東京医科歯科大学教養部研究紀要第 52 号：7～24（2022）

弱い減衰項と生成項を持つ放物・放物型走化性方程式系の時間大域解

Global-in-time solutions to a parabolic-parabolic system for chemotaxis with weak degradation and production terms

中口 悦史
Etsushi Nakaguchi

要旨 本稿では有界領域におけるロジスティック型増殖項と非線形分泌項をもつ放物・放物型走化性方程式の L_p 空間解の時間大域存在について考える。筆者らの一連の研究により，L_p 空間における半線形放物型発展方程式の理論などを応用することで，増殖項と分泌項の次数の組がある範囲に含まれれば，すべての非負値の L_p 空間解が時間大域的に存在し有界であることが示された。本稿では，ラプラス作用素の L_p 空間における分数べきの定義域に関する議論など，解決の鍵となったポイントを中心に紹介する。

キーワード 走化性方程式，時間大域解，L_p 空間，解のアプリオリ評価，ラプラス作用素の分数べき

Abstract In this article we study the global existence of solutions to a parabolic-parabolic system for chemotaxis with logistic-type growth and nonlinear secretion in n-dimensional bounded domains. The series of works by the author and his colleagues show the global-in-time existence of bounded solutions in L_p spaces under certain relations between the degradation and secretion orders. This article reviews the series of their works including some keypoints on the domains of definition of fractional powers of Laplace operator.

Keywords Chemotaxis system, Global-in-time solutions, L_p spaces, a priori estimates of solutions, fractional powers of Laplace operators

1　問題設定と主結果

次の非線形放物型偏微分方程式系の初期値・境界値問題を考える：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \chi\nabla\cdot(u\nabla v) + f(u) & \text{in } \Omega\times(0,\infty), \\ \tau\dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - v + g(u) & \text{in } \Omega\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{E}$$

ここで $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域で，$\partial/\partial\nu$ で $\partial\Omega$ の外向き法線方向の微分を表す。空間次元 n は任意の自然数とし，係数 χ と τ は正定数とする。関数 $f(u)$ と $g(u)$ はともに $u \geq 0$ について滑らかな実関数で，μ を正定数，α と β を

$$\alpha > 1, \quad \beta > 0 \tag{1}$$

を満たす指数として，次の条件を満たすものとする：

$$\begin{cases} f(0) \geq 0, \\ u \geq 0 \text{ が十分大きいとき} \quad f(u) = u - \mu u^\alpha, \\ u \geq 0 \text{ のとき} \quad g(u) = u(1+u)^{\beta-1}. \end{cases} \tag{2}$$

方程式系 (E) はバクテリアコロニーのパターンダイナミクスを記述するモデルとして知られている [10]。特に $f(u) = 0$ かつ $g(u)$ が線形（(2) で $\alpha = \beta = \mu = 1$）の場合は，Keller-Segel 系の典型的な一例 [6] で，$n = 1$ のときは非負の解は必ず時間大域的に存在するが，$n \geq 2$ のときは有限あるいは無限時刻で爆発する解を構成できることが，すでに知られている（[4, 18, 24] など）。一方で $f(u) = u(1 - \mu u)$ かつ $g(u)$ が線形，つまり (2) で $\alpha = 2$ かつ $\beta = 1$ の場合は，$\chi\|u_0\|_{L^1}$ が大きくても（$n \geq 3$ では Ω が凸で μ が大きい場合のみ）時間大域解を構成できることが示されている [17, 25]。また $\tau = 0$ に限定した場合は，(2) で $\beta = 1$ かつ $\alpha > \max\{n/2, 2 - (1/n)\}$ の場合について，時間大域解の存在が示されている [23]。

筆者らは [13, 14] において，$g(u)$ を非線形に拡張することによって，一般に $\tau > 0$ かつ $n = 2, 3$ の場合，指数 α と β は関係式

$$\frac{2(n+4)}{n+6} < \alpha \leq 2, \qquad 0 < \beta < \frac{n+6}{2(n+2)}(\alpha - 1) \tag{3}$$

を満たすとき，$0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ を満たす指数 ε について，ヒルベルト空間 $H_2^{(n/2)-1}(\Omega) \times H_2^{(n/2)+\varepsilon}(\Omega) \subset L_n(\Omega) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ の中で有界な時間大域解を構成できることを示した。

一方で Xiang[26] は，Ω が凸でない場合も含めて，$\tau > 0$, $\beta = 1$ かつ，$n = 3$ のとき $\alpha > 2 + \frac{1}{9}$, $n > 3$ のとき $\alpha > n - 1$ の場合の，時間大域解について述べている。ただし，$n = 3$ のとき，[14] の結果を $\alpha > 2$ に延長できれば，[26] の結果を包含できることを注意しておく。

本稿では，任意次元において，ヒルベルト空間ではなくバナッハ空間 $L_p(\Omega) \times H_p^1(\Omega) \subset L_n(\Omega) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ の枠組み ($n < p < \infty$) を導入して，先行結果 [13, 14] の議論を任意次元へ拡張した結果 [15, 16] について述べる。

主結果は以下の通り。

定理 1 ([16, Theorem 1])**.** n は任意の自然数，指数 α と β は関係式 (1) と

$$\beta \leq 2, \quad \beta \leq \frac{\alpha}{2} \quad \text{かつ} \quad \beta < \frac{n+2}{2n}(\alpha - 1) \tag{4}$$

を満たすとする。このとき，

$$\max\{2, n, (\alpha - 2)n\} < p < \infty \tag{5}$$

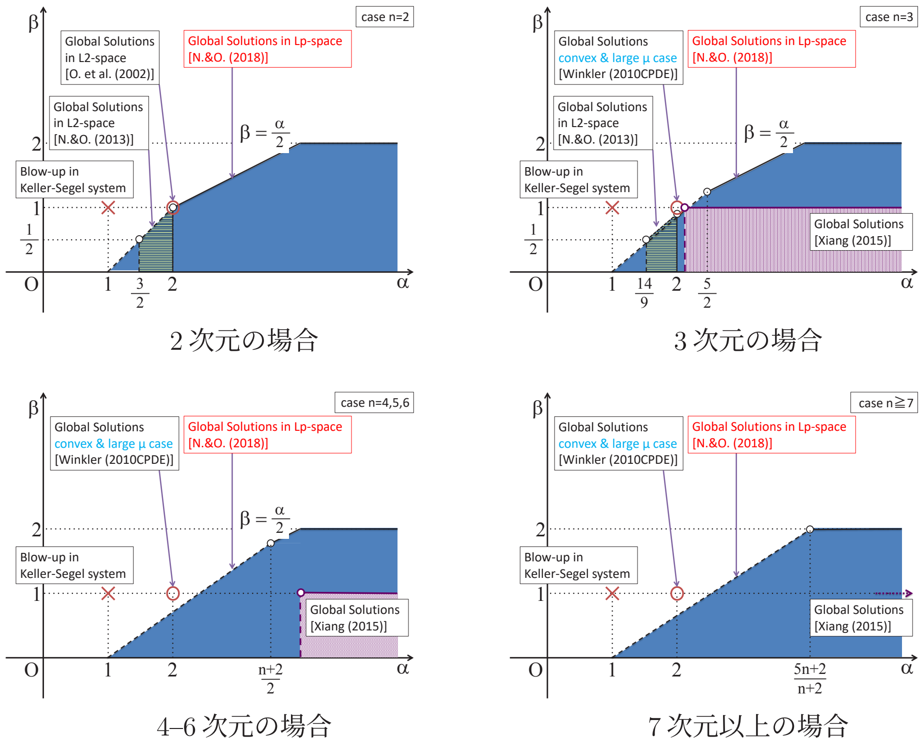

図 1: 方程式 (E) が L_p-時間大域解を有する (α, β) の範囲

を満たす任意の指数 p と，任意の非負の初期関数対 $(u_0, v_0) \in L_p(\Omega) \times H_p^1(\Omega) \subset L_n(\Omega) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ に対して，方程式系 (E) は関数空間

$$\begin{cases} 0 \le u \in \mathcal{C}([0,\infty); L_p(\Omega)) \cap \mathcal{C}((0,\infty); H^2_{p,N}(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0,\infty); L_p(\Omega)), \\ 0 \le v \in \mathcal{C}([0,\infty); H^1_p(\Omega)) \cap \mathcal{C}((0,\infty); H^3_{p,N}(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0,\infty); H^1_p(\Omega)) \end{cases} \tag{6}$$

に属する一意な時間大域解 (u, v) を有する。ただし $p' = \frac{p}{p-1}$ 。さらにこの解は，$\psi(\cdot)$ を適当な増加関数として，

$$t \ge 0 \text{ のとき} \quad \|u(t)\|_{L_p} + \|v(t)\|_{H^1_p} \le \psi\left(\|u_0\|_{L_p} + \|v_0\|_{H^1_p}\right) \tag{7}$$

を満たす。 ◇

ここまでに現れた (α, β) の範囲を図示すると図 1 のようになる。定理 1 の結果 [16] は，$n \ge 4$ のときは上述の先行結果 [14, 26] の範囲を完全に包含しているが，$n = 3$ のときは完全には包含できていない。また最近 Zhuang ら [29] が，$0 < \beta < \alpha - 1$ のとき古典解の時間大域存在を示している。これらと本稿の主結果との相違点等については今後の検討を俟つ。他の最近の関連研究として [1, 2, 7, 8, 9, 12, 21, 22] を挙げておく。

以下，第 2 節でラプラス作用素の分数べきの定義域の特徴付けに関する注意を述べたあと，第 3 節で時間局所解の存在定理を示す。続いて第 4 節で解のアプリオリ評価を行い，それを元に第 5 節で解の時間大域存在を証明する。

なお本稿では，$H_p^s(\Omega)$ で次数 $s>0$，指数 $1\le p\le\infty$ のソボレフ空間を表す。また，$s>1+\frac{1}{p}$ のとき $H^s_{p,N}(\Omega)$ を，$s>2+\frac{1}{p}$ のとき $H^s_{p,N^2}(\Omega)$ を，それぞれ以下のように定義する：

$$
\begin{aligned}
&s>1+\frac{1}{p} \text{ のとき} \qquad H^s_{p,N}(\Omega)=\left\{w\in H^s_p(\Omega);\ \frac{\partial w}{\partial n}=0 \text{ on } \partial\Omega\right\}\\
&s>3+\frac{1}{p} \text{ のとき} \qquad H^s_{p,N^2}(\Omega)=\left\{w\in H^2_{p,N}(\Omega);\ \Delta w\in H^{s-2}_{p,N}(\Omega)\right\}
\end{aligned}
$$

これらは $H^s_p(\Omega)$ の閉部分空間になる。また，指数 $1<p<\infty$ の双対指数を p' で表す：$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$。

2 L_p-空間におけるラプラス作用素の分数べきの定義域について

この節では，$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ を滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域，Δ をノイマン境界条件を伴うラプラス作用素として，作用素 $A_0=-\Delta+1$ の L_p-空間における分数べきの定義域の特徴付けについて，[16, Appendix] において八木 [27, Chap. 16][28, 第 3 章] に基づいて考察した結果を述べる。ディリクレ境界条件の場合については馬越 [20] を参照のこと。

作用素 $A_0=-\Delta+1$ は，任意の $1<p<\infty$ について，$L_p(\Omega)$ の閉作用素と見なすことができ，自然数次の高次まで含めてシフト性が示されている。

定理 2 ([16, Theorem A.1]). $1<p<\infty$ について，$A_p=A_0|_{L_p}$ を $H^2_{p,N}(\Omega)$ で定義された $L_p(\Omega)$ の閉作用素と見なすことができる。すなわち $\mathcal{D}(A_p)=H^2_{p,N}(\Omega)$ がノルム同値とともに成立する。 $\diamond$

詳細は [3, Theorem 2.4.1.3][19, Theorem 5.3.4][27, Theorem 2.15][28, 定理 2.27] を参照のこと。

定理 3 ([16, Theorem A.2]). k を自然数，$1<p<\infty$ とする。$u\in H^{k+2}_p(\Omega)\cap H^2_{p,N}(\Omega)$ は $A_0u\in H^k_p(\Omega)$ を満たす。さらに，$u\in H^2_{p,N}(\Omega)$ が $A_0u\in H^k_p(\Omega)$ を満たすなら，$u\in H^{k+2}_p(\Omega)$ である。すなわち $k=1$ の場合，$\mathfrak{A}_p=A_0|_{H^1_p}$ と表すと，$\mathcal{D}(\mathfrak{A}_p)=H^3_{p,N}(\Omega)$ がノルム同値とともに成立する。 $\diamond$

詳細は [3, Theorem 2.5.1.1][19, Theorems 5.3.4 and 5.4.1] を参照のこと。

次の 2 つの定理によって，八木による有界な H_∞ 関数演算 (bounded H_∞ functional calculus) の理論を応用することにより，L_p-空間における作用素 A_p の分数べきの定義域が，ノルム同値とともに

$$
\mathcal{D}(A_p^\theta)=\begin{cases} H^{2\theta}_p(\Omega) & \text{for } \ 0\le\theta<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2p}\\[2ex] H^{2\theta}_{p,N}(\Omega) & \text{for } \ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2p}<\theta\le\dfrac{3}{2}\end{cases} \tag{8}
$$

と特徴付けられる。

定理 4 ([16, Theorem A.3]). $1 < p < \infty$ のとき，作用素 $A_p = A_0|_{L_p}$ について等式

$$\mathcal{D}(A_p^\theta) = [L_p(\Omega), H^2_{p,N}(\Omega)]_\theta = \begin{cases} H_p^{2\theta}(\Omega) & \textit{for} \ \ 0 \le \theta < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2p} \\ H_{p,N}^{2\theta}(\Omega) & \textit{for} \ \ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2p} < \theta \le 1 \end{cases} \tag{9}$$

がノルム同値とともに成立する。 ◇

Proof. $1 < p < \infty$ より $L_p(\Omega)$ が反射的バナッハ空間であり， A_p は $L_p(\Omega)$ において角度 $\omega_A = 0$ の角域作用素であることに注意する。これより，$A = A_p$, $X = L_p(\Omega)$, $X^* = L_{p'}(\Omega)$ と，$L_p(\Omega) \times L_{p'}(\Omega)$ の双対積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ について，[27, Theorem 16.5][28, 定理 3.12] で与えられている次の条件を直接示すことができる：

(H) 任意の角度 $\omega_A < \omega < \pi$ と任意の指数 $0 < \theta < 1$ について，V 型積分路 $\Gamma_\omega : \lambda = \rho e^{\pm i\omega}$ $(0 \le \rho < \infty)$ に沿った次の積分が有界である：

$$I_{\omega,\theta} = \int_{\Gamma_\omega} |\lambda|^{2\theta-1} \left| \langle A^{2(1-\theta)} (\lambda - A)^{-2} F, G \rangle \right| |d\lambda| \le C_{\omega,\theta} \|F\| \|G\|_*, \qquad F \in X,\ G \in X^*, \tag{10}$$

ただし $C_{\omega,\theta}$ は正定数。

ここでは詳細は省略する。よって [27, Theorem 16.5][28, 定理 3.12] により， A_p が $L_p(\Omega)$ において有界な H_∞-関数演算を有することがわかるので，再び [27, Theorem 16.5][28, 定理 3.12] により， (9) の前半が示される。後半は [27, Theorem 16.11][28, 定理 3.21] ですでに示されている。 □

定理 5 ([16, Theorem A.4]). $1 < p < \infty$ のとき，作用素 $\mathfrak{A}_p = A_0|_{H_p^1}$ について等式

$$\mathcal{D}(\mathfrak{A}_p^\theta) = [H_p^1(\Omega), H^3_{p,N}(\Omega)]_\theta = \begin{cases} H_p^{1+2\theta}(\Omega) & \textit{for} \ \ 0 \le \theta < \dfrac{1}{2p} \\ H_{p,N}^{1+2\theta}(\Omega) & \textit{for} \ \ \dfrac{1}{2p} < \theta \le 1 \end{cases} \tag{11}$$

がノルム同値とともに成立する。 ◇

Proof. 先の定理の証明と同様に， $1 < p < \infty$ より $H_p^1(\Omega)$ は $H_p^1(\Omega) \times H_{p'}^1(\Omega)$ の双対積 $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ によって反射的バナッハ空間であり， $\mathfrak{A}_p$ は $H_p^1(\Omega)$ において角度 $\omega_A = 0$ の角域作用素であることに注意する。よって，再び条件 (H) の直接計算により，作用素 $\mathfrak{A}_p = A_0|_{H_p^1}$ が $H_p^1(\Omega)$ において有界な H_∞-関数演算を有することがわかるので，再び [27, Theorem 16.5][28, 定理 3.12] から (11) の前半が示される。後半は，[27, Theorem 16.11][28, 定理 3.21] の証明の手順を注意深く追随して，以下のように証明することができる。

Step 1: $\mathcal{D}(\mathfrak{A}_p^\theta) \subset H_{p,(N)}^{1+2\theta}(\Omega)$ の証明　補間定理より $[H_p^1(\Omega), H^3_{p,N}(\Omega)]_\theta \subset [H_p^1(\Omega), H_p^3(\Omega)]_\theta = H_p^{1+2\theta}(\Omega)$ である。さらに $1/(2p) < \theta < 1$ のときは， $u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}_p^\theta)$ に収束する点列 $\{u_k\} \subset \mathcal{D}(\mathfrak{A}_p) = H^3_{p,N}(\Omega)$ をとれば，すべての $u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}_p^\theta)$ がノイマン境界条件を満たすことが分かる。

Step 2: $\mathcal{D}(\mathfrak{A}_p^\theta) \supset H^{1+2\theta}_{p,(N)}(\Omega)$ **の証明**　3つの場合に分けて証明する。

(i) $\frac{1}{2} \le \theta \le 1$ **の場合**　$u \in H^{1+2\theta}_{p,N}(\Omega)$ をとると，任意の $v \in H^3_{p',N}(\Omega) = \mathcal{D}(\mathfrak{A}_p^*)$ について，[27, Theorem 16.11][28, 定理 3.21] の証明と同様に，

$$\left|\langle\langle u, (\mathfrak{A}_p^*)^\theta v\rangle\rangle\right| \le \|A_0 u\|_{H_p^{2\theta-1}} \left\| \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^\theta(\lambda - A_0)^{-1} v\, d\lambda \right\|_{(H_p^{2\theta-1})'} \le C\|u\|_{H_p^{1+2\theta}}\|v\|_{H^1_{p'}}.$$

ここで [27, Theorem 1.43][28, 定理 1.54] より $A_0 = 1 - \sum_k D_k^2 : H_p^{2\theta+1}(\Omega) \to H_p^{2\theta-1}(\Omega)$ の有界性と，定理 4 より $A_0|_{L_p} = A_p$ の分数べきの有界性を利用した。これより，各 $u \in H^{1+2\theta}_{p,N}(\Omega)$ に対して，一次形式 $\langle\langle u, (\mathfrak{A}_p^*)^\theta v\rangle\rangle$ が $v \in H^1_{p'}(\Omega)$ の有界線形汎関数であり，適当な $w \in H^1_p(\Omega)$ が存在して，任意の $v \in H^1_{p'}(\Omega)$ について $\langle\langle u, (\mathfrak{A}_p^*)^\theta v\rangle\rangle = \langle\langle w, v\rangle\rangle$ と書けることが分かる。よって $w = \mathfrak{A}_p^\theta u$ であり $u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}_p^\theta)$ が示された。

(ii) $\frac{1}{2p} < \theta < \frac{1}{2}$ **の場合**　$u \in H^{1+2\theta}_{p,N}(\Omega)$ をとると，任意の $v \in H^3_{p',N}(\Omega) = \mathcal{D}(\mathfrak{A}_p^*)$ について，(i) と同様の議論により，

$$\left|\langle\langle u, (\mathfrak{A}_p^*)^\theta v\rangle\rangle\right| \le C\|u\|_{H_p^{2\theta+1}} \left\| \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^\theta(\lambda - A_0)^{-1} v\, d\lambda \right\|_{H_{p'}^{1-2\theta}} \le C\|u\|_{H_p^{2\theta+1}}\|v\|_{H^1_{p'}}.$$

ここで再び [27, Theorem 1.43][28, 定理 1.54] より微分演算 $D_k : H^{1-2\theta}_{p'}(\Omega) \to (H_p^{2\theta}(\Omega))'$ の有界性を利用した。よって，各 $u \in H^{1+2\theta}_{p,N}(\Omega)$ に対して，適当な $w \in H^1_p(\Omega)$ が存在して，任意の $v \in H^1_{p'}(\Omega)$ について $\langle\langle u, (\mathfrak{A}_p^*)^\theta v\rangle\rangle = \langle\langle w, v\rangle\rangle$ と書けることが分かる。よって $w = \mathfrak{A}_p^\theta u$ であり $u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}_p^\theta)$ が示された。

(iii) $0 < \theta < \frac{1}{2p}$ **の場合**　(ii) と同様の議論により，$u \in H_p^{1+2\theta}(\Omega)$ が $\mathcal{D}(\mathfrak{A}_p^\theta)$ に含まれることが分かる。

これで証明を終える。 □

3 時間局所解の構成と非負値性

方程式 (E) の時間局所解の存在は，八木 [27, Chap. 4][28, 第 5 章] による Banach 空間の抽象方程式の時間局所解の存在定理を応用して示すことができる。X をバナッハ空間とし，そのノルムを $\|\cdot\|_X$ で表す。次の X における半線形抽象発展方程式の初期値問題を考える：

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + AU = F(U), \quad t > 0, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{12}$$

ここで A は X の角域作用素 (sectorial operator) で，そのスペクトル集合が，ある角度 $0 \le \phi < \pi/2$ の角域 (sectorial domain) $\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\arg\lambda| \le \phi\}$ に含まれ，M を適当な正定数として，任意の $\lambda \notin \Sigma$ について $\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le M/(|\lambda| + 1)$ を満たすものと

する。非線形作用素 F は，ある指数 $0<\eta<1$ について，A の分数べきの定義域 $\mathcal{D}(A^\eta)$ から X へ連続写像で，次のリプシッツ条件を満たす：

$$\begin{aligned}&\|F(U)-F(\tilde{U})\|_X \le \varphi\left(\|A^\gamma U\|_X+\|A^\gamma \tilde{U}\|_X\right)\\ &\times\left[\|A^\eta(U-\tilde{U})\|_X+\left(\|A^\eta U\|_X+\|A^\eta\tilde{U}\|_X\right)\|A^\gamma(U-\tilde{U})\|_X\right], \qquad U,\tilde{U}\in\mathcal{D}(A^\eta), \quad (13)\end{aligned}$$

ただし，γ は $0<\gamma\le\eta<1$ の適当な指数，$\varphi(\cdot)$ は適当な増加関数である。初期値 U_0 は $\mathcal{D}(A^\gamma)$ からとる。このとき，(12) の時間局所解の存在定理が次のように与えられている。

定理 6 ([27, Theorem 4.1][28, 定理 5.1])**.** 上の仮定の下で，任意の初期値 $U_0\in\mathcal{D}(A^\gamma)$ に対して，方程式 (12) は関数空間

$$\begin{cases}U\in\mathcal{C}((0,T_{U_0}];\mathcal{D}(A))\cap\mathcal{C}([0,T_{U_0}];\mathcal{D}(A^\gamma))\cap\mathcal{C}^1((0,T_{U_0}];X),\\ t^{1-\gamma}U\in\mathcal{B}((0,T_{U_0}];\mathcal{D}(A))\end{cases} \tag{14}$$

に属し，

$$0<t\le T_{U_0} \text{ のとき } \quad t^{1-\gamma}\|AU(t)\|_X+\|A^\gamma U(t)\|_X\le C_{U_0}$$

で評価される一意な時間局所解 U を有する。ここで T_{U_0} と C_{U_0} は $\|A^\gamma U_0\|_X$ で決まる正定数。 ◇

定理 6 を応用して，(E) の時間局所解の存在を次のように証明することができる。

命題 7 ([15, Proposition 3])**.** n を任意の自然数とし，指数 α と β は関係式

$$\alpha>1 \quad \text{かつ} \quad 0<\beta\le 2 \tag{15}$$

を満たすと仮定する。また p は

$$\max\{n,(\alpha-2)n\}<p<\infty \tag{16}$$

を満たす任意の指数とし，$p'=\frac{p}{p-1}$ とおく。このとき，任意の初期関数対 $(u_0,v_0)\in L_p(\Omega)\times H^1_p(\Omega)\subset L_n(\Omega)\times\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ に対して，方程式系 (E) は関数空間

$$\begin{cases}u\in\mathcal{C}((0,T];H^1_p(\Omega))\cap\mathcal{C}([0,T];L_p(\Omega))\cap\mathcal{C}^1((0,T];(H^1_{p'}(\Omega))'),\\ v\in\mathcal{C}((0,T];H^2_{p,N}(\Omega))\cap\mathcal{C}([0,T];H^1_p(\Omega))\cap\mathcal{C}^1((0,T];L_p(\Omega))\end{cases} \tag{17}$$

に属し，

$$0<t\le T \text{ のとき } \quad t^{\frac{1}{2}}\left\{\|u(t)\|_{H^1_p}+\|v(t)\|_{H^2_p}\right\}+\left\{\|u(t)\|_{L_p}+\|v(t)\|_{H^1_p}\right\}\le C \tag{18}$$

で評価される一意な時間局所解 (u,v) を有する。ここで T と C は $\|u_0\|_{L_p}+\|v_0\|_{H^1_p}$ で決まる正定数。 ◇

ここで，双対空間 $(H^1_{p'}(\Omega))'$ における解とは，弱形式での解を意味する。

Proof. 基礎空間 $X = (H^1_{p'}(\Omega))' \times L_p(\Omega)$，作用素 $A = \begin{bmatrix} -\Delta + 1 & 0 \\ 0 & \tau^{-1}(-\Delta + 1) \end{bmatrix}$ とし，$\frac{n}{p} < s < 1$ を任意にとって，$\gamma = \frac{1}{2}, \eta = \frac{1+s}{2}$ ととればよい。 □

(E) の時間局所解はあと 1 次正則性の高い空間でも構成できることも示される。

命題 8 ([16, Proposition 4]). n を任意の自然数とし，指数 α と β は関係式 (15) を満たすと仮定する。また p は

$$n < p < \infty \tag{19}$$

を満たす任意の指数とする。このとき，任意の初期関数対 $(u_0, v_0) \in H^1_p(\Omega) \times H^2_{p,N}(\Omega)$ に対して，方程式系 (E) は関数空間

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}((0,T]; H^2_{p,N}(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,T]; H^1_p(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0,T]; L_p(\Omega)), \\ v \in \mathcal{C}((0,T]; H^3_{p,N}(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,T]; H^2_{p,N}(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0,T]; H^1_p(\Omega)) \end{cases} \tag{20}$$

に属し，

$$0 < t \le T \text{ のとき} \quad t^{\frac{1}{2}} \left\{ \|u(t)\|_{H^2_p} + \|v(t)\|_{H^3_p} \right\} + \left\{ \|u(t)\|_{H^1_p} + \|v(t)\|_{H^2_p} \right\} \le C \tag{21}$$

で評価される一意な時間局所解 (u, v) を有する。ここで T と C は $\|u_0\|_{H^1_p} + \|v_0\|_{H^2_p}$ で決まる正定数。 ◇

Proof. 今度は基礎空間を $X = L_p(\Omega) \times H^1_p(\Omega)$ にとり，作用素 A は上と同じ（ただし X に制限）として，$\gamma = \eta = \frac{1}{2}$ ととればよい。 □

(E) の解の非負値性は切断法 (truncation method) [27, Section 12.1.3][28, 13.1.3 節] で示される。

命題 9 ([15, Proposition 4]). 命題 *7* の下では，初期関数が $u_0 \ge 0,\ v_0 \ge 0$ なら，解 (u, v) は $0 \le t \le T$ において $u(t) \ge 0,\ v(t) \ge 0$ を満たす。 ◇

Proof. はじめに $0 \le u_0 \in H^1_p(\Omega),\ 0 \le v_0 \in H^2_{p,N}(\Omega)$ の場合を示す。このとき，命題 8 より，解 (u, v) は $0 \le t \le T$ で $\|u(t)\|_{H^1_p} + \|v(t)\|_{H^2_p} \le C$ を満たす。$\mathcal{C}^{1,1}$-級関数 $H(w)$ を $-\infty < w < 0$ のとき $H(w) = w^2/2$，$0 \le w < \infty$ のとき $H(w) = 0$ を満たすように構成する。このとき，$\varphi(t) = \displaystyle\int_\Omega H(u(x,t))dx$ とおくと，$\varphi(0) = 0$ かつ，$0 \le t \le T$ において

$$\varphi'(t) \le C \|\Delta v\|^{2p/(2p-n)}_{L_p} \|H'(u)\|^2_{L_2} \le C\varphi(t)$$

が成立する。よって Gronwall の補題により，$0 \le t \le T$ において $\varphi(t) = 0$，つまり $u(x,t)$ が非負値をとることが分かる。この事実と比較定理により，$v(x,t)$ も非負値をとることが分かる。

最後に，非負値性が閉であることと，$H^1_p(\Omega) \times H^2_{p,N}(\Omega)$ が $L_p(\Omega) \times H^1_p(\Omega)$ で稠密であることから，$(u_0, v_0) \in L_p(\Omega) \times H^1_p(\Omega)$ である場合にも，$0 \le t \le T$ において $u(x,t) \ge 0$, $v(x,t) \ge 0$ である。 □

以上の結果をまとめると次の定理を得る。

定理 10 ([16, Theorem 5]). n を任意の自然数，指数 α と β は関係式 (15) を満たすと仮定する。さらに p は条件 (16) を満たす任意の指数とする。このとき，任意の非負の初期関数対 $(u_0, v_0) \in L_p(\Omega) \times H_p^1(\Omega) \subset L_n(\Omega) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ に対して，方程式系 (E) は関数空間

$$\begin{cases} 0 \le u \in \mathcal{C}([0,T]; L_p(\Omega)) \cap \mathcal{C}((0,T]; H_{p,N}^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0,T]; L_p(\Omega)), \\ 0 \le v \in \mathcal{C}([0,T]; H_p^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}((0,T]; H_{p,N}^3(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0,T]; H_p^1(\Omega)) \end{cases} \tag{22}$$

に属し，

$$0 < t \le T \text{ のとき} \quad \|u(t)\|_{L_p} + \|v(t)\|_{H_p^1} \le C \tag{23}$$

で評価される一意な時間局所解 (u, v) を有する。ここで T と C は $\|u_0\|_{L_p} + \|v_0\|_{H_p^1}$ で決まる正定数。 ◇

4 解のアプリオリ評価

以下当面の間，p を $n < p < \infty$ の指数として，初期関数は $0 \le u_0 \in H_{p,N}^2(\Omega) \subset H_\infty^1(\Omega)$ および $0 \le v_0 \in H_{p,N}^3(\Omega) \subset H_\infty^2(\Omega)$ と仮定する。このとき，八木による半線形方程式の解の正則性定理 [27, Theorem 4.2][28, 定理 5.2] により，時間局所解 (u, v) は関数空間 $0 \le u \in \mathcal{C}([0,T]; H_{p,N}^2(\Omega))$ and $0 \le v \in \mathcal{C}([0,T]; H_{p,N}^3(\Omega))$ に属し，$0 \le t \le T$ のとき $\|u(t)\|_{H_p^2} + \|v(t)\|_{H_p^3} \le C$ と評価されることが分かる。また，(E) の時間局所解 (u, v) と指数 $z > 0$, $\omega > 0$ に対して，次の量を定義する：

$$I_\omega^z(t) = \int_0^t \omega e^{-\omega(t-s)} \int_\Omega u^z dx ds.$$

命題 11 ([16, Lemma 7]). $\alpha > 1$ の下で，(E) の解 (u, v) は次式を満たす：

$$\|u\|_{L_1} = \int_\Omega u\, dx \le e^{-t}\|u_0\|_{L_1} + C_1|\Omega|. \tag{24}$$

さらに，任意の $\omega > 0$ について，

$$I_\omega^\alpha(t) \le C(1+\omega)|\Omega| + C\omega\|u_0\|_{L_1} \tag{25}$$

が成立する。 ◇

Proof. （[15, Lemma 5] の前半や [14, Lemmas 4.1 and 4.2] と同じ。）前半は，(E) の第 1 式で，減衰項を 1 次式で評価 $f(u) \le C_1 - u$ してから，領域積分し，Gronwall の補題を適用すればよい。

後半は，(E) の第 1 式の領域積分に指数関数 $\omega e^{-\omega t}$ を掛けて，積分計算して評価すればよい。 □

命題 12 ([16, Lemma 8])**.** $\alpha > 1,\ 0 < \beta \le \dfrac{\alpha}{2}$ の下で，任意の指数 $2 \le q \le \dfrac{\alpha}{\beta}$ について，(E) の解 (u, v) は次式を満たす：

$$\|v\|_{H_q^1}^q \le C_q e^{-\delta_q t/\tau} \|v_0\|_{H_q^1}^q + C_q \left(|\Omega| + \|u_0\|_{L_1}\right) \tag{26}$$

ここで C_q と δ_q は適当な正定数。 ◇

Proof. $q = 2$ の場合は，[14, Proposition 4.4] と同様に，(E) の第 2 式に $-\Delta v + v$ を掛けて領域積分して，Gronwall の補題と命題 11 を適用して示すことができる。

$q > 2$ の場合は,（[15, Lemma 5] の後半と同じように,）(E) の第 2 式より，半群 $e^{t(\Delta-1)/\tau}$ を用いた $v(t)$ の表現

$$v(t) = e^{-tA_0/\tau} v_0 + \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-(t-s)A_0/\tau} g(u(s)) ds. \tag{27}$$

を H_q^1-ノルムで評価し，途中で現れる特異積分が可積分であることに注意して，

$$\|v\|_{H_q^1}^q \le C_q e^{-\delta_q t/\tau} \|v_0\|_{H_q^1}^q + C_q \int_0^t e^{-\delta_q (t-s)/\tau} \int_\Omega (1+u)^{q\beta} dx ds \tag{28}$$

を得る。これに命題 11 を適用して目的の評価が示される。 □

命題 13 ([16, Lemma 9])**.** $\alpha > 1,\ 0 < \beta \le \dfrac{\alpha}{2}$ かつ $\beta < \dfrac{n+2}{2n}(\alpha - 1)$ の下で，指数 q, θ が $2 \le q \le \dfrac{\alpha}{\beta},\ q > \dfrac{2n}{n+2}\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$ かつ $1 < \theta \le \left(\dfrac{n+2}{2n} q - 1\right)(\alpha - 1)$ を満たすとき，(E) の解 (u, v) は次式を満たす：

$$\|1+u\|_{L_\theta}^\theta \le e^{-qt/(2\tau)} \|1+u_0\|_{L_\theta}^\theta + \psi_{\theta,q}\left(\|1+u_0\|_{L_1} + \|v_0\|_{H_q^1}\right) \tag{29}$$

ここで $\psi_{\theta,q}(\cdot)$ は適当な増加関数である。さらに，任意の正の数 ω に対して，

$$I_\omega^{\alpha+\theta-1}(t) \le (1+\omega)\psi_{\theta,q}\left(\|u_0\|_{L_1} + \|v_0\|_{H_q^1}\right) + C_{\theta,q}\omega\left(\|1+u_0\|_{L_\theta}^\theta + \|v_0\|_{H_q^1}^q\right) \equiv \bar{I}_\omega^{\alpha+\theta-1} \tag{30}$$

が成立する。 ◇

Proof. $\|1+u\|_{L_\theta}^\theta + \|v\|_{H_q^1}^q$ に関する微分不等式を用いて証明する。いくつかのステップに分けて証明する。

Step 1. (E) の第 1 式に $(1+u)^{\theta-1}$ を掛けて領域積分して，$\|1+u\|_{L_\theta}^\theta$ に関する微分不等式

$$\begin{aligned}\frac{1}{\theta}\frac{d}{dt}\int_\Omega (1+u)^\theta dx \le& -\frac{\theta-1}{2}\int_\Omega (1+u)^{\theta-2}|\nabla u|^2 dx + C_q \eta^{-\kappa+1}\chi^{2\kappa}(\theta-1)^\kappa \left\||\nabla v|^{q/2}\right\|_{H_2^1}^2 \\ &+ \int_\Omega \left[\eta \|\nabla v\|_{L_q}^{(2\kappa-q)/(\kappa-1)} (1+u)^{\theta\kappa/(\kappa-1)} + (1+u)^{\theta-1} f(u)\right] dx\end{aligned} \tag{31}$$

を得る。ここで走化性項の評価が重要で，$\kappa = \dfrac{n+2}{2n}\,q$ とおき，η を任意の正の数として，

$$
\begin{aligned}
\frac{\chi^2(\theta-1)}{2}\int_\Omega (1+u)^\theta |\nabla v|^2 dx &\le \frac{\chi^2(\theta-1)}{2}\left\|(1+u)^\theta\right\|_{L_{\kappa/(\kappa-1)}} \left\||\nabla v|^{q/2}\right\|_{L_{4\kappa/q}}^{4/q} \\
&\le \frac{\chi^2(\theta-1)}{2}\left\|(1+u)^\theta\right\|_{L_{\kappa/(\kappa-1)}} \cdot C_q \left\||\nabla v|^{q/2}\right\|_{H_2^1}^{2/\kappa} \left\||\nabla v|^{q/2}\right\|_{L_2}^{(4/q)-(2/\kappa)} \\
&\le C_q \eta^{-\kappa+1}\,\chi^{2\kappa}(\theta-1)^\kappa \left\||\nabla v|^{q/2}\right\|_{H_2^1}^2 + \eta\,\|\nabla v\|_{L_q}^{(2\kappa-q)/(\kappa-1)} \int_\Omega (1+u)^{\theta\kappa/(\kappa-1)} dx
\end{aligned}
$$

を用いている。

Step 2.　$q>2$ について $\|v\|_{H_q^1}^q$ に関する微分不等式を得る。$\Delta|\nabla v|^2 = 2|D^2 v|^2 + 2\nabla v\cdot\nabla\Delta v$ と $(\Delta v)^2 \le n|D^2 v|^2$ に注意して，(E) の第 2 式より $\frac{\partial}{\partial t}|\nabla v|^2$ に関する不等式

$$
\tau\frac{\partial}{\partial t}|\nabla v|^2 = 2\tau\nabla v\cdot\nabla v_t \le \Delta|\nabla v|^2 - \frac{2}{n}|\Delta v|^2 - 2|\nabla v|^2 + 2\nabla v\cdot\nabla g(u)
$$

を得る。これに $|\nabla v|^{q-2}$ を掛けて領域積分し，下の補題 14 を用いると，

$$
\begin{aligned}
\frac{2\tau}{q}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla v|^q dx &\le \int_{\partial\Omega} |\nabla v|^{q-2}\frac{\partial|\nabla v|^2}{\partial\nu}dx - \int_\Omega \nabla|\nabla v|^{q-2}\cdot\nabla|\nabla v|^2 dx \\
&\quad - \int_\Omega |\nabla v|^{q-2}\left\{\frac{2}{n}(\Delta v)^2 + 2|\nabla v|^2\right\}dx + \int_\Omega 2|\nabla v|^{q-2}\nabla v\cdot\nabla g(u)dx \\
&\le 2\kappa_\Omega \int_{\partial\Omega}|\nabla v|^q dx - \int_\Omega \frac{q-2}{2}|\nabla v|^{q-4}\Big|\nabla|\nabla v|^2\Big|^2 dx - \int_\Omega \frac{2}{n}|\nabla v|^{q-2}(\Delta v)^2 dx \\
&\quad - \int_\Omega 2|\nabla v|^q dx + \int_\Omega \left[\nabla\cdot\left(2|\nabla v|^{q-2}\nabla v\right)\right] g(u)dx.
\end{aligned}
$$

右辺第 1 項の境界積分を領域積分で評価し（$s>1/p$ のとき $\|w\|_{L_p(\partial\Omega)} \le C_{s,p}\|w\|_{H_p^s(\Omega)}$），さらに $\left|\nabla\left(|\nabla v|^{q/2}\right)\right|^2 = \dfrac{q^2}{16}|\nabla v|^{q-4}\left|\nabla|\nabla v|^2\right|^2$ に注意すると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{2\tau}{q}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla v|^q dx + \frac{4(q-2)}{q^2}\int_\Omega \left|\nabla\left(|\nabla v|^{q/2}\right)\right|^2 dx + \frac{1}{n}\int_\Omega |\nabla v|^{q-2}(\Delta v)^2 dx + \int_\Omega |\nabla v|^q dx \\
&\quad \le \varepsilon\int_\Omega \left|\nabla\left(|\nabla v|^{q/2}\right)\right|^2 dx + C_\varepsilon\int_\Omega |\nabla v|^q dx + C_q''\,(n+q-2)^{q/2}\int_\Omega (1+u)^{q\beta}dx. \qquad (32)
\end{aligned}
$$

これに，(E) の第 2 式に v^{q-1} を掛けて積分した式を加え，$\varepsilon = \dfrac{2(q-2)}{q^2}$ ととると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{2\tau}{q}\frac{d}{dt}\int_\Omega (|\nabla v|^q + v^q)dx + \int_\Omega (|\nabla v|^q + v^q)dx \\
&\quad + \frac{2(q-2)}{q^2}\int_\Omega \left|\nabla\left(|\nabla v|^{q/2}\right)\right|^2 dx + \frac{1}{n}\int_\Omega |\nabla v|^{q-2}(\Delta v)^2 dx + \frac{8(q-1)}{q^2}\int_\Omega \left|\nabla\left(v^{q/2}\right)\right|^2 dx \\
&\qquad \le C\int_\Omega |\nabla v|^q dx + C_q\int_\Omega (1+u)^{q\beta}dx. \qquad (33)
\end{aligned}
$$

この不等式が $q=2$ でも成立することはすぐにわかる。

Step 3.　式 (33) に正の数 ζ を掛けて式 (31) に加えると，

$$\frac{1}{\theta}\frac{d}{dt}\int_\Omega (1+u)^\theta dx + \zeta\left(\frac{2\tau}{q}\frac{d}{dt}\|v\|_{H_q^1}^q + \|v\|_{H_q^1}^q + \frac{2(q-2)}{q^2}\left\||\nabla v|^{q/2}\right\|_{H_2^1}^2\right)$$
$$\le C_q\eta^{-\kappa+1}\chi^{2\kappa}(\theta-1)^\kappa\left\||\nabla v|^{q/2}\right\|_{H_2^1}^2 + C\|\nabla v\|_{L_q}^q$$
$$+\int_\Omega\Big[\eta\|\nabla v\|_{L_q}^{(2\kappa-q)/(\kappa-1)}(1+u)^{\theta\kappa/(\kappa-1)} + (1+u)^{\theta-1}f(u) + \zeta C_q(1+u)^{q\beta}\Big]dx. \quad (34)$$

仮定より，η と ζ をうまく選ぶと $(1+u)^{\theta\kappa/(\kappa-1)}$ と $(1+u)^{q\beta}$ を $-u^{\alpha+\theta-1}$ に吸収できて，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\theta}\|1+u\|_{L_\theta}^\theta + \zeta\frac{2\tau}{q}\|v\|_{H_q^1}^q\right) + \frac{q}{2\tau}\left(\frac{1}{\theta}\|1+u\|_{L_\theta}^\theta + \zeta\frac{2\tau}{q}\|v\|_{H_q^1}^q\right)$$
$$\le \psi_{\theta,q}\left(\|v\|_{H_q^1}\right) - \frac{\mu}{4}\int_\Omega u^{\alpha+\theta-1}dx. \quad (35)$$

よって，Gronwall の補題により，

$$\frac{1}{\theta}\|1+u\|_{L_\theta}^\theta + \zeta\frac{2\tau}{q}\|v\|_{H_q^1}^q \le e^{-\frac{qt}{2\tau}}\left(\frac{1}{\theta}\|1+u_0\|_{L_\theta}^\theta + \zeta\frac{2\tau}{q}\|v_0\|_{H_q^1}^q\right) + \int_0^t e^{-\frac{q(t-s)}{2\tau}}\psi_{\theta,q}\left(\|v\|_{H_q^1}\right)ds.$$

この右辺に命題 12 を適用することにより，所望の結果の一つ (29) を得る。

Step 4.　式 (30) の証明は式 (25) のものとほぼ同じである。　□

補題 14 (ノイマン境界条件を持つ関数の境界での評価)**.** 滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 上で $\mathcal{C}^2$-級の関数 $w\in\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ が境界 $\partial\Omega$ 上で $\dfrac{\partial w}{\partial\nu}=0$ を満たすとき，

$$\frac{\partial|\nabla w|^2}{\partial\nu} \le 2\kappa_\Omega|\nabla w|^2 \quad on\ \partial\Omega, \quad (36)$$

が成立する。ここで κ_Ω は境界 $\partial\Omega$ の曲率の上界であり，特に Ω が凸なら $\kappa_\Omega=0$ である。
◇

詳細は [11, Lemma 4.2] あるいは [5] を参照のこと。

命題 15 ([16, Lemma 10])**.** α,β は $\alpha>1,\ 0<\beta\le\dfrac{\alpha}{2}$ かつ $\beta<\dfrac{n+2}{2n}(\alpha-1)$ を満たすとする。$\sigma>1$ と $r>\dfrac{2n}{n+2}\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$ を満たす指数 σ,r に対して，任意の $\omega>0$ について

$$I_\omega^{\alpha+\sigma-1}(t) \le (1+\omega)\,\psi_{\sigma,r}\left(\|1+u_0\|_{L_\sigma} + \|v_0\|_{H_r^1}\right) \equiv \bar{I}_\omega^{\alpha+\sigma-1} \quad (37)$$

が成立するとする。このとき，指数 q,θ が $\max\{2,r\}\le q\le\dfrac{\alpha+\sigma-1}{\beta}$ かつ $\sigma\le\theta\le\left(\dfrac{n+2}{2n}q-1\right)(\alpha-1)$ を満たすとき，(E) の解 (u,v) は次式を満たす：

$$\|v\|_{H_q^1}^q \le C_q e^{-\delta_q t}\|v_0\|_{H_q^1}^q + C_q\,\psi_{\sigma,r}\left(\|1+u_0\|_{L_\sigma} + \|v_0\|_{H_r^1}\right) \quad (38)$$

$$\|1+u\|_{L_\theta}^\theta \le e^{-qt/(2\tau)}\|1+u_0\|_{L_\theta}^\theta + \psi_{\theta,q}\left(\|1+u_0\|_{L_\sigma} + \|v_0\|_{H_q^1}\right) \tag{39}$$

ここで C_q と δ_q は適当な正の数，$\psi_{\theta,q}(\cdot)$ は適当な増加関数。さらに，任意の $\omega > 0$ について，

$$I_\omega^{\alpha+\theta-1}(t) \le (1+\omega)\,\psi_{\theta,q}\left(\|1+u_0\|_{L_\theta} + \|v_0\|_{H_q^1}\right) \equiv \bar{I}_\omega^{\alpha+\theta-1}. \tag{40}$$

が成立する。 ◇

Proof. 命題 12,13 と同様にして証明できる。式 (28) において $q\beta \le \alpha+\sigma-1$ なので，再び Gronwall の補題より，

$$\|v\|_{H_q^1}^q \le C_q e^{-\delta_q t}\|v_0\|_{H_q^1}^q + C_q\, b_{q,\alpha+\sigma-1}\left(|\Omega| + I_{q/2\tau}^{\alpha+\sigma-1}(t)\right).$$

これと式 (37) より式 (38) を得る。式 (39) は式 (35) と式 (38) より導かれる。式 (40) は式 (30) と同様に示される。 □

以上より次の L_p-評価を得る。

定理 16 ([16, Proposition 11])**.** $\alpha > 1$, $0 < \beta \le \dfrac{\alpha}{2}$, $\beta < \dfrac{n+2}{2n}(\alpha-1)$ の下では，任意の指数 $p > 2$ について，(E) の解 (u,v) は

$$\|1+u\|_{L_p}^p + \|v\|_{H_p^1}^p \le e^{-pt}\|1+u_0\|_{L_p}^p + e^{-\frac{pt}{2\tau}}\|v_0\|_{H_p^1}^p + \psi_p\left(\|1+u_0\|_{L_\sigma} + \|v_0\|_{H_r^1}\right) \tag{41}$$

を満たす。ここで σ, r は $1 < \sigma < p$, $\dfrac{\alpha}{\beta} < r < p$ を満たす指数，$\psi_p(\cdot)$ は適当な増加関数。
◇

Proof. 単調増加数列を構成して証明する。

はじめに，命題 11 の $\|u\|_{L_1}$ の評価式 (24) より，

$$\theta_0 = 1.$$

次に，命題 12 の $\|v\|_{H_q^1}$ の評価式 (26) と命題 13 の $\|1+u\|_{L_\theta}$ の評価式 (29) より，

$$q_1 = \frac{\theta_0+\alpha-1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \theta_1 = \left(\frac{n+2}{2n}\,q_1 - 1\right)(\alpha-1).$$

任意の自然数 k について，θ_k が与えられているとする。命題 15 で $\sigma = \theta_k$, $r = q_k$ として，$\|v\|_{H_q^1}$ の評価式 (38) と $\|1+u\|_{L_\theta}$ の評価式 (39) より，次の漸化式を得る。

$$q_{k+1} = \frac{\theta_k+\alpha-1}{\beta} = \frac{n+2}{2n}\frac{\alpha-1}{\beta}\,q_k, \quad \theta_{k+1} = \left(\frac{n+2}{2n}\,q_{k+1} - 1\right)(\alpha-1).$$

仮定より公比 $\dfrac{n+2}{2n}\dfrac{\alpha-1}{\beta} > 1$ なので，$\{\theta_k\}$ と $\{q_k\}$ はともに発散列となり，有限項で p を超える。 □

5　解の時間大域存在

定理 *1* の証明. 数学的帰納法で示す。

Step 1.　時刻 $t=0$ において，任意に非負の初期関数対 $(u_0, v_0) \in L_p(\Omega) \times H_p^1(\Omega)$ をとる。$R_0 = \|u_0\|_{L_p} + \|v_0\|_{H_p^1}$ とおく。

定理 10 より，ある正定数 $t_1 = T(R_0)$ があって，$t=0$ で (u_0, v_0) から始まる解は $t = t_1$ まで存在することがわかる。定理 16 より，ある正定数 $R_1 = C(R_0)$ があって，(u, v) は $0 \le t \le t_1$ で有界 $\|u(t)\|_{L_p} + \|v(t)\|_{H_p^1} \le R_1$ である。

Step k.　(k は任意の自然数)　時刻 $t = t_k > 0$ まで解 (u, v) が存在し，ある正定数 $R_1 = C(R_0)$ があって，(u, v) は $0 \le t \le t_k$ で有界 $\|u(t)\|_{L_p} + \|v(t)\|_{H_p^1} \le R_k$ であると仮定する。つまり $(u_k, v_k) = (u(t_k), v(t_k))$ とおくと，$\|u_k\|_{L_p} + \|v_k\|_{H_p^1} \le R_k$。

再び定理 10 より，ある正定数 $T_k = T(R_k)$ があって，$t = t_k$ で (u_k, v_k) から始まる解は $t = t_{k+1} = t_k + T_k$ まで存在することがわかるが，実はこの解は **Step** $(k-1)$ の解の延長である。つまり，$t=0$ で (u_0, v_0) から始まる解は $t = t_{k+1}$ まで存在する。再び定理 16 より，同じ正定数 $R_{k+1} = R_k$ について，(u, v) は $0 \le t \le t_{k+1}$ で有界 $\|u(t)\|_{L_p} + \|v(t)\|_{H_p^1} \le R_{k+1}$ である。

Step ∞　すべての自然数 k について $R_k = R_1 = C(R_0)$ であり，さらに $T_k = T(R_k) = T(C(R_0))$ であるので，Step を進めるたびに解の存在時間が一定の正の時間幅 T_1 ずつ延長し，一方で解のノルムの上界は R_1 で一定であることがわかる。

以上より，$t=0$ において任意の (u_0, v_0) から始まる解 (u, v) は $t \to \infty$ まで存在し，正定数 R_1 について，(u, v) は $0 \le t < \infty$ で有界 $\|u(t)\|_{L_p} + \|v(t)\|_{H_p^1} \le R_1$ である。　□

謝辞

本稿は，2019 年 2 月 21 日に京都大学数理解析研究所の RIMS 共同研究（グループ型）「反応拡散方程式と非線形分散型方程式の解の挙動」にて行った講演の記録（未出版）に，最近の動向を加筆したものであり，大崎浩一氏 (関西学院大学) との一連の共同研究 [13, 14, 15, 16] に基づくものである。上記講演と大崎氏との一連の研究は，科学研究費補助金 (課題番号: 26400180, 23540125, 22740112, 20740058, 19740093) の助成と，国際共同利用・共同研究拠点である京都大学数理解析研究所の支援を受けている。

筆者らは，彼らの研究（[17] なども含む）の動機となる方程式系 (E) を紹介してくださった故・三村昌泰先生，この一連の研究の端緒を与えてくださった辻川亨先生（明治大学）と吉川周二先生（大分大学），多くの有意義なコメントをくださった八木厚志先生（大阪大学）に深く感謝の意を表する。

参考文献

[1] K. Baghaei and M. Hesaaraki: *Global existence and boundedness of classical solutions for a chemotaxis model with logistic source,* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **351** (2013), 585–591.

[2] S. Frassu, G. Viglialoro: *Boundedness for a fully parabolic Keller–Segel model with sublinear segregation and superlinear aggregation,* Acta Appl. Math. **171** (2021), 19.

[3] P. Grisvard: Elliptic Problems in Nonsmooth Domains, Classics in Applied Mathematics vol. 69, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2011; originally published as Monographs and Studies in Mathematics vol. 24, Pitman Publishing, Boston, 1985.

[4] M. A. Herrero and J. J. L. Velázquez: *A blow-up mechanism for a chemotaxis model,* Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. IV **24** (1997), 633–683.

[5] S. Ishida, K. Seki and T.Yokota: *Boundedness in quasilinear Keller-Segel systems of parabolic-parabolic type on non-convex bounded domains,* J. Differential Equations **256** (2014), 2993–3010.

[6] E. F. Keller and L. A. Segel: *Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability,* J. Theor. Biol. **26** (1970), 399–415.

[7] J. Lankeit: *Eventual smoothness and asymptotics in a three-dimensional chemotaxis system with logistic source,* J. Differential Equations **258** (2015), 1158–1191.

[8] J. Lankeit: *Immediate smoothing and global solutions for initial data in L1× W1,2 in a Keller-Segel system with logistic terms in 2D,* arXiv:2003.02644 [math.AP] (2020).

[9] Y. Liu, Y. Tao: *Asymptotic behavior in a chemotaxis-growth system with nonlinear production of signals,* Discrete Contin. Dyn. Syst. B **22** (2017), 465–475.

[10] M. Mimura and T. Tsujikawa: *Aggregating pattern dynamics in a chemotaxis model including growth,* Physica A **230** (1996), 499–543.

[11] N. Mizoguchi and P. Souplet: *Nondegeneracy of blow-up points for the parabolic Keller-Segel system,* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **31** (2014), 851–875.

[12] C. Mu, L. Wang, P. Zheng and Q. Zhang: *Global existence and boundedness of classical solutions to a parabolic-parabolic chemotaxis system,* Nonlinear Anal. RWA **14** (2013), 1634–1642.

[13] E. Nakaguchi and K. Osaki: *Global existence of solutions to a parabolic-parabolic system for chemotaxis with weak degradation,* Nonlinear Anal. TMA **74** (2011), 286–297.

[14] E. Nakaguchi and K. Osaki: *Global solutions and exponential attractors of a parabolic-parabolic system for chemotaxis with subquadratic degradation,* Discrete Contin. Dyn. Syst. B **18** (2013), 2627–2646.

[15] E. Nakaguchi and K. Osaki: *L_p-estimates of solutions to n-dimensional parabolic-parabolic system for chemotaxis with subquadratic degradation,* Funkcialaj Ekvacioj **59** (2016), 51–66.

[16] E. Nakaguchi and K. Osaki: *Global existence of solutions to an n-dimensional parabolic-parabolic system for chemotaxis with logistic-type growth and superlinear production,* Osaka J. Math. **55** (2018) 51–70.

[17] K. Osaki, T. Tsujikawa, A. Yagi and M. Mimura: *Exponential attractor for a chemotaxis-growth system of equations,* Nonlinear Anal. TMA **51** (2002), 119–144.

[18] K. Osaki and A. Yagi: *Finite dimensional attractor for one-dimensional Keller-Segel equations,* Funkcialaj Ekvacioj **44** (2001), 441–469.

[19] H. Triebel: Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, North-Holland, Amsterdam, 1978; 2nd revised and enlarged edition, Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg/Leipzig, 1995.

[20] H. Umakoshi: *A semilinear heat equation with initial data in negative Sobolev spaces,* Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S **14** (2021), 745–767.

[21] G. Viglialoro: *Very weak global solutions to a parabolic-parabolic chemotaxis-system with logistic source,* J. Math. Anal. Appl. **439** (2016), 197–212.

[22] G. Viglialoro: *Boundedness properties of very weak solutions to a fully parabolic chemotaxis-system with logistic source,* Nonlinear Anal. RWA **34** (2017), 520–535.

[23] M. Winkler: *Chemotaxis with logistic source: Very weak global solutions and their boundedness properties,* J. Math. Anal. Appl. **348** (2008), 708–729.

[24] M. Winkler: *Aggregation vs. global diffusive behavior in the higher-dimensional Keller-Segel model,* J. Differential Equations **248** (2010), 2889–2905.

[25] M. Winkler: *Boundedness in the higher-dimensional parabolic-parabolic chemotaxis system with logistic source,* Comm. Partial Differential Equations **35** (2010), 1516–1537.

[26] T. Xiang: *Boundedness and global existence in the higher-dimensional parabolic-parabolic chemotaxis system with/without growth source,* J. Differential Equations **258** (2015), 4275–4323.

[27] A. Yagi: Abstract Parabolic Evolution Equations and Their Applications, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[28] 八木厚志: 放物型発展方程式とその応用 上：可解性の理論／下：解の挙動と自己組織化, 岩波数学叢書, 岩波書店, 2011.

[29] M. Zhuang, W. Wang, S. Zheng: *Boundedness in a fully parabolic chemotaxis system with logistic-type source and nonlinear production,* Nonlinear Anal. RWA **47** (2019), 473–483.