



Title	魚の再生ウロコにおけるコラーゲン分子の積層過程に対する偏微分方程式モデル（第11回生物数学の理論とその応用）
Author(s)	中口, 悦史
Citation	数理解析研究所講究録. 2015, 1937, p. 120-127
Version Type	VoR
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/100647">https://hdl.handle.net/11094/100647</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

## 球面上の均等な点配置について

### Almost even arrangement of points on a spherical surface

中口悦史

NAKAGUCHI Etsushi

**要旨** 球面上に均等に (=均一かつ等間隔に) 点を配置することは、さまざまな分野や場面で必要とされるが、線分や円周、正方形などの均等分割や、多角形の正則三角形分割のように、容易に解決されるものではないようである。本稿では、3次元球の球面上に「ほぼ」均等に点を配置する方法として、多面体、球面螺旋線、球面座標格子に基づく配置の例と、ランダムな配置の生成、数値最適化による配置調整を概観し、「均等な配置」とは何かを考える。

**キーワード** 球面、均等配置、整面凸多面体、球面螺旋線、球面座標格子、ポアソン点列、数値最適化、計算幾何

**Abstract** An even (i.e., uniform and equally spaced) arrangement of points on a spherical surface is required in various fields and situations; however, solving this problem, such as the equal division of line segments, circumferences or squares, or the regular triangulation of polygons, does not appear to be straightforward. This study reviews examples of arrangements based on polyhedra, spherical spirals and spherical coordinate grids, as well as the generation of random arrangements and the adjustment of arrangements by mathematical optimization, as methods of arranging points 'almost' evenly on the surface of a three-dimensional sphere, and considers what the phrase 'even arrangement' should mean.

**Keywords** Spherical surface, even arrangement, regular-faced convex polyhedra, spherical spirals, spherical coordinate grids, Poisson point sequences, mathematical optimization, computational geometry

## § 1. はじめに

球面上に均等に、すなわち均一かつ等間隔に点を配置することは、球面上のデータやシミュレーションを扱うさまざまな分野や場面で必要とされる。代表的な例では地球の地表面や大気圏における気象データや海洋データの観測点の分布、大気圏や地球内部のシミュレーションのための格子点配置が挙げられる。また球面全体でなく半球面など部分的なものも、例えば脳の電磁場を測定するためのためにヘルメットにセンサーを満遍なく並べる場合などにも見られる。いずれも球面あるいは球体に構成された理論的なモデルの上でデータ収集・分析やシミュレーションを行うことが求められており、できるだけ均等に球面上に点を配置することが望ましい。

ところがよく知られているように、球面上への均等配置は、線分や円周、正方形などの均等分割や、多角形の正則三角形分割のように、容易に解決されるものではないようである。線分や円周は1次元構造であり、長さ方向に均等に分割する点を求めることは容易である。正方形や立方体は、縦と横、あるいは縦・横と高さが同じなので、直角座標系で縦・横・高さを同じ長さに均等に分割する点を求め、その座標格子を構成すればよい。長方形や直方体でも縦・横・高さが有理数比であれば同様である。平面の多角形や空間の多面体の場合は、有限要素法のための三角形要素や四面体要素への自動分割のアルゴリズムが開発され（成書では[1]など）、すでに商用のCAE（computer-aided (assisted) engineering：計算機支援による解析・評価）ソフトウェアなどにも登載されている（例えば[2]など）。円盤や球体も直角座標系格子を適用することは可能だが、円周や球面に配置される格子点が少ないため、円周や球面でのデータが必要な場合には適さない。球面の場合はさらに深刻である。直角座標系格子の適用はほぼ絶望的なので、球面上の座標系に頼りたいところだが、よく知られているように、通常の球面座標系あるいは緯線経線格子で緯度と経度を等分割する格子点を生成すると、北極と南極に格子点が集中してしまうため、何らかの工夫がまったく異なる発想での配置法が必要となる（図1.1）。

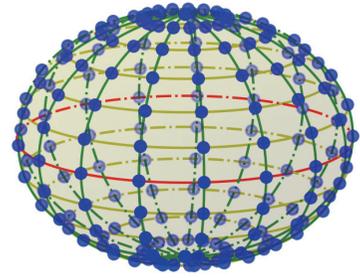


図1.1. 球面座標格子

本稿では、3次元球の球面上に「ほぼ」均等に点を配置する方法として、多面体、球面螺線、球面座標格子に基づく配置の例と、ランダムな配置の生成、数理最適化による配置調整を取り上げ、「均等な配置」とは何かを考える。§2では球面座標系や球面上の点集合の幾何に関して本稿の議論に必要な事項を概観する。§3では多面体、球面螺線、球面座標格子に基づく規則的な配置について、§4ではランダムな配置生成と数理最適化による配置調整について、それぞれ先行研究等から概説する。さらに§5では、配置調整で取り上げられた指標をはじめとして、球面上の配置の均等性を評価するための計算可能な指標を列挙し、「均等な配置」とは何かについて考える種とする。なお本稿の図版は図2.1を除いてすべて、Mac版SpyderにてNumPy, SciPy, matplotlibライブラリを用いたPythonコードを作成し描画出力したものである。

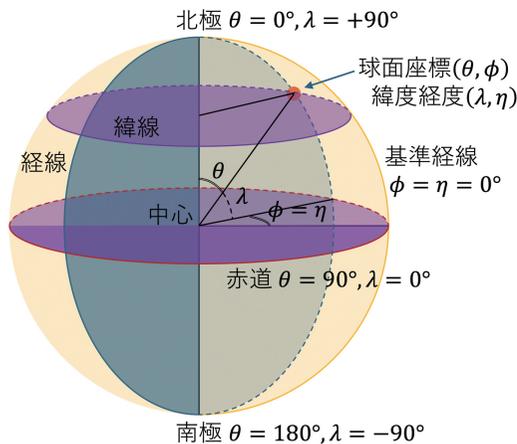


図2.1. 球面座標系

## §2. 球面座標系と球面上の点集合の幾何

### §2.1. 球面座標系

球面上の点の座標表示には、通常は球の中心を原点とし球の半径を長さ1とするxyz座標系がよく用いられる。球面とz軸の交点(0,0,+1)と(0,0,-1)をそれぞれ球の北極、南極とよぶことが多く、対応して球面とxy平面（平面z=0）との交線となる大円を赤道、赤道に平行な平面との交線となる円を緯線、赤道に直交して北極と南極を結ぶ半円を経線とよぶ。またここでは、x軸の正の部分と交わる経線を基準経線とよぶことにする。

ほかの座標表示としては、北極からの頂角を  $\theta$  ( $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ )、基準経線から反時計回りに計る偏角を  $\phi$  ( $0^\circ \leq \phi \leq 360^\circ$  または  $-180^\circ \leq \phi \leq +180^\circ$ ) とする球面座標や、地球と同様に赤道からの仰角を緯度  $\lambda$  ( $-90^\circ \leq \lambda = 90^\circ - \theta \leq +90^\circ$ )、前出の  $\phi$  を経度  $\eta$  ( $-180^\circ \leq \eta \leq +180^\circ$ ) とする緯度経度表示がよく用いられる (図2.1)。

球の半径が1であることから、球面座標や緯度経度表示からxyz座標系への変換は三角関数を用いて次のように表される：

$$\begin{cases} x = \sin \theta \cos \phi = \sin \lambda \cos \eta \\ y = \sin \theta \sin \phi = \sin \lambda \sin \eta \\ z = \cos \theta = \sin \lambda \end{cases}$$

逆変換は逆三角関数の主値を利用して次のようになる：

$$\begin{cases} \theta = \cos^{-1} z \\ z = \pm 1 \text{ のとき } \phi = 0^\circ \\ z \neq \pm 1 \text{ のとき } \begin{cases} x > 0 \text{ のとき } \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ x = 0 \text{ のとき } \phi = (\text{sgn } y) 90^\circ \\ x < 0 \text{ のとき } \phi = 180^\circ + \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{cases} \end{cases}$$

## § 2.2. 球面上の点集合の幾何

以下、3次元球の球面をS、S上の有限個の点の集合 (以下、有限点集合) をX、Xの点の個数をNとする。球面上の2点間の距離は測地距離すなわち2点を通る大円弧の短い方の弧長を測るものとする。

一般に3次元空間の集合Mについて、Mに含まれる任意の2点を結ぶ線分がまた必ずMに含まれるとき、Mは凸集合であるという。Mが、いくつかの平面で囲まれる、すなわちそれらの平面が定める半空間の共通部分であるとき、Mは凸集合となり、Mは凸多面体となる。また3次元空間の集合Mに対して、Mを含む凸集合で最小のもの、すなわちMを含むすべての凸集合の共通部分を、Mの凸包とよぶ。Mが有限個の点の集合であるときは、凸包の最小性から、Mの凸包はMを含むすべての半空間の共通部分となることから、Mを含み、Mの一部の点を頂点とする凸多面体となることがわかる。一般にはこの凸多面体の面はすべて三角形になる。

球面S上の有限点集合Xについては、Xの凸包によってXの点を頂点とする凸多面体Pが与えられる。さらにXの点が球面S上にあることから、PはSに内接することになる ([3] pp.22-25、[4] pp.1-2、[5] pp.273-291、[6] pp.20-24も参照)。

球面S上の有限点集合Xの点 $x_i$ について、 $x_i$ からの距離より他のXの点 $x_j$ からの距離が大きいようなS上の点 $y$ の全体 $V_i$ を、点 $x_i$ のボロノイ領域とよぶ (ボロノイ細胞あるいは[7]ではボロノイ多角形とも)。 $V_i$ の和は球面S全体に一致することから、 $V_i$ の集合を球面SのXに関する球面ボロノイ図あるいは球面ボロノイ分割とよぶ ([8] pp.108-110を参照)。各ボロノイ領域 $V_i$ は球面上の多角形となり、隣り合うボロノイ領域が共有する球面上の円弧をボロノイ辺、接続するボロノイ辺が共有する端点をボロノイ点とよぶ。各ボロノイ辺はそれを共有するボロノイ領域に対応するXの2点を結ぶ線分の垂直二等分線となる。隣り合うボロノイ領域に対応するXの点を互いに結ぶ線分の全体は、また球面Sを分割する図形となり、これをSのXに関する球面デロネー分割、あるいは一般には球面三角形への分割となることから、球面三角形分割とよぶ。Xの凸包Pを、Sの中心からSへ投影すると、XのS上での球面ドロネー分割に一致することが知

られている ([9] §1参照) ことから、球面ドロネー分割は凸包から求めることができる。

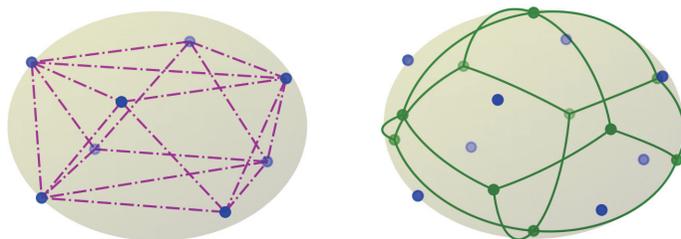


図2.2. 球面上の点集合（青丸）に対する凸包と球面ポロノイ図の例

### § 3. 規則的な配置の例

#### § 3.1. 正多角形に基づく凸多面体の頂点配置

凸多面体とは凸な多面体、つまりいくつかの面で囲まれた空間領域のことであり、凸多面体の代表といえばプラトンの正多面体 (§ 3.1.1) だが、正多面体はすべての辺の長さ、つまり隣接頂点間距離が等しいうえ、頂点配置の対称性が高く、頂点集合の重心が外心および内心に一致するため、外接球面上に均等すなわち等間隔に頂点が配置しているといえる。同様に外接球面をもつ、つまり球面に内接する凸多面体から、球面上に均等に配置する点集合がえられるのではないかと、ごく自然に発想される。本節では、正多角形に基づく凸多面体について、[4]、[10]、[11]、[12]を元に概観する。

##### § 3.1.1. 正多面体

プラトンの正多面体 ([10]p.2) あるいはプラトンの立体 ([11]p.53) は、「互いに合同な1種類の正多角形の面で囲まれた多面体」であり、正四面体、正八面体、正六面体（立方体）、正二十面体、正十二面体の5種類が存在することはよく知られている。また、いずれも次の3つの性質をもち、これら3つの性質をもつ凸多面体がプラトンの正多面体のほかに存在しないことも知られている ([10]pp.2-5) :

- ① 有限個の面で囲まれた凸多面体である。
- ② すべての面は互いに合同な正多角形である。
- ③ 各頂点のまわりの面から構成される角錐は互いに合同な正多角錐である。

これらの性質から次の3つの性質をもつこともわかる (⑤⑥は[4]p.22を参照 (証明なし)) :

- ④ すべての辺の長さが等しい。
- ⑤ 内接球をもつ = 球に外接する、つまりすべての面に接する球面が存在する。
- ⑥ 外接球をもつ = 球に内接する、つまりすべての頂点を通る球面が存在する。

性質④と⑥から、正多面体の頂点を外接球に配置すれば、隣接点間距離が等しく、対称性の高い、すなわち「等間隔」な球面上の点配置が得られることがわかる。ただし正多面体は5種しかなく、頂点数は4, 6, 8, 12, 20点と少ないため、球面配置への利用は限られる。正多面体の各面を何重にも正則三角形分割して分点を増やすことも考えられるが、任意個数の均等かつ満遍ない配置を目指すのは難しい。

### §3.1.2. 正多角柱、正多角錐、正多角反柱

正多角柱と正多角錐は小中学校の数学でも学習する内容であるが、いずれも正多角形を底面とし、それと平行で合同な上面をもつ柱体を正多角柱、底面の中心から底面に垂直に上方にとった1点と底面の各頂点をつないだ錐体を正多角錐とよぶ。正多角反柱(図3.1)は、正多角柱の上面を底面に対して、底面の隣接2頂点間の中心角の半分だけ回転させ、上面の各頂点とそれに最も近い底面の2頂点をつないでえられる立体である。いずれも底面の種類だけ、つまり無限種類存在する。

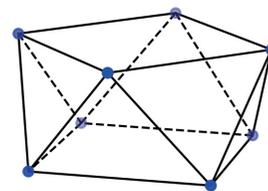


図3.1. 正方形反柱

一般には正多角柱の側面は互いに合同な長方形、正多角錐と正多角反柱の側面は互いに合同な二等辺三角形となるが、高さを調整して、3以上の任意の $n$ について、側面が正方形となる正 $n$ 角柱や、側面が正三角形となる正 $n$ 角反柱をえることができる。側面が正三角形となる正 $n$ 角錐は、 $n=3,4,5$ の場合のみである。特に、側面が正方形となる正四角柱は立方体、側面が正三角形となる正三角反柱は正八面体、側面が正三角形となる正三角錐は正四面体である。側面が正方形となる正 $n$ 角柱で $n=3$ ,  $n \geq 5$ の場合と、側面が正三角形となる正 $n$ 角反柱で $n \geq 4$ の場合、2種の正多角形の面で囲まれた多面体となり、次の準正多面体に含まれる。正四角錐と正五角錐は準正多面体の条件には合わないが、後に紹介する整面凸多面体に含まれる。

正多角柱と正多角反柱、正多角錐はいずれも、その高さによらず、球に内接する(さらに高さを調整すれば内接球をもつ)が、頂点が球面上で2つの緯線上に集中するため、一般には均等な点配置とはいえない。

### §3.1.3. 準正多面体、アルキメデスの立体

準正多面体は「数種類の正多角形の面で囲まれた多面体」であって、次の3つの性質をもつ([12]p.11, [13]):

- ① 有限個の面で囲まれた凸多面体である。
- ② a すべての面は正多角形である(互いに合同とは限らない)。
- ③ b 各頂点のまわりの面から構成される角錐は互いに合同である(正多角錐とは限らない)。

プラトンの正多面体と正多角柱、正多角反柱もこれらの性質をもつが、それらを除けば、また鏡像を同種と数えれば、ほかには13種類しか存在しないことが知られている([10]p.86, [12]p.11, [13])。この13種類の準正多面体は「アルキメデスの多面体」([4]p.19, [10]p.86)あるいは「アルキメデスの立体」([11]p.79, [12]p.11)として知られており、立方八面体(図3.2)や二十面十二面体などが含まれる。

上の3つの性質から④と⑥が導かれる(⑥は[4]p.22を参照(証明なし))ことから、正多面体と同様に、準正多面体の頂点を外接球に配置すれば、「等間隔」な球面上の点配置が得られることがわかる。ただしアルキメデスの立体も13種しかなく、頂点数も12, 24, 30, 48, 60, 120点のみで、正多面体と同様に球面配置への利用は限られる。

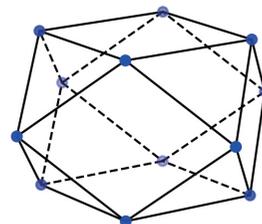


図3.2. 立方八面体

### §3.1.4. 準正多面体の双対多面体、カタランの立体

一般に凸多面体 $P$ の双対多面体は、 $P$ が空間の原点を含むとき、 $P$ のすべての点 $y$ に対して内積の値が1以下 $\langle x, y \rangle \leq 1$ となる点 $x$ の全体がなす凸多面体と定義される ([3] p.42)。正四面体の双対多面体は正四面体自身、正八面体と正六面体（立方体）は互いに双対、正二十面体と正十二面体も互いに双対である。また正 $n$ 角柱 ( $n \geq 3$ ) の双対多面体は2つの正 $n$ 角錐を底面で貼り合わせたもの、正 $n$ 角反柱と正 $n$ 角錐はそれぞれ自身と双対である。

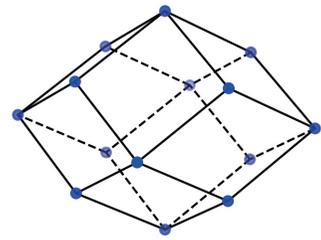


図3.3. 菱形十二面体

準正多面体の双対多面体は「準正多面体の各頂点における外接球への接平面で囲まれた多面体」([10]p.107)として作られることとなり、③bより「互いに合同な1種類の多角形（正多角形とは限らない）の面で囲まれた多面体」([10]p.107)となって、次の3つの性質をもつ：

- ① 有限個の面で囲まれた凸多面体である。
- ②  $b$  すべての面は互いに合同である（正多角形とは限らない）。
- ③a 各頂点のまわりの面から構成される角錐は正多角錐である（互いに合同とは限らない）。

このうち「アルキメデスの立体」の双対多面体は「カタランの立体」とも呼ばれ、鏡像を同種と数えれば、「アルキメデスの立体」と同じく13種類存在する ([11]pp.367-369)。例えば、立方八面体の双対として菱形十二面体（図3.3）、二十面十二面体の双対として菱形三十面体がある（立方体も菱形六面体とよばれ、正八面体と双対である）。

上の3つの性質から⑤は導かれる ([4]p.22を参照（証明なし））が、外接球をもつとは限らず、また菱形十二面体と菱形三十面体を除いては辺の長さも一定ではないので、カタランの立体の頂点配置の球面への投影から「等間隔」な球面上の点配置を得るのは難しい。

### §3.1.5. 凸三角面体

すべての面が正三角形である凸多面体は、凸三角面体 ([11]pp.74-75)あるいはデルタ多面体 ([12]p.11)とよばれる。すべての面が合同な正多角形である凸多面体は、正多面体と凸三角面体のみであり、正多面体（正四面体、正八面体、正二十面体）でない凸三角面体は5種類のみであることが知られている ([11]pp.74-75、[12]p.11,21-23)。

凸三角面体はすべての面が正三角形であることから、以下の性質を満たすことがわかる：

- ① 有限個の面で囲まれた凸多面体である。
- ② すべての面は互いに合同な正多角形である。
- ④ すべての辺の長さが等しい。

これらのことから、正多面体でない凸三角面体は、アルキメデスの立体でもカタランの立体でもない。また外接球はもたない（おそらく内接球もたない）。また頂点数も少なく（5, 7, 8, 9, 10個）、やはり球面配置への利用は限られる。

### §3.1.6. 整面凸多面体

すべての面が正多角形である凸多面体は、整面凸多面体 regular-faced convex polyhedron ([13])あるいは、これらをすべて列挙したZalgallar[14]にちなんで、関口[12]によって「ザルガラー（Zalgallar）多面体」とよばれている ([12]p.13)。一松[10]p.122には「ザラガール多面体」

との記述があるが、この整面凸多面体を指しているものと思われる。Zalgallar[14]やJohnson[15]によって、正多面体、正多角柱、正多角反柱、準正多面体を除いて、また鏡像は同種と数えて、92種類しかないと示されている。ただし[15]は古典的・経験的な方法で構造的に列挙したのに対して、[14]は計算機支援によってこの92種類のリストで尽くされることを証明している。[12]、[13]、[16]などに投影図や頂点座標データがあるため、参照されたい。

整面凸多面体は次の性質を満たすものとして定義される ([12]p.13) :

- ① 有限個の面で囲まれた凸多面体である。
- ②a すべての面は正多角形である (互いに合同とは限らない)。

各頂点のまわりの面から構成される角錐は、正多角錐でなくても、互いに合同でなくてもよい。これらのことから、整面凸多面体には正多面体、正多角柱、正多角反柱、正四角錐、正五角錐、アルキメデスの立体と凸三角面体が含まれるが、カタランの立体は含まれない。また、一般には外接球も内接球も持たないため、この頂点配置そのものの球面配置への利用も限られるが、満遍なく配置するための足掛かりとして、例えば後述の配置調整の初期値として、利用することも考えられる。

### § 3.2. 球面螺旋線に基づく配置

球面螺旋線は円筒面を進む螺旋線を、回転軸に垂直に回転軸上に中心を持つ球面へ射影した曲線である。すなわち、北極から見て一定に反時計回りまたは時計回りに進みながら、北極から南極を結ぶ球面上の曲線である。球面螺旋線の周回間の間隔はほぼ一定なので、その間隔に合わせて螺旋線上に等間隔に点を配置すると、ほぼ均等な配置が得られるが、球面螺旋線に沿った長さを図るには複雑な逆関数計算が必要となり実用的でない。本稿では、Swinbank and Purser [17]による“spherical Fibonacci grids” (球面フィボナッチ格子) と、Rakhmanov, Saff and Zhou [18]による“spherical generalized spirals” (球面一般化螺旋線) を紹介する。どちらも点の個数をほぼ任意に指定することができる。

#### § 3.2.1. Spherical Fibonacci grids (球面フィボナッチ格子)

Swinbank and Purser [17]は全地球表面の大气シミュレーションのための計算格子として、ヒマワリの種子の配置などに見られる平面のフィボナッチ格子を球面に貼り付ける形で、spherical Fibonacci grids を提案した。名称の通り配置は格子状となるが、フィボナッチ数列に関係する黄金比を用いて生成される螺旋線として与えられる。 $M$ を自然数、 $N=2M+1$ とし、黄金比  $\phi = (\sqrt{5} + 1)/2$  を用いて、 $k = -M, -M+1, \dots, -1, 0, +1, \dots, M-1, M$ について

$$\begin{cases} z_k = \frac{2k}{2M+1} = \frac{2k}{N} \\ \theta_k = \cos^{-1} z_k \\ \phi_k = \frac{2\pi k}{\phi} \end{cases}$$

によって各点の座標  $(\theta_k, \phi_k)$  ( $k = -M, \dots, -1, 0, +1, \dots, M$ ) を与える (図3.4)。この配置では両極には点が配置されないが、赤道と基準経線との交点に必ず1点が配置され、 $x$ 軸に関して $180^\circ$ 回転対称で、北半球と南半球に同数が配置される。点数 $N$ は奇数に限定されているが、赤道上への点の配置を諦めて、例えば $\ell = k + M + 1$ とし、上の第1式を $z_\ell = (2\ell - N - 1)/N$  ( $\ell = 1, 2, \dots, N$ ) などと変更すれば、 $N$ が偶数の場合にも拡張できる。また次節の例と同様に $z_\ell = (2\ell - N - 1)/(N - 1)$  ( $\ell = 1, 2, \dots, N$ ) とすれば、両極にも点を配置できる。

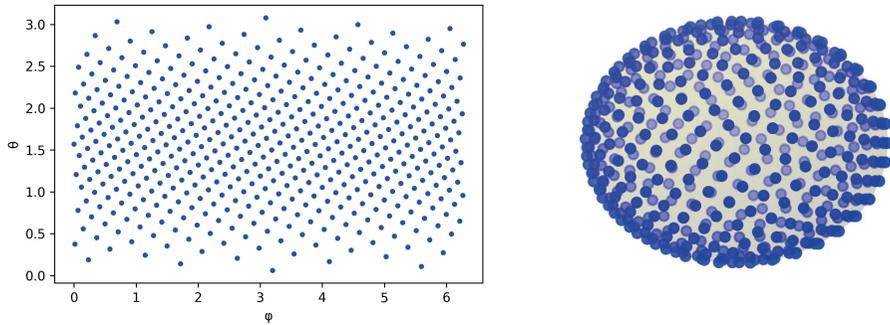


図3.4. 球面フィボナッチ格子の例、点数N=501

### § 3.2.2. Spherical generalized spirals (球面一般化螺旋線)

Rakhmanovら[18]は、任意個数の点で静電エネルギーの総和が最小となるような配置の近似解として、球面上の螺旋様曲線 generalized spirals を提案した。 $N$ を任意の自然数、 $C$ を適当な定数として、 $k = 1, 2, \dots, N-1, N$ について

$$\begin{cases} z_k = -1 + \frac{2(k-1)}{N-1} = \frac{2k-1-N}{N-1} \\ \theta_k = \cos^{-1} z_k \\ \phi_k = \begin{cases} 0 & (k=0, N) \\ \left( \phi_{k-1} + \frac{C}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sin \theta_k} \right) \pmod{2\pi} & (k=1, 2, \dots, N-1) \end{cases} \end{cases}$$

によって各点の座標  $(\theta_k, \phi_k)$  ( $k=1, 2, \dots, N$ ) を与える (図35)。[18]では  $C=3.6$  の場合が例として与えられており、[19]では最良詰込を考慮した場合として  $C = \sqrt{\frac{8\pi}{\sqrt{3}}} \approx 3.809$  が提案されている。この配置では両極にも必ず点が配置され、 $N$ が奇数のときは赤道上に1点が配置される。また北半球と南半球に同数が配置されるが、一般には  $\phi_k$  は等間隔にならず、配置はx軸に関して回転対称とは限らないが、例えば  $k > N/2$  のとき  $\phi_k$  の漸化式で  $\theta_k$  を  $\theta_{k-1}$  に変更すれば、対称な配置をえることもできる。

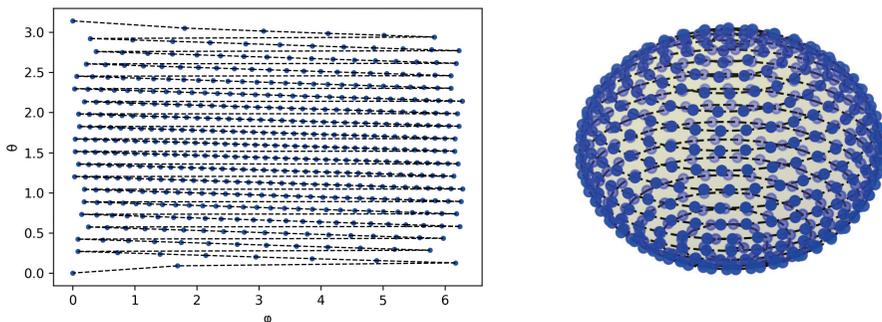


図3.5. 球面一般化螺旋線の例、点数N=501、係数C=3.6

### § 3.3. 球面座標格子に基づく配置

球面座標格子の格子点配置はすでに見たとおり、両極に集中しすぎる配置となり、均等な配置とはならないが、両極を避けて配置するか、緯度ごとに緯線上の点数を調整すれば、より均等な配置がえられると考えられる。前者の例として Kageyama and Sato [20]による“Yin-Yang grids”（陰陽格子）を、後者の例として Freeden, Gervens and Schreiner [21]の著書にある“Equidistributed sequences”（等間隔点列）の例と、山口・大中[22]の方法を紹介する。

#### § 3.3.1. Yin-Yang grids (陰陽格子)

Kageyama and Sato [20]は、地球内部のシミュレーション等のために、2枚の平面格子を球面上で噛み合うように貼り合わせた計算格子を提案した。彼らはこの一方を“Yin grid”（陰格子）、もう一方を“Yang grid”（陽格子）とよんでいる。基本的な考え方は図3.6のように、緯度 $\pm 45^\circ$ 以内、経度 $\pm 135^\circ$ 以内の範囲の格子を Yin grid とし、Yin grid をz軸まわりに $180^\circ$ 、x軸まわりに $90^\circ$ 回転したものを Yang grid として、両者を球面上で貼り合わせて作成するもので、実際にはこの緯度経度範囲を基本としつつ、球面上の合同な図形を適当な「のりしろ」で貼り合わせる形になるように、各格子の緯度経度範囲を調整する。詳細は[20] Figure 4 を参照のこと。「のりしろ」部分はシミュレーションにおいても「のりしろ」の役割を担い、計算モデルに両格子間の連続性条件を組み込むことで、各格子では両極を除いた範囲のみで計算し、全体としては球面全面での結果を得ることができる。

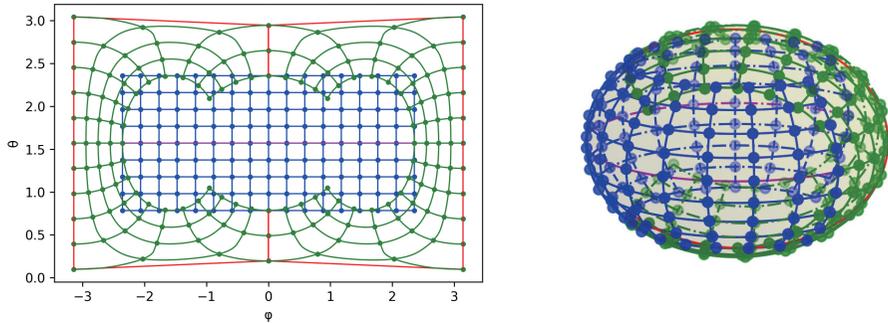


図3.6. 陰陽格子の基本形、青色が陰格子、緑色が陽格子

どちらの格子も間隔は $\pi/16$ 、点数は各153

(左図では $\phi = -\pi$ の点は $\phi = \pi$ の点と同一)

実際には両格子が球面上で合同な図形となるよう形状を調整する

#### § 3.3.2. Equidistributed sequences (等間隔点列)

Freeden, Gervens and Schreiner [21]の7.1節“Low discrepancy method”では、球面上の十分滑らかな関数の数値積分の重み付けがすべて等しくなるような分点列を“equi-distribution”とよび、そのいくつかの例を示している。ここではそのうち規則的な配置で与えられている2例の構成法を紹介する。いずれも各緯線に配置する点数を調整して球面全体での配置の均等性を改善している。以下、数式中の記号  $[x]$  はいわゆるガウス記号で、実数  $x$  を超えない最大の整数を表す。

例3.1 [[21]pp.171-172, Example 7.1.9] (図3.7)

適当な自然数  $\gamma$  を設定し、両極間に等しい緯度間隔  $\delta = \pi / \gamma$  で  $(\gamma - 1)$  本の緯線を引いて、 $i$  番目の緯線上には等間隔に  $m_i$  個の点を配置する。ただし、0番目を北極、 $\gamma$  番目を南極として、

$$m_i = \begin{cases} \left\lfloor \frac{2\pi}{\cos^{-1} \frac{\cos \delta - \cos^2 i \delta}{\sin^2 i \delta}} \right\rfloor & (i = 1, 2, \dots, \gamma - 1) \\ 1 & (i = 0, \gamma) \end{cases}$$

とする。各緯線では1番目の点と  $m_i$  番目の点の間の二等分線が基準経線に一致するように、つまり1番目の点を基準経線から  $\frac{2\pi}{m_i} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{m_i}$  離れた位置に置く。

このとき全点数  $N(\gamma)$  は次の式で与えられる ([21]pp.172-173, Lemma 7.1.10) :

$$N(\gamma) = 1 + \sum_{i=1}^{\gamma-1} m_i + 1 \leq 2 + \frac{4}{\pi} \gamma^2$$

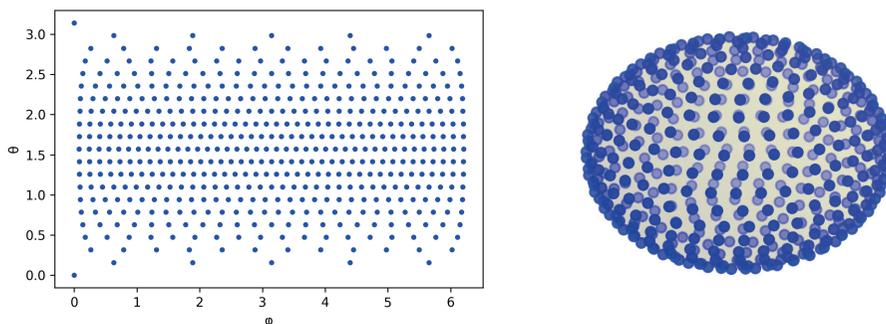


図3.7. 等間隔点列の例3.1 [[21] Example 7.1.9]による配置の例、 $\gamma=20$ 、点数 $N=501$

例3.2 [[21]pp.173-174, Example 7.1.11] (図3.8)

上の例1で  $m_i$  の定義を次に差し替える :

$$m_i = \begin{cases} 4i & (0 < i \leq \frac{\gamma}{2}) \\ 4(\gamma - i) & (\frac{\gamma}{2} < i < \gamma) \\ 1 & (i = 0, \gamma) \end{cases}$$

このとき全点数  $N(\gamma)$  は次の式で与えられる ([21]pp.174) :

$$N(\gamma) = 2 + 4 \left\lfloor \frac{\gamma + 1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{\gamma}{2} \right\rfloor$$

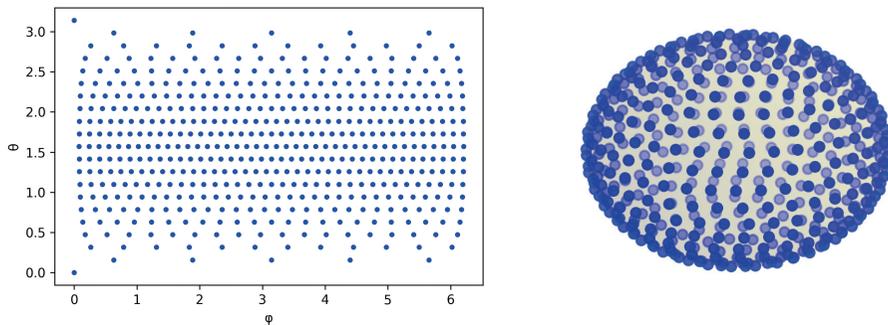


図3.8. 等間隔点列の例3.2 [[21] Example 7.1.11]による配置の例、 $\gamma=20$ 、点数 $N=401$  ([21]p.173, Fig.7.1.2では、各緯線の1つ目の点が基準経線に置かれている。)

### §3.3.3. 山口・大中の方法

大中幸三郎と山口達之が山口の修士論文[22]の中で、球面における代用電荷法の拘束点の配置法として、generalized spirals より適したものとして提案した方法である。前節の例の発想をより突き詰めたものとも言えるが、彼らとしては球面座標格子点から「間引く」という発想だったようである。各緯線に配置する点数をその長さに応じて決め、各緯線上には等間隔に点を配置するものの、隣り合う緯線間で点が同じ経線上に並ばないように経度の差の調節を行うものである。

より具体的には、前節の例1と同様に、適当な自然数 $\gamma$ を設定し、両極間に等しい緯度間隔 $\delta = \pi/\gamma$ で $(\gamma - 1)$ 本の緯線を引いて、 $i$ 番目の緯線上には等間隔に $m_i$ 個の点を配置する。ただし、0番目を北極、 $\gamma$ 番目を南極とし、適当な1以上の定数 $c$ を決めて、

$$m_i = \begin{cases} \left\lceil \frac{\pi}{\sin^{-1}\left(\frac{c \sin(\pi/2\gamma)}{\sin(i\pi/\gamma)}\right)} + 0.5 \right\rceil & (i = 1, 2, \dots, \gamma - 1) \\ 1 & (i = 0, \gamma) \end{cases}$$

とする。経度方向は、 $i = \lceil \gamma/2 \rceil$ 番目の緯線（赤道または北半球で最も南の緯線）では1番目の点を基準経線に置くが、その他では南北に隣り合う緯線との間で互いの点ができる限り離れるように、1番目の点の経度を調節する（図3.9）。調節の手順は[22]で詳細に説明されている。また[22]では、隣接する緯線に置く点数 $m_i$ が互いに素となるような調節についても述べられているがここでは割愛する。

定数 $c$ は、隣接点間の距離と隣り合う緯線間の距離の比を表す。隣り合う緯線間の距離は $L = \sin(\pi/2\gamma)$ 、 $i$ 番目の緯線上の隣接点間の距離は $T = 2 \sin(i\pi/\gamma) \sin(2\pi/2m_i)$ であり、これが隣り合う緯線で隣接する点の間の距離 $cL$ と等しいとして、その等式から四捨五入して上の $m_i$ の式を得る。より良い $c$ の値は[22]の中で数値的に検討され、 $1.15 \leq c \leq 1.25$ が良いとされている。

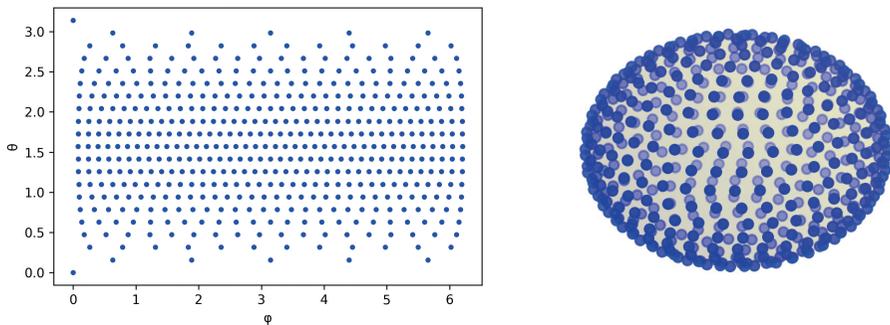


図3.9. 山口・大中[22]の方法による配置の例、 $\gamma=20$ 、点数 $N=427$   
 (隣り合う緯線の点数が互いに素となるような調節は行っていない)

## § 4. 不規則な配置と配置の最適化

本節では前節のような規則性のない配置について検討する。といっても、まったく規範がなくっては配置しようがないので、ここでは乱数（計算機による擬似乱数）を用いたランダムな配置生成と、数理最適化による配置調整を取り上げる。

### § 4.1. 乱数を用いたランダム配置

球面上に一樣にほぼ均等にランダムに配置する点集合は、互いに独立に球面上一樣分布に従って生成された点の列、つまりポアソン点列の生成によることになる。ただし球面上一樣分布は、§ 2.3で触れたことにも関連するが、経度方向は一樣分布でよいが、両極への点の密集を避けるため、緯度方向には一樣分布とはならない。ここでは球面上一樣分布に従う点の代表的な生成法として、3次元正規乱数を用いる方法と、緯度方向に逆関数法を用いる方法を紹介する。いずれにしても、ポアソン点列は球面上均一ではあるが等間隔とはならず、点配置の重心も球の中心に一致しないので、何らかの配置調整が必要といえる。

#### § 4.1.1. 3次元正規乱数を用いる方法

伏見[23]pp.96-98で言及されている方法である。互いに独立な標準正規乱数の3つ組  $(X, Y, Z)$  を生成して  $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$  とおくと、 $(X, Y, Z)$  の結合確率密度関数は

$$f(X, Y, Z) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3}} e^{-R^2/2}$$

となって、中心からの距離  $R$  だけに依存し、緯度経度に依らず一定である。そのため、 $R$  で正規化して球面に引き戻せば、 $\left(\frac{X}{R}, \frac{Y}{R}, \frac{Z}{R}\right)$  は球面上一樣分布に従う確率変数となる。

#### § 4.1.2. 緯度方向に逆関数法を用いる方法

種村[7]付録A.2でも述べられている方法で、逆関数法については[23]pp.53-56に詳しい。球面座標で考えた場合、すでに触れたように、両極への点の密集を避けるため、緯度方向について

は一様分布ではなく、緯線の長さ $\cos \lambda = \sin \theta$  ( $0^\circ \leq \theta = 90^\circ - \lambda \leq 180^\circ$ ) に比例する確率分布を用いる必要がある。その確率分布の累積分布関数は

$$F(\theta) = P(\Theta \leq \theta) = \frac{\int_0^\theta \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi \sin \theta d\theta} = \frac{1 - \cos \theta}{2} \quad (0 \leq \theta \leq \pi = 180^\circ)$$

となり、その逆関数は

$$F^{-1}(u) = \cos^{-1}(1 - 2u) \quad (0 \leq u \leq 1)$$

であるので、0以上1未満の値をとる一様乱数 $U$ から  $\Theta = \cos^{-1}(1 - 2U)$  によって生成される $\Theta$ が、求める緯度方向の乱数となる。これと経度方向の0以上 $2\pi$ 未満の値をとる一様乱数を組み合わせて、球面上一様分布がえられる。

逆関数法を用いる方法で生成したランダム配置の例を図4.1に示す。球面上ほぼ均一にランダムに点が配置している様子がわかる。

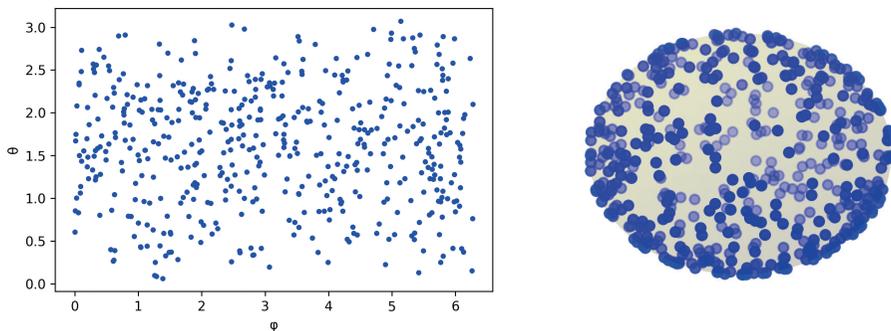


図4.1. 逆関数法を用いたランダム配置の例、点数 $N=500$

#### § 4.2. 数理最適化による配置調整

前節で述べたように、ポアソン点列による配置は球面上均一にはなるが等間隔とはならない。そこでポアソン点列で初期配置を与えて、何らかの数理最適化によって配置の調整を試みる事が考えられる。ここでは先行研究等から代表的と思われる方法3つを紹介する。

ひとつめは、「Tammesの問題」としても知られる ([7], [24])、全点間距離の最小値  $\delta = \min_{i < j} d(x_i, x_j)$  を最大化する配置を求める問題であり、[7]では「最適点配置」「ミニマクス最適配置」などとよばれている。この問題の解は、点数 $N \leq 12$ では厳密解が知られており、 $13 \leq N \leq 32$ では最適解の予想のみが与えられている ([4]pp.163-177、[7]など参照)。

ふたつめは、「Thomson問題」としても知られる、全点間の静電ポテンシャルの総和  $E = \sum_{i < j} \psi(x_i, x_j)$  を最小化する配置を求める問題であり、[7]では「最小相互作用エネルギー配置」とよばれている。この問題の解としては、[24]に $N \leq 65$ の場合の最適解が与えられているのみである ([19]も参照のこと)。

最後に、種村[7]の「球面調整法」を紹介する。詳細は割愛するが、ポアソン点列で与えられた初期配置 ([7]では「Poissonランダム配置」とよんでいる) から、球面ポロノイ図の各領域

が等辺長多角形に近づくように点の配置を微調整していくものである。[7]ではいくつかの点数  $N$  について実証が行われ、特に  $N=12$  の場合には正十二面体を、 $N=32$  の場合には一部不等辺の切頭二十面体（サッカーボール）を再現することが示されている。また[7]には球面調整法によって、球面ポロノイ図や球面ドロネー分割の辺長の総和の小さな配置が得られるとも記されている。

## § 5. 球面上の配置の均等性の指標

ここまで球面上の均等配置について、§ 3の各節では多面体の頂点配置や、球面螺旋線や球面座標格子による規則的な配置法を、§ 4.1では乱数を用いたランダム配置を、§ 4.2では数理解最適化による配置調整を、それぞれ成書や先行研究からの引用を元に紹介した。ただし興味深いことに、立方体の頂点配置は球面上均等ではあるが、Tammesの問題やThomson問題の最適解とならない ([7], [24])。また、特に  $N \geq 12$  ではTammesの問題とThomson問題で最適解が異なることも知られている ([24])。つまり、規則的な配置に対しても配置調整が有効となる可能性が高く、また配置調整で最適化する目的関数が異なれば最適解も異なる場合がある。

配置調整の目的関数としては、§ 4.2で取り上げた全点間距離の最小値や全点間の静電ポテンシャルの総和などの他にも、いくつか計算幾何学的に計算可能な指標が考えられる。その一部についてはすでに[7], [19], [25]などでも議論されているが、改めて指標の特徴などを比較検討するために、計算可能な指標として考えられるものを列挙する。以下、§ 2.1と同様に、球面を  $S$ 、球面上に配置した点の集合を  $X$ 、また点の個数を  $N$  とする。球面上の2点間の距離は測地距離すなわち2点を通る大円弧の短い方の弧長を測るものとする。

$$(1) X \text{のすべての異なる2点間の距離の最小値 } \delta = \min_{i=1, \dots, N} \min_{j>i} d(x_i, x_j)$$

これを最大化する配置を求める問題がTammesの問題であることは前述の通りだが、実は点集合の球面ドロネー分割（凸包を球面に投影したもの）の最小辺長に一致する。

$$(2) X \text{のすべての異なる2点間の静電ポテンシャルの和 } E = \sum_{i=1, \dots, N} \sum_{j>i} \psi(x_i, x_j)$$

これを最小化する配置を求める問題がThomson問題であることは前述の通り。精確には  $X$  のすべての点が球面上に拘束されていて、それらに等しく単位正電荷が置かれたときの、異なる2点間の静電ポテンシャル  $\psi(x_i, x_j) = \frac{1}{|x_i - x_j|}$  の総和となるが、静電ポテンシャルは2点間の距離に反比例するので、すべての点が互いに離れているほど、つまり互いにできるだけ均等に離れているほど、この値が小さくなる。

$$(3) X \text{の点から最も遠い球面上の点から、最も近い} X \text{の点までの距離 } \rho = \max_{y \in S} \min_{j=1, \dots, N} d(y, x_j)$$

被覆半径（covering radius）または mesh norm ともよばれる ([25]など参照)。実は、三角形のすべての頂点から最も遠い内点は三角形の外心であることから、球面ドロネー分割の各球面三角形の外接円半径の最大値に一致する。

$$(4) \text{Mesh-separation ratio } \gamma = \rho / \delta$$

(3)と(1)の比であり、球面ドロネー分割の正則性を表す指標であり、集合  $X$  の条件数ということもできる ([25]など参照)。  $\gamma$  が最大値と最小値の比となっていることを考えると、最大値や最小値を取る前の値、すなわち球面ドロネー分割の各球面三角形の外接円半径と最短辺長の

比を求め、それらの最小値を測ることも考えられる。

(5) 球面ポロノイ図や球面ドロネー分割の辺長の総和

前の2つは前述のように[7]において配置の指標に使われているが、その根拠として、[4]にこれらの量の理論的な下限が与えられていることがある。この下限に近い値であるほど、均等な配置といえるだろう。

(6) 球面ポロノイ図や球面ドロネー分割の辺長の分散

辺長のばらつきが小さいほど分割の均一性が高いといえる。

(7) 球面ポロノイ図や球面ドロネー分割の領域面積の分散

領域面積の総和は球面全体の面積と一致するので、面積のばらつきが小さいほど球面の等分割に近く、均等性が高いといえる。

(8) 点集合・球面ポロノイ点集合の重心と球中心の距離

正多面体の頂点集合の重心は外接球の中心に一致する。同様に配置の対称性の高い点集合ほど、重心が球中心に一致するものが多い。そのため、点集合重心が球中心に近いほど、配置の対称性が高いと考えられる。

## §6. おわりに

本稿では3次元球の球面上への均等な点配置の方法と評価指標について見てきたが、そもそもは山口・大中の方法（2003）と同様に、3次元球領域における偏微分方程式に対して数値計算法の一つである代用電荷法を適用する際の、拘束点と電荷点を球面上に均等に配置する方法を検討するところから始まった研究である。一方で本稿では、オイラーの多面体定理や回転対称性などの古典的な幾何学、球面調和関数などの解析的側面のほか、球面コードや球面デザインなどの球面上の代数的組合せ論などからの検討については、紙面の都合等のため割愛した。今後、これらの点も踏まえて、評価指標の間の関係性等の検討を経て、代用電荷法に有効な配置法の検討を進めたいと考えている。

## 参考文献

- [1] 谷口健男『FEMのための要素自動分割』（森北出版、1992）
- [2] Autodesk社Fusion <https://www.autodesk.com/jp/products/fusion-360/>（2024年8月22日閲覧）
- [3] 日比孝之『凸多面体論』共立出版、2022年
- [4] フェイエシュ・トート, L. / 樋口・種村 訳『配置の問題』みすず書房、1983年（原著第2版(1971)翻訳）
- [5] M.ドバークほか / 浅野 訳『コンピュータ・ジオメトリ』近代科学社、2010年
- [6] 杉原厚吉『計算幾何工学』培風館、1994年
- [7] 種村正美「球面上の最適配置の問題」統計数理 46 (1998), 359-381
- [8] 杉原厚吉『計算幾何学』朝倉書店、2013
- [9] M.Caroli et al., “Robust and Efficient Delaunay triangulations of points on or close to a sphere”, Research Report RR-7004, INRIA, (2009).
- [10] 一松 信『正多面体を解く』（新版）東海大学出版会、2002年
- [11] P.R.クロムウェル / 下川ほか 訳『多面体 新装版』数学書房、2014年（原著(1997)翻訳）
- [12] 関口 次郎『多面体の数理とグラフィックス』牧野書店、1996年

- [13] 小林 光夫 and 鈴木 卓治, 「正多角形を面にもつすべての凸多面体の頂点座標の計算」, 電気通信大学紀要 5 (1992), 147-184.
- [14] V. A. Zalgaller, “Convex polyhedra with regular faces” , Seminars in mathematics, Springer, 1969
- [15] N. W. Johnson, “Convex polyhedral with regular faces” , Canadian Journal of Mathematics 18 (1966) 169-200
- [16] 中田 真秀「正多面体、準正多面体、ザルガラー多面体、mxico」  
<https://people.freebsd.org/~maho/mxico/Tamentai.html> (最終更新2006年2月) 2023年4月閲覧
- [17] R.Swinbank and R.J.Purser, “Fibonacci grids: A novel approach to global modelling” , Q. J. R. Meteorol. Soc. 132 (2006) 1769-1793
- [18] E.A.Rakhmanov, E.B.Saff and Y.M.Zhou, “Minimal discrete energy on the sphere” , Mathematical Research Letters 1 (1994) 647-662
- [19] E.B.Saff and A.B.J.Kuijlaars, “Distributing many points on a sphere” , The Mathematical Intelligencer 19 (1997) 5-11
- [20] A.Kageyama and T. Sato, “ “Yin-Yang grid” : An overset grid in spherical geometry” , Geochem. Geophys. Geosyst. 5 (2004) Q09005
- [21] W.Freeden, T.Gervens and M.Schreiner “Constructive Approximation on the Sphere” (esp. Chap.7), Oxford UP, 1998, reprinted edition 2011.
- [22] 山口達之「球面における代用電荷法の拘束店の一様配置に関する研究」大阪大学修士論文 (2003) (指導教員：大中幸三郎)
- [23] 伏見正則『乱数』東京大学出版会, 1989年
- [24] T.Erber and G.M.Hockney, “Equilibrium configurations of N equal charges on a sphere” , Journal of Physics A 24 (1991) L1369-L1377
- [25] J.S.Brauchart and P.J.Grabner, “Distributing many points on spheres: Minimal energy and designs” , Journal of Complexity 31 (2015) 293-326

## 謝辞

本稿は、2023年12月8日に大阪大学数理・データ科学教育研究センター「AI・データ活用研究会 第62回」にて行った講演の記録（未出版）に、最近の動向を加筆したものである。上記講演を含む本研究は、科学研究費補助金（課題番号: 20K03729）の助成を受けている。最後に、本研究の元となる問題をご紹介くださった故・大中幸三郎先生（元・大阪大学准教授）に心より感謝する。

（元・教養部数学分野、現・大阪大学）