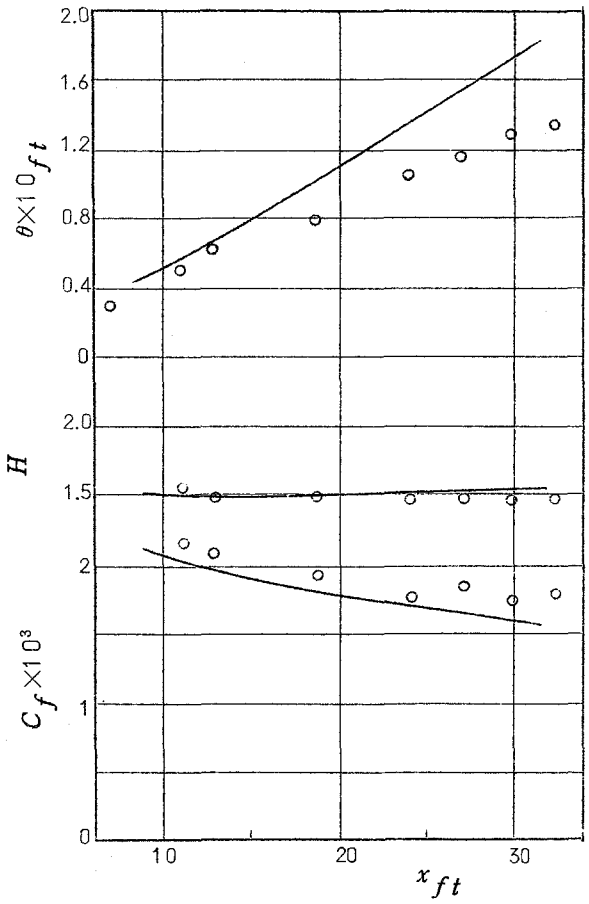


図4.10　*Clauser*[10]の実験（圧力分布Ⅰ）との比較

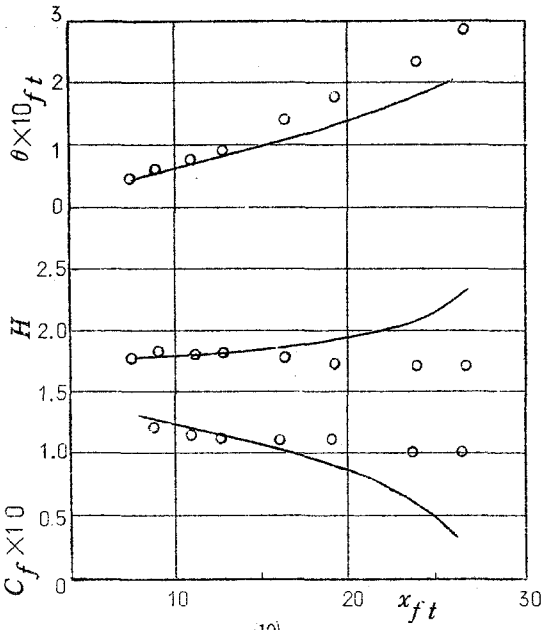


図 4.1 1　*Clauser*[10] の実験（圧力分布 Ⅱ）との比較

圧力分布(Ⅰ)の場合、βは6.92ft < x < 26.7ftに対して、1.8から2.25まで変化している。圧力分布(Ⅱ)の場合、8.33ft < x < 26.7ft に対して、βは6から13まで変化している。本方法による発達計算を行なうために圧力分布(Ⅰ)においては、出発点x_0、およびβの初期値β_0をそれぞれ8.0 ft、1.8に置く。計算結果で

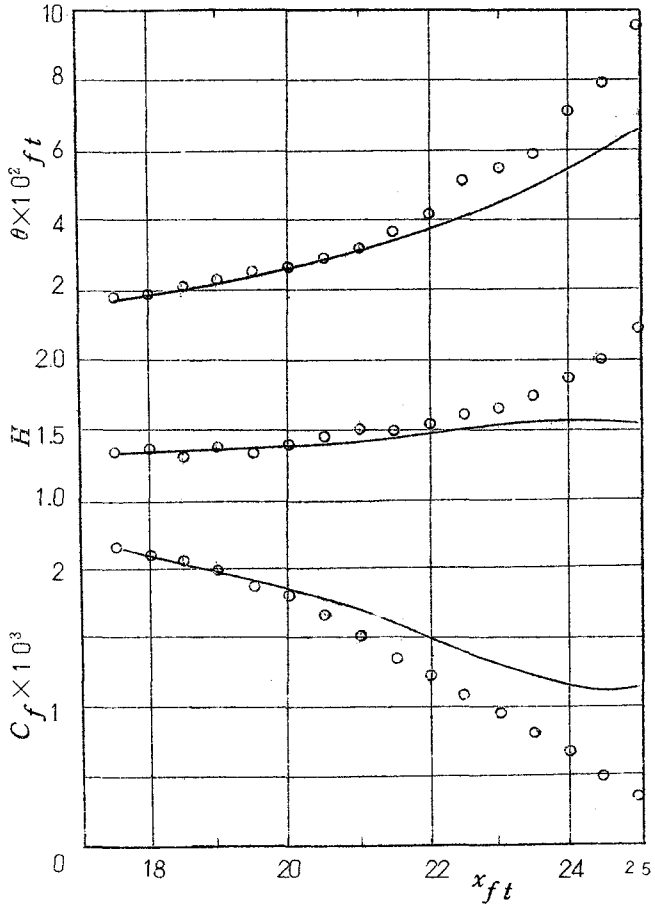


図 4.1 2　*Schubauer* と *Klebakoff*[57] の実験との比較

はβは1.8から$x=26.0ft$において、2.91を示す。圧力分布(III)においては、x_0、β_0をそれぞれ、7.5ft、4.62と置く。計算されたβは$x=26.0ft$において25.46の値をとる。圧力分布(I)の計算結果においてはc_fとHは実験とほぼ一致する結果となっている。圧力分布(III)では、計算結果と実験結果はあまりよく一致しない。

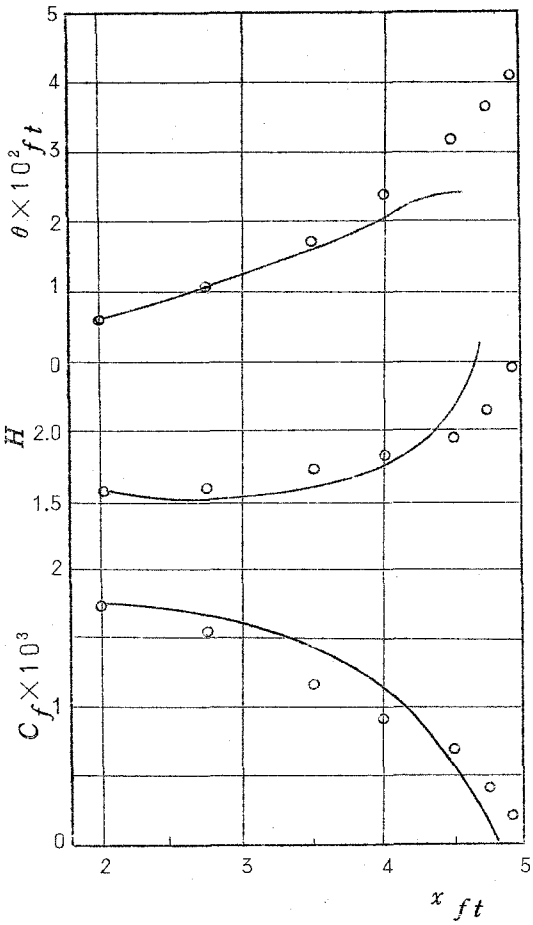
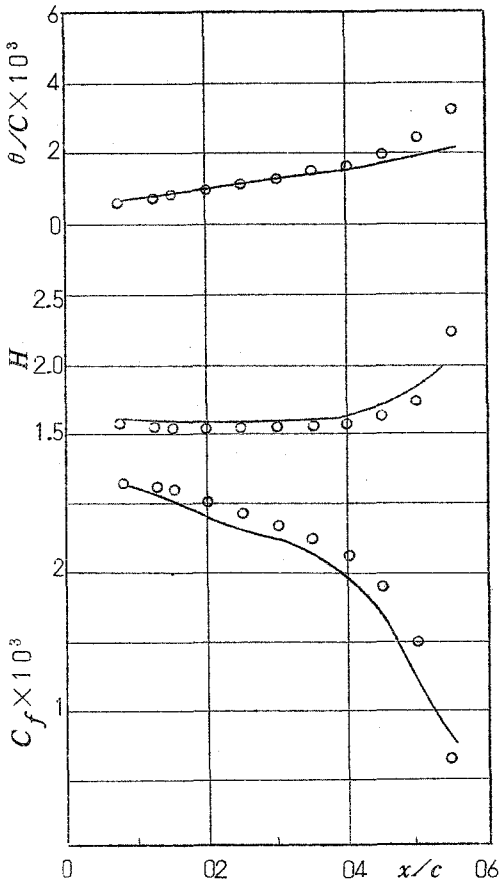
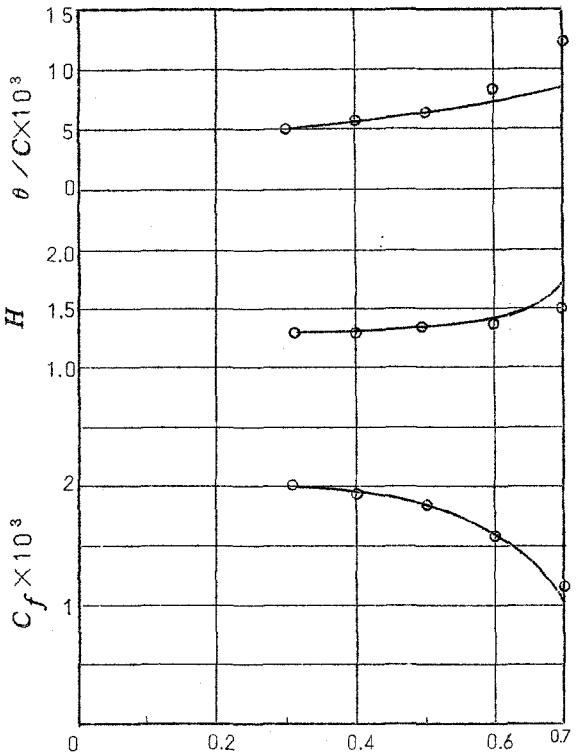


図4.13 *Newman*[36]の実験との比較

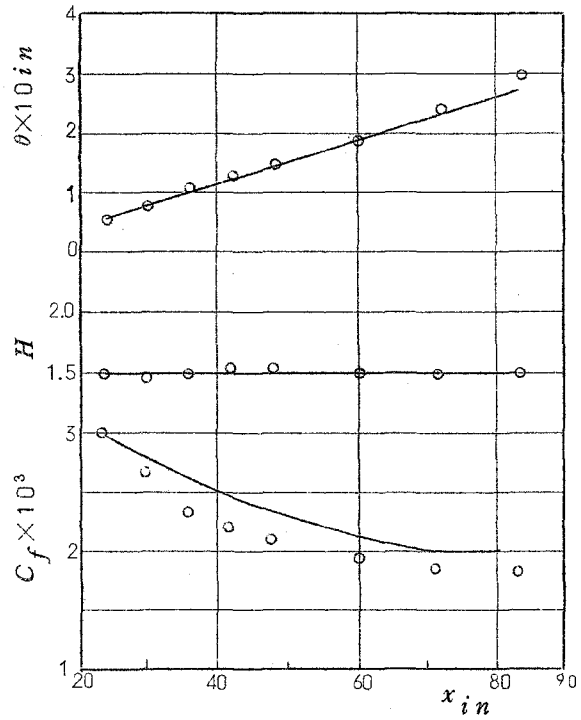


*NACA*65(216)−222、$\alpha=10.1°$
$R=2.64\times10^6$
図4.14 *von Doenhoff*と*Tetervin*[15]の実験との比較



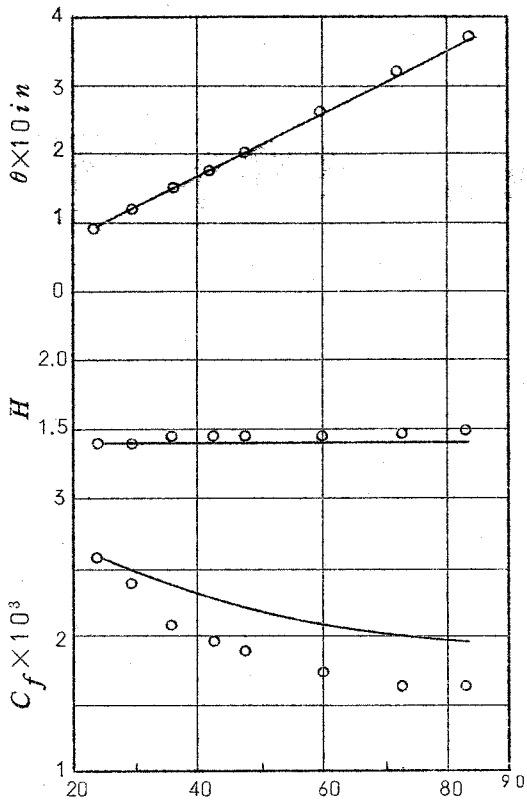
NACA 65(216)−222、α=9.1°、R=4.18×10⁶

図 4.15　*von Doenhoff* と *Tetervin*[15]の実験との比較



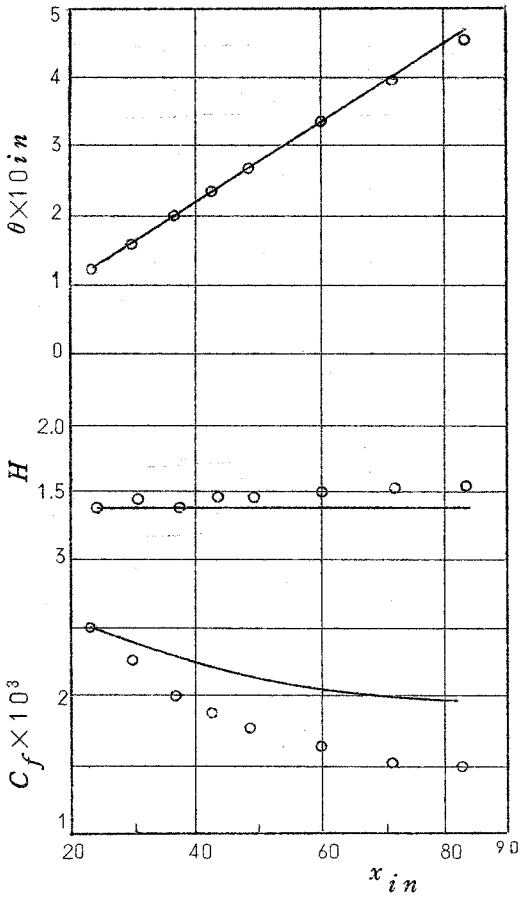
Layer "A"

図 4.16　*Bradshaiw*[7]の実験との比較



Layer"B"

図 4.17　*Bradshaw*[7]の実験との比較



Layer"C"

図 4.18　*Bradshaw*[7]の実験との比較

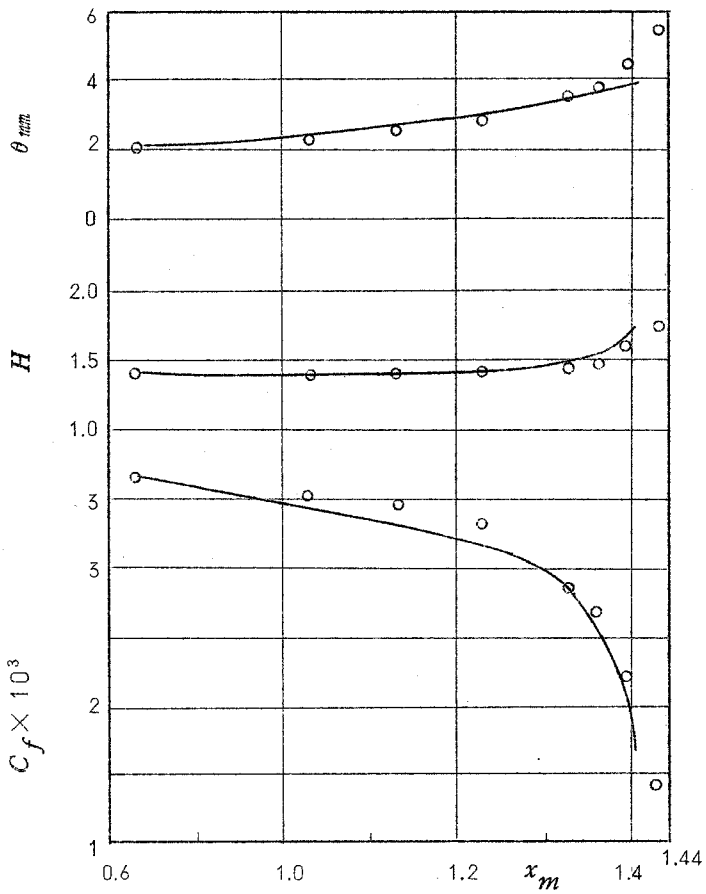


図 4.19　ステップ前面流れ

翼面上の実験と計算結果の比較を図（4.12）～図（4.15）において行う。図（4.12）に示されている *Schubauer* と *Klebanoff* の実験[57]の場合を除いて、だいたいよい一致が得られている。しかしいづれの場合も計算された θ は実験結果の θ よりも小さな値をとっている。

図（4.16）～図（4.18）に示されている *Bradshaw* の実験[7]は零圧力勾配の状態から急に $U_e \propto x^{-0.255}$ の逆圧力勾配が働いた場合の実験である。いづれの場合においても θ と H の計算結果は実験結果と非常によく一致しているが、計算された c_f は実験に比べ高い値を示す。

図（4.19）の実験については本論文第6章において詳しく説明しているステップ前方の流れである。圧力上昇はステップに近い所で急である。計算結果はほぼ満足である。特に c_f はステップ前方の流れ特有の傾向とよく一致している。

（4.1）節でも述べたように、剥離点近くでは計算結果は全く実験と一致しない。

4.5 結　　論

平衡乱流境界層と逆圧力勾配の下で非平衡となっている一般の乱流境界層を比較し、I_1/I_{1_E} と $\lambda=\frac{\delta}{\tau_{max}}\frac{dp}{dx}$ の変化が対応していることを見い出した。一般の乱流境界層はそれ自体平衡になろうとする傾向を有し、種々の外乱が平衡状態から一般の乱流境界層を離すという仮定を設け、$d(I_1/I_{1_E})/d\lambda$ に関する補助方程式を誘導した。この補助方程式を、Kármán の運動量積分方程式、摩擦公式と連立させ、境界層の発達予測計算を行った。本方法は、剥離点近傍では実験結果によい一致を与えない。

第5章　零圧力勾配乱流境界層におよぼす主流の乱れの影響

5.1　ま　え　が　き

乱流境界層に関する従来の実験のほとんどは、主流中の乱れを非常に小さくした状態の下で行なわれてきた。主流の乱れの影響は層流境界層の遷移の問題においては、しばしば論じられているが、乱流境界層の実験においては、主流の乱れを低くすることにもっぱら多大の努力が払われてきた。

層流境界層では、境界層の速度は漸近的に主流の速度へ移行し、判然とした境界は存在しない。乱流境界層においては明らかに境界層の内とで異なった構造をもつことがわかっている。乱流境界層内の乱れた流れと、主流の乱れていない流れの境界は明りょうであり、この狭い境界のことを *super layer* と一般に呼んでいる。瞬間的な速度は、*super layer* 内で不連続的（厳密な意味では、急激に）に変化する。以上は主流の乱れが非常に低い場合の乱流境界層の主流近くの構造であり、航空機の表面の境界層は上記の構造を有している。しかし流体機械の内部にできる乱流境界層では主流が大きな乱れをもつ場合も多く、そのような場合の乱流境界層は理想的な主流の下にある場合の流れに比べ、いくらか異なった構造をもつことが考えられる。

乱流境界層はある程度以上のレイノルズ数では、それ自体安定した流れであるので、層流から乱流への不安定な遷移現象の場合のように、主流の乱れが顕著な影響を示さないことが予想される。また平均速度成分と乱れ成分とでは、その受ける影響は異なり、乱れ成分の方が、上記の *super layer* の構造との関連もあり、大きな影響を受けるであろう。

本章では、主流の乱れの影響の問題に対する第1段階として平均速度場が受ける影響についておもに述べる。第3章で述べた粗面と同様、主流の乱れも境界層に対する一種の外乱であるが、粗面の場合のように、速度分布則、摩擦公

式において、それを考慮した扱いはほとんどない。これは先に述べたように実験的資料が少ないことが根本的な理由であるが、乱流境界層中で生成される乱れの強さが非常に大きいため、主流の乱れが少し存在しても、平均量に与える影響が少なく、考慮の必要性があまりなかったと考えられる。主流の乱れが強い場合、当然平均量にも無視し得ない影響をもつが、粗面の場合は流れ方向に条件を一定に保つことができるのに対し、主流の乱れでは、一定の条件を維持するのが困難であるため、系統的に調べることがむづかしい。

乱れのエネルギに対し供給がなければ、乱れは粘性の作用により減衰する。乱れのエネルギの平均流からの供給は、レイノルズ応力と平均速度勾配の積

$$-\overline{u'v'}\ \frac{\partial u}{\partial y}$$

によってなされるので、主流中にせん断を生ぜしめると、乱れのエネルギの補給が可能となり、乱れの強さをある程度一定に保つことが可能となる。しかしこの場合、主流中のせん断が乱流境界層に同時に作用するため、乱れの影響のみを抽出することは困難である。

本章では、主流速度を一様に保ち、そのかわりに乱れが流れ方向に減衰する場合についての実験を行なっている。そのために、境界層平板の前方に乱流格子を置き、主流に乱れを導入する。したがって発生する乱れは近似的に等方性乱れである。等方性乱れの減衰については、乱流理論および多くの実験があり、乱れは次式にしたがって減衰することがわかっている。

$$\overline{u'^2} \propto \frac{1}{x - x_0} \qquad (5.1)$$

上式は減衰の初期に成り立つ式で、さらに大きな x に対しては、乱れのエネルギはより急速に減衰する。上式によりある程度大きな x の範囲では乱れは近似

的に一定と見なすことができる。実際、本章の実験においても、小さな乱流格子を用いた場合、測定範囲内では乱れの変化は小さくなる。しかし乱れ自体も小さくなるため、結局乱流格子を置かないで行った実験結果とあまり変わらない結果となる。したがって本章では乱れによる影響をみるために大きな乱れを必要とする。そのために測定区間内において乱れの強さは大きく変化する。

円管流や長方形断面流路では中心部に強い乱れが存在している。それらの乱れは十分に発達した流れでは流れ方向に一定である。乱流境界層の場合にも、主流の乱れが一定の強さを維持するならば、乱れの強さをパラメータとする相似な速度欠損曲線が得られると考えられる。主流の乱れの強さが変化すれば、零圧力勾配の場合でも、相似な速度欠損曲線は得られない。一般に相似性の不成立は解析を非常に困難にする。第２章において混合距離理論を用いて平衡乱流境界層の平均速度分布を求めたが、平衡乱流境界層では、無次元化した混合距離または渦粘性の分布が流れ方向に変化しないので解析を比較的容易に行なうことができた。主流に乱れがある場合、混合距離や渦粘性が増加することが本実験によって明らかとなる。さきに述べたように、主流の乱れが流れ方向に一定に保たれる場合、その乱れの強さをパラメータに選ぶ解析の可能性がありえるが、強い乱れの減衰は急であるので、本実験結果に対してはそのような解析は実際的ではない。

本章（５.４）節において、主流の乱れによる非平衡乱流境界層の速度分布に対する解析を渦粘性を用いて試みる。非平衡乱流境界層では $(u-u_e)/u_\tau \sim \eta$ は η だけの関数ではないが、主流の乱れによって非平衡となった乱流境界層の場合、積分厚さ I_1 で除した速度欠損 $(u-u_e)/I_1 u_\tau$ は η だけの関数となることが本章の実験により示される。ただし、$(u-u_e)/I_1 u_\tau \sim \eta$ の形状は、乱れの強さに依存し、通常の零圧力勾配平衡乱流境界層の場合と異なる。主流の乱れは、十分後方では減衰するので、$(u-u_e)/I_1 u_\tau \sim \eta$ の形状は強

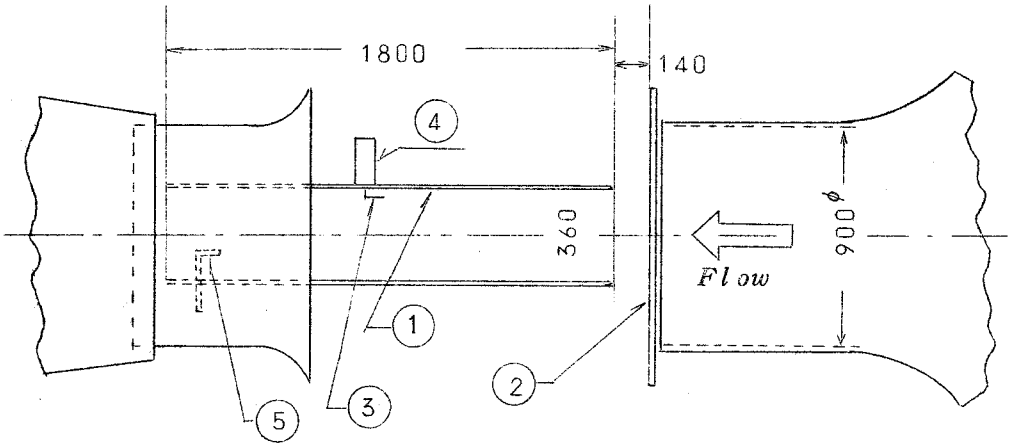
い乱れのある位置から、乱れが無視しうる位置まで、連続的に変化する。すなわち、厳密には$(u-u_e)/I_1 u_\tau \sim \eta$は$\eta$のみの関数とはいえない。しかし、$(u-u_e)/u_\tau \sim \eta$の$x$方向の変化に比べると、$(u-u_e)/I_1 u_\tau \sim \eta$の変化は非常に緩漫である。したがって本章における解析は$(u-u_e)/I_1 u_\tau \sim \eta$が流れ方向に相似であることを利用する。

5.2 実験装置および方法

5.2.1 風胴および境界層測定板

風胴は、直径900㎜の円型断面の測定部を有する*Göttingen*型風胴を用いた。風速は5m/sから40m/sの間を連続的に変化できる。

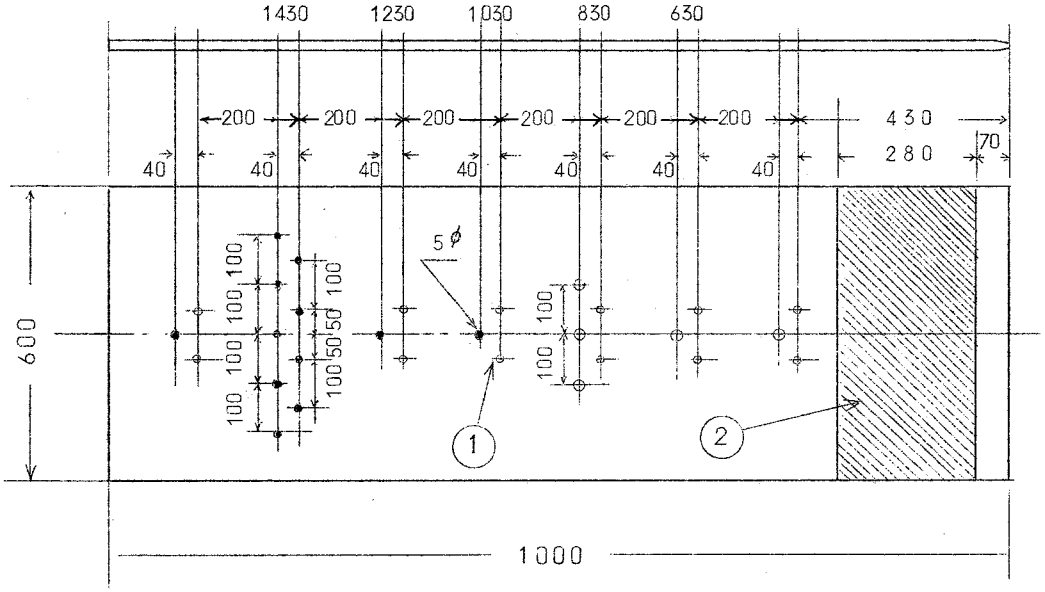
風胴の測定部に幅600㎜、高さ400㎜、長さ1800㎜のダクトを図(5.1)のように設置した。ダクトの天井を境界層測定板として使用した。測定



①測定平板　②乱流格子　③ピトー管　④ピトー管駆動装置
⑤基準用ピトー管

図5.1　実験装置概略図

面はメラミン樹脂の上張りが施こされている木製の板である。そして測定板の厚さは２５㎜である。ダクトの床および側壁の一つは厚さ１５㎜のホモゲン板である。もう一方の側壁は厚さ１０㎜のアクリル板であり、それを通じてダクト内部が観察できる。測定板上に流れが滑めらかに流入するように、測定板に翼型状の前縁を取り付けた。前縁より７０㎜の位置より幅２８０㎜のサンドペーパ（ＪＩＳ．№４０）を、境界層を適当に厚くするために張りつけた。



①静圧孔　　②サンドペーパ（ＪＩＳ №４０）

図 5.2　測定平板詳細図

図（５.２）に測定平板を示す。前縁からの距離がx＝６３０、８３０、１０３０、１２３０、１４３０㎜の所でおもな測定を行った。それぞれの位置に中心線をはさんで左右に静圧孔があけられている。静圧測定孔より下流へ４０㎜の位置に５㎜φの全圧管挿入孔があけられている。x＝８３０、１４３０㎜の位置

においては、スパン方向の傾向をみるために、いくつかの静圧孔、全圧管挿入孔をもうけた。速度の測定はおもに中心線に沿って行った。使用しない全圧管挿入孔は、測定平板の表面に凹凸がないよう滑めらかにふさがれた。

零圧力勾配の状態を得るために、測定平板と床板の間隔を前後で変えることにより、流路の断面積を微調整し、境界層の発達によって生ずる実質的な断面積の変化を補正した。境界層による実質的な断面積の変化は、流れ方向の距離に完全には比例していないので、厳密には上記の補正は壁面を曲線的に変化させねばならない。しかし本章の測定位置の範囲においては、零圧力勾配とみなしうる状態が、直線的な断面積の変化によって得られた。ダクトの入口および出口付近では、苦干の圧力勾配が生じた。

5.2.2 乱　流　格　子

主流の乱れを作るために三種類の乱流格子を使用した。すなわち2㎜の直径の針金を線間距離を15㎜にして編まれた金網、断面の直径が6㎜の丸鉄棒を縦横に30㎜の等間隔に並べて作られたもの、および一辺10㎜の正方形断面の木製の棒を縦横に50㎜の等間隔に並べて作られたものの三種類である。格子の種類を規定する量として次式で定義される *solidity factor* S_f がある。

$$S_f = \frac{M^2-(M-d)^2}{M^2} \qquad (5.2)$$

上式の d および M は格子を構成する丸棒の直径および *mesh size* である。断面が正方形である棒を使用している場合、実質的な直径としては正方形に外接する円の直径を用いる。すなわち d_e を実質的な直径とすれば、

$$d_e = \sqrt{2}\,d \qquad (5.3)$$

本実験で使用した格子のS_f は（ 5.2 ）式の定義より

$d=2$㎜　$M=15$㎜金網　　$S_f=0.249$

$d=6$㎜　$M=30$㎜丸棒　　$S_f=0.36$

$d_e=2\times10$㎜　$M=50$㎜ 角棒　$S_f=0.486$

である。大きなS_fを有する乱流格子より発生した乱れほど減衰は一般におそい。本実験では、乱流格子はすべて測定平板前縁より140㎜前方に置いた。図（5.3）に10㎜ 角棒の格子を示す。本章では、乱流格子を用いない状態で行った実験をCase Ⅰ、10㎜角棒格子を使用した実験をCase Ⅱ、6㎜丸棒格子の実験をCase Ⅲ、2㎜金網格子の実験をCase Ⅳと呼ぶ。

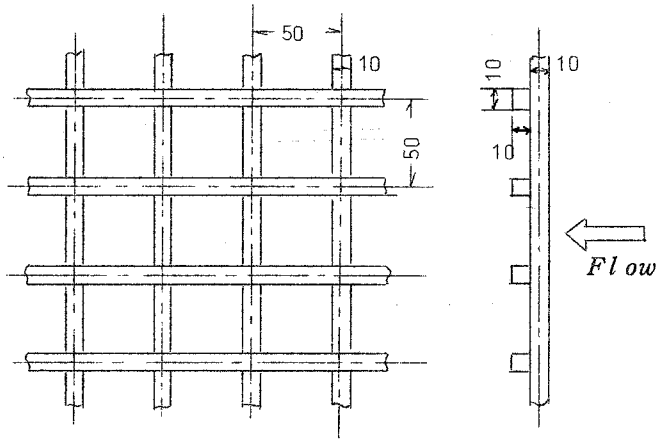


図5.3　乱 流 格 子

5.2.3　流 速 測 定 装 置

平均速度の測定はすべて全圧ピトー管とベッツ型マノメータにより行った。静圧はすべて壁面上の静圧孔から導いた。主流の乱れはⅠ型およびX型プローブと定温度型熱線風速計および直線化増幅器を用いて行った。Ⅰ型プローブの熱線は直径5μ、長さ2㎜の白金線であり、X型プローブの熱線は直径5μ、長さ2㎜のタングステン線である。

全圧ピトー管や熱線プローブの移動は図（5.1）に示されている駆動装置を用いて行なった。

実験は主流の風速を18m/sの状態にして行った。この状態を常に維持するために、図（5.1）に示されているように、基準用ピトー管を置き、絶えず主流の速度を点検しながら実験を行なった。

5.3 実験結果および考察

5.3.1 主流の乱れ

主流の乱れの性質を調べるために、図（5.4）に示されているダクト内断面の$A-A'$、$B-B'$、$C-C'$に沿って乱れ成分u'、v'、w'の強さを測定した。測定は*Case* IIの$x=445$㎜、$x=645$㎜の断面について行った。X型プローブの駆動はアクリル製の側壁の外に置いた駆動装置により行った。*Case* II の格子の*mesh size*は$M=50$㎜であり、$x=445$㎜の位置では格子からの距離が約12Mである。Mに対するこの距離は等方性乱れを得るには十分とは云えない。特に本実験の*Case* II で使用した格子は、図（5.3）に示されているように、縦棒と横

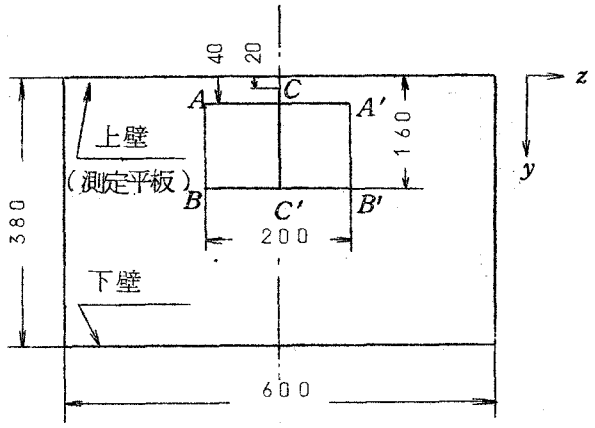
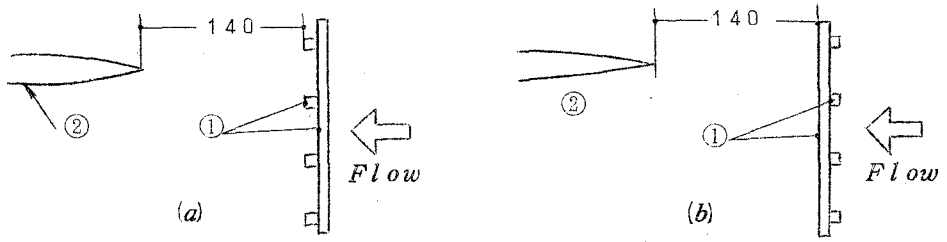


図5.4　ダクト断面



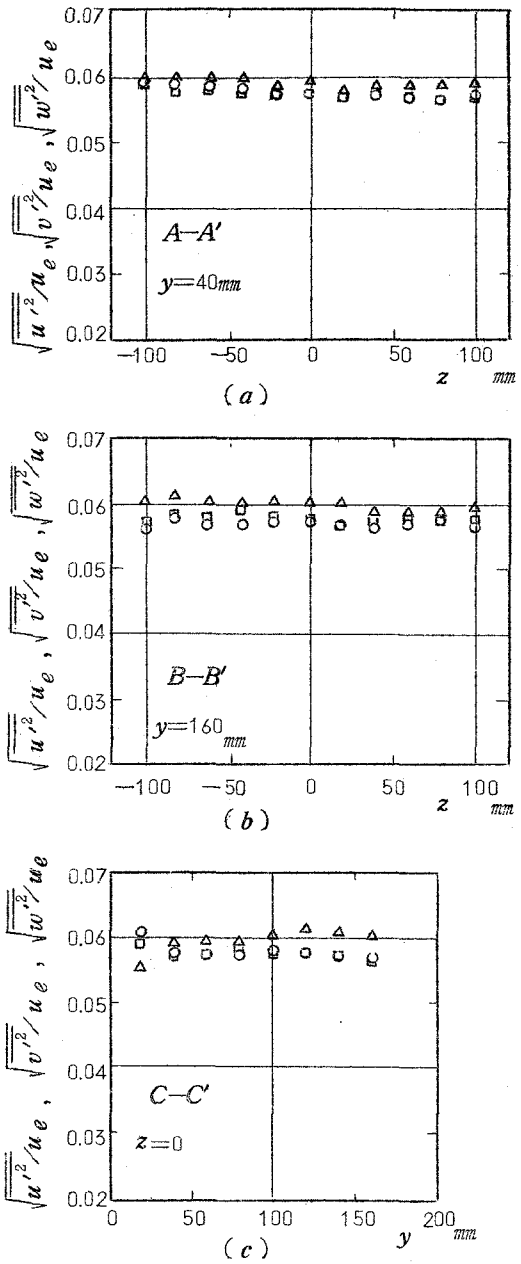
①角　棒

②測定板

図5.5　乱流格子と測定板前縁

棒は同一平面内にはない。図（5.5）$_a$、（5.5）$_b$ に示されているように、二種類の格子の置き方による乱れの違いを実験的に調べた。

図（5.5）$_a$ の設置状態における結果を図（5.6）$_a$、（5.6）$_b$、（5.6）$_c$ および図（5.7）$_a$、（5.7）$_b$（5.7）$_c$ に示す。図（5.6）は $x=445$ mm、図（5.7）は $x=645$ mm における結果である。$A-A'$ は境界層測定平板上の境界層の外縁付近に相当する。$A-A'$ における各乱れ成分の強さを比較すれば、u' と w' はほぼ同じ強さを示すが、v' がやや大きな値を示すことがわかる。$B-B'$ においては v' が他の二つの成分に比べ大きくなる傾向は明らかで、u' や w' より約10％大きい。$C-C'$ に沿った測定結果より、ダクト中心部では u' が大きく、壁面より約40mm、すなわち $A-A'$ 付近で、u' がやや大きな値を示すことに変わりはないが、たがいの差は小さくなる。壁面より20mmの



○：u' 成分、△：v' 成分、

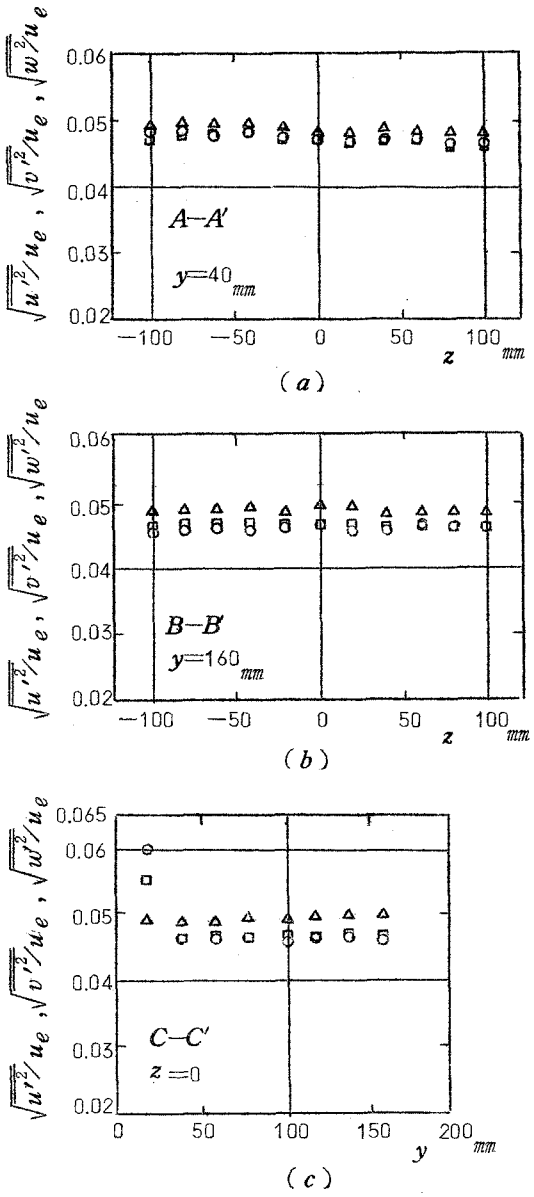
□：w' 成分、

$x=445$ mm

図5.6　主流の乱れの強さの分布

高さにおける結果は、$x=445$ mm と $x=645$ mm の場合で異なった傾向を示す。どちらの場合も u' 成分が大きく、次いで w' 成分、そして v' 成分が逆に最も小さな値をとる。これは v' 成分の運動が壁面に垂直であるため、壁面によって抑制されるためである。$x=645$ mm の測定結果において壁面近くの u' が特に大きな値を示すが、これは壁面近くでは、壁面からの距離が $x=445$ mm の位置に比べ、$x=645$ mm の位置では、より境界層の内部に相当するためである。いうまでもなく、境界層内部の乱れの強さは $u'-w'-v'$ の順である。

以上は乱流格子を図（5.5）a のように設置した場合の結果であるが、次に図（5.5）b のように設置した場合の結果を $C-C'$ に沿った測定について図（5.8）に示す。図（5.8）は $x=445$ mm における結果である。この場合は一般に、w' 成分が最も強く、

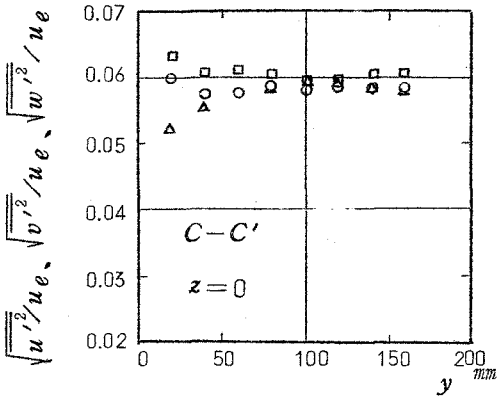


記号は図 5.6 と同じ

$x=645$ mm

図 5.7　主流の乱れの強さの分布

u' と v' 成分はほぼ同じ強さを示す。壁面近くにおいて v' 成分が他の二成分に比べ小さな値をとることは図（5.5）$_a$ のように格子を設置した場合と同様であるが、図（5.8）に示されている最も壁に近い所でのデータでは w' 成分が u' 成分より大となっている。これは x の距離が同じであっても、格子の置き方によって境界層の厚さが変化するためである。したがって図（5.8）においてさらに壁近くで測定すれば $u'-w'-v'$ の順になる。

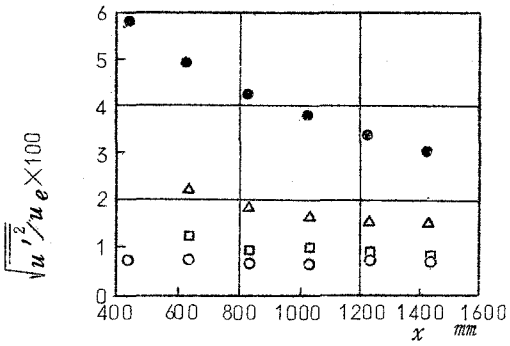


記号は図5.6と同じ

x ＝445mm

図5.8　主流の乱れの強さの分布

図（5.5）$_a$、（5.5）$_b$ のいづれの場合も、格子を縦方向または横方向に M の程度移動させるだけで、境界層の厚みは明らかに影響を受けた。これは格子の位置と測定板前縁との間隔が狭すぎるため、境界層の初期条件が格子の位置に影響されることによる。したがって本実験では、格子と測定板前縁との相対的位置関係を常に同一にして実験を行なう必要があった。なお以下に示す実験結果はすべて図（5.5）$_a$ の状態で行なわれたものである。*Case* Ⅲ、Ⅳに対しては以上の検討は行なわなかったが、M の値が小さいので、発



○：*Case* Ⅰ、◉：*Case* Ⅱ、

△：*Case* Ⅲ、□：*Case* Ⅳ

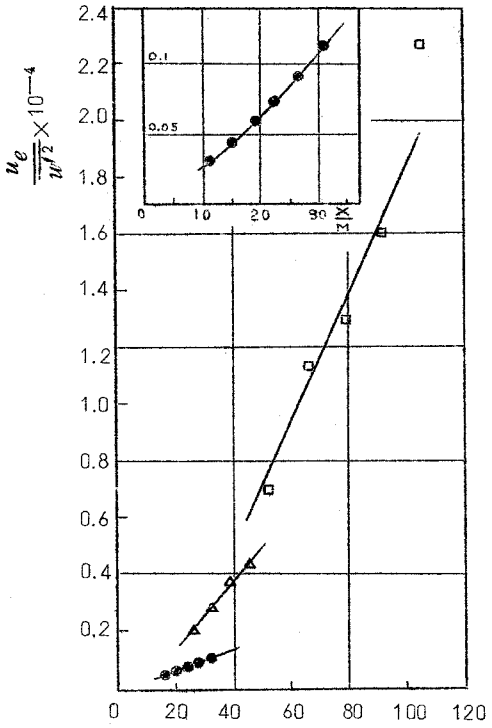
図5.9　主流の乱れの強さの分布

生する乱れの等方性は*Case* II に比べよく満たされていると考えられる。

u' の流れ方向における強さの変化を図（5.9）に示す。図（5.9）に示されている実験結果は、境界層外縁よりややダクト中心寄りの位置で測定されたものである。*Case* I では、測定位置の範囲内では約0.67％であまり変化はなかった。等方性乱れの減衰の実験式と比較するため、実験結果を $u_e^2/\overline{u'^2} \sim x/M$ の形でプロットし、図（5.10）に示す。*Case* III、IVでは次の線形減衰法則が近似的に成立している。

$$\frac{u_e^2}{\overline{u'^2}} = C_t\left(\frac{x}{M} - \frac{x_0}{M}\right) \qquad (5.4)$$

上式は格子乱流の乱れの減衰初期における減衰法則で、*Batchelor* と *Townsend*[1] によって示されたものである。しかし減衰のごく初期においては、（5.4）式は成り立たず曲率をもった下に凸の曲線であらわされる。*Case* II ではMが大きいので相対的に測定部が減衰のごく初期にあたる位置に相当している。図（5.10）の上部に *Case* II の結果を拡大して示す。



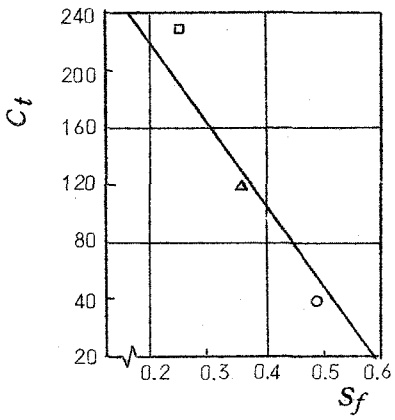
記号は図5.9と同じ　$\frac{x}{M}$

図5.10　主流の乱れの減衰

（5.4）式における勾配 C_t と *Solidity factor* S_f との間に対し、辻[66]は次の経験式を与えている。

$$C_t = 335 - 570 \times S_f \qquad (5.5)$$

（5.5）式と本実験との結果を図（5.11）に比較する。ただし、*Case*Ⅱ に対しては、測定点のうち後方の5点を結ぶ直線よりC_tを求めた。図より（5.5）式との一致はほぼ良好である。



記号は図5.9と同じ

——：（5.5）式

図5.11 *Solidity factor* S_f とC_tの関係

5.3.2 壁面静圧分布および壁面せん断応力

図（5.12）に壁面上の静圧の流れ方向の分布を示す。図においてp_0は図に示された7点の静圧の平均である。ダクトの入口と出口近くで、わずかの逆圧力勾配が生じているが、おおむね零圧力勾配の状態といえる。乱流格子のある場合とない場合の違いはほとんどなかった。これは後の節で述べるようにどちらの場合でも、実質的な断面積の変化をもたらす境界層の排除厚さがほとんど同じためである。

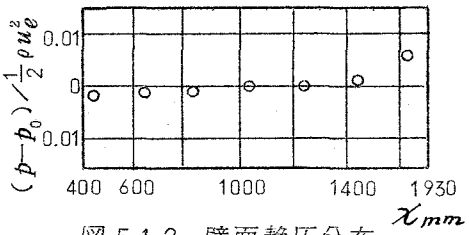


図5.12 壁面静圧分布

壁面せん断応力は*Clauser's chart* の方法によった。

これは対数法則が普遍的に成立することを利用している。すなわち、実験より得た速度分布$u \sim y$に対し、対数法則をみたす摩擦係数を求めればよい。実際には誤差を少なくするための方法にはいろいろあるが、本章では次の方法で摩擦係数を求めた。

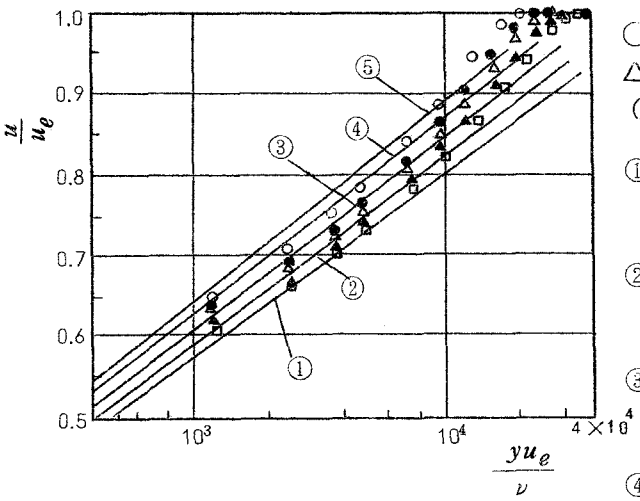
対数則

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y u_\tau}{\nu} + C_0 \qquad (5.6)$$

を変形すれば

$$\frac{u}{u_e} = \frac{\gamma}{\kappa}\ ln\ \frac{y u_e}{\nu} + \frac{\gamma}{\kappa}\ ln\ \gamma + C_0\ \gamma \qquad (5.7)$$

となる。したがって、実験データ $u/u_e \sim y u_e/\nu$ を片対数方眼紙にプロットし、一方（5.7）式に種々の γ を与えた対数直線群と実験結果を比較し、両者を一致させる γ を求めればよい。図（5.13）に一例を示す。

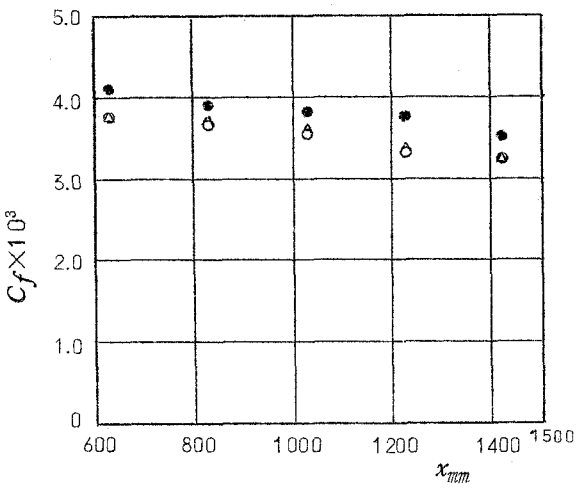


○：x＝630㎜、●：x＝830㎜、△：x＝1030㎜、□：x＝1230㎜
（Case Ⅰ）

①：$\sqrt{\frac{c_f}{2}}$＝0.040
②：$\sqrt{\frac{c_f}{2}}$＝0.041
③：$\sqrt{\frac{c_f}{2}}$＝0.042
④：$\sqrt{\frac{c_f}{2}}$＝0.043
⑤：$\sqrt{\frac{c_f}{2}}$＝0.044

（5.7）式

図5.13
壁面せん断応力決定法



記号は図5.9と同じ
図5.14　摩擦係数の変化

以上のようにして求めたc_fを図（5.14）に示し、乱れのない場合と比較する。*Case* Ⅲ、Ⅳでは*Case* Ⅰとほぼ同じc_fが得られたが、*Case* Ⅱでは乱れの影響が明らかに示され、摩擦係数は大きな値をとった。この理由は次のように説明できる。

主流の乱れが非常に強い場合、境界層内の混合が強くなる。そのため平均速度の不均一が一様化され、境界層内の速度は一様になろうとする傾向をもつ。しかし壁面上の粘着条件は厳密に存在するため、境界層内全体における速度の一様化は、結局、壁面上における速度勾配$\partial u/\partial y$を増加させる結果となる。すなわち壁面せん断応力が大となる。乱流境界層はそれ自体強い乱れを発生しているので、その乱れに比べ主流の乱れが微弱であれば、影響は明りょうにあらわれない。

5.3.3 平均速度分布

図（5.15）に速度分布$u/u_e \sim y$を示す。前節で述べた傾向が図によって示されている。境界層内の速度と主流の速度が等しくなる位置として定義される境界層厚さは主流の乱れによって増加する。外縁付近を除けば、主流の乱れのある場合の方が大きな速度を示す。したがって速度分布は全体的に主流の乱れがない場合に比べ、丸味をおびた形状を示す。

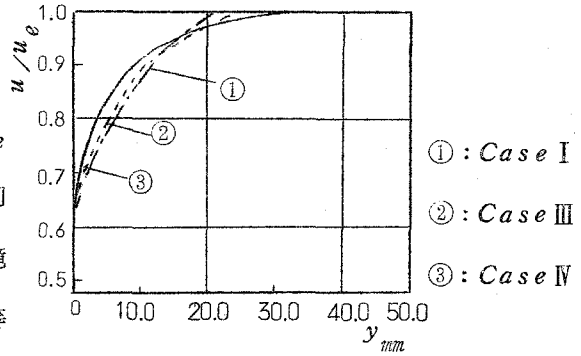
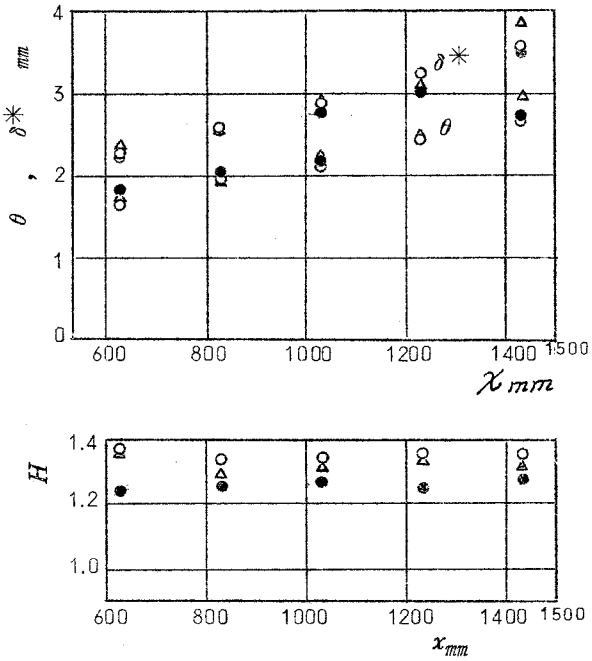


図5.15 速度分布

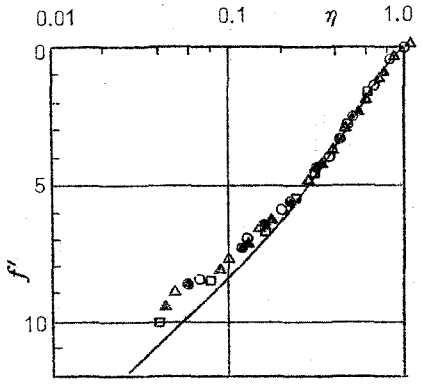
形状係数H、運動量厚さθ、排除厚さδ^*の流れ方向の値を図（5.16）に示す。*Case* Ⅳは*Case* Ⅰとほとんど同じ結果を与えたので、図において省略する。δ^*は主流の乱れによりわずかに減少する傾向を示し、θは逆に

増加する。しかし、*Case* I *Case* III の比較によってわかるように、その影響は顕著ではない。また実験点によっては上記の傾向の逆を示す場合もある。このばらつきは、乱流格子の設置の微妙な違いが、境界層の初期条件を変えているためと思われる。Hについて比較すれば図よりわかるように、主流の乱れの影響ははっきりと示され、明らかに主流の乱れによってHは減少する。これはあたかも負圧力勾配が存在している場合と同じ傾向である。せん断応力分布についても同じことがいえる。このことは主流の乱れが剥離を制止させる働きをもつことを示している。この問題については第6章において再度とりあげる。



○: *Case* I、●: *Case* II、△: *Case* III
図 5.16　δ^*、θ、Hの変化

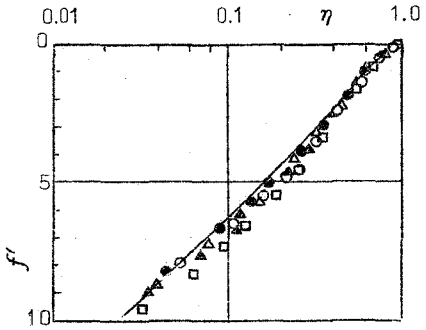
図（5.17）～図（5.20）に速度欠損分布をプロットする。本論文では、境界層厚さδは主流に乱れがある場合に対しても通常の場合と同様、主流の速度の99.5％の速度を与える高さをとった。*Case* Iは零圧力勾配の平衡乱流境界層であるので図（5.17）に示されているように速度欠損は相似形となっている。図（5.17）における実線は第2章第1の方法により得られた *logarithm*－*arctangent* 分布式による結果である。実験点が*logarithm*－*arctangent*分布式に比べ内層で若干小さな速度欠損を示しているが、これは実験のレイノルズ数が完全な平衡状態を得るにはやゝ低いためである。



記号は図5.13と同じ

——：第2章、第1の方法による零圧力勾配平衡乱流境界層に対する曲線

図5.17　*Case* Ⅰにおける速度欠損曲線



記号は図5.13と同じ

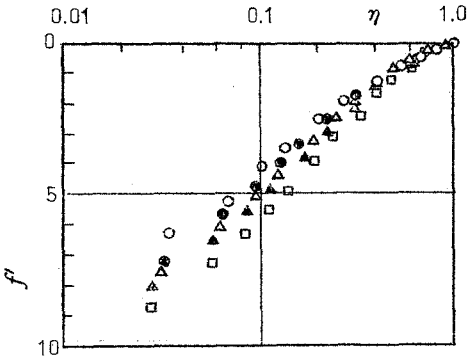
——：第2章、第1の方法による円管乱流に対する曲線

図5.18　*Case* Ⅲにおける速度欠損曲線

*Case*Ⅲにおいては速度欠損曲線は*Case*Ⅰと明らかに異なるが、流れ方向の分布曲線の変化はわずかである。図（5.18）には*Case*Ⅲとの比較のため、円管乱流の分布を示す。ただし、円管乱流ではδとして円管の内径の½をとる。円管乱流では円管の中心部の乱れの強さは約4％である。一方本実験の*Case*Ⅲでは測定区間で約2.2％から1.5％に変化している。乱れの強さが円管乱流と*Case*Ⅲでは、このように異なるが、通常の平衡乱流境界層に比べ速度欠損はほぼ同程度の差を有している。したがって円管乱流と乱流境界層の速度分布の違いの原因の重要な因子として、円管の中心部と境界層外縁部の乱れの強さの違いが考えられる。これと同じ見解は既に*Wieghardt*[71]によってなされている。

*Case*Ⅱでは（5.31）節において既に考察したように、主流の乱れの強さは大きく、かつ流れ方向の変化も顕著であるので、速度欠損分布も大きく変化する。すなわち図（5.19）に示されているようにx＝630㎜からx＝1430㎜

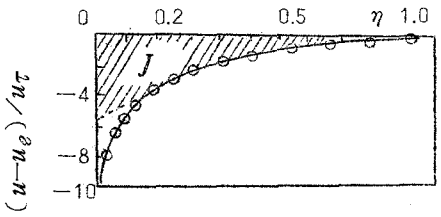
にかけて、分布曲線は変化し、乱れが減衰するにしたがって、*Case* Ⅰの分布曲線に近づいている。本実験では乱流格子を広範囲に変えて実験を行っていないので断定はできないが、主流の強い乱れによる平衡状態からのずれはほぼ乱れの強さに比例している傾向が本実験の範囲内で明らかである。例えば*Case* Ⅱの$x=1430$ mmでの速度欠損曲線と*Case* Ⅲの$x=630$ mmでの速度欠損曲線を比較すれば、わずかに前者が平衡状態より離れている。そして主流の乱れの強さを比較すれば図（5.9）よりやはり、前者の測定位置の方が乱れが強いことがわかる。



記号は図5.13と同じ

図5.19　*Case* Ⅱにおける速度欠損曲線

第2章において平衡乱流境界層の特性量としてI_1を求めたが、本実験の*Case* Ⅱのように非平衡となった流れでは、$(u-u_e)/u_\tau \sim \eta$ が非相似であるので当然I_1は流れ方向に変化する。後で述べる（5.4）節の解析の都合により、本節ではこのI_1に代りJなる量を考える。Jは、速度欠損の内層の曲線を外層からの外挿によって置きかえた分布曲線を$\eta=0$から$\eta=\infty$にわたって積分して得られる量である。一般に内層と外層の境界は重復した領域となっており、零圧力勾配の流れでは大雑把にみれば約$\eta=0.2$の付近が境界とみなせる。したがって本章では、実験速度分布に対し、$\eta=0.2$において壁まで接線を引くことによってJを求めた。すなわち図（5.20）の斜線部の面積がJである。このようにして得られたJはI_1より若干小さな値を

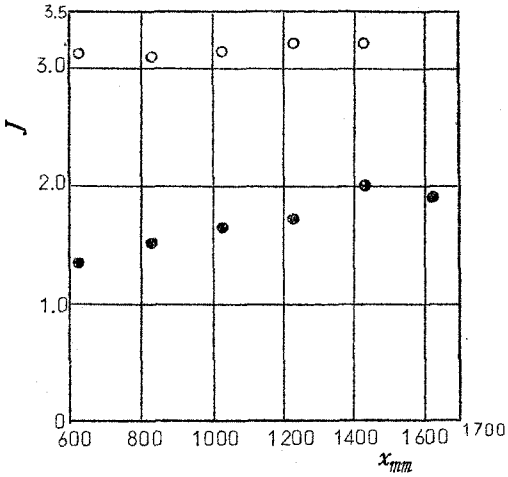


Jは斜線部の面積に相当する。

図5.20　積分厚さJ

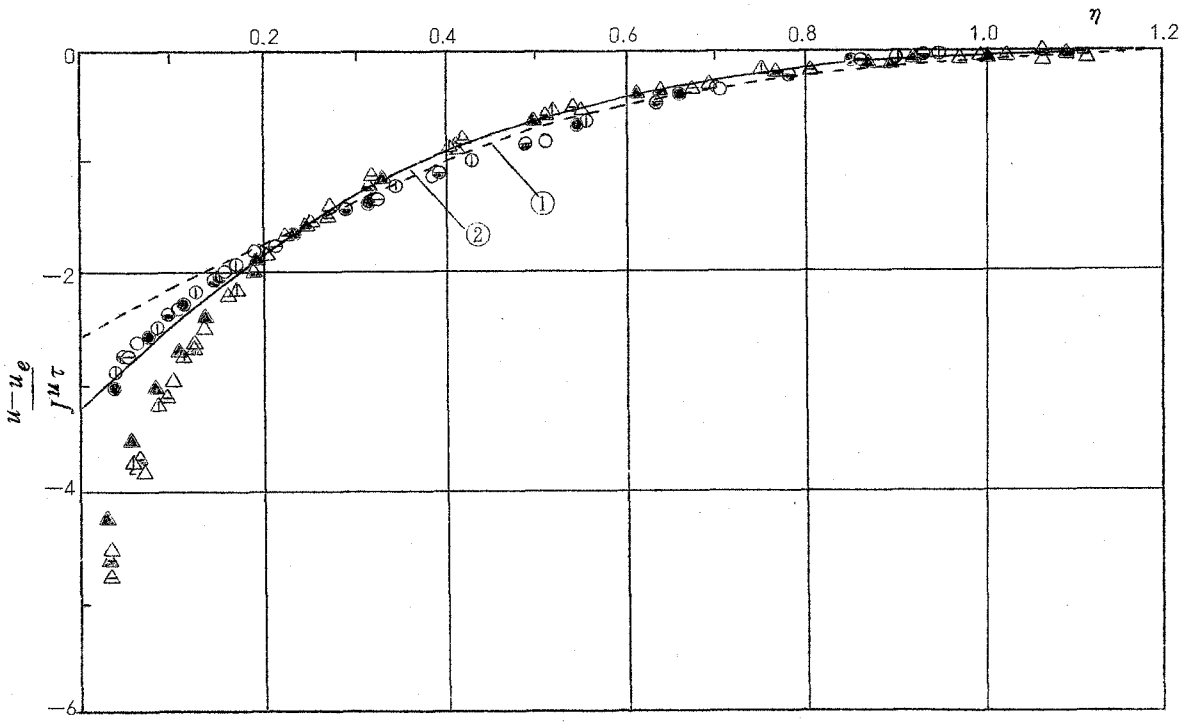
示すが、I_1 と全く同じ傾向で変化すると考えてよい。図（5.21）に *Case* Ⅰと *Case* Ⅱの J を比較する。

従来の速度欠損分布の速度尺度 u_τ のかわりに Ju_τ を用いて速度分布を書き換え図（5.22）に示す。図には *Case* Ⅰと *Case* Ⅱを示すが、*Case* Ⅲは両者のほぼ中間とみてよい。このようにプロットすれば、当然期待されることでもあるが、*Case* Ⅱのよう



○: *Case* Ⅰ、 ○: *Case* Ⅱ

図 5.21 J の変化



x	*Case* Ⅰ	*Case* Ⅱ
630	○	△
830	⊖	△
1030	⊖	△
1230	⦶	△
1430	●	△

①:（5.28）式、 $C=0$、 $KJ^2=0.24$

②:（5.38）式、 $C=0.5$、 $KJ^2=0.12$

図 5.22 修正速度欠損

に流れ方向に速度欠損（$u-u_e$）／u_τ～ηが著しく変化する場合においても、修正速度欠損（$u-u_e$）／$J\ u_\tau$～η はほとんど相似となる。後者は（$1-u/u_e$）／$\int_0^\infty(1-u/u_e)d\eta$ と同じものであるので、前者よりむしろ単純であり、類似した曲線群を単に幾何学的に相似化しているにすぎない。しかし*Case* Ⅰと*Case* Ⅱでは明らかにその形状は異なる。この修正速度欠損は、主流の乱れによって非平衡となった乱流境界層の速度分布の整理法として利用できる。

壁面せん断応力を求める際に示したことであるが、対数直線関係は主流の乱れに無関係に成立することがわかる。圧力勾配を含む乱流境界層に対し、これまで多く使用された重要な速度分布表示として後流関数表示があることは第２章で既に述べた。後流関数$W(\eta)$を用いれば、壁近くから主流近くの速度分布は次式で与えられる。

$$\frac{u}{u_\tau}=\frac{1}{\kappa}\ln\frac{yu_\tau}{\nu}+\frac{\pi(x)}{\kappa}W(\eta) \qquad (5.8)$$

後流関数は名前に示されているように、乱流境界層の外層と後流の構造が似ていることを利用したもので、$W(\eta)$の形は図（5.23）に示される。平衡乱流境界層で、速度欠損分布が相似であることは$\pi(x)$が一定値をとることに対応している。零圧力勾配乱流境界層でもレイノルズ数が十分に高くなければ、$\pi(x)$ は流れ方向に変化する。いづれにしてもこれまで多く取り扱われてきた乱流境界層の速度分布表示として（5.8）式は有効であった。ところが本実験の*Case*Ⅱ のように主流の

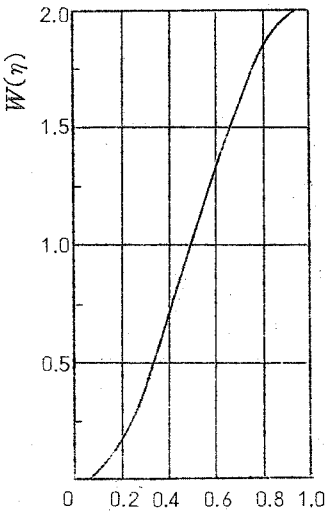
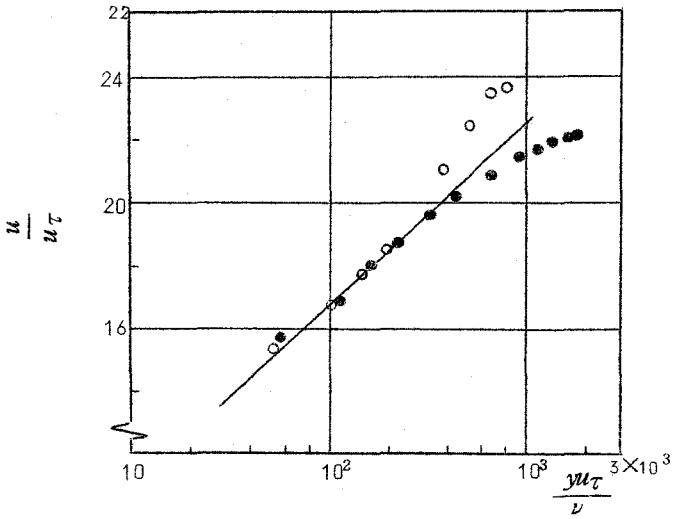


図5.23　後流関数



○：*Case*Ⅰ、◎：*Case*Ⅱ

：（5.6）式

図5.24　u^+と　y^+の関係

乱れが強い場合、図（5.24）に示されているように（5.8）式による表示はできない。主流の乱れがそれほど強くない場合は、$\pi(x)$の値が通常の零圧力勾配の流れの場合の値に比べ小さくなるだけである。*Case*Ⅱに対しても、$\pi(x)$の値を負に選べは、（5.8）式によってある程度、速度分布を近似できる。しかし（5.8）式の誘導の過程を考慮すれば、$\pi(x)$に負の値を与えることは物理的に矛盾であり、好ましいことではない。

以上速度分布の形状について考察を行なったが、次にせん断応力分布の形状について考察する。

5.3.4　せん断応力分布

最も直接的にせん断応力を求める確かな方法は熱線風速計による実測であるが、本実験ではレイノルズ応力の直接測定を行なっていない。第2章において、平均速度分布が相似である場合、平均速度分布を境界層方程式に代入

し、積分することによってせん断応力分布が得られることを示し、平衡乱流境界層に対しその分布を求めた。本章においても第２章と同様の方法を用いて、せん断応力分布を求める。

Case Ⅰ の流れは平衡であるので第２章の結果を用いることができ、容易に得られる。*Case* Ⅱ では $(u-u_e)/u_\tau \sim \eta$ が流れ方向に変化するため第２章（2.25）式を用いることができない。さいわい前節において、修正速度欠損 $(u-u_e)/Ju_\tau \sim \eta$ が測定区間の範囲では相似であることがわかったので、その分布をもとにせん断応力分布を求める。

$$\frac{u-u_e}{Ju_\tau}=-g'(\eta) \qquad (5.9)$$

とおけば

$$u=u_e-Ju_\tau g'(\eta) \qquad (5.10)$$

となる。上式において J と u_τ が x の関数となり、u_e は一定である。（5.10）式と連続の式より v を求めると、

$$v=-\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\,dy$$

$$=\delta\left(J\frac{du_\tau}{dx}+u_\tau\frac{dJ}{dx}\right)g-Ju_\tau\frac{1}{\delta}\frac{d\delta}{dx}\{\eta g'-g\} \qquad (5.11)$$

運動方程式は

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y} \qquad (5.12)$$

であり、（5.10）式、（5.11）式を（5.12）式に代入すれば

$$\left(\frac{1}{\gamma}-Jg'\right)\left\{-\delta\left(\frac{J}{\gamma}\frac{d\gamma}{dx}+\frac{dJ}{dx}\right)g'+J\frac{d\delta}{dx}\eta g''\right\}$$

$$-\left\{\left(\frac{J}{\gamma}\frac{d\gamma}{dx}+\frac{dJ}{dx}\right)\delta g-J\frac{d\delta}{dx}(\eta g'-g)\right\}Jg''$$

$$=\frac{\partial(\tau/\tau_w)}{\partial\eta} \qquad (5.13)$$

圧力勾配のない乱流境界層の場合、第２章（2.22）式より

$$\frac{\delta}{\gamma}\frac{d\gamma}{dx}=-\frac{\gamma}{\gamma+\kappa}\frac{d\delta}{dx} \qquad (5.14)$$

上式を（5.13）式へ代入し、$\eta=0$ で $\tau/\tau_w=1$ なる境界条件により積分すれば

$$\frac{\tau}{\tau_w}=1+\frac{J}{\gamma}\frac{d\delta}{dx}\eta g'+\frac{1}{\gamma}\left(T-J\frac{d\delta}{dx}\right)g$$

$$-I_1\left(2T-J\frac{d\delta}{dx}\right)\int_0^\eta g'^2 d\eta+J\left(T-J\frac{d\delta}{dx}\right)g'g \qquad (5.15)$$

ただし

$$T=\frac{\gamma J}{\gamma+\kappa}\frac{d\delta}{dx}-\delta\frac{dJ}{dx}$$

（5.15）式において、$\eta=1$ では $\tau/\tau_w=0$ であるから $d\delta/dx$ は次式のように求まる。

$$\frac{J}{\gamma+\kappa}\frac{d\delta}{dx}=\frac{1-\delta\left(\frac{t_1}{\gamma}-2Jt_2\right)\frac{dJ}{dx}}{t_1\times\frac{\kappa}{\gamma}+I_1(\gamma-\kappa)t_2} \qquad (5.16)$$

ただし

$$t_1=\int_0^1 g'\,d\eta、\qquad t_2=\int_0^1 g'^2\,d\eta$$

J のかわりに I_1 を用いていれば、$t_1=1$ となる。（5.16）式を（5.15）式に代入し、$O(\gamma^2)$ を省略すれば

$$\frac{\tau}{\tau_w}=1+\frac{(1+\frac{\gamma}{\kappa})+C\{2\gamma J t_2-t_1(1+\frac{\gamma}{\kappa})\}}{t_1-\gamma J t_2}\eta g'$$

$$-\frac{1+\gamma C J t_2}{t_1-\gamma J t_2}g+\frac{\gamma J(1+t_1 C)}{t_1-\gamma J t_2}\int_0^{\eta} g'^2 d\eta$$

$$-\frac{\gamma J}{t_1-\gamma J t_2}gg' \qquad (5.17)$$

ただし

$$C=\frac{\delta}{\gamma}\frac{dJ}{dx} \qquad (5.18)$$

以上によってせん断応力分布が修正速度欠損曲線によって表現できる。主流の乱れの影響は上式のCにおいて考慮される。本実験の精度内では、*Case* Ⅲ、ⅣのCは*Case* Ⅰ と同様、ほとんど零に等しくなったが、*Case* Ⅱ では測定区間内で約0.5の値をとった。図(5.25)に上式によって求めた$x=630$mmにおけるせん断応力分布を*Case* Ⅰおよび*Case* Ⅱについて示す。図より*Case* Ⅱでは、速度分布の場合と同様、負圧力勾配乱流境界層の分布に似た傾向を示している。

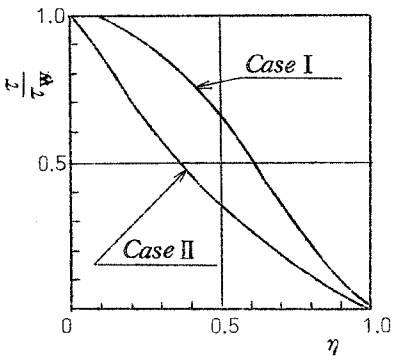


図5.25 せん断応力分布

5.3.5 混合距離および渦粘性係数

速度分布とせん断応力分布より、(2.1)式および(2.48)式で定義される混合距離および渦粘性係数を求める。平衡乱流境界層では$l^*=l/\delta\sim\eta$や$K=\nu_t/I_1 u_\tau\delta\sim\eta$が流れ方向や、圧力勾配によらず一定である。本章においても同様の無次元化を行ってそれ

らの量を図（5.26）、図（5.27）に示す。（5.4）節の解析との関連により、本節においても I_1 のかわりに J を用いる。図より、混合距離や渦粘性係数は、主流の乱れによって非常に顕著に増加する。また主流の乱れの減衰とともに、それらの量は小さくなる。*Case* Ⅰの場合、第2章で仮定した混合距離よりやゝ大きな値を示すが、これは本実験のレイノルズ数が十分大きくないためである。$\eta > 0.5$ では速度勾配、せん断応力とも小さな値をとるため、図（5.26）、図（5.27）の曲線の微妙な形状については断定的なことはいえない。

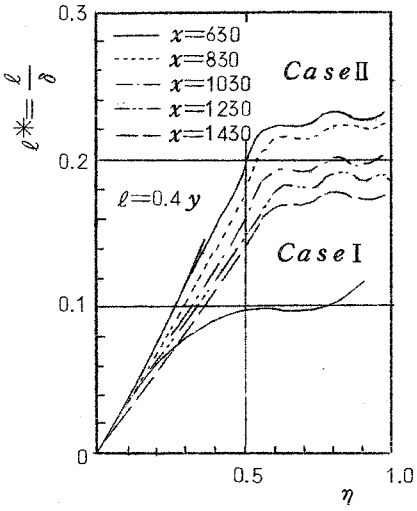


図 5.26　混合距離分布

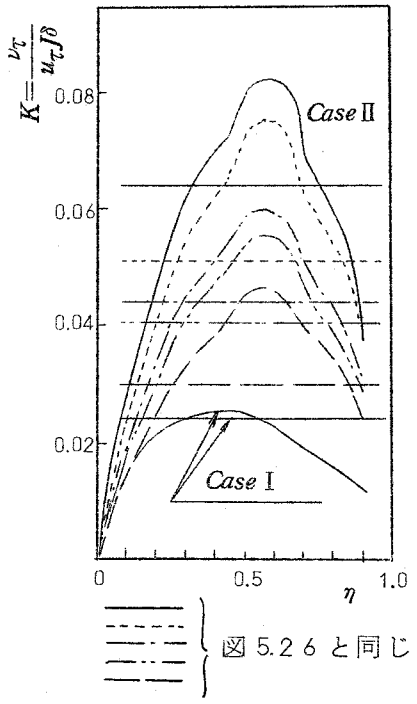


図 5.27　渦粘性係数

5.4　解　　析

本節では、主流の乱れによって非平衡となった乱流境界層の外層の速度分布を、渦粘性の仮説を用いて求める。境界層方程式を無次元速度分布に関する常微分方程式に帰着させる計算法では、全せん断応力を混合距離または渦粘性係数を用いて表現するのが普通である。その場合、l^* や K の分布が一定であると仮定できる平衡乱流境界層では解析は割合容易であるが、本実験で

は（5.3.5）節に示したように、それらの量が流れ方向に変化するため、平衡乱流境界層と同じ仮定を用いることができない。

修正速度欠損が主流の乱れの強さの変化が顕著な場合にも近似的に相似であることをもとに解析を行う。修正速度欠損 $g'(\eta)$ を境界層方程式に代入して得られる式は（5.13）式として既に求まっている。無次元渦粘性係数 K を用いれば、せん断応力は次式となる。

$$\frac{\tau}{T_w} = -KJ^2 g''(\eta) \qquad (5.19)$$

本節では外層における速度分布を求めることを目的とする。したがって渦粘性係数は厚さ方向に一定と仮定する。本節の解析では内層を全く無視しているので、計算によって得られる速度は壁面上の粘着条件を満たさない。したがって本計算によって得られる分布においては、I_1 と図（5.21）に示す J とはほとんど同じ値をとる。一方実験によって得られる速度分布は特に内層において大きな勾配を有するので、I_1 と J は若干異なる。本計算では外層における渦粘性係数をそのまゝ内層に相当する領域にまで適用しているので、実験結果と計算結果の比較は外層においてのみ意味がある。実験速度分布より修正速度欠損曲線を求める際に I_1 のかわりに J を用いたのは以上の理由のためである。

（5.13）式に（5.1.9）式、（5.14）式を代入すれば

$$\gamma KJ^2 g''' + J\frac{d\delta}{dx}(\eta - \gamma Jg)g'$$

$$-\delta\frac{dJ}{dx}\{g' + \gamma J(gg'' - g'^2)\} = 0 \qquad (5.20)$$

$y=0$ において $\tau=\tau_w$、$y=\infty$ において $u=u_e$、$\tau=0$ なる境界条件を g について表わせば次式となる。

$$g''(0) = -\frac{1}{KJ^2} \qquad (5.21)_a$$

$$g'(\infty) = 0 \qquad (5.21)_b$$

$$g''(\infty) = 0 \qquad (5.21)_c$$

(5.20)式を壁から主流まで積分し、境界条件を用いれば、

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{\gamma(1-C+2\gamma C I_2/I_1)}{I_1-\gamma I_2} \qquad (5.22)$$

上式におけるCは(5.18)式で定義される量である。(5.22)式を(5.20)式へ代入し、簡単のため$O(\gamma)$を省略すれば

$$KJ^2 g''' + (1-C)\eta g'' - C g' = 0 \qquad (5.23)$$

g'がηだけの関数であることは、上式よりKJ^2およびCが流れ方向に一定でなければならないことを意味する。逆にKJ^2とCが与えられればgは決定される。

(5.23)式は*Mellor*と*Gibson*[44]が平衡乱流境界層の速度欠損$f'=(u_e-u)/u_\tau$の第1近似として得た次式と同形である。

$$Kf_0''' + (1+2\beta)\eta^* f_0'' + 2\beta f_0' = 0 \qquad (5.24)$$

$$\eta^* = \frac{\eta}{I_1}$$

上式におけるダッシュ(′)はη^*についての微分を意味する。

本章で解析している流れは、主流の乱れによって非平衡となった零圧力勾配流れであるので、主流の乱れが流れ方向へ減衰するにしたがって次第に平衡な乱流境界層へ移行する。図(5.21)に示されているように、主流の乱れが強

いほど、速度欠損の積分厚さJは小さな値をとるため、一般に

$$C > 0 \qquad (5.25)$$

である。

(5.23)式と(5.24)式の比較よりCとβは次の関係で結ばれる。

$$C = -2\beta \qquad (5.26)$$

したがって(5.25)式の不等式より主流の乱れによって非平衡となった乱流境界層においてCが一定の場合、圧力勾配パラメータ$\beta < 0$の平衡乱流境界層に対応する。

通常の零圧力勾配乱流境界層では

$$C = 0$$

である。この場合、(5.23)式は

$$KJ^2 g''' + \eta g'' = 0 \qquad (5.27)$$

と簡単になり、g'は次式のように求まる。

$$g'(\eta) = \sqrt{\frac{\pi}{2KJ^2}} \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-u^2} du \right\} \qquad (5.28)$$

$$u = \frac{\eta}{\sqrt{2KJ^2}} \qquad \pi：円周率$$

上式において

$$KJ^2 = 0.24 \qquad (5.29)$$

とおけば、(5.28)式より計算されるg'は図(5.22)に示されるように実験結果とよい一致を示す。零圧力勾配平衡乱流境界層では

$$J = 3.17 \qquad (5.30)$$

であるので、(5.30)式を(5.29)式へ代入し、Kを求めると、

$$K = 0.024 \qquad (5.31)$$

となる。この値は*Clauser*[11]、*Mellor*と*Gibson*[44]が解析に用いた値0.018～0.016より幾分大きいが、これは本解析が内層を考慮せずにJを用いて渦粘性係数を無次元化しているためである。

*Mellor*と*Gibson*は（5.24）式の解を$\beta > -\frac{1}{2}$の場合について既に求めている。したがって（5.23）式の解は彼等と全く同様の方法で求めることができる。

すなわち（5.23）式に対し、次の変換を施す。

$$g' = e^{-z}\Psi(z) \tag{5.32}$$

$$z = \frac{1-C}{KJ^2}\frac{\eta^2}{2} \tag{5.33}$$

上式を（5.23）式に代入すれば

$$z\Psi'' + \left(\frac{1}{2} - z\right)\Psi' - \frac{1}{2(1-C)}\Psi = 0 \tag{5.34}$$

上式は合流型超幾何微分方程式である。

境界条件（5.21）$_b$、（5.21）$_c$を満たす上式の解は

$$\Psi = A\left\{\frac{(-\frac{1}{2})!}{(q-\frac{1}{2})!}M_c(q、\frac{1}{2}、z) + \frac{(-\frac{3}{2})!}{(q-1)!}z^{\frac{1}{2}}M_c(1+q-\frac{1}{2}、2-\frac{1}{2}、z)\right\} \tag{5.35}$$

ただし　$q = \dfrac{1}{2(1-C)}$

上式においてM_cは合流型超幾何関数であり、級数で表わせば次式のようになる。

$$M_c(q、\frac{1}{2}、z) = 1 + \frac{q}{(\frac{1}{2})1!} + \frac{q(q+1)}{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)}\cdot\frac{z^2}{2!} + \frac{q(q+1)(q+2)}{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)}\frac{z^3}{3!} + \cdots\cdots$$

$$M_C(1+q-\tfrac{1}{2},\ 2-\tfrac{1}{2},\ z)=1+\frac{(\frac{1}{2}+q)}{(\frac{3}{2})}\cdot\frac{z}{1!}+\frac{(\frac{1}{2}+q)(\frac{1}{2}+q+1)}{(\frac{3}{2})(\frac{3}{2}+1)}\cdot\frac{z^2}{2!}+$$

$$\frac{(\frac{1}{2}+q)(\frac{1}{2}+q+1)(\frac{1}{2}+q+2)}{(\frac{3}{2})(\frac{3}{2}+1)(\frac{3}{2}+2)}\ \frac{z^3}{3!}+\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (5.36)$$

境界条件（5.21）$_a$ より A は定より次式で与えられる。

$$A=-\sqrt{\frac{2}{(1-C)KJ^2}}\times\frac{\left\{\frac{1}{2(1-c)}-1\right\}!}{(-\frac{3}{2})!} \qquad (5.37)$$

$$g'(\eta)=-\frac{e^{-z}}{\sqrt{\frac{1-C}{2}KJ^2}}\left[\frac{(-\frac{1}{2})!}{(-\frac{3}{2})!}\ \frac{\left\{\frac{1}{2(1-C)}-1\right\}!}{\left\{\frac{1}{2(1-C)}-\frac{1}{2}\right\}!}\ M_1+z^{\frac{1}{2}}M_2\right] \qquad (5.38)$$

ただし　$M_1=M_C(q、\frac{1}{2}、z)$

$M_2=M_C(1+q-\frac{1}{2}、2-\frac{1}{2}、z)$

$C<1.0$

（5.38）式による計算結果と本実験 *Case* Ⅱの結果を比較する。*Case* Ⅱでは厳密には C ＝一定ではないが、近似的に

$$C=\tfrac{1}{2} \qquad (5.39)$$

と置くことができる。（5.39）式の場合、q、z、M_1、M_2 は次式で与えられる。

$$q=1、\qquad z=\frac{\eta^2}{4KJ^2} \qquad (5.40)$$

$$M_1=M_C(1、\tfrac{1}{2}、z)、\quad M_2=M_C(\tfrac{3}{2}、\tfrac{3}{2}、z)=e^z$$

上式を（5.38）式へ代入すれば

$$g'(\eta)=\frac{2}{\sqrt{KJ^2}}\ G(z) \qquad (5.41)$$

$$G(\eta)=0.56419\,e^{z}\,M_1-z^{\frac{1}{2}}$$

$G(z)$の数値を表（5.1）に示す。

したがってKJ^2の値が定まれば、$g'(\eta)$は完全に決定される。零圧力勾配平衡乱流境界層における値、すなわち（5.29）式を*Case*Ⅱに適用したところ、計算結果と実験との一致はよくなかった。それゆえ、KJ^2は一般にパラメータCに依存する。*Case*Ⅱに対しては

z	G
0	0.5642
0.5	0.1178
1	0.0503
2	0.0116
3	0.0033
4	0.0014
5	0.0007

表（5.1）

$$KJ^2=0.12 \qquad (5.42)$$

が図（5.22）に示すように実験結果に最もよく一致した。

*Case*Ⅲ、Ⅳにおいてはg'の分布が*Case*Ⅰとあまり変わりがなかったので*Case*Ⅰと異なるKJ^2を見い出すには至らなかった。平衡乱流境界層ではKはパラメータβによらず一定であったが、主流の乱れによる非平衡乱流境界層ではKJ^2がパラメータCに依存するので、統一的扱いが困難である。

実験により求まっているJを（5.42）式へ代入すれば、流れ方向に変化する渦粘性係数Kの値が求まる。このKを図（5.27）に直線で示す。図より実験より得られたKと計算の過程で仮定されたKとはほぼ矛盾のない関係にあることがわかる。

5.5 結　　論

測定平板の前方に乱流格子を置き、主流に乱れのある場合の零圧力勾配乱流

境界層の測定を行ない、主流の乱れが無視できる場合と比較した結果、次のことがわかった。

(1) 平均速度分布およびせん断応力分布の形状は、負の圧力勾配が主流にある場合と同じ傾向を示した。

(2) 境界層厚さは増し、排除厚さは減少し、運動量厚さが増加する。したがって形状係数は減る。

(3) 壁面せん断応力は増加する。

(4) 主流の乱れが強く、かつその変化が流れ方向に著しい場合、速度欠損曲線が流れ方向に変化し、相似とならない。しかし修正速度欠損$(u-u_e)/Ju_\tau \sim \eta$はそのような場合にも相似形を維持する。

(5) 主流の乱れが非常に強い場合、*Coles*の後流関数表示は適用できない。

(6) 混合距離、渦粘性係数は著しく増加する。

(7) 渦粘性理論を用いて修正速度欠損曲線の解析を行なった。その結果、圧力勾配パラメータβが負となる平衡乱流境界層の速度欠損を支配する方程式と同形の方程式が得られた。KJ^2に適当な値を仮定することにより、主流の乱れによって非平衡となった乱流境界層の速度分布が得られ、実験結果との一致は良好であった。

第6章　逆圧力勾配乱流境界層に及ぼす主流の乱れの影響

6.1　まえがき

前章では、到る所圧力勾配のない乱流境界層と主流の乱れとの関連についての実験および解析の結果を述べたが、本章では、さらに逆圧力勾配が作用する場合について行った実験結果について述べる。負の圧力勾配を伴う流れでは一般に、乱流境界層は剥離しにくい状態であるので、工学上不利な問題はない。逆圧力勾配は翼面上やディフューザの壁面上等で避けることのできないものであるが、剥離と密接な関係をもつため、逆圧力勾配下の乱流境界層の研究は実用上重要な意味をもつ。したがって逆圧力勾配乱流境界層の問題に対しては、さまざまな方向から多くの試みがなされている。既に本論文においても第2章、第4章でこの問題の一部について行なった研究について述べた。第2章では平衡乱流境界層と呼ばれる流れの速度分布を計算し、第4章では、その結果を利用して一般の乱流境界層の発達の計算を行なった。本章では、平衡乱流境界層と対照的な圧力勾配を有する流れとして、ステップ前面の流れを取り上げる。この流れはステップ前面のどこかで必ず剥離する。*Bradshaw*と*Galea*[4]はステップ前面の流れの実験を行なった。彼等は剥離点近くに特に注目し、*Townsend*[35]による剥離の予測法の検証を行った。

本章では主流に乱れがある場合のステップ前面流れの平均速度分布および乱れの平均量について考察する。

平衡乱流境界層は境界層の特性量の流れ方向の変化が最も緩漫な乱流境界層と考えることができる。たとえば、実現された平衡乱流境界層の摩擦係数は流れ方向に大きな変化を示さない。これに対し翼面上の流れやステップ前面の流れでは、流れ方向に特性量は大きな変化を示す。たとえば、翼の前縁付近では

主流が加速されるため負の圧力勾配が生じ、その状態が続くことなく逆圧力勾配が働く。したがって摩擦係数は比較的大きな値から急激に零または非常に小さな値をとる。第1章においても述べたようにこのような一般の逆圧力勾配の流れでは、速度分布則、摩擦則に関して確かなものはまだない。逆圧力勾配が緩やかな場合、平衡乱流境界層の場合のいくらかの修正で間に合うこともあるが、圧力勾配が急激になると緩やかな場合に成り立っていた法則と根本的に異なった性質を示すことがある。逆圧力勾配の急激な乱流境界層の内層において½乗法則が成立することがわかり、その分布式が与えられているが、現在の所内層における$\partial\tau/\partial y$を仮定せねばならないので、½乗法則は確立されているとは云えない。壁面近くにおいて慣性項を無視すれば

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{dp}{dx} \qquad (6.1)$$

となり、内層における$\partial\tau/\partial y$が決定されるかに思えるが、(6.1)式が成り立つのは非常に壁面近くであり、内層と呼ばれる大部分では一般に(6.1)は成り立たない。

逆圧力勾配と主流の乱れが同時に作用している本章の乱流境界層に対する解析は困難であるので、本章においては実験結果を述べるに止どめる。第5章で示したように混合距離、渦粘性係数が主流の乱れによって大きな増加を示したが、この混合距離と内層において等価となる粘性消散長さについても考察する。種々の圧力勾配を伴う乱流境界層の発達計算法において、*Bradshaw*等[5]はこの長さ尺度を用い、今までの方法の中では最も優れた計算法を与えている。本章では、この粘性消散長さを求め、*Bradshaw*等が利用している分布曲線と比較する。

6.2　実験装置

本章の実験において用いられた風胴、境界層測定用ダクト等はすべて第５章で用いたものと同一である。逆圧力勾配を得るためのステップは木製で一辺４４㎜の正方形断面を有する。ステップの両端にはナットをうめ込み、ダクトの側壁を通してボルトでステップを固定した。

実験は、ステップ前面の境界層測定平板前線からの距離が 891.5㎜，1126㎜ 1534㎜ の３種類の場合についてなされた。本論文では、ステップ前面の前縁からの距離が 891.5㎜ の実験を*Exp.A*，１１２６㎜ の場合を*Exp.B*，１５３４㎜の場合を*Exp.C* と呼ぶ。図（6.1）に測定平板上のステップの位置を示す。

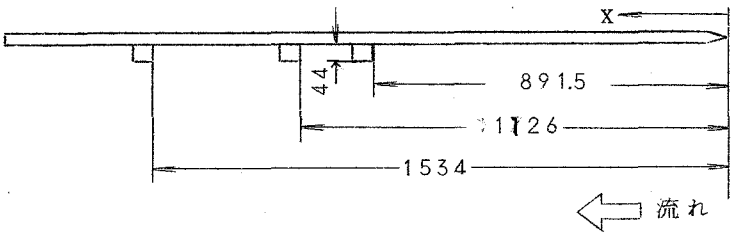


図　6.1　ステップの位置

第５章の結果より、かなり強い乱れが存在しなければ、影響をみることができなかったので、主流の乱れを作るための乱流格子は、第５章で用いた１０㎜角棒より成るもののみを使用した。第５章と同様に、乱流格子を置かない状態で行なった実験を*Case*Ⅰ，置いた場合の実験を*Case*Ⅱ，と呼ぶ。

逆圧力勾配がステップの近くで急激であるので、本章ではステップ前面付近において、流れ方向の測定点を数多くとる必要があった。また剝離点に近い位置では、境界層内部であっても静圧の厚さ方向の変化が無視できない。したがって図（6.2）に示されている全圧管および静圧管を用いた。

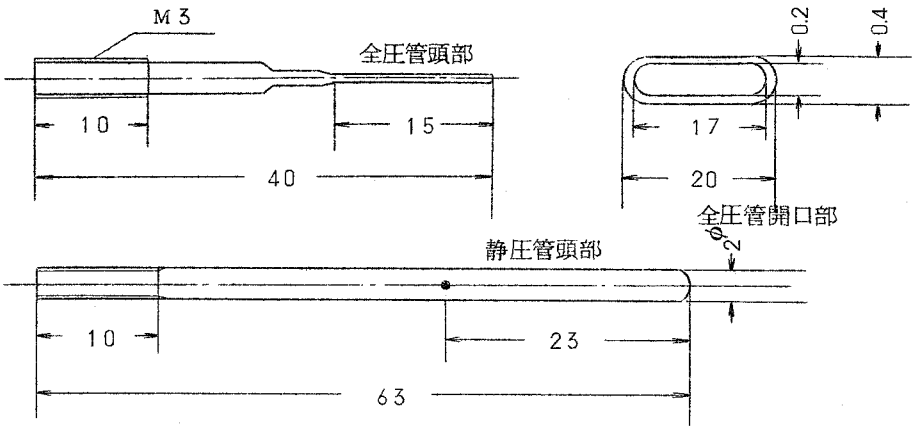


図　6.2　全圧管と静圧管

それらの圧力管を種々の長さの銅管とねじによって連結し、流れ方向の位置を自由に変えられるようにした。

熱線プローブおよび熱線風速計は第５章と同一のものを使用した。

表（6.1）に本章の実験における測定点の位置を示す。

Exp.A	*Exp.B*	*Exp.C*
515.5	630	630
630	830	830
715.5	915	1030
748	949	1130
784	986	1230
891.5	1030	1330
		1363
		1396
	(mm)	1430

表　（6.1）

数値は測定平板前縁からの距離を示す。

	Exp.A		Exp.B		Exp.C	
	Case Ⅰ	Case Ⅱ	Case Ⅰ	Case Ⅱ	Case Ⅰ	Case Ⅱ
u_e m/s	10.09	9.85	9.62	9.52	11.92	11.56
R_{δ^*}	2030	2370	1800	1980	2010	2030

表　（6.2）

表（6.2）に各実験の主流の速度およびレイノルズ数を示す。

表に示されている値は $x=630$ mmにおける値である。

6.3　実験結果および考察

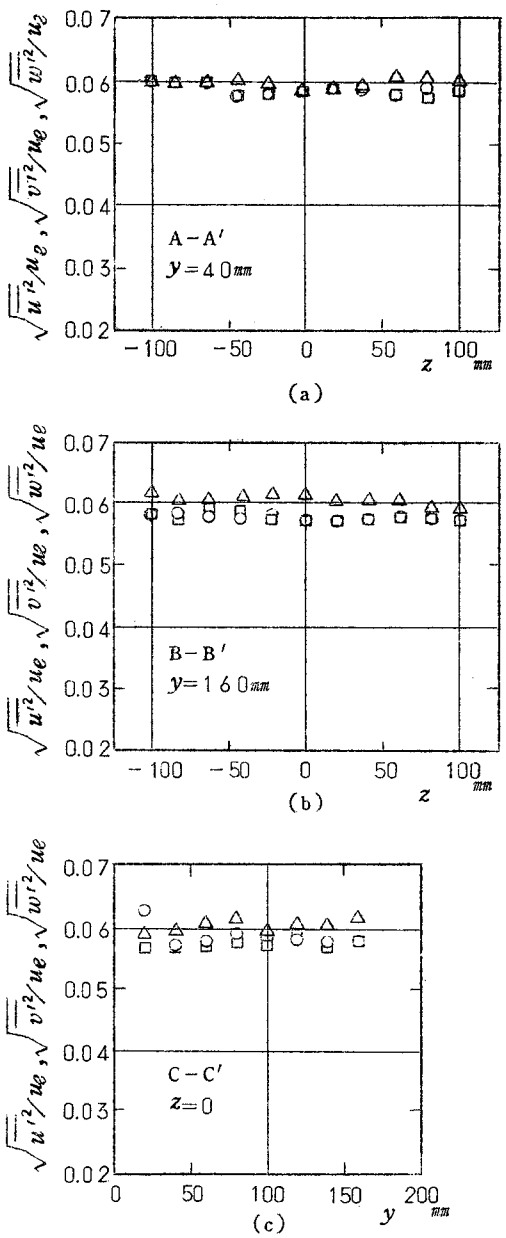
6.3.1　主流の乱れ

第5章と同様に $x=445$mm，645mm において、主流の乱れの性質を調べた。すなわち第5章図（5.7）に示された線 $A-A'$, $B-B'$, $C-C'$ に沿って u', v', w' の強さを測定した。乱流格子は図（5.8）a のように置いた。

図（6.3）a，（6.3）b，（6.3）c は $x=445$ mmにおける各乱れ成分の強さを示している。図より $x=445$ mmでは第5章の場合と、主流の乱れは同じ傾向を示す。すなわち、v'成分が最も強く、u' と w'成分はほぼ同じ強さである。図（6.4）a，（6.4）b，（6.4）c は $x=645$ mmにおける結果である。図より各乱れ成分はほぼ同じ強さを示し、等方性乱れとなっている。したがって本章の実験では $x=645$ mmより後流側の主流の乱れは等方性乱れとなっている。本章の主流の平均速度が、第5章の実験に比べ、約半分であることが乱れの方向性の均一性に関連したものと思われる。

図（6.5）に u' 成分の流れ方向の変化を示す。図に示されているのは Exp.C の測定結果であるが、Exp.A，Exp.Bにおいても図（6.5）と変

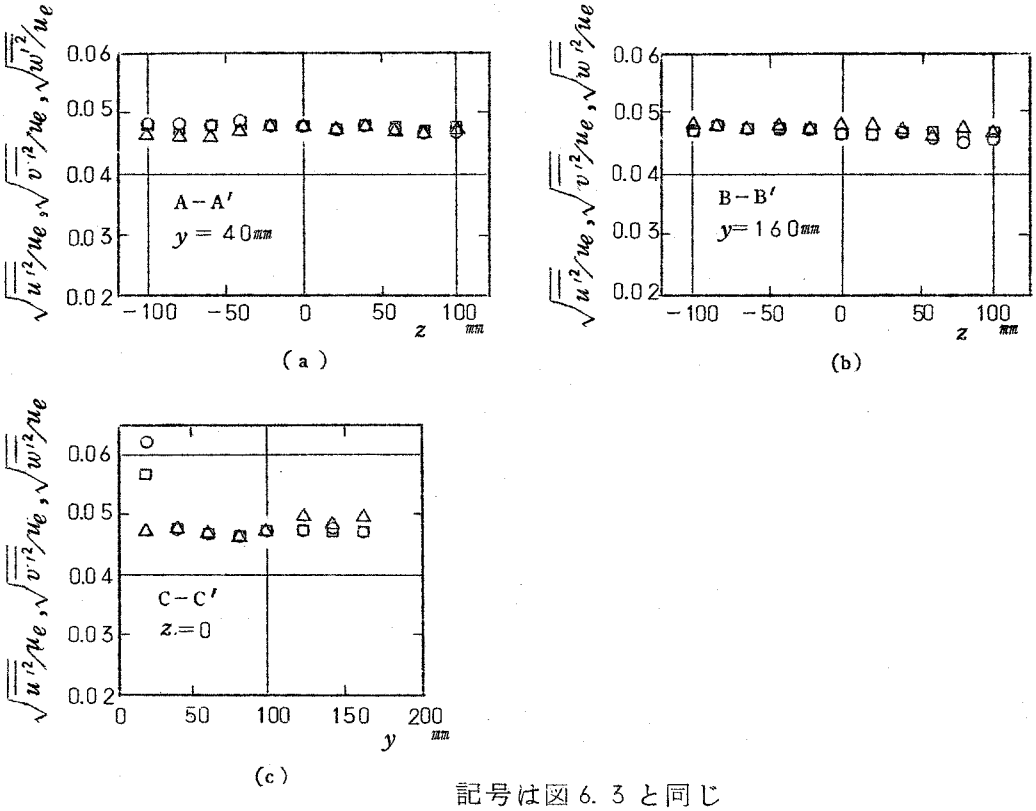
わらない。



○：u'成分，△：v'成分，□：w'成分

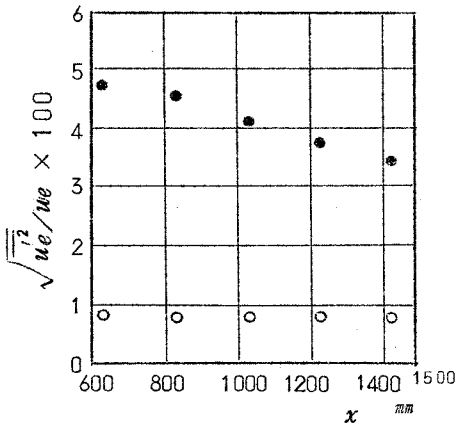
X＝445 mm

図　6.3　主流の乱れの強さの分布



記号は図 6. 3 と同じ
X = 645 mm

図　6. 4　　主流の乱れの強さの分布



○：*Case* I ，●：*Case* II

図　6. 5　　主流の乱れの強さの分布

6.3.2 静圧分布

図（6.6）に壁面静圧および境界層外線における静圧の流れ方向の変化を示す。図において x' はステップの前面より上流側へ測られた距離である。図より静圧の増加が急激であることがわかる。$x'<200$ mmでは壁面上の静圧と境界層外縁の静圧は明らかに異なるため、厚さ方向の静圧変化は無視できない。これは剥離しやすくなっている境界層においては一般に見られる傾向であり、厳密には厚さ方向の運動を考慮する必要がある。本章では簡単のため，流れ方向の運動のみを扱う。

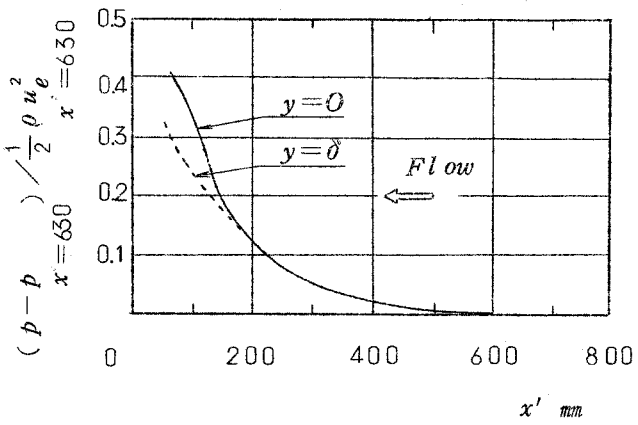


図 6.6 壁面および境界層外縁における静圧の流れ方向における変化

6.3.3 壁面せん断応力

壁面せん断応力は、第5章と同様にClauser's chart によった。しかし逆圧力勾配の強い位置では対数直線式が成立しないので、そのような位置での壁面せん断応力は、Clauser's chartで求めることのできた位置における値の外挿により求めた。本実験では $x'\fallingdotseq 100$ mmまで対数則が認められた。

Bradshaw と Galea[4]はステップの高さ t を4種類に変えて実験を行った。すなわち $t=1.0$，1.2，1.58，2.25（inches）の4種類である。主流の風速は30ft./sである。したがって本章の実験と条件はほぼ同一で

ある。彼等はx'の原点をステップ高さtの1.7倍移動することにより、静圧や壁面せん断応力の分布がステップの高さに無関係に境界層厚さを尺度に整理できると述べている。彼等は壁面せん断応力の測定を*Preston*管を用いて行なったが特に$t=2.25$ *inch*の場合、剥離点の付近で、"*fence*"を用いて剥離点の決定を行なった。それによれば剥離点付近では壁面せん断応力が流れ方向の距離に対し線形に減少すること、および剥離点がステップの前面より1.2 tの位置にあることを示した。本章においても、$x'\fallingdotseq 100$ mmの付近より線形に$\tau_w \sim x'$曲線を外挿し、$\tau_w=0$となる点を定め、その位置を剥離点とした。図(6.7)と*Case* Ⅰおよび*Case* Ⅱに対する*Exp*. *A*, *B*, *C*の結果を示す。

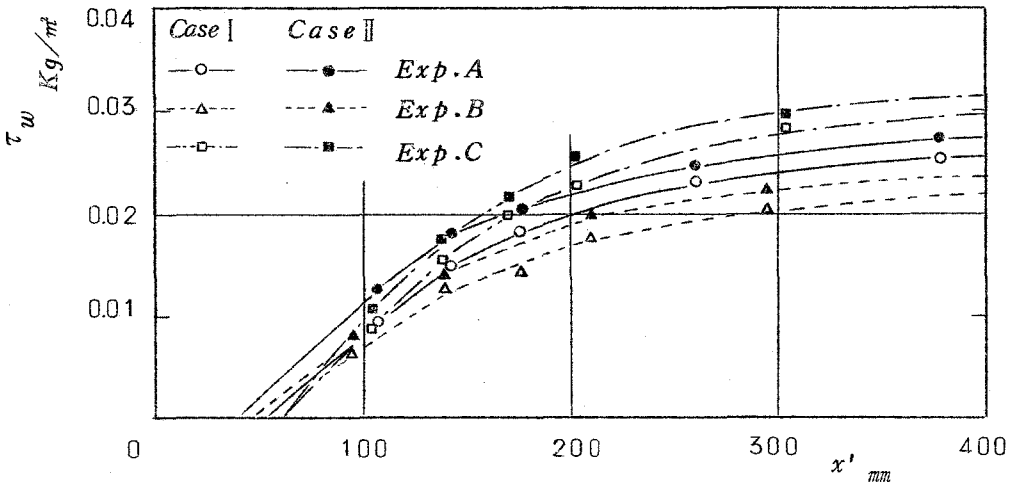


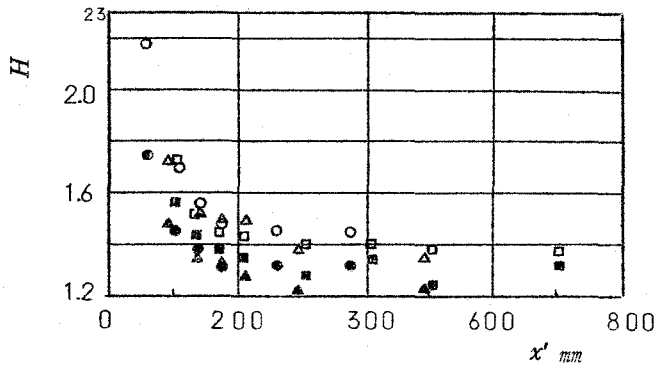
図 6.7 壁面せん断応力

図(6.7)より明らかに主流の乱れによって壁面せん断応力τ_wは増加している。また逆圧力勾配領域においてもその効果は持続することがわかる。*Exp*.*A*, *B*の*Case* Ⅰでは、剥離点が$x'_{step}=53$ mmの位置になる。この位置は、本章の実験で用いているステップの高さの丁度1.2倍となり、*Bradshaw*と*Galea*の結果と一致する。しかし、*Exp*.*C*では

x'_{step}＝６２㎜であり、ステップの高さの1.4倍となる。*Case* Ⅱ、すなわち主流に強い乱れがある場合、いづれの場合も*Case* Ⅰよりx'_{step}は減少する。*Exp A*ではx'_{step}＝４２㎜，*Exp B*ではx'_{step}＝４８㎜，*Exp C*ではx'_{step}＝５８㎜となる。乱流格子とステップの間の距離は*Exp A*において最も短かく、*Exp C*において最も遠い。x'_{step}の値が*Exp A*，*B*，*C*の順に小さいことは、主流の乱れの強さに応じて、剝離点がわずかながら後流側、すなわちステップに近づくことを意味している。したがって逆圧力勾配により剝離しやすくなった流れに対し、主流の乱れによる剝離の制御が可能である。剝離の防止のために考えられている手段には、*vortex generator*によるものや、壁面噴流による吹き出し、または逆に吸い込み等がある。主流の乱れはそれらの効果に比べると影響力が弱く、よほど乱れを強くしないと効果があらわれない。したがって特殊な場合のほかは、効果的でない。

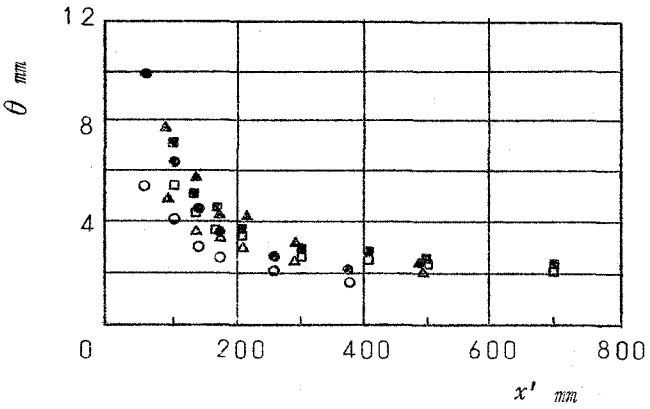
6.3.4　運動量厚さおよび形状係数

図（６.８），図（６.９）に運動量厚さθおよび形状係数Hをx'についてプロットする。主流の乱れのこれらの量に与える影響は第５章に示した零圧力勾配の場合と同じ傾向を示す。すなわちθは*Case* Ⅱにおいては逆圧力勾配の有無に関係なく増加し、Hは小さな値をとる。



記号は図 6.7 と同じ

図 6.8　形状係数 H の変化



記号は図 6.7 と同じ

図 6.9　運動量厚さ θ の変化

6.3.5　全圧分布と流れ関数

急激に逆圧力勾配が作用し剝離するような流れの場合、乱流境界層の外層においては、同一流線上で全圧が近似的に保存される。外層においてせん断応力の厚さ方向の勾配と圧力の流れ方向の勾配を比較すると、急激な圧力勾配のある場合、せん断応力勾配を無視することができるためである。

Townsend[65] はこの事実を利用して剥離点の予測の計算を行っている。ステップによって剥離する流れは、急激な剥離の典型的な例である。

流れが二次元であれば流れ関数は次式で与えられる。

$$\Psi = \int u dy$$

図（6.10）に全圧 $p_T = p + \frac{1}{2}\rho u^2$ と流れ関数 Ψ の関係をプロットする。図よりダクト入口に最も近い点を除いて全圧は *Case* Ⅰ，*Case* Ⅱ とも保存されていることがわかる。

内層においてはせん断応力勾配と圧力勾配が同程度になるため、流れ方向に全圧と流線の関係は大きく変化する。せん断応力が最大となる点では $\partial\tau/\partial y = 0$ であるので、最大のせん断応力を与える位置は同一流線上にある。

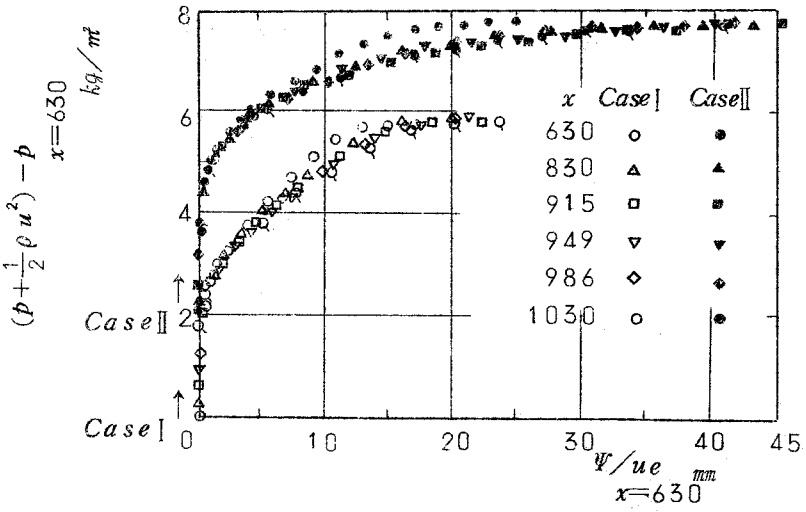


図 6.10　全圧と流れ関数

したがって $p_T \sim \Psi$ 曲線の壁近くを詳しくみると図（6.11）に示されるように、曲線群は Ψ の値がほぼ同じところで、交差する。この交差点を内層の境界と定義することもある。本章においては内層の境界として上の定義を用いる。内層の境界に対応する y および Ψ を y_i，Ψ_i と記す。

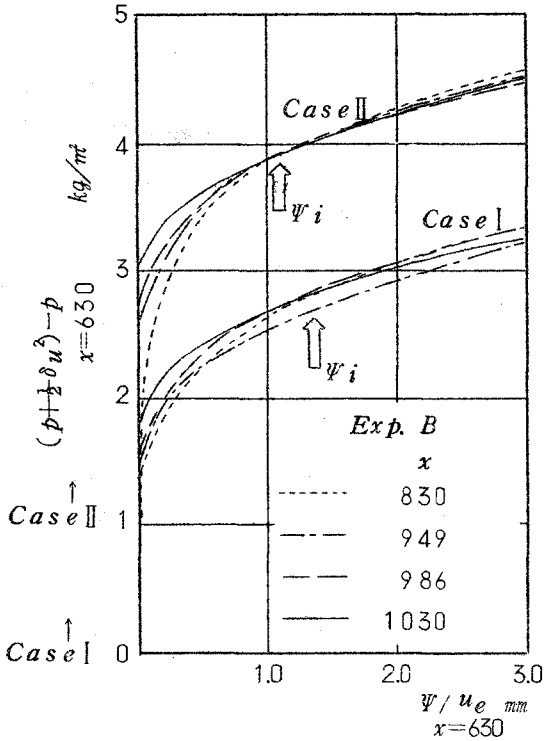


図 6.11　壁面近くにおける全圧と流れ関数

図（6.11）に示されたCase IとCase IIの比較により、y_i や Ψ_i は主流の乱れによって若干小さな値をとることがわかる。

このことは主流の乱れによって内層が狭まることを意味する。

6.3.6　½乗法則

逆圧力勾配が強くなると対数法則が成立しなくなることはこれまでに述べた。このことを図（6.12）[50] によって詳しく説明すれば次のようになる。すなわち零圧力勾配の状態から逆圧力勾配の状態へ主流が変る場合、境界層内は成立する分布則によっていくつかの領域に区別される。点線と壁の間を内層とすれば、内層では粘性底層、対数則、½乗法則の成立する領域が典型的

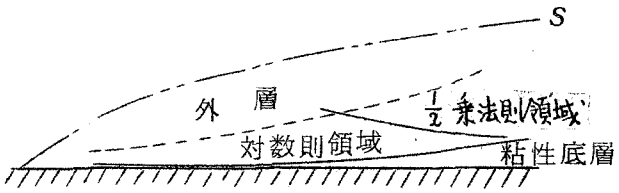


図 6.12　乱流境界層内の種々の領域

には図（6.12）に示されたように表われる。対数則の成立する領域は徐々に狭まり、外層側から½乗法則領域がそれにかわってあらわれる。

第2章（2.1）節で示したように、$\tau/\rho=\alpha y$，$l=\kappa y$ を混合距離理論の関係式に代入し、積分すれば½乗法則は次式で得られる。

$$\frac{u}{u_\tau}=\frac{2}{\kappa}\left(\frac{\alpha y}{u_\tau^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{\Delta u}{u_\tau} \qquad (6.2)$$

上式における Δu は½乗法則を壁面上まで延長した場合の壁面上の架空の速度で、普通これをすべり速度と呼んでいる。すべり速度は½乗法則と対数法則との接続の条件より次のようにして求まる。

すなわち接続点を　$y=y_c$ とし、

$$\frac{\alpha y_c}{u_\tau^2}=Q=\text{定数} \qquad (6.3)$$

とおく。上式を対数法則と(6.2)式へ代入し，uを消去すれば

$$\frac{\Delta u}{u_\tau}=\frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{u_\tau^3}{\alpha\nu}\right)+T \qquad (6.4)$$

ただし　$T=P_0-\frac{2}{\kappa}Q^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{\kappa}\ln Q$

（6.2）式，（6.4）式を利用するには現段階ではあまりにも問題が多い。αはせん断応力の内層における勾配であるが、せん断応力分布は境界層理論

の立場からでは未知量で、圧力勾配のように与えられるべきものではない。したがって近似的に

$$\alpha = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} \qquad (6.5)$$

とおくことがあるが、従来の逆圧力勾配の乱流境界層内のレイノルズ応力の実測データにより、せん断応力勾配と圧力勾配とはかなり異なることがわかっている。$\partial\tau/\partial y$ は dp/dx の半分程度の値をとることもしばしばある。$\partial\tau/\partial y$ は未知であるので *K'arm'an* 定数 κ の値を修正することによって実験結果と合うようにすることもある。従来の実験結果に比較的よい一致を与える κ は 0.5 であるが、この値は十分に確立されたものでない。本実験の整理においては κ は常に 0.4 に統一する。

½乗法則と対数則の境界は、従来の実験結果より（6.3）式において $Q = 1.41$ の場合に相当する。

図（6.13）に本実験結果の $u \sim y^{\frac{1}{2}}$ をプロットする。同図には（6.35）節で求めた y_c および（6.3）式より得られる y_c の軌跡を示す。図より主流の乱れが存在しても½乗法則が成立することがわかる。（6.2）式より

$$\frac{du}{d(y^{\frac{1}{2}})} = \frac{2}{\kappa}\alpha^{\frac{1}{2}} \qquad (6.6)$$

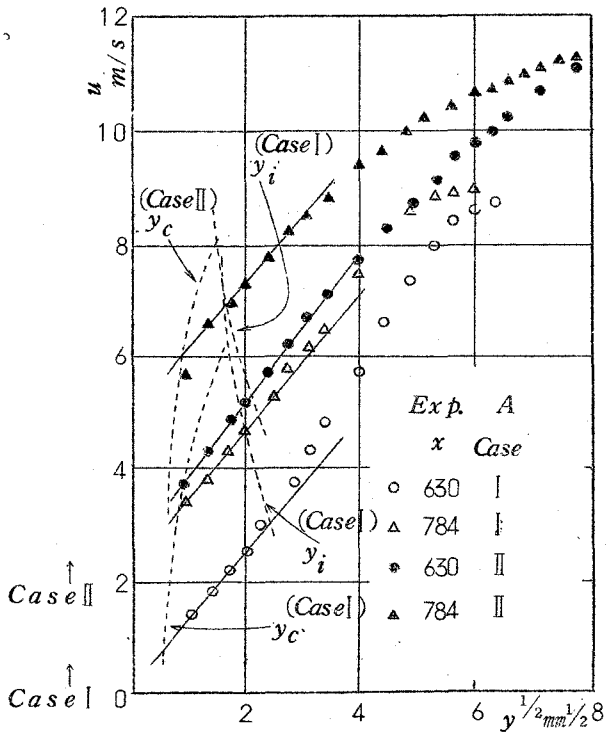


図 6.13 ½ 乗 法 則

であるので、図（6.13）の $v \sim y^{\frac{1}{2}}$ の勾配より α を求めることができる。一方 $u \sim y^{\frac{1}{2}}$ の内層における直線部分を延長し、$\Delta u / u_\tau$ を求め、図（6.14）に $\Delta u / u_\tau \sim v_\tau{}^3 / \alpha\nu$ を示す。図より *Perry*[50] 等が与えた式とほぼ一致することがわかる。

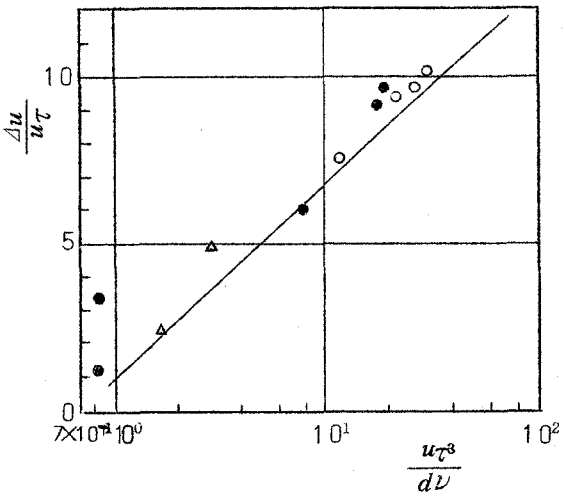


図 6.14　すべり速度　　○：*Case* I　　●：*Case* II

△：*Bradshaw* と *Galea*[4] の実験

——：$\frac{\Delta u}{u_\tau} = 5.75 \lag \frac{0.19 u_\tau{}^3}{\alpha\nu} + 5.1$

（*Perry*[50] 等による）

図（6.15）に y_i, y_c, y_s の流れ方向の変化を示す。y_s は粘性底層の縁を $y_s u_\tau / \nu = 30$ と置いた場合に対して求めた。図に示されているように（6.3）式において $Q = 1.41$ を適用すると、½乗法則は $x' > 200$ mm 以上では存在しないことになる。しかし図（6.14）に示されているように、*Case* I では $x' > 200$ mm においても一見½乗法則が成立している。*Case* II では½乗法則の領域はせまくなっている。混合距離理論に基づく誘導の過程

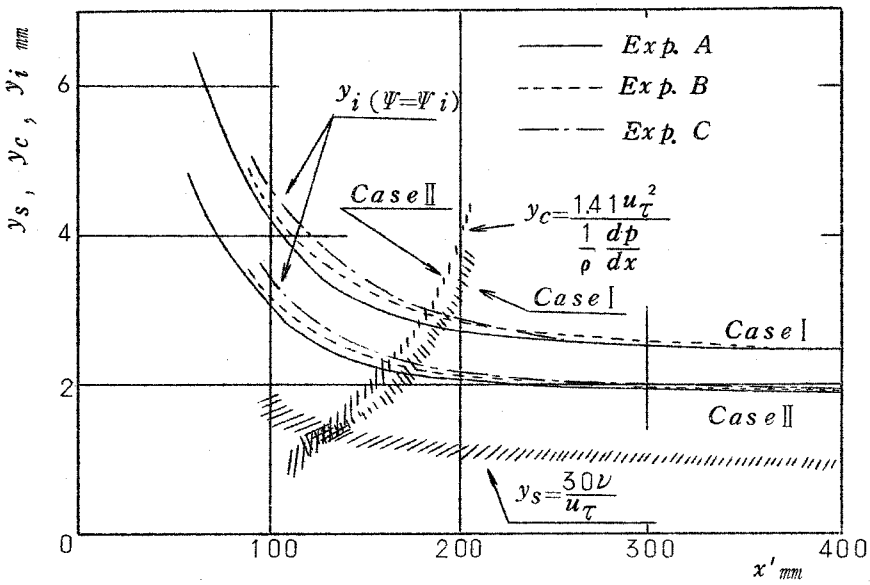


図 6.15　y_i, y_c, y_s の変化

を考えると x' ＞200 では $\tau_w \to 0$ という近似はとうてい満たされていない。したがって Case Ⅰ の場合、剝離点より十分はなれた位置で速度 u が $y^{\frac{1}{2}}$ に比例しているのは本実験の圧力勾配に特有な現象であり、本来の½乗法則とは区別すべきである。

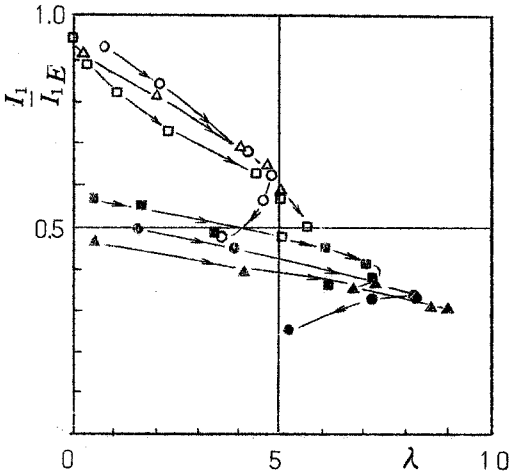
6.3.7　平衡乱流境界層との比較

第4章において、一般に乱流境界層は平衡乱流境界層になろうとする性質があるが、種々の外乱によって平衡状態からずれるという仮定を設けて発達の計算を試みた。

その際、積分厚さ I_1 を基準にとり、一般の乱流境界層と平衡乱流境界層の I_1 の比、すなわち I_1/I_{1E} によってずれを評価した。第4章において本章の実験結果の一部を引用したが、本節においては、主流中の乱れがある場合について第4章の仮説の検討を行なう。

図（6.16）に本実験結果より得られた $I_1/I_{1E}\sim\lambda$ 線図を示す。

I_{1E} , λ の求め方は第２章、第４章に示した。



記号は図 6.7 と同じ

図 6.16　平衡乱流境界層との比較

本実験においては、ステップより十分離れた位置では圧力勾配は零の状態が続いているので、*Case* Ⅰの初期の状態は平衡である。したがって *Case* Ⅰの I_1/I_{1E} の初期値はほぼ１となっている。*Case* Ⅱでは、ステップより十分離れた位置において既に主流の乱れによって非平衡となっており、初期の I_1 は約 I_{1E} の半分である。ステップへ近づくにしたがって、圧力勾配は急激な上昇をするため、*Case* Ⅰでは平衡の状態から急激に離れる。一方、*Case* Ⅱでは、初期の状態において平衡状態から大きく離れているため、平衡状態になろうとする傾向が *Case* Ⅰより強く働いている。

6.3.8　乱れに関する考案

Exp.B における u' の強さの厚さ方向の分布を図（6.17）に示す。図より *Case* Ⅱでは境界層全体を通じて乱れの強さが *Case* Ⅰより大きい。しかし

外層での*Case* Ⅰと*Case* Ⅱの大きな差は内層へ向うにつれて小さくなっている。内層においては、内層自体で発生する乱れが圧倒的に強く、乱流格子によって作られた乱れは壁面近くでは逆に弱くなるためと思われる。

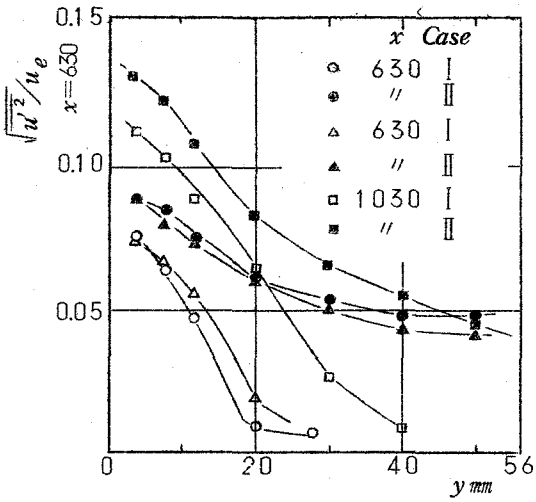


図 6.17　境界層内における乱れの強さの分布

ステップに近い位置で、乱れの強さが大きくなるのは、剥離しやすくなっている流れにおいて一般的にみられる現象である。

図（6.18）に u' のエネルギ スペクトル $fu(k)$を示す。ただし

$$\int_0^\infty f_u(k)\,dk = 1 \qquad (6.7)$$

となるように $f_u(k)$ は標準化されている。図には同じ y に対して*Case* Ⅰと*Case* Ⅱが比較されている。図より*Case* Ⅰと*Case* Ⅱでの乱れエネルギの差はおもに低波数におけるスペクトルの違いによるものであることが明らかである。これは*Case* Ⅱで用いた乱流格子によって発生した乱れの渦の大きさが境界層内部で発生する乱れに比べ大きいことを意味する。しかし、*Case* Ⅰと*Case* Ⅱで乱れの強さがかなり異なる境界層外縁近くでは図（6.18）*d* のようにスペクトルにおいても一様な違いがみられる。

一般に壁近くになるにしたがって局所等方性の成り立つ波数領域は少なくなるが、図（6.18）に示されている実験結果は、極端に壁に近い位置での測定結果でないので、図のすべての場合

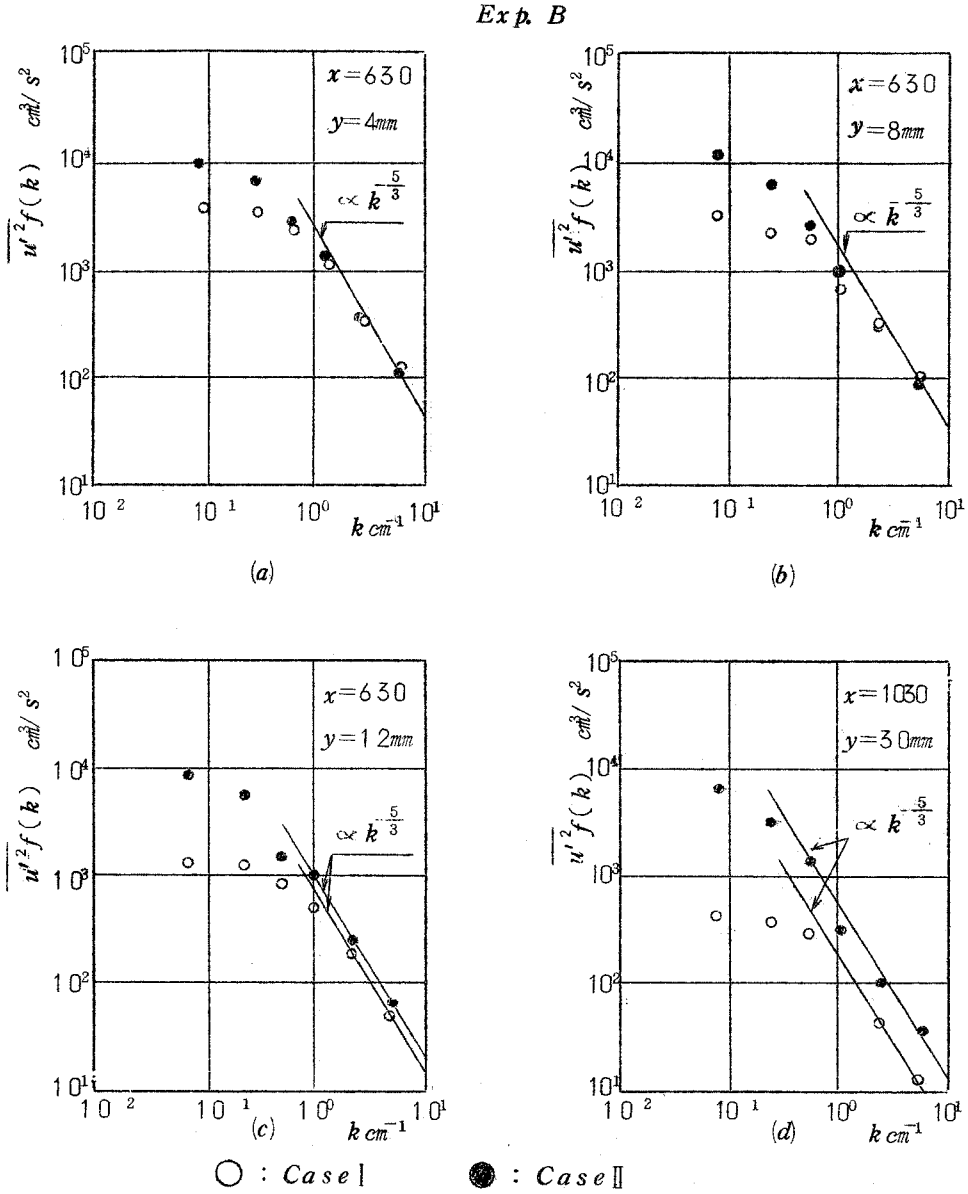


図 6.18　境界層内における乱れの一次元エネルギ スペクトル

に局所等方性が成立し、さらによく知られている（$-5/3$）乗法則の成り立つ慣性小領域の存在が認められる。外層においてはCase Ⅱの場合、慣性小領域がわずかであるが低波数の方におよんでいる。これは乱流格子によって作った乱れが境界層内で発生する乱れに比べ、より等方的であり、その影響

が表われているためと考えられる。

等方性乱流においては、一次元エネルギ スペクトル$f_u(k)$と三次元エネルギ スペクトル$E(k)$との関係は次式で与えられる。[2]

$$\overline{u'^2}\ f_u(k') = \int_{k'}^{\infty} \frac{k^2 - k'^2}{k^3} E(k)\, dk \qquad (6.8)$$

Heisenberg[22]は渦粘性係数χを用いて、$E(k)$として次式を得た。

$$E(k) = \left(\frac{8\varepsilon_d}{9\chi}\right) k^{-\frac{5}{3}} \left\{ 1 + \frac{8\nu^3}{3\chi^2\varepsilon_d} k^4 \right\}^{-\frac{4}{3}} \qquad (6.9)$$

（6.9）式を（6.8）式へ代入すれば、$-\frac{5}{3}$乗法則は次式で与えられる。

$$\overline{u'^2}\ f_u(k') = \frac{18}{55}\left(\frac{8\varepsilon_d}{9\chi}\right)^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}} \qquad (6.10)$$

ただし

$$k \ll \left(\frac{3\chi^2\varepsilon_d}{8\nu^3}\right)^{\frac{1}{4}}$$

したがって、ε_dとχが与えられれば、慣性小領域における$\overline{u'^2}f(k)$は定まる。*Bradshaw*[8]は従来の実験のいくらかを整理し、（6.10）式の係数について次のことを見い出した。すなわち

$$\overline{u'^2}\ f_u(k) = K'\ \varepsilon_d^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}} \qquad (6.11)$$

におけるK'を格子乱流、乱流せん断流れ等について求めると、

$$\frac{\sqrt{\overline{u'^2}}\ \ell_\varepsilon}{\nu} > 100 \qquad (6.12)$$

では　$K' = 0.50 \pm 0.05$　（6.13）

がよい近似で成り立つ。

ただし

$$\frac{1}{\ell_\varepsilon^2} = \int_0^\infty k^2 f_u(k)\,dk \qquad (6.14)$$

K'が（6.13）式で与えられる場合、 χは0.47となる。

（6.11）式，（6.13）式が本実験の場合に対しても成り立つとすれば、 図（6.18）に示されている普通平衡領域の慣成小領域におけるスペクトルの実験結果と、それらの式との比較より、ε_dが決定される。

以上述べた*Bradshaw* の結果を利用するためには、（6.12）式を満たされねばならない。一般に非等方性は小さなkにおいて生じるので（6.14）式に定義されているℓ_ε を求める場合、乱れを等方性と仮定してもあまり大きな差はない。等方性乱流の場合、ℓ_ε とε_d の間の関係が次式のように得られる。

$$\varepsilon_d = 15\nu \frac{\overline{u'^2}}{\ell_\varepsilon^2} \qquad (6.15)$$

したがってスペクトルの実験結果と（6.11）式の比較より得たε_d を（6.15）式へ代入しℓ_εを求め、$R_{\ell\varepsilon} = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}\,\ell_\varepsilon}{\nu}$ が100以上かどうかを点検し、 本実験のほとんどの場合に満たされていることを確認した。

6.3.9 粘性消散長さ

以上でε_d が得られたので、次にせん断応力分布が求まれば、次式で定義される粘性消散長さLが求まる。

$$L = \frac{(\tau/\rho)^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon_d} \qquad (6.16)$$

第２章（２１）節においてのべたように、粘性消散長さは内層では混合距離に一致する。*Bradshaw*[5] 等は粘性消散長さを用いて乱流境界層の発達計算を行い、かなりの成功をおさめた。本節では彼等が仮定したLの分布曲線と、本実験より求めたLを比較する。

第２章や第５章では、相似な速度分布を得たので境界層方程式に速度分布を代入しそして積分することによって、せん断応力分布を求めることができた。本実験では零圧力勾配乱流境界層から急激に剝離する乱流境界層となるため、速度や長さの尺度をどのように選んでも相似な速度分布曲線は得られない。したがって次のようにしてτの分布を求める。

Townsend[66] は急激な圧力上昇を伴う流れにおいて、τに関し次の仮定を置いた。まず、外層においてτは同一流線上では一定である。次に内層においては$\partial\tau/\partial y$ は一定である。この仮定について、彼は*Schubauer* と *Klebanoff* [67] の実験データに対し検討し妥当であることを確認している。本実験では圧力上昇は彼等の実験より急激であるので、おゝよそのτの分布の推測には以上の仮定は適用できる。実際*Bradshaw* と *Galea*[4] も上の仮定を用いてτの分布を求めた。*Bradshaw* と *Galea* は内層における$\partial\tau/\partial y$をdp/dxで近似した。本章においても、内層の$\partial\tau/\partial y$をdp/dxで近似し、τmaxを流れ方向に一定と置く。圧力勾配のある位置での外層におけるτの分布曲線としては、零圧力勾配で相似な速度分布を有する位置におけるτの分布曲線を基準にとり、その曲線の形を相似的に変形して求めた。同一流線上においてτを一定とおく方法も、上のように相似的に変形する方法も剝離点の近傍を除けば結果には大差ない。

図（6.19）に、*Exp.B* の$x=630$ mm における速度分布より計算された規準の曲線を示す。以上の方法で得たτの分布曲線の例を図（6.20）に示す。$\partial\tau/\partial y=dp/dx$ は一般によい近似でないので、本章ではステップに近く

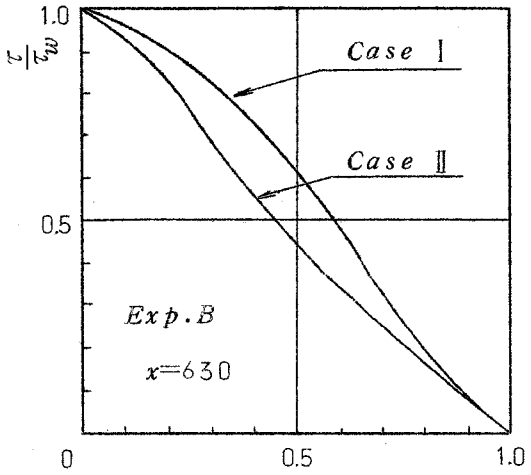


図 6.19 せん断応力分布

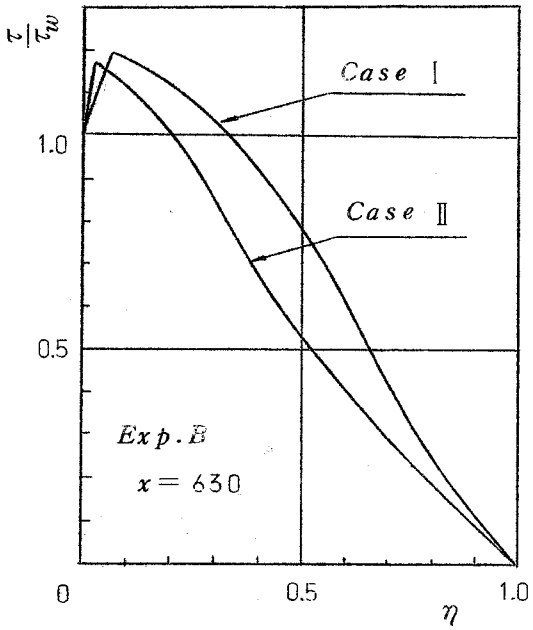


図 6.20 せん断応力分布

$\tau max/\tau w$が非常に大きな値をとる位置では、τの分布曲線を求めることを断念した。

以上でτが得られたので、前述のε_dと共に(6.16)式へ代入すればLが求まる。その結果を図(6.21)に示す。

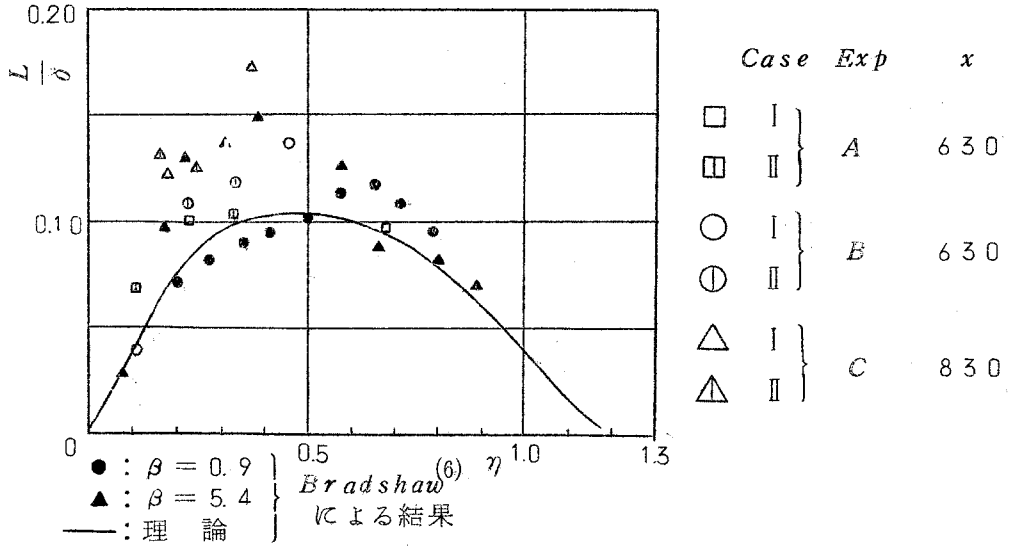


図 6.21 粘性消散長さの分布

図における実線は*Bradshaw*[5] 等が用いたLであり、それは内層において

$$L = \kappa y \qquad (6.17)$$

とおき、外層では

$$L = 0.105\,\delta\, i^{\frac{1}{2}} \qquad (6.18)$$

とおいて得られる曲線である。ただし、上式におけるiは間欠係数（*intermittency factor*）である。図（6.21）より本実験の結果においてCase Ⅰ とCase Ⅱ ではあまり差がなく、*Bradshaw*等の与えたLとほぼ同程度の値を示す。このことは、混合距離や渦粘性係数が第５章に示されたように、Case Ⅰ とCase Ⅱ で非常に大きな違いを示したのと対照的である。（6.16）式に示されているように粘性消散長さの定義は$(\tau/\rho)^{\frac{3}{2}}$と粘性消散率$\varepsilon_d$の比であり、一方、混合距離$\ell$は$(\tau/\rho)^{\frac{1}{2}}$と平均速度の勾配$\partial u/\partial y$の比として定義される。主流の乱れが与える影響は$\varepsilon_d$より$\partial u/\partial y$に対する場合の方が強いため、混合距離は大きな影響を受け、粘性消散長さはあまり変化を示さない。混合距離も粘性消散長さもともに方程式を閉じさせるために用いられる長さ尺度であり、内層では両者が等価であるためたびたびそれらを用いた計算結果の比較検討がなされている。その結果、種々の圧力勾配に対しては粘性消散長さは混合距離に比べ影響を受けないことが一般に知られている。本論文で用いたように平衡乱流境界層のような簡単な構造を有する流れに対しては、混合距離は非常に便利であるが、一般の非平衡な流れの発達計算を行なう場合には、種々の条件に左右されない尺度を用いる方が有利である。図（6.21）は主流の乱れに対してもまた、粘性消散長さは混合距離より普遍的性質を保つことを示している。

6.4 結　　論

ステップによる逆圧力勾配を伴う乱流境界層において、主流の乱れによる影響を実験的に調べた結果、次のことがわかった。

(1) 壁面せん断応力は主流の乱れが無視できる場合に比べ剝離点近くまで大きな値を示す。壁面せん断応力が零となる点、すなわち剝離点は主流の乱れによって後退する。

(2) ½乗法則は主流に乱れがある場合にも成立する。

流れ関数に対する全圧の分布曲線の壁面近くでの交差点として定義される内層と外層の境界は、主流の乱れにより壁側へ移動する。

(3) 主流に乱れがある場合と無視できる場合の境界層内における乱れ成分の強さは内層において接近する。

(4) せん断応力分布、乱れエネルギの粘性消散量を推定した結果得られる粘性消散長さは、本章の実験の精度内では主流の乱れの影響を受けず、*Bradshaw* 等が与えた分布とほぼ同程度の値を示した。

第 7 章　総　　括

種々の物体表面に生ずる乱流境界層には様々の外乱が作用する場合が多いため、それらの影響に関する研究は実用上ますます必要となっている。本研究においては、外乱の代表的なものとして逆圧力勾配、物体表面の粗さ、主流の乱れをとりあげ、それらが作用する乱流境界層の問題について解析を試み、一部実験を行った。解析の手段は古典的な混合距離理論および渦粘性理論に基づき、平均速度場を解析の対象とした。

逆圧力勾配の場合の問題は第２章と第４章で扱った。

第２章では、逆圧力勾配を伴う流れの中で最も単純な平衡乱流境界層の速度分布曲線の計算を行い、合わせて摩擦則の誘導も行った。そこでは２種類の方法を試み、第１の方法では速度欠損に対し、*logarithm－arctangent* 分布式を誘導し、第２の方法ではべき級数分布式を得た。第４章では、任意の逆圧力勾配が与えられた場合の乱流境界層の発達計算を第２章の結果を応用して行った。一般の乱流境界層と平衡乱流境界層の比較を行った結果、一般の乱流境界層が平衡状態になろうとする傾向を常に持つと仮定することができたので、この考え方を基に補助方程式を作った。平衡乱流境界層とのずれの度合を速度分布の積分厚さで評価し、第２章で求めた平衡乱流境界層の積分厚さ式を利用して計算を行い、種々の実験結果と比較した。その結果、剥離点に近い位置を除けば、計算結果と実験結果の一致はほぼ良好であった。

粗面乱流境界層の問題は第３章で述べた。第２章の第１の方法と同様、混合距離理論を用いて平均速度分布を求めた。原点補正のかわりに、粗さ素子の山の頂点に原点を統一し、そこに一般に零でない混合距離を仮定した。計算された分布曲線と実験による速度分布は、内層、外層を通じてよい一致を示した。

さらに粗面乱流境界層の摩擦係数をレイノルズ数と原点における混合距離の関数として求めることができた。

主流の乱れの影響は第5章および第6章で述べた。第5章では流れ方向に圧力勾配のない状態で実験を行い、第6章ではステップにより強制的に剥離させられた場合についての実験を行った。主流の乱れが強くそして流れ方向に大きく変化する場合には、通常の零圧力勾配乱流境界層に対して成立する速度欠損則は成り立たない。主流の乱れが大きく変化しない場合、速度欠損は近似的に相似となる。主流に強い乱れがある場合の速度分布の形状は、負の圧力勾配が作用する場合の乱流境界層の分布と類似する。主流の乱れによって壁面せん断応力は増加する。したがって逆圧力勾配によって剥離する流れの剥離点は後流側へ移動する。実験結果より計算される混合距離や渦粘性は、主流の乱れによって著しく増加する。

一方、種々の仮定により推定されたせん断応力分布と粘性消散量から求めた粘性消散長さにおいては、主流の乱れによる影響は本実験の範囲内ではほとんどない。これは粘性消散長さの方が混合距離より普遍的であることを意味する。

主流の乱れによって非平衡となった乱流境界層の速度分布を渦粘性を用いて計算した。誘導された微分方程式は負圧力勾配の平衡乱流境界層に対する式と同形となった。

以上、代表的な外乱に対する解析および実験を行ったが、実際の問題に対処するためにはさらに本研究を拡張する必要がある。たとえば、第3章では粗さ素子の高さが一定の粗面を扱っているが、実際の粗さに対しては不均一性の考慮が必要である。また第4章で用いた補助方程式は第4章における考え方をおおまかに表現しているだけであり、今後さらに修正を施す余地があ

る。第５章、第６章における主流の乱れは近似的には等方性乱流であるが、実際に流体機械内部等で生じる乱れは非等方性、非一様性が著しい乱れであろう。平均速度成分におよぼす主流の乱れの影響の定性的な傾向は、本研究によって明らかとなったが、さらに深く解明するためには、乱れ成分に対する詳しい実測が不可欠である。

最後に、本研究における解析に対する最も根本的そして深刻な問題点は、仮定を多く必要とすることである。これは乱流が関連する現象の解析の特徴であり、容易にこの状況は解決されそうにない。現段階ではやむを得ない面もあるが、大局的にみれば、本研究における手法からの飛躍は今後の研究の大きな課題であろう。

謝　　辞

本研究を遂行するにあたり、終始直接御指導いただきました大阪府立大学飯田周助教授に深く感謝致します。

私の大阪大学赴任より現在に至るまで、大阪大学 森川敬信教授の支援と激励は私の研究の支えとなり、詳密な校閲および日頃の学恩とともにここに感謝の意を表します。

さらに、御多忙の中、懇篤な校閲をして下さった大阪大学 村田遙教授、田中一朗教授に感謝の意を表します。

また、私の一連の研究に対し、好意的に批判し、助言して下さった大阪府立大学　宮城敏夫助教授、森貞彦助手、西岡通男助手に厚く御礼申し上げます。

実験遂行にあたり、多大の御協力をいただいた、当時飯田研究室に在籍していた藤原精二（現川崎重工）、熙 徳直康（現全日本空輸）、松本駿次郎（現大阪府立大学大学院）、藤田三郎、木村修（現酉島製作所）、杉本修司（現川崎重工）の諸氏に感謝致します。

参　考　文　献

(1) Batchelor, G. K. and Townsend, A. A. : Decay of vorticity in isortopic turbulence in the initial period, Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A, 193, 539-558 (1948)

(2) Batchelor, G. K. : The theory of homogeneous turbulence, Cambridge Univ. Press (1953)

(3) Betchov, R. and Criminale, W. O. : Oscillation of a turbulent flow, Phys. Fluids 7, 12, 1920-1926 (1964)

(4) Bradshaw, P. and Galea, P. : Step-induced separation of a turbulent boundary layer in incompressible flow, J. Fluid Mech. 27, 111-130 (1967)

(5) Bradshaw, P., Ferriss, D. H. and Atwell, N. P. : Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation, J. Fluid Mech. 28, 593-616 (1967)

(6) Bradshaw, P. : The turbulence structure of equilibrium boundary layers, J. Fluid Mech. 29, 625-645 (1967)

(7) Bradshaw, P. : The response of a constant pressure turbulent boundary layer to the sudden application of an adverse pressure gradient, Aero. Res. Coun., R & M No.3575 (1967)

(8) Bradshaw, P. : Conditions for the existence of an inertial subrange in turbulent flow, Aero. Res. Coun., R & M No.3603 (1967)

(9) Charnay, G., Comte-Bellot, G. and Mathieu, J. : Development of a turbulent boundary layer on a flat plate in an external turbulent flow, Proc. Fluid Dyn. Panel Specialists Meeting, London, 27. 1-27.10 (1972)

(10) Clauser, F. H. : Turbulent boundary layer in adverse pressure gradient, J. Aero. Sci. 21, 91-108 (1954)

(11) Clauser, F. H. : The turbulent boundary layer, Advances in Appl. Mech. 4, 1-51 (1956)

(12) Coles, D. : The problem of the turbulent boundary layer, Z. angew. Math. Phys. 5, 181-203 (1954)

(13) Coles, D. : The law of the wake in the turbulent boundary layer, J. Fluid Mech. 1, 191-226 (1956)

(14) Crocco, L. : Turbulent boundary layer and mixing coefficient, J. Soc. Indust. Appl. Math. 13, 206-215 (1965)

(15) Von Doenhoff, A. and Tetervin, N. : Determination of general relation for the behavior of turbulent boundary layers, NACA Rep. 772 (1943)

(16) 藤田安雄，豊倉富太郎 ： せん断流れの乱流境界層，機構論，第２９０回　９１－９４　（昭４３）

(17) 古屋善正，藤田秀臣 ： 金網粗面上の乱流境界層，機械学会論文集３２巻，２３７号　（昭４１）

(18) 古屋善正，藤田秀臣，中島洋 ： 二次元針金粗面上の乱流境界属，機械学会論文集，３３巻，２５０号　（昭４２）

(19) Furuya, Y. and Fujita, H. : Effect of surface roughness on the velocity defect law, Phys. Fluids Supplement, S155-S156 (1967)

(20) Горлин, С, М, И Зражевский : Влияние внешней турзупентности потока на течение В лограничном слое. Механика Жидкости и Газа, No.4, 52—57 (1972)

(21) Goldberg, P. : Upstream history and apparent stress in turbulent boundary layers, MIT Gas Turbine Laboratory Rep. No. 85 (1966)

(22) Heisenberg, W. : Zur statistischen Theorie der Turbulenz, Z. Phys. 124, 628-657 (1948)

(23) Herring, H. J. and Norbury, J. F. : Some experiment on equilibrium turbulent boundary layers in favourable pressure gradient, J. Fluid Mech. 27, 541-549 (1967)

(24) Hinze, J. O. : Turbulence, McGraw-Hill Book Co., Inc. (1959)

(25) Hirst, E. and Reynolds, W. : An integral prediction method for turbulent boundary layers using the turbulent kinematic energy equation, Rep. MD-21, Thermosciences Division, Dept. of Mech. Engng., Stanford Univ. (1968)

(26) Hussain, A. K. M. E. and Reynolds, W. : The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow, J. Fluid Mech. 41, 259-281 (1970)

(27) Iida, S. and Tsuji, Y. : Approximate velocity profiles of equilibrium turbulent boundary layers, Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci. 11, 35-43 (1968)

(28) 飯田周助，辻裕 ： 主流の乱れの乱流境層におよぼす影響，第１回乱流シンポジウム（東京大学宇宙航空研究所，１９６９）

(29) Junkhan, G. H. and Serovy, C, K. : Effects of free-stream turbulence and pressure gradient on flat-plate boundary layer velocity profiles and on heat transfer, Trans. ASME, 89, 169-174 (1967)

(30) Kestin, J. : The effect of free-stream turbulence on heat-transfer rates, Advances in Heat Transfer, 3, T. F. Irvine, Jr., and J. P. Hartnett, editors, Ac. Press, 1-32 (1966)

(31) Kim, H. T., Kline, S. J. and Reynolds, W. C. : The production of turbulence near a smooth wall in a turbulent boundary layer, J. Fluid Mech. 50, 133-160 (1971)

(32) Klebanoff, P. S. and Diehl, Z. W. : Some features of artificially thickened fully developed turbulent boundary layers with zero pressure gradient, NACA Rep. 1110 (1952)

(33) Klebanoff, P. S. : Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient, NACA Rep. 1247 (1955)

(34) Kline, S. J., Lisin, A. V. and Waitman, B. A. : Preliminary experimental investigation of effects of free-stream turbulence on turbulent boundary-layer growth, NASA TN D368 (1960)

(35) Kline, S. J., Reynolds, W. C., Schraub, F. A. and Rundstadler, P. W. : The structure of turbulent boundary layers, J. Fluid Mech. 30, 741-773 (1967)

(36) Kline, S. J. et al. edit. : Proceedings Stanford 1968 Conference on Computation of Turbulent Boundary Layers, Thermosciences Division. Dept. of Mech. Engng., Stanford Univ. (1969)

(37) Komoda, H. : On the effect of free-stream turbulence on the structure of turbulent wake,

(38) Laufer, J. : Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel, NACA Rep. 1053 (1951)

(39) Masuda, S., Sasaki, N., Ariga, I. and Watanabe, I. : Effects of free stream velocity profile on turbulent boundary layer with some reference to the effects of free stream turbulence, Proc. 2nd Int. JSME. Symp. 1-10 (1972)

(40) Matsui, T. : Mean velocity distribution in the outer layer of a turbulent boundary layer, The Research Rep. of the Aerophysics Dept. of Mississippi State Univ. No.42 (1963)

(41) McDonald, H. and Stoddart, J. A. P. : On the development of the incompressible turbulent boundary layer, Aero. Res. Coun., R & M No.3484 (1965)

(42) McDonald, H. : The departure from equilibrium of turbulent boundary layers, Aeron. Quart. 14, 1-19 (1968)

(43) McDonald, H. : The effect of pressure gradient on the law of the wall in turbulent flow, J. Fluid Mech. 35, 311-336 (1969)

(44) Mellor, G. L. and Gibson, D. M. : Equilibrium turbulent boundary layers, J. Fluid Mech. 24, 225-253 (1966)

(45) Moore, W. L. : An experimental investigation of the boundary layer development along the rough surface, Ph. D. Thesis, State Univ. of Iowa (1951)

(46) Nash, J. F. : Turbulent boundary layer behaviour and the auxiliary equation, NPL. Aero Rep. 1137 (1965)

(47) Nikuradse, J. : Gesetzmäßigkeiten der Turbulenten Strömung in glatten Rohren, VDI-Forschungsheft 356 (1932)

(48) Nikuradse, J. : Strömungsgesetze in rauhen Rohren, VDI-Forschungsheft 361 (1933)

(49) Perry, A. E. and Joubert, P. N. : Rough wall boundary layers in adverse pressure gradient, J. Fluid Mech. 17, 193-211 (1963)

(50) Perry, A. E., Bell, J. B. and Joubert, P. N. : Velocity and temperature probiles in adverse pressure gradient turbulent boundary layers, J. Fluid Mech. 25, 299-320 (1966)

(51) Perry, A. E., Schofield, W. H. and Joubert, P. N. : Rough wall turbulent boundary layers, J. Fluid Mech. 37, 383-413 (1969)

(52) Pichal, M. : Die turbulente Grenzschicht bei hochturbulenter Außenströmung, ZAMM 52, 407-416 (1972)

(53) Reynolds, W. C. and Hussain, A. K. M. F. : The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow, Part 3, Theoretical models and comparison with experiments, J. Fluid Mech. 54, 263-288 (1972)

(54) Rotta, J. C. : Das in wandnähe gültige Geschwindigkeitsgesetz turbulenter Strömungen, Ing. Arch. 18, 277-280 (1950)

(55) Rotta, J. C. : Turbulent boundary layers in incompressible flow, Progress in Aero. Sci., Pergamon Press (1965)

(56) Schlichting, H. : Boundary layer theory (translated by J. Kestin), McGraw-Hill Book Co., Inc. (1960)

(57) Schubauer, G. B. and Klebanoff, P. S. : Investigation of separation of turbulent boundary layer, NACA Rep. 1030 (1951)

(58) Schultz-Grunow, F. : Neues Widerstandsgesetz für glatte Platten, Luftfahrtforschung 17, 239-246 (1940)

(59) Scottron, V. E. and Power, J. L. : The influence of pressure gradient on the turbulent boundary layer over a rough surface, David Taylor Model Basin, Rep. 2115 (1965)

(60) Stradford, B. S. : An experimental flow with zero skin friction throughout its region of pressure rise, J. Fluid Mech. 5, 17-35 (1959)

(61) Tani, I : Boundary layer transition, Ann. Rev. Fluid Mech. 1, 169-196 (1969)

(62) Thompson, B. G. J. : A critical review of existing methods of calculating the turbulent boundary layer, Aero. Res. Coun., R & M 3447 (1964)

(63) Townsend, A. A. : The structure of turbulent shear flow, Cambridge Univ. Press (1956)

(64) Townsend, A. A. : Equilibrium layers and wall turbulence, J. Fluid Mech. 11, 97-120 (1961)

(65) Townsend, A. A. : The behaviour of a turbulent boundary layer near separation, J. Fluid Mech. 12, 536-554 (1962)

(66) 辻 広： 乱流格子の一設計資料，東京大学航空研究所集報，1巻３号，１７９－１８４ （１９５９）

(67) Tsuji, Y. and Iida, S. : Approximate calculation of turbulent boundary layers with arbitrary adverse pressure gradient, Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci. 13, 64-72 (1970)

(68) Tsuji, Y. and Iida, S. : Influences of free-stream turbulence on mean velocities of turbulent boundary layer without pressure gradient, Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci. 15, 105-116 (1972)

(69) Tsuji, Y. and Iida, S. : Velocity distributions of rough wall turbulent boundary layers without pressure gradient, Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci. 16, 60-70 (1973)

(70) Uchida, S. and Matsumiya, K. : An analysis of turbulent boundary layer along a flat plate, Memoirs of the Faculty of Engng., Nagoya Univ. (1966)

(71) Wieghardt, K. : Über die turbulente Strömung in Rohr und längs der Platte, ZAMM 24, 294-296 (1944)