Osaka University Knowledge Archive

Title	不規則変動荷重を受ける構造物の初通過破壊確率に関する研究
Author(s)	中山, 隆弘
Citation	大阪大学, 1986, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/1013
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

不規則変動荷重を受ける構造物の初通過破壊確率に関する研究

昭和60年11月

中　山　隆　弘

記　号　表

記号	説　明
a	：*Ormsby* のフィルターの定数
$\boldsymbol{a}(t)$, $a(t)$	：それぞれ包絡線過程とその標本過程
$\dot{\boldsymbol{a}}(t)$, $\dot{a}(t)$	：それぞれ包絡線過程の時間的導関数とその標本過程
$a(t)$	：単一周波数を有する時間関数の振幅
$a_{\omega_i}(t)$	：非定常不規則過程の ω_i 成分波の振幅
A	：点状構造物の気流直角面への投影面積
$A(t, \omega)$	：非定常不規則過程の変調関数
$A_R(t, \omega)$, $A_I(t, \omega)$	：それぞれ $A(t, \omega)$ の実部と虚部
$A_r(t, \omega)$	：一般化した非定常不規則外力の変調関数　(r：モード次数)
b	：*Ormsby* のフィルターの定数
$\boldsymbol{B}$	：閾値
B_c	：閾値の特性値
$\bar{B}$	：閾値の平均値
$\bar{B}_a$	：許容初通過確率に対応する閾値の平均値
$B(t, \omega)$	：非定常不規則過程の変調関数
c	：*Ormsby* のフィルターの定数
c	：構造物の任意点の変位を応力度に変換するための係数
c	：変動風速の鉛直方向の相互相関係数を与える *Panofsky–Singer* の式に含まれる定数
c	$= 1/\bar{m}n$
C_1	：分離過程(第6章緒言参照)によって記述される非定常不規則外力の形状関数のピーク値を与える定数
C_D	：抗力係数
C_r	：一般化減衰係数（r：モード次数)
CLN	：材料強度が条件付対数正規分布に従うことを示す添字
CN	：材料強度が条件付正規分布に従うことを示す添字
$C(t)$	：第5章の式（5・15）で定義される関数
$C(z)$	：鋼製タワーの減衰係数
d	：*Ormsby* のフィルターの定数
$d(\ \ )$	：（　）の増分

注）本論文では，すべての確率変数を肉太の文字で表記する。

$d\boldsymbol{F}(t,\omega)$ $=A(t,\omega)d\boldsymbol{X}(\omega)$

$d\boldsymbol{F}_R(t,\omega)$, $d\boldsymbol{F}_I(t,\omega)$ ：それぞれ$d\boldsymbol{F}(t,\omega)$の実部と虚部

$dF(t,\omega)$ $=A(t,\omega)dX(\omega)$

$dF_R(t,\omega)$, $dF_I(t,\omega)$ ：それぞれ$dF(t,\omega)$の実部と虚部

$d\boldsymbol{G}(\omega)$ $=E[|\boldsymbol{X}(\omega)|^2]$

D ：等断面直立円柱あるいは鋼製タワーの直径

D_d, D_n ：確率平面内の領域

$D(t)$ ：第５章の式（５・18）で定義される関数

E ：ヤング係数

$E[\cdot]$ ：期待値

$E[\cdot|\cdot]$ ：条件付期待値

$\mathrm{Erf}(\cdot)$ ：誤差関数，$\mathrm{Erf}(x)=\int_x^\infty \exp(-z^2)dz$

f ：周波数あるいは振動数

f_0 ：*Ormsby* のバンドパスフィルターの中心周波数

f_n ：１自由度振動系の固有振動数

$f_{n,r}$ ：鋼製タワーの r 次の固有振動数

$\boldsymbol{f}(t)$ ：１自由度振動系に作用する定常もしくは非定常不規則外力

$f(\omega)$ ：定常確率過程のパワースペクトル密度関数

$f_R(r)$ ：抵抗力の確率密度関数

$f_S(s)$ ：材料強度の確率密度関数

$f_{\boldsymbol{x}_{\max\limits_{0\leqq\tau<t}}}(v)$ ：定常正規確率過程の最大値の確率密度関数

$f_z(\cdot|\cdot)$ ：確率変数 z の条件付確率密度関数

$f(\cdot)$, $f_{unc}(\cdot)$ ：関数

$f_{P_r}(t,\omega)$ ：一般化した非定常不規則外力の片側非定常スペクトル密度関数（以下，単に非定常スペクトルと表記する）

$f_{\boldsymbol{x}}(t,\omega)$ ：非定常確率過程 $\boldsymbol{x}(t)$の非定常スペクトル

$f_x(t,\omega)$ ：確定的非定常不規則過程 $x(t)$の非定常スペクトル

$f_{\boldsymbol{y}}(t,\omega)$ ：非定常確率過程 $\boldsymbol{y}(t)$の非定常スペクトル

$f_{\dot{\boldsymbol{y}}}(t,\omega)$ ：非定常確率過程 $\boldsymbol{y}(t)$の時間的導関数の非定常スペクトル

$f_{\boldsymbol{y}\dot{\boldsymbol{y}}}(t,\omega)$ ：第８章の式（８・23）の被積分項

$f_y(t,\omega)$ ：非定常スペクトル応答解析法による線形１自由度振動系の応答の非定常スペクトル

$f_y^H(t,\omega)$ ：*Hammond* の非定常スペクトル応答解析法による線形１自由度振動系の応答の非定常スペクトル

$f_y^*(t,\omega)$ ：時系列応答解析による線形１自由度振動系の応答の非定常スペクトル

$f_{\alpha_r}(t, \omega)$ ：非定常不規則外力を受ける鋼製タワーの一般化座標の非定常スペクトル

$f_{\nu_z}{}^{+}(\nu, t)$ ：確率量となる強度超過率の確率密度関数

$f_{a\dot{a}}(a, \dot{a})$ ：定常包絡線過程とその時間的導関数との結合確率密度関数

$f_{a\dot{a}}(a(t), \dot{a}(t))$ ：非定常包絡線過程とその時間的導関数との結合確率密度関数

$f_{x\dot{x}}(x, \dot{x})$ ：定常応答過程とその時間的導関数との結合確率密度関数

$f_{x\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t))$ ：非定常応答過程とその時間的導関数との結合確率密度関数

$f_{z\dot{z}}(z, \dot{z})$ ：確率過程 $z(t)$ とその時間的導関数 $\dot{z}(t)$ との結合確率密度関数

$f_{s, \underset{0 \leqq \tau < t}{x_{\max}}}(u, v)$ ：材料強度と定常応答過程の最大値との結合確率密度関数

$\boldsymbol{F}(\omega)$ ：非定常不規則変動外力 $\boldsymbol{f}(t)$ の一般化フーリエ変換

$F(\cdot)$ ：ローパスフィルター処理

$F_{\underset{0 \leqq \tau < t}{x_{\max}}}(u)$, $F_{\underset{0 \leqq \tau < t}{x_{\max}}}{}^{*}(u)$ ：それぞれ定常正規確率過程の最大値および無次元化された最大値の確率分布関数

$F_{x,R}(\omega)$, $F_{x,I}(\omega)$ ：それぞれ定常過程 $x(t)$ のフーリエ変換の実部と虚部

g ：*Ormsby* のフィルターの定数

g ：平均ピーク係数

$g(t)$ ：非定常不規則外力の形状関数

$g_{\boldsymbol{x}}(t, \omega)$ ：非定常確率過程 $\boldsymbol{x}(t)$ の両側非定常スペクトル

G ：ガスト応答倍率

G_0 ：ホワイトノイズの片側パワースペクトル密度

G_D ：*Davenport* の方法によるガスト応答倍率

$G(\omega)$ ：定常過程のパワースペクトル密度関数

$G(t, \omega)$ ：線形１自由度振動系の非定常応答の変調関数

$G_R(t, \omega)$ ：$G(t, \omega)$ の実部

$G_I(t, \omega)$ ：$G(t, \omega)$ の虚部

$G^{*}(t, \omega)$ ：$G(t, \omega)$ の共役複素数

$\dot{G}_R(t, \omega)$ ：$G_R(t, \omega)$ の時間的導関数

$\dot{G}_I(t, \omega)$ ：$G_I(t, \omega)$ の時間的導関数

$G_r(t, \omega)$ ：鋼製タワーの非定常応答に関する一般化座標の変調関数（r：モード次数）

$G_{r,0}(t, \omega)$ $=G_r(t, \omega)/\beta_r$（r：モード次数）

$G_{r0,R}(t,\omega)$, $G_{r0,I}(t,\omega)$：それぞれ $G_{r,0}(t, \omega)$ の実部と虚部（r：モード次数）

$\dot{G}_{r,0}(t, \omega)$ ：$G_{r,0}(t, \omega)$ の時間的導関数（r：モード次数）

$\dot{G}_{r0,R}(t,\omega)$, $\dot{G}_{r0,I}(t,\omega)$：それぞれ $\dot{G}_{r,0}(t, \omega)$ の実部と虚部（r：モード次数）

$\bar{G}(t, \omega)$ ：強震記録の非定常スペクトル

h ：*Ormsby* のフィルターの定数

$h(t)$ ：１自由度振動系の単位衝撃応答関数

$h_r(t)$ ：鋼製タワーの単位衝撃応答関数（r：モード次数）

H ：鋼製タワーの高さ

$H(t)$ ：第５章の式（５・18）で定義される関数

$H(f)$, $H(\omega)$ ：１自由度振動系の伝達関数

$H_r(f)$, $H_r(\omega)$ ：鋼製タワーの伝達関数（r：モード次数）

I ：等断面直立円柱の断面２次モーメント

$I(z)$ ：鋼製タワーの断面２次モーメント

$I_m[\cdot]$ ：複素数の虚部

H_{max} ：設計波高

$H_{1/3}$ ：１／３有義波高

H_b ：砕波限界波高

$(H_{max})_\mu$ ：超過確率μに対応する設計波高

k ：構造物に生じる動的荷重効果を応答の *r.m.s.* 値で除した値

k ：変動風速の鉛直方向の相互相関係数を与える指数関数式に含まれる定数

k ：線形１自由度振動系のばね剛度

k_s ：所定の信頼度を振動系に与えるばね剛度

$k_{s,0}$ ：線形１自由度振動系の基準ばね剛度

K ：定常不規則変動荷重を受ける構造物の動的応答係数

K_r ：地表面の粗度状態を表す定数

l ：等断面直立円柱の高さ

LN ：材料強度が対数正規分布に従うことを示す添字

m ：線形１自由度振動系の質量

m ：等断面直立円柱の単位長当りの質量

m ：変動風速のパワースペクトル密度関数を与える日野の式における熱フラックスの影響を表す定数

$\bar{m}$ ：材料強度（あるいは抵抗力）の平均値と定常不規則変動荷重を受ける構造物の応力度（あるいは荷重効果）の *r.m.s.* 値との比

$\bar{m}_0$ ：特定の $\bar{m}$

$\bar{m}_a$ ：許容破壊確率に対応する $\bar{m}$ の値

$\bar{m}^*$ ：材料強度（あるいは抵抗力）の平均値と非定常不規則変動荷重を受ける構造物の応力度（あるいは荷重効果）の最大 *r.m.s.* 値との比

$\bar{m}_a{}^*$ ：許容破壊確率に対応する $\bar{m}^*$の値

$\bar{m}_c{}^*$ ：閾値の特性値と非定常不規則変動荷重を受ける構造物の応答の最大 *r.m.s.* 値との比

$\bar{m}^{\mathrm{I}}$, $\bar{m}^{\mathrm{II}}$ ：それぞれレベルⅠの方法およびレベルⅡの方法（第2章参照）により算定される $\bar{m}_a$

$min\{a, b\}$	：a または b のいずれか小さい方の値
$m(z)$	：鋼製タワーの単位長当りの質量
$\bar{m}(t)$	：材料強度（あるいは抵抗力）の平均値と非定常不規則変動荷重を受ける構造物の応力度（あるいは荷重効果）の *r.m.s.* 値との比
$\bar{M}$	：変動風を受ける鋼製タワーの基部断面の曲げモーメントの平均値
$\boldsymbol{M}(z)$	：変動風を受ける鋼製タワーの任意断面の曲げモーメント
$M_{\boldsymbol{x}}(t, \omega)$, $M_{\boldsymbol{y}}(t, \omega)$	：分離過程（第６章緒言参照）によって記述される非定常不規則外力を受ける線形１自由度振動系の応答（それぞれ応力度と変位）の変調関数
n	：静的荷重と定常不規則変動荷重を同時に受ける構造物の静的荷重効果と材料強度（あるいは抵抗力）の平均値との比
n_a	：許容破壊確率に対応する n の値
$\boldsymbol{n}(t)$	：ホワイトノイズで表される定常確率過程
N	：材料強度が正規分布に従うことを示す添字
N_0	：波数
$N_{\boldsymbol{x}, 0}{}^{+}$, $N_{\boldsymbol{x}, \bar{x}}{}^{+}$	：定常確率過程 $\boldsymbol{x}(t)$ が単位時間当りに、それぞれレベル０およびレベル $\bar{x}$ を正の勾配で超過する回数の期待値
$p(t, \omega_0)$	：第６章の式（６・６）で表される時間関数
P_f, $P_f(t_d)$	：（初通過）破壊確率
$P_{f, a}$, $P_{f, a}(t_d)$	：許容破壊確率
$\boldsymbol{P}(t)$	：直立円柱の頂部に作用する水平方向の定常不規則変動荷重
$P(z)$	：鋼製タワーに作用する平均風圧
$\boldsymbol{P}_r(t)$	：一般化した非定常不規則外力（r：モード次数）
$P_s(t_d)$	$= 1 - P_f(t_d)$
$P_{s, \boldsymbol{x}}(0)$	$=\mathrm{Prob}[\lvert\boldsymbol{x}(0)\rvert < \boldsymbol{S}]$
$P_{s, \boldsymbol{a}}(0)$	$=\mathrm{Prob}[\lvert\boldsymbol{a}(0)\rvert < \boldsymbol{S}]$
$P_{s, \boldsymbol{B}}(0)$	$=\mathrm{Prob}[\lvert\boldsymbol{B}(0)\rvert < \boldsymbol{S}]$
$\mathrm{Prob}[\cdot]$	：確率
$\mathrm{Prob}[\cdot \cap \cdot]$	：同時確率
$\mathrm{Prob}[\cdot \mid \cdot]$	：条件付確率
q_d	：定常不規則変動荷重による動的荷重効果の*r.m.s.*値と永久荷重による荷重効果との比
q_s	：定常不規則変動荷重による静的荷重効果と永久荷重による荷重効果との比
$q(t, \omega_0)$	：第６章の式（６・６）で表される時間関数
$Q_k{}^*$	：荷重の公称値（k：荷重の種類を表わす添字）

Q_1^*, Q_1　：それぞれ定常不規則変動荷重の公称値とそれによる荷重効果

Q_P^*, Q_P　：それぞれ永久荷重の公称値とそれによる荷重効果

$Q(t)$　：第5章の式（5・15）で定義される関数

$Q(t, \omega)$, $Q^*(t, \omega)$　：それぞれ非分離過程（第6章緒言参照）によって記述される非定常不規則外力を受ける線形1自由度振動系の応答速度の変調関数とその共役複素数

$Q_R^*(t, \omega)$, $Q_I^*(t, \omega)$　：それぞれ $Q^*(t, \omega)$ の実部と虚部

$Q_r(t, \omega)$, $Q_r^*(t, \omega)$　：鋼製タワーの非定常応答に関する一般化座標の時間的導関数の変調関数とその共役複素数（r：モード次数）

$Q_{r,0}(t, \omega)$　$=\dot{G}_{r,0}(t, \omega)+i\omega G_{r,0}(t, \omega)$（$r$：モード次数）

R　：材料強度の公称値により算定される抵抗力

$\bar{R}$　：抵抗力の平均値

R_l, R_u　：第1章の式（1・26）で算定される値

R_r　：抵抗力の存在領域

R_s, $\boldsymbol{R}_s$　：材料強度の存在領域

$R_{\boldsymbol{y}}(t, s)$　：$\boldsymbol{y}(t)$ と $\boldsymbol{y}(s)$ との共分散関数

$R_{\boldsymbol{y}\dot{\boldsymbol{y}}}(t, s)$　：$\boldsymbol{y}(t)$ と $\dot{\boldsymbol{y}}(s)$ との共分散関数

$R_{\boldsymbol{y}_z}(t, s)$　：$\boldsymbol{y}(z, t)$ と $\boldsymbol{y}(z, s)$ との共分散関数

$R_{\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2}(f, z_1, z_2)$　：変動風速の高さ方向の空間相関係数

$\mathrm{Re}[\cdot]$　：複素数の実部

$\boldsymbol{s}(z, t)$, $\dot{\boldsymbol{s}}(z, t)$　：鋼製タワーの縁応力度およびその時間的導関数

$\boldsymbol{S}$　：材料強度

$\boldsymbol{S}^+$, $\boldsymbol{S}^-$　：それぞれ正および負と定義された材料強度

$\bar{S}$　：材料強度の平均値

$\boldsymbol{S}^*$　$=\ln S$

$\bar{S}^*$　：$\boldsymbol{S}^*$ の平均値

S_0　：ホワイトノイズの両側パワースペクトル密度

S_a　：許容応力度

S_c　：強度超過率を等価にする材料強度の特性値

S_{nom}　：材料強度の公称値

S_l, S_u　：それぞれ材料強度の下限値および上限値

$S_{\boldsymbol{PP}}(\omega)$　：定常不規則変動外力の片側パワースペクトル密度関数

$S_{\boldsymbol{uu}}(f)$, $S_{\boldsymbol{uu}}(f, z)$　：変動風速の片側パワースペクトル密度関数

$S_{\boldsymbol{xx}}(\omega)$　：定常不規則変動荷重を受ける線形1自由度振動系の応力度の両側パワースペクトル密度関数

$S_{xx}{}^*(\omega)$ ：$S_{xx}(\omega)$と等価な置換スペクトル

$S_{yy}(\omega)$ ：定常不規則変動荷重を受ける線形１自由度振動系の変位の両側パワースペクトル密度関数

$S_R(\tau_j, \omega), S_I(\tau_j, \omega)$ ：第７章の式（７・22）で定義される関数

$S_{MM}(f, z)$ ：変動風圧を受ける鋼製タワーの曲げモーメントの片側パワースペクトル密度関数

$S_{P_1P_2}(f, z_1, z_2)$ ：変動風圧の高さ方向の片側相互パワースペクトル密度関数

t ：時刻

t ：等断面直立円柱の板厚

t_d ：振動継続時間

t_n ：特定の時刻

t^*, $t_d{}^*$ ：無次元化された振動継続時間

$T_{1/3}$ ：１／３有義波の周期

T_n ：１自由度振動系の固有周期

$\bar{u}$ ：変動風速の変動成分の *r.m.s.* 値

$u(t)$ ：単一周波数成分で記述される時間関数

U ：変動風の平均風速

U_{10} ：高さ10mにおける平均風速

$U(t)$ ：単位階段関数

$U(z)$ ：高さ z における平均風速

$v(t)$ ：多くの周波数成分を含む時間関数

$v_j(t)$ ：$v(t)$の特定の周波数成分

$\omega_B(t)$ ：バンドパスフィルターの時間領域での重み関数

$\omega_L(t)$ ：ローパスフィルターの時間領域での重み関数

W ：等断面直立円柱の断面係数

$W_B(f)$ ：バンドパスフィルターの周波数領域での重み関数

$W_L(f)$ ：ローパスフィルターの周波数領域での重み関数

$\bar{x}$, x_s ：部材に生じる静的荷重効果

x_d, $x_d(t)$ ：部材に生じる動的荷重効果

$\max_{0\leqq\tau<t} x$ ：時間区間〔0, t)における応答の最大値

$\max_{0\leqq\tau<t} x^*$ ：時間区間〔0, t)における応答の無次元化された最大値

x_E ：応答が強度を越える事象

$x(t)$, $x(t)$ ：それぞれ構造物の主要な点の変動応力とその標本関数

$\dot{x}(t)$, $\dot{x}(t)$ ：それぞれ構造物の主要な点の変動応力の時間的導関数とその標本関数

$x(t)$ ：非定常不規則外力

$\boldsymbol{x}(t)$, $x(t)$ ：それぞれ非定常確率過程とその標本過程

$\boldsymbol{x}_i(t)$, $x_i(t)$ ：それぞれ非定常確率過程の特定周波数成分とその標本過程

$\boldsymbol{x}(t)$ ：地震動の水平加速度

$\tilde{x}(t)$, $\tilde{x}_i(t)$ ：それぞれ非定常スペクトルによる再合成波形およびその特定周波数成分

$\boldsymbol{X}(\omega)$, $X(\omega)$ ：それぞれ直交過程とその標本関数

$\boldsymbol{X}^*(\omega)$ ：$\boldsymbol{X}(\omega)$の共役複素数

$\boldsymbol{X}_R(\omega)$, $\boldsymbol{X}_I(\omega)$ ：それぞれ$\boldsymbol{X}(\omega)$の実部と虚部

$X_D(f)$ ：空力アドミッタンス

$\bar{y}$ ：変動風を受ける点状構造物の変位応答の平均値

$\boldsymbol{y}(t)$, $\dot{\boldsymbol{y}}(t)$, $\ddot{\boldsymbol{y}}(t)$ ：それぞれ線形１自由度振動系の変位，速度および加速度

$\boldsymbol{y}(z, t)$, $\dot{\boldsymbol{y}}(z, t)$ ：それぞれ地震動を受ける鋼製タワーの変位および速度

$\boldsymbol{Y}(\omega)$ ：直交過程

$\boldsymbol{Y}_r(\omega)$ ：地震動を受ける鋼製タワーの応答を記述する直交過程（r：モード次数）

z ：地表面からの高さ

α ：平均風速の鉛直分布を表すべき指数

α_r ：抵抗力の公称値と平均値との比

α_l, α_u ：第１章の式（１・18）で定義される値

$\alpha_l(t)$, $\alpha_u(t)$ ：第５章の式（５・９）で定義される値

$\boldsymbol{\alpha}_r(t)$, $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_r(t)$, $\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_r(t)$ ：それぞれ鋼製タワーの一般化座標とその１階および２階の時間的導関数（r：モード次数）

β ：第３章の式（３・21）で定義される値

β_1, β_2 ：形状関数に関する定数

β_1 ：変動風速のパワースペクトル密度関数を与える日野の式に含まれる定数

β_l, β_u ：第１章の式（１・23）で定義される値

β_r ：刺激係数（r：モード次数）

γ_1 ：変動荷重に対する荷重係数

γ_D ：死荷重に対する荷重係数

γ_k ：荷重係数（k：荷重の種類）

γ_l, γ_u ：第１章の式（１・35）で定義される値

γ_P ：永久荷重に対する荷重係数

γ_ω ：風荷重に対する荷重係数

$\gamma_l(t)$, $\gamma_u(t)$ ：第５章の式（５・18）で定義される値

δ_B ：閾値の変動係数

δ_r ：抵抗力の変動係数

δ_s ：材料強度の変動係数

$\delta_1(t, \omega)$, $\delta_2(t, \omega)$ ：第８章の式（８・18）で定義される関数

Δf ：バンドパスフィルターの帯域幅

Δf_i ：中心周波数が f_i であるバンドパスフィルターの帯域幅

$\Delta\tau$ ：微小時間区間

$\Delta\omega_i$ ：中心円周波数が ω_i であるバンドパスフィルターの帯域幅

$\Delta(t)$ ：第５章の式（５・15）で定義される時間関数

ε ：部材の動的荷重効果と静的荷重効果との比

$\dot{\varepsilon}(t)$ ：第５章の式（５・15）で定義される時間関数

ζ ：１自由度振動系の減衰定数

ζ^* ：空力減衰を含む，１自由度振動系の減衰定数

ζ_r ：鋼製タワーの減衰定数（r：モード次数）

ζ_r^* ：空力減衰を含む，鋼製タワーの減衰定数（r：モード次数）

$\eta(z)$ ：鋼製タワーの断面の縁距離

$\eta_l(t)$, $\eta_u(t)$ ：第５章の式（５・18）で定義される時間関数

κ_l, κ_u ：材料強度の下限および上限を与えるパラメーター

λ ：材料強度の特性値と平均値との比

λ_l, λ_u ：材料強度の下限および上限を与えるパラメーター（$\lambda_l = -\kappa_l$, $\lambda_u = \kappa_u$）

$\bar{\lambda}_j(t)$ ：第５章の式（５・15）で定義される時間関数

μ ：超過確率

$\mu(t)$ ：第５章の式（５・９）で定義される時間関数

ν_0 ：ガスト応答倍率を与える *Davenport* の式に含まれるゼロ・クロッシング数

$\nu_{z,v}^+(\cdot)$, $\nu_{z,v}^-(\cdot)$：それぞれ確率過程 $z(t)$（z：x あるいは a）の正勾配および負勾配の強度超過率（v：*CN*, *N*, *CLN* あるいは *N*）

$\boldsymbol{\nu}$ が肉太の文字のときは，材料強度の確率分布の経時変化を考慮した場合の確率的な強度超過率を表す。また v を付さない場合もある。

$\nu_{x,d}(\cdot)$ ：材料強度を確定量としたときの強度超過率

$\nu_{x,p}(\cdot)$ ：材料強度を確率量としたときの強度超過率

ξ ：材料強度の特性値を与える定数

π ：円周率

ρ ：空気密度

$\rho_{z\dot{z}}(t)$ ：非定常確率過程 $z(t)$ とその時間的導関数 $\dot{z}(t)$ との相関係数（z：x あるいは y）

$\rho_{y_z\dot{y}_z}(t)$ ：地震動を受ける鋼製タワーの変位と速度との相関係数

$\rho_{s_z\dot{s}_z}(t)$ ：地震動を受ける鋼製タワーの縁応力度とその時間的導関数との相関係数

σ_1 ：第１章の式（１・30）で定義される値

σ_a ：許容応力度

σ_B ：閾値の標準偏差

σ_s ：材料強度の変動係数

σ_{Q_1} ：部材の動的荷重効果の *r.m.s.* 値

σ_{M_z}, $\sigma_{\dot{M}_z}$ ：それぞれ自然風を受ける鋼製タワーの曲げモーメントおよびその時間的導関数の *r.m.s.* 値

σ_x, $\sigma_{\dot{x}}$ ：それぞれ構造物の主要な点の変動応力およびその時間的導関数の *r.m.s.* 値

$\sigma_{x,\,max}$ ：$\sigma_x(t)$の最大値

σ_y ：変動風を受ける点状構造物の変位応答の *r.m.s.* 値

$\sigma_{y,\,max}$ ：$\sigma_y(t)$の最大値

σ_{s^*} ：S^*の標準偏差

$\sigma_{s_z}{}^2(t)$, $\sigma_{\dot{s}_z}{}^2(t)$ ：それぞれ地震動を受ける鋼製タワーの縁応力度およびその時間的導関数の分散

$\sigma_{s_z\dot{s}_z}{}^2(t)$ ：地震動を受ける鋼製タワーの縁応力度とその時間的導関数との共分散

$\sigma_x(t)$, $\sigma_{\dot{x}}(t)$ ：それぞれ非定常不規則外力を受ける１自由度振動系の変動応力およびその時間的導関数の *r.m.s.* 値

$\sigma_y{}^2(t)$, $\sigma_{\dot{y}}{}^2(t)$ ：それぞれ地震動を受ける１自由度振動系の変位および速度の分散

$\sigma_{y\dot{y}}{}^2(t)$ ：地震動を受ける１自由度振動系の変位と速度との共分散

$\sigma_{y_z}{}^2(t)$, $\sigma_{\dot{y}_z}{}^2(t)$ ：それぞれ地震動を受ける鋼製タワーの変位および速度の分散

$\sigma_{y_z\dot{y}_z}{}^2(t)$ ：地震動を受ける鋼製タワーの変位と速度との共分散

τ ：時刻

φ ：抵抗係数

φ_k ：０～２$\pi(rad/s)$の間の一様乱数によって与えられる位相

$\varphi(t)$ ：単一周波数を有する時間関数の位相

$\varphi_i(t)$ ：非定常不規則過程の ω_i 成分波の位相

$\varphi_r(z)$ ：鋼製タワーの正規規準振動モード（r：モード次数）

$\varphi(t,\omega)$, $\varphi(t,\omega)$ ：それぞれ非定常確率過程のω成分波の位相とその標本関数

$\varphi_r(z)$ ：第８章の式（８・58）で定義される関数

ω ：円振動数

ω_0 ：単一周波数を有する時間関数の円周波数

ω_i ：特定の円周波数

ω_m ：狭帯域の振動特性を示す構造物の代表的円振動数

ω_n, $\bar{\omega}_n$ ：それぞれ１自由度振動系の非減衰時および減衰時の固有円振動数

$\omega_{n,\,r}$ ：鋼製タワーの固有円振動数（r：モード次数）

目　次

記号表
序　論 …… 1
参考文献 …… 5

第１章　材料強度のばらつきを考慮した定常不規則振動体の初通過破壊確率 …… 7

１．１　緒　言 …… 7
１．２　強度超過率の算定式 …… 8
１．２．１　応答過程の強度超過率 …… 9
１．２．２　包絡線過程の強度超過率 …… 13
１．３　初通過破壊確率の近似解 …… 15
１．３．１　応答過程による方法 …… 15
１．３．２　包絡線過程による方法 …… 15
１．４　線形１自由度振動系に対する数値解析 …… 16
１．４．１　強度超過率に関する結果と考察 …… 18
１．４．２　初通過破壊確率に関する結果と考察 …… 20
１．４．３　信頼性設計によるばね剛度 …… 23
１．４．４　材料強度が保証される場合の信頼性向上効果 …… 25
１．５　動的信頼性理論による材料強度の特性値の算定 …… 26
１．６　結　言 …… 28
参考文献 …… 29

第２章　材料強度の確率分布の経時変化を考慮した定常不規則振動体の初通過破壊確率 …… 31

２．１　緒　言 …… 31
２．２　初通過破壊確率の評価 …… 32
２．２．１　基本的概念 …… 32
２．２．２　任意時刻における強度の確率密度関数 …… 33
２．２．３　新たな強度超過率の概念 …… 34
２．２．４　応答過程の強度超過率 …… 36
２．２．５　包絡線過程の強度超過率 …… 37

２．３　線形１自由度振動系の初通過破壊確率 …… 38
２．３．１　数値解析モデル …… 38
２．３．２　解析結果および考察 …… 39
２．４　応用例　―― 直立円柱の初通過破壊確率 ―― …… 44
２．４．１　円柱基部断面の降伏超過確率 …… 45
２．４．２　円柱基部断面に生じる縁応力度およびその時間的導関数のr.m.s.値 …… 45
２．４．３　解析モデル …… 45
２．４．４　解析結果および考察 …… 46
２．５　結　言 …… 48
参考文献 …… 49

第３章　静的荷重と定常不規則変動荷重を同時に受ける構造物の初通過破壊確率 …… 51

３．１　緒　言 …… 51
３．２　初通過破壊確率の評価 …… 52
３．２．１　強度の条件付確率分布 …… 52
３．２．２　応答過程の強度超過率 …… 53
３．２．３　包絡線過程の強度超過率 …… 55
３．３　数値解析例　―― 荷重比と初通過破壊確率との関係 ―― …… 56
３．４　応用例　―― 自然風を受ける構造物の信頼性評価問題および
耐風設計への活用 ―― …… 57
３．４．１　変動抗力に対する点状構造物の応答 …… 58
３．４．２　平均風速・地表粗度と初通過破壊確率との関係 …… 58
３．４．３　目標信頼性レベルに応じたガスト応答倍率の決定法および計算例 …… 60
３．５　結　言 …… 64
参考文献 …… 64

第４章　構造物の動的応答係数に対する信頼性工学的アプローチ …… 66

４．１　緒　言 …… 66
４．２　動的応答係数の信頼性工学的算定法 …… 67
４．３　数値解析 …… 69
４．３．１　動的応答係数および安全係数と信頼性レベルとの相互関係 …… 70
４．３．２　荷重比と動的係数との関係 …… 71

4．3．3　振動継続時間が動的応答係数に及ぼす影響 …… 72
4．4　事例研究　―― 塔状構造物のガスト応答倍率 ―― …… 72
4．4．1　解析モデルの概要 …… 72
4．4．2　風荷重 …… 73
4．4．3　ガスト応答解析 …… 74
4．4．4　規準振動モードのスプライン関数近似法の妥当性 …… 75
4．4．5　解析モデルのガスト応答解析とガスト応答倍率 …… 77
4．5　結　言 …… 80
参考文献 …… 81

第5章　材料強度のばらつきを考慮した非定常不規則振動体の初通過破壊確率 …… 83

5．1　緒　言 …… 83
5．2　強度超過率および初通過破壊確率の算定式 …… 84
5．2．1　応答過程の強度超過率 …… 84
5．2．2　包絡線過程の強度超過率 …… 87
5．3　線形1自由度振動系の初通過破壊確率 …… 89
5．3．1　不規則応答の評価式 …… 89
5．3．2　数値解析モデル …… 92
5．3．3　不規則応答の解析結果 …… 93
5．3．4　初通過破壊確率に及ぼす各種要因の影響 …… 95
5．3．5　信頼性設計における材料強度のばらつきの影響 …… 102
5．3．6　材料強度が保証される場合の信頼性向上効果 …… 103
5．5　結　言 …… 104
参考文献 …… 105

第6章　複素変調法による非定常スペクトル解析法 …… 107

6．1　緒　言 …… 107
6．2　複素変調法による非定常パワースペクトル密度関数と位相の算定法 …… 108
6．2．1　非定常パワースペクトル密度関数の定義 …… 108
6．2．2　複素変調法（ＣＤ法） …… 108
6．2．3　ＣＤ法による非定常スペクトルおよび位相の算定 …… 110
6．2．4　本解析で使用したフィルター …… 111

6．3　数値解析 …… 112
6．3．1　使用した地震動記録 …… 112
6．3．2　解析した周波数帯域 …… 113
6．3．3　地震動の再合成 …… 114
6．3．4　解析結果と考察 …… 115
6．4　結　言 …… 121
参考文献 …… 122

第7章　構造振動系の非定常スペクトル応答解析法 …… 123

7．1　緒　言 …… 123
7．2　非定常スペクトルを媒介とする外力と応答との関係式 …… 124
7．3　CD法による変調関数の新算定法 …… 125
7．4　数値解析による本方法の検討 …… 127
7．4．1　本方法の妥当性の検証 …… 127
7．4．2　地震動の非定常スペクトルと変調関数 …… 128
7．4．3　応答解析結果および考察 …… 132
7．5　結　言 …… 137
参考文献 …… 137

第8章　非定常スペクトルによってモデル化される不規則変動外力を受ける
構造物の初通過破壊確率 …… 139

8．1　緒　言 …… 139
8．2　線形1自由度振動系の初通過破壊確率 …… 140
8．2．1　非定常応答および応答速度の分散および共分散 …… 140
8．2．2　数値解析例 …… 143
8．3　事例研究　―― 地震動を受ける塔状構造物の初通過破壊確率 ―― …… 147
8．3．1　非定常応答および応答速度の分散および共分散 …… 147
8．3．2　数値解析例 …… 151
8．4　結　言 …… 158
参考文献 …… 158

結　論 …… 160

謝　辞 …… 163

付　録 …… 164

付録 1　構造物の振動継続時間 …… 164

付録 2　定常正規応答過程に従う構造物の初通過破壊確率と動的応答係数の算定手順 …… 164

参考文献 …… 166

序　　論

わが国における土木構造物は，地震や台風などの非常に厳しい自然環境にさらされる。このような苛酷な荷重に対してもなお人命に被害が及ばないように，信頼性に富む，強固な構造物を設計し，構築しなければならないことはいうまでもない。そのために多くの研究者・技術者がこの種の荷重の特性を調査し，より精度の高い構造解析手法の発展に努め，またより優れた築造技術の開発に取り組んできた。

従来こうした方面の研究は非常に積極的になされ，これまでに膨大な量の研究成果が発表されてきた。それに比べれば，構造物の安全性や信頼性の的確な評価方法あるいはそれを活用した構造設計法に関する研究はきわめて乏しいものであった。本来構造物の安全性評価の社会的意義は重大なはずであるが，現状ではきわめて経験的かつ直観的な安全率（safety factor ）が，一般には安全性に対する唯一の判定基準になっている。

しかし，この安全率だけでは適切な安全性評価ができないことは周知のとおりである[1)～6)]。さらに近年のように安全性に対する世人の関心が高まってくると，いかに安全であるかということよりも，むしろ危険度（risk）がどの程度であるかということを，何らかの数理的指標を用いて明確にせざるをえなくなってきた。残念ながら，従来の安全率ではこの要求には応えにくい。

このように，安全率のもつ本来的なあいまいさ，社会的な客観情勢の変化，あるいは荷重や材料強度に関する基礎的統計資料の充実，さらにはコンピューターのめざましい進歩などを背景として，最近では，安全性指標（safety index）や破壊確率（failure probability ）を安全性あるいは信頼性の指標とした構造設計法が注目を集めている[7)～9)]。それだけではなく，すでにいくつかの示方書の中に，完全とはいえないまでも，その概念は具体的に反映されている[10),11)]。

ただ，現時点では，それも静的荷重に対する構造設計の範囲にとどまっており，動的荷重に対する設計法については今後の研究に託されているようである。その理由としてはいくつか考えられるが，これまでほとんどの構造設計を，すべて静的設計に委ねてきたことが主因ではないかと思われる。もちろん，動的荷重に対する構造物の破壊機構そのものが，いまだ完全には解明されていないことも大きな理由の１つであろう。

しかし，衝撃係数やガスト応答倍率に代表される，いわゆる動的応答係数（dynamic response factor ）などは，現段階でも，信頼性理論を基盤とする構造設計の枠組の中に取り入れることは不可能ではあるまい。このことは構造材料の降伏点，変位制限あるいは振動恕限度などを広義の意味での破壊の閾値とするような設計問題についても同様である。すなわち，これらはいずれも許容応力度設計法の概念を大きく越えるものではなく，長い年月にわたって蓄積してきた知識や経験を有効に活用しうる問題である。

本研究は以上のような状況判断のもとに，不規則変動外力に対する構造物の信頼性解析法とその構造

設計への活用へのアプローチを見付けだすことを目的としておこなわれたものである。

ところで，地震動や台風などの不規則外力については，発生の不規則性と，個々の現象の時空間的な不規則変動とが考えられ，前者は離散的，後者は連続的な確率過程によって記述されることが多い。耐用期間における構造物の信頼度，あるいはそれと相補的な関係にある破壊確率は，時間的スケールの異なるこの2種類の不規則性に密接に関連するが，本研究では，1回の地震動あるいは台風通過に対する構造物の信頼性解析に論点を絞っている。なぜなら，そこで得られる成果を耐用期間における構造物の信頼性問題に拡張することは容易であると判断したからである。もちろん，その場合，地震や台風の発生過程およびその強度（荷重強度）の確率構造[12]～[14]に対する精緻な情報が不可欠であることはいうまでもない。

さて，構造物の動的破壊現象は多様である。たとえば，可撓性橋梁構造物のフラッターによる破壊のような動的不安定現象に起因する破壊，大地震による終局破壊，あるいは長期間にわたる材料強度の劣化による破壊などがある。これらの破壊現象については，いずれも破壊のメカニズムそのものが非常に複雑であり，現段階でそれらの破壊に対する構造物の信頼性を数理的に論議することはかなり難しい。そこで本研究では限界状態設計法の概念に従って，構造材料の降伏点や構造物の変位制限などを破壊の閾値とするような，現時点でもアプローチが可能な使用限界状態に対する構造信頼性問題のみを取り扱った。

この場合，ある限定時間にわたって不規則変動外力の作用を受ける構造物の主要な点の変位，ひずみあるいは応力が，それぞれ変位制限値，ひずみ制限値あるいは材料の降伏点などの閾値を，振動継続時間中に少なくとも一回超過することが破壊の条件になる。そして，その状態が生起する確率が破壊確率になる。

さて，本研究の主題となるこの破壊確率は，通常，初通過破壊確率（first passage failure probability）といわれており，確率過程論における初通過理論[15]～[17]に基づいて推定することができる。しかし，いまだその厳密解は得られていないので，当面は何らかの近似解析法に頼らざるを得ない。

Yang[18]はそれまでの各種近似解析法を総括的に比較・検討することによって，極値点過程（extreme point process ）の初通過確率に関する漸化式（recurrence formula）を用いる方法が最良であるとの結論を得ているが，不規則過程と閾値とが十分に離れており，不規則過程が閾値を超過する現象が非常にまれであれば，現象の発生過程をポアソン過程（poisson process ）とみなして初通過確率を求める簡便な方法を用いても，両者に大きな差異はないようである。

さらに本研究では，この初通過破壊問題を動的構造信頼性理論の体系の中に組み入れて，積極的に構造設計に活用することを目的としているので，従来の研究とは異なり，閾値を確率量として解析を進める必要がある。したがって定式化の簡便性，算定式の適用性，さらにYangの研究成果を総合的に判断し，本研究では上述のポアソン過程に基づく方法によって初通過破壊確率の近似算定式を導出した。なおこの種の問題では，初通過理論によってある限定時間における不規則過程の最大値分布を求めておき，それを静的信頼性理論に持ち込んで間接的に破壊確率を推定することも多い。しかし本研究では計算の簡

便性や解析法の発展性を考慮して，初通過理論を直接初通過破壊確率の算定式の定式化に用いている。

本論文では，まず前半の部分（第１章～第４章）で定常不規則外力を受ける振動系（定常不規則振動体と称している）の初通過破壊問題を扱い，後半（第５章～第８章）で，地震動に代表されるような非定常不規則外力を受ける振動系（非定常不規則振動体と称する）の初通過破壊問題について論じるが，各章の内容は以下のとおりである。

第１章では，まず定常不規則外力を受ける振動系の応答が正規確率過程によって記述できるものとして，応答過程が正規分布，あるいは対数正規分布に従う閾値を超過する確率，すなわち初通過破壊確率の算定式を，前述のポアソン近似の方法に基づいて誘導する。ただし，応答過程が狭帯域の周波数特性を示し，かつ閾値が相対的に低い場合には，応答が閾値を超過する現象が互いに独立であるとするポアソンの仮定は成立しにくくなるので，応答の包絡線過程（envelope process）による定式化も併せておこなう。本論文では便宜上，応答過程を用いる前者の方法を「応答過程による方法（またはＲＰ法）」，包絡線過程に基づく後者の方法を「包絡線過程による方法（またはＥＰ法）」と称している。そのとき，構造材料の強度は基本的な物理的性質，あるいは製品・載荷試験などによって下限や上限に制限が付けられる場合もありうるので，そのような問題への適用が可能になるよう配慮する。さらに，材料強度の確率分布形や変動係数と初通過破壊確率との関係をパラメトリックに検討するために，いくつかの無次元パラメーターのみによって算定式を表すよう留意している。

次に導出した算定式を線形１自由度振動系の初通過破壊問題に適用し，振動系の減衰特性と両近似解法（ＲＰ法とＥＰ法）との関係，あるいは強度のばらつきが破壊確率に及ぼす影響などを定量的に検討する。さらに動的荷重に対する信頼性設計，載荷試験の信頼性工学的意義，ばらつきを有する材料強度の特性値などについても言及する。

なお，振動系の質量やばね定数，さらには減衰定数などを確率量として不規則応答量を算定すれば[19)～21)]，より精度の高い初通過破壊確率を推定することができるが，前２者については変動係数が小さいので本質的影響がなく，後者については統計データが極めて乏しい現状である。それで本研究ではとりあえず考慮外とした。

第２章では，任意時刻における材料強度の確率分布が，その時刻までの振動系の非破壊条件によって下限に条件が付けられることを考慮して，前章で示した近似解法を改良する。そして数値解析によって前章の方法との比較をおこない，両解析法の適用範囲を明らかにする。

第３章では，自重などの静的荷重と定常不規則変動荷重を同時に受ける構造部材あるいは構造物の初通過破壊問題を考究する。

まず初通過破壊確率の算定式の定式化をおこない，次に数値解析によって，動的荷重効果と静的荷重効果との比，すなわち荷重比と構造部材の信頼性との関係を考察する。また応用例としてガストを受ける構造物の信頼性評価問題を取り上げ，平均風速や地表粗度と破壊確率との関係を検討する。さらに構造物の信頼性レベルとの対応を確率論的に説明できる新たなガスト応答倍率の算定法を提示する。

第４章では，前章の後半で言及したガスト応答倍率の問題を，より一般的な動的応答係数の問題とし

て論じる。

道路橋や鉄道橋における衝撃係数や上述のガスト応答倍率などの動的応答係数は，現行の示方書や設計規準の中で動的応答の最大値の期待値等を用いて画一的に定義されている。これに対して本章では，構造物や構造部材の重要度に応じた目標信頼性レベルに対応する動的応答係数を簡便に算定できる新たな手法を提案する。そして同手法により実際の鋼製タワーのガスト応答倍率を算定し，信頼性工学的立場で考えれば，同手法が従来のDavenport の方法[22] よりもより合理的で，かつ柔軟性に富む方法であることを示す。

非定常問題の緒となる第５章では，まず振幅の非定常性を表す形状関数と定常正規確率過程との積でモデル化ができるような非定常不規則外力に対する振動系の初通過破壊確率の算定式を，前述のＲＰ法とＥＰ法とによってそれぞれ誘導する。閾値の確率特性や誘導過程で留意する点については，第１章で述べたとおりである。

次にパラメトリック解析をおこなって，ＲＰ法とＥＰ法との比較，あるいは閾値の確率分布形や変動係数の大きさなどと破壊確率との関係について検討する。さらに外力の形状関数が破壊確率に及ぼす影響についても，振動系の減衰特性を媒介として考察する。

しかし，振幅特性を表す関数と周波数特性を示す関数に分離できる過程（separable process ）によってモデル化できる非定常外力は特殊な外力であるから，次章以降の３章によって，より一般的な非定常不規則外力に適用できる信頼性解析法について論じる。

まず第６章では，非定常外力を非定常スペクトルによって表すために，Priestley[23]によって開発された発展スペクトル（evolutionary spectrum ）を複素変調法[24] （complex demodulation method ，以下単にＣＤ法と称する）を活用して求める方法を提案する。この非定常スペクトルが，次章で述べる非定常スペクトル応答解析法の外力スペクトルになる。そして，同方法を実際の地震動の非定常解析に適用し，従来の解析法との比較によって，その有用性を明らかにする。

第７章では，非定常スペクトルによって特徴づけられた非定常不規則外力を受ける振動系の応答の非定常スペクトルを算出する方法について述べる。その方法は，基本的には Hammond[25] や Shinozuka[26] によって定式化された外力－応答関係式に基づいている。しかしそれを具体的に使用するためには，非定常スペクトルの定義式に含まれる変調関数（modulating function ）を非定常外力の原波形より描出しなければならない。Hammond は直観的な判断により，変調関数を実関数に限定して理論を展開しているが，明らかに不合理性を包含している。それでどうしても複素関数として扱うことの困難性を克服する必要に迫られていた。そこで本章では，ＣＤ法を活用して変調関数の実部と虚部を推定する新しい手法を提示する。そして同手法を用いて地震動を受ける振動系の応答解析をおこない，その妥当性と適用性を検証する。

引き続き第８章では，非定常スペクトルによって与えられた非定常不規則変動外力に対する構造物の信頼性評価システムを確立するための基礎的資料を得るために，まず前章で示した外力－応答関係式に基づいて応答あるいは応答速度の分散および共分散の算定式を導出する。そしてパラメトリック解析に

より，地震動に対する振動系の初通過確率について検討する。さらに事例研究として，実際の鋼製タワーの応答統計量と降伏破壊に対する初通過破壊確率を算定し，提示する信頼性評価システムの有用性あるいは信頼性解析の必要性について言及する。

最後に結論では各章の研究内容と主な成果を総括し，今後の展望について簡単に述べる。

参　考　文　献

1）　鵜戸口英善：安全率と設計の安全性，金属，PP.33-36，1970年12月.

2）　松尾　稔：土構造物の安全性評価における土質力学の役割，土木学会誌，Vol.58，No.2，PP. 18-24 ，1973年２月.

3）　高岡宣善・星谷　勝：信頼性理論と確率論の土木工学への応用，土木学会誌，Vol.60，No.9，PP. 61-69 ，1975年８月.

4）　伊藤　学：構造設計における安全性の規範，土木学会誌，Vol.60，No.10，PP. 35-43 ，1970年９月.

5）　高岡宣善：構造物の設計・安全性・信頼性，土木学会誌，Vol.61，No.3，PP. 33-41 ，1976年３月.

6）　藤野陽三：確率論に基づく安全性照査法と構造設計，土木学会誌，Vol.63，No.2，PP. 33-39，1978年２月.

7）　ルジャニーツィン，Ａ．Ｐ．著／高岡宣善訳：構造物の信頼性解析，丸善，1980年12月.

8）　Thoft-Christensen, P. and Baker, M. J. :Structural Reliability Theory and Its Application, Springer-Verlag, 1982.

9）　シュエラー，Ｇ．Ｉ．著／小西一郎・高岡宣善・石川浩共訳：構造物の安全性と信頼性，丸善，1984年11月.

10）　CIRIA:Rationalisation of Safety and Serviceability Factors in Structural Codes, REPORT 63, London, 1977.

11）　Ellingwood, B, Galambos, T. V., MacGregor, J. G. and Cornell, C. A. :Development of a Probability Based Load Criterion for American National Standard A58, U. S. Dept. of Com., Natl. Bur. of Standards, June, 1980.

12）　亀田弘行：地震時における最大地動の確率論的研究，土木学会論文報告集，No.159，PP.1-12，1968年11月.

13）　Komatsu, S. and Nakayama, T. : Some Problems of Wind Loads and its Consideration in Statistical Evaluation for Structural Safety, Proceedings of the Symposium on Loadings and Safety of Structures, 19th National Symposium on Bridge and Structural Engineering,

pp.37-52, 1974.

14) 藤野陽三・伊藤　学・酒井利夫：年最大風速記録による設計基本風速の算定に関する研究，土木学会論文報告集，No.305, PP.23-34, 1981年1月.

15) Rice, S.O. :Mathematical Analysis of Random Noise, Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, ed. by Wax, N., Dover, N.Y., pp.136-246, 1955.

16) Stratonovich, R.L. :Topics in the Theory of Random Noise, Vol.1, Gordon and Breach, N.Y., Chap.6, pp.143-176, 1963.

17) Cramer, H. and Leadbetter, M.R. :Stationary and Related Stochastic Processes, John Wiley & Sons, Inc., 1967.

18) Yang, J-N, :Approximation to First Passage Probability, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.101, No.EM4, pp.361-372, Aug., 1975.

19) 星谷　勝・千葉利晃：弾性せん断ばりの自由振動に与える不確定要因の影響，土木学会論文報告集，No.234, pp.23-31, 1975年2月.

20) 山田善一・古川浩平・北島　清：長大吊橋タワーピアー系の地震応答に及ぼす不確定要因の影響に関する研究，土木学会論文報告集，No.293, pp.23-33, 1980年1月.

21) 中桐　滋・久田俊明：確率有限要素法入門，培風館，1985年5月.

22) Davenport, A.G. :Note on the Distribution of the Largest Value of a Random Function with Application to Gust Loading, Proceedings, Institution of Civil Engineers, Vol.28, pp.187-196, 1964.

23) Priestley, M.B. :Evolutionary Spectra and Non-stationary Processes, Journal of Royal Statistical Society, Ser.B, Vol.27, pp.204-237, 1965.

24) Granger, C.W.J. :Spectral Analysis of Economic Time Siries, Princeton University Press, Chapter 9,10, 1964.

25) Hammond, J.K. :On the Response of Single and Multidegree of Freedom Systems to Non-stationary Random Excitations, Journal of Sound and Vibration, Vol.7, No.3, pp.393-416, 1968.

26) Shinozuka, M. :Random Processes with Evolutionary Power, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.96, No.EM4, pp.543-545, 1970.

第１章　材料強度のばらつきを考慮した定常不規則振動体の初通過破壊確率

１．１　緒　言

確率過程があるレベルを超過する確率は，一般には初通過確率（first passage probability ）として知られているが，構造物などの破壊問題を対象にする場合には特に初通過破壊確率（first passage failure probability ）と言われている。

初通過確率に関する Rice[1] の基礎的研究が構造物の不規則振動問題に応用されたのは比較的新しく，Eringen[2] が１９５８年に耐震問題に適用したのがはじめてであろうと思われる。その後の Rosenbluth-Bustamante[3]，Shinozuka[4]，小松[5]による研究については，後藤・亀田が文献６）で詳述している。同文献において後藤・亀田は，異なる時刻間の応答の相関性を考慮して，任意の確率過程に従う外力に対する構造物の最大応答の確率分布に関する有用な知見を示している。また Crandall ・Chandiramani ・Cook[7]は，ホワイトノイズ状の外力を受ける１自由度振動系の応答がある閾値をはじめて越える時刻の確率分布をシミュレーションによって求め，初通過確率を算出しているが，閾値が大きい場合には長時間にわたる計算時間を要するという欠点をもっている。さらに Shinozuka・Yang[8]は，Shinozuka[4] の提案した初通過確率の下界を Gallot[9] の方法によって改善し，それまでの上下界の幅をかなり小さくすることに成功している。Lin[10),11]は Stratonovich[12]によって提案された random points model を用いてホワイトノイズ状の外力を受ける１自由度振動系の初通過確率を検討し，良好な結果を得ている。この結果は Yang ・Shinozuka[13]によって，前述の Shinozukaの上下界法，ポアソン近似解法などによる結果と比較され，その優位性が示されている。一方 Racicot・Moses[14]も同モデルを対象にして，Lyon[15] が指摘したクランプサイズ（clump size）を考慮して，かなり精度のいい近似解を提案した。さらに Yang[16]は，extreme point process によって連続的な不規則過程の初通過確率に関する漸化式とその近似解法を示し，数値解析による他の多くの近似解法との比較によってその妥当性を立証している。

以上のように，初通過確率の近似計算法に関する研究は数多くみられるが，いずれも閾値を確定量としている点では共通している。しかし構造材料の強度は，たとえ同一条件のロットより選び出されたものでも，不純物の量や分布，あるいは結晶構造の相違などのために本質的にばらつきを有するもので[17]，これらの理論を構造物の安全性評価法に適用したり，さらに動的構造信頼性理論の体系の中に組み入れるためには，材料強度を確率量としたものに拡張しておくことが望ましい。また，材料強度のばらつきが初通過破壊確率に及ぼす影響を具体的に把握しておくことも必要であると考える。

Yang[16] の研究成果をみれば，広帯域の振動特性を示す不規則応答については，応答と閾値が十分に離れている限り，応答が閾値を越える現象がポアソン過程を構成すると仮定して初通過確率を評価しても，ほぼ満足のゆく結果が得られるものと判断できる。一方狭帯域の振動特性を有する不規則応答であ

れば，応答の包絡線が閾値を超過する現象を考えればよい。いずれにしてもこの場合，応答や包絡線が閾値を越える単位時間当りの回数の期待値で定義される期待横断率（expected crossing rate）を求めさえすれば，初通過確率を簡単に計算することができる。本研究では計算の簡便性と Yang の研究成果とを考え併せて，このポアソンの仮定を活用することによって定常不規則変動外力に対する構造物の初通過破壊確率について考究することにした。

本章では，まず材料強度を確率量とみなし，いくつかの無次元パラメーターにより与えられる定常正規応答過程とその包絡線過程の両強度超過率（上述の期待横断率と同義）および初通過破壊確率の表式を提示する。そして線形１自由度振動系を対象としたパラメトリック解析の結果に基づいて，主として材料強度のばらつきが振動系の初通過破壊確率に及ぼす影響を詳細に検討する。

１．２　強度超過率の算定式

構造物のある主要な点の応力の時間的変動を表す不規則応答過程を $\boldsymbol{x}(t)$，その包絡線過程を $\boldsymbol{a}(t)$ とする（図１．１）。さらに $\boldsymbol{x}(t)$ は零平均値を有する定常正規確率過程であるとする。このとき $\boldsymbol{x}(t)$ および $\boldsymbol{a}(t)$ の強度超過率 $\nu_{\boldsymbol{x}}^{+}(\boldsymbol{S})$ および $\nu_{\boldsymbol{a}}^{+}(\boldsymbol{S})$ の算定式は以下のように誘導される。ここに $\boldsymbol{S}$ は材料強度を表しており，さらに肉太の文字によって表した変数は，その変数が確率変数であることを示している。また，ν に付した肩付添字＋は，応答や包絡線が正の勾配で正の材料強度を超過することを意味している。さて，材料強度の確率密度関数を $f_{\boldsymbol{S}}(S)$ とするとき，強度が S と $S+dS$ との間に存在する確率は

$$\mathrm{Prob}[S \leqq \boldsymbol{S} \leqq S+dS] = f_{\boldsymbol{S}}(S)\,dS \qquad (1.1)$$

と表せる。以下 Prob［A］は事象 A の生起する確率を表す。

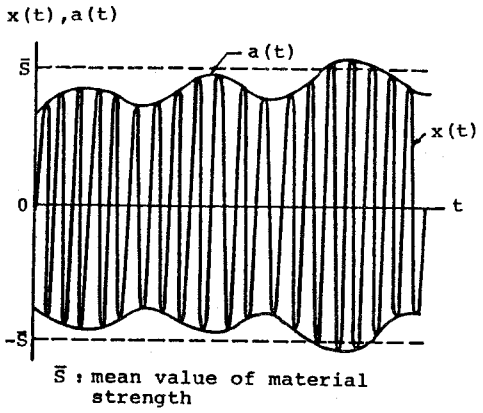


図１．１　応答が材料強度を超過する現象の概略図

また Rice の理論によれば，応答が任意時刻 t_n では S より小さく，時刻 t_n+dt に正の勾配で S を越える確率は，応答と応答速度 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ の結合確率密度関数 $f_{\boldsymbol{x}\dot{\boldsymbol{x}}}(x, \dot{x})$ を用いて次のように与えられる。

$$\mathrm{Prob}[\boldsymbol{x}(t_n) < S \cap \boldsymbol{x}(t_n+dt) \geqq S] = dt\int_0^{\infty} \dot{x} f_{\boldsymbol{x}\dot{\boldsymbol{x}}}(S, \dot{x})\,d\dot{x} \qquad (1.2)$$

以下 Prob［$A \cap B$］は事象 A と事象 B の同時生起確率を意味する。

さらに材料強度と応答現象が互いに独立であると仮定すれば，強度が S と $S+dS$ との間に存在し，かつ応答が微小時間 dt の間に S を越える確率は，式（１．１）と式（１．２）の積により与えられ，

$$\mathrm{Prob}\,[S \leqq S \leqq S+dS \cap x(t_n) < S \cap x(t_n+dt) \geqq S]$$
$$= dt\left\{\int_0^\infty \dot{x} f_{x\dot{x}}(S,\dot{x})\,d\dot{x}\right\} f_S(S)\,dS \qquad (1.3)$$

となる。

したがって材料強度の積分区間を R_S で表せば，応答が dt の間に材料強度を超過する確率は

$$\mathrm{Prob}\,[x(t_n) < S \cap x(t_n+dt) \geqq S] = dt\int_{R_S}\left\{\int_0^\infty \dot{x} f_{x\dot{x}}(S,\dot{x})\,d\dot{x}\right\} f_S(S)\,dS \qquad (1.4)$$

となり，強度超過率の算定式が次式のように得られる。

$$\nu_x{}^+(S) = \int_{R_S}\left\{\int_0^\infty \dot{x} f_{x\dot{x}}(S,\dot{x})\,d\dot{x}\right\} f_S(S)\,dS \qquad (1.5)$$

任意時刻における材料強度の確率密度関数がその時刻までの構造物の非破壊条件に左右されない場合には，この $\nu_x{}^+(S)$ は時刻には無関係である。

１．２．１　応答過程の強度超過率

応答が零平均値を有する定常正規確率過程を示す場合，応答と応答速度とは互いに独立であり，相関係数は零である。したがって両者の結合確率密度関数は，

$$f_{x\dot{x}}(x,\dot{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x{}^2} - \frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}{}^2}\right) \qquad (1.6)$$

と表せる。式中 $\sigma_x{}^2$ ， $\sigma_{\dot{x}}{}^2$ はそれぞれ $x(t)$ ， $\dot{x}(t)$ の分散である。

式（１．６）を式（１．５）に代入して次式が得られる。

$$\nu_x{}^+(S) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x}\int_{R_S}\exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_x{}^2}\right) f_S(S)\,dS \qquad (1.7)$$

さて材料強度の規定は設計思想にかかわる問題であるが，本研究ではとりあえず現行の許容応力度設計法もしくは限界状態設計法における使用限界状態の概念に基づき，降伏点と考えておく。その場合，その確率密度関数が，正規分布もしくは対数正規分布によって記述されるとしても，実験データから大きく外れることはないものと考えられる[17]。したがって本研究では $f_S(S)$ に２通りの密度関数を適用する。ただし材料の物理的基本性質および材料規約などによって，降伏点あるいは耐力の上限・下限に制約が与えられることも考えられるので，そのような場合にも対処しうるよう，確率密度関数が条件付正規あるいは条件付対数正規確率密度関数で与えられるときの算定式も誘導する。

ａ）材料強度が条件付正規分布に従う場合

材料強度の確率分布が正規分布に従い，さらにその上限，下限がそれぞれ有限値 S_u ， S_l で規定さ

れる場合には，その確率密度関数は次式で示される。

$$f_S(S)=\frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma_S\{\mathrm{Erf}(\lambda_l/\sqrt{2})-\mathrm{Erf}(\lambda_u/\sqrt{2})}\exp\left\{-\frac{(S-\bar{S})^2}{2\sigma_S^2}\right\} \qquad (1.8)$$

ここに $\bar{S}$ ，σ_S はそれぞれ平均値と標準偏差であり，λ_u ，λ_l ，$\mathrm{Erf}(\cdot)$ はそれぞれ

$$\lambda_u=\frac{S_u-\bar{S}}{\sigma_S},\quad \lambda_l=\frac{S_l-\bar{S}}{\sigma_S} \qquad (1.9)$$

$$\mathrm{Erf}\ (y)=\int_y^\infty \exp(-z^2)dz：誤差関数 \qquad (1.10)$$

である。

式（１．８）を式（１．７）に代入すれば，

$$\nu_{x,CN^+}(S)=\frac{\sigma_x}{2\sqrt{2}\,\pi\sigma_x\sigma_s\{\mathrm{Erf}\ (\lambda_l/\sqrt{2})-\mathrm{Erf}(\lambda_u/\sqrt{2})\}}$$
$$\cdot\int_{S_l}^{S_u}\exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_x^2}\right)\exp\left\{-\frac{(S-\bar{S})^2}{2\sigma_S^2}\right\}dS \qquad (1.11)$$

となる。 $\nu_{x,CN^+}(S)$ は材料強度が条件付正規分布に従うときの強度超過率を表し，以下でも同様に，下付添字 N ，CLN ，LN はそれぞれ材料強度が無条件正規，条件付対数正規，無条件対数正規の各分布に従うことを意味している。

さて式（１．１１）の右辺の定積分 I は式（１．１０）で示した誤差関数によって表せる。すなわち，

$$I=\sqrt{\frac{2\sigma_x^2\sigma_S^2}{\sigma_x^2+\sigma_S^2}}\exp\left\{\frac{(\bar{S}^3-2\sigma_S^3)\sigma_x^2+2\sigma_S^5}{2\bar{S}\sigma_S^2(\sigma_x^2+\sigma_S^2)}\right\}\left[\mathrm{Erf}\left\{\frac{(\sigma_x^2+\sigma_S^2)S_l-\bar{S}\sigma_x^2}{\sqrt{2}\,\sigma_x\sigma_S\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_S^2}}\right\}\right.$$
$$\left.-\mathrm{Erf}\left\{\frac{(\sigma_x^2+\sigma_S^2)S_u-\bar{S}\sigma_x^2}{\sqrt{2}\,\sigma_x\sigma_S\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_S^2}}\right\}\right] \qquad (1.12)$$

となる。

ここで次の無次元パラメーターを導入する。

$$\delta_S=\sigma_S/\bar{S} \qquad (1.13)$$

$$\bar{m}=\bar{S}/\sigma_x \qquad (1.14)$$

δ_S は材料強度の変動係数であり， $\bar{m}$ はいわば動的信頼性解析における中央安全率とでもいうべきパラメーターである。

さらに材料強度の上限，下限をそれぞれ

$$S_u=\bar{S}+\kappa_u\sigma_S,\quad S_l=\bar{S}-\kappa_l\sigma_S \qquad (1.15)$$

とすれば，式（１．９）より

$$\lambda_u=\kappa_u,\quad \lambda_l=-\kappa_l \qquad (1.16)$$

なる関係が成立することは明らかである。

式（1.15）を式（1．12）に代入し，さらに式（1．13）と式（1．14）の関係を考慮し，得られた I の式と式（1．16）を式（1．11）に代入すれば，材料強度が条件付正規分布に従う場合の強度の算定式として次式が得られる。

$$\nu_{x,CN^+}(\bar{m},\delta_S)=\frac{\sigma_{\dot{x}}}{2\pi\sqrt{1+\bar{m}^2\delta_S{}^2}\,\sigma_x}\;\frac{\mathrm{Erf}(\alpha_l/\sqrt{2})-\mathrm{Erf}(\alpha_u/\sqrt{2})}{\mathrm{Erf}(-\kappa_l/\sqrt{2})-\mathrm{Erf}(\kappa_u/\sqrt{2})}\cdot\exp\left\{-\frac{\bar{m}^2}{2(1+\bar{m}^2\delta_S{}^2)}\right\} \tag{1.17}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\alpha_l&=\frac{\bar{m}^2\delta_S-(1+\bar{m}^2\delta_S{}^2)\kappa_l}{\sqrt{1+\bar{m}^2\delta_S{}^2}}\\ \alpha_u&=\frac{\bar{m}^2\delta_S+(1+\bar{m}^2\delta_S{}^2)\kappa_u}{\sqrt{1+\bar{m}^2\delta_S{}^2}}\end{aligned}\right\} \tag{1.18}$$

なお式（1．17）の右辺の $\sigma_{\dot{x}}/\sigma_x$ は無次元量にはならないが，後述するように，初通過破壊確率を計算するときには，振動の継続時間を用いて無次元化される。

b）材料強度が正規分布に従う場合

この場合は前項の式（1．17）において，$\kappa_l\to\infty$，$\kappa_u\to\infty$ とすれば所要の算定式が得られる。このとき式（1．18）より $\alpha_l\to-\infty$，$\alpha_u\to\infty$ であることは明らかで，したがって

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{Erf}(-\kappa_l/\sqrt{2})=\mathrm{Erf}(\alpha_l/\sqrt{2})=\sqrt{\pi}\\ &\qquad\qquad(\kappa_l\to\infty,\ \alpha_l\to-\infty)\\ &\mathrm{Erf}(\kappa_u/\sqrt{2})=\mathrm{Erf}(\alpha_u/\sqrt{2})=0\\ &\qquad\qquad(\kappa_u\to\infty,\ \alpha_u\to\infty)\end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

となる。

式（1．19）を式（1．17）に代入して次式を得る。

$$\nu_{x,N^+}(\bar{m},\delta_S)=\frac{\sigma_{\dot{x}}}{2\pi\sqrt{1+\bar{m}^2\delta_S{}^2}\,\sigma_x}\;\exp\left\{-\frac{\bar{m}^2}{2(1+\bar{m}^2\delta_S{}^2)}\right\} \tag{1.20}$$

c）材料強度が条件付対数正規分布に従う場合

材料強度の上限，下限が式（1．15）で与えられるものとすれば，その確率密度関数は次式で表せる。

$$f_S(S)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{s*}S\{\mathrm{Erf}(\beta_l/\sqrt{2})-\mathrm{Erf}(\beta_u/\sqrt{2})\}}\cdot\exp\left\{-\frac{(S^*-\bar{S}^*)^2}{2\sigma_{s*}{}^2}\right\} \tag{1.21}$$

式中，

$$\left.\begin{aligned} &S^*=\ln S \\ &\sigma_{S^*}=\sqrt{\ln(1+\delta_S{}^2)} \\ &\bar{S}^*=\ln\bar{S}-0.5\,\sigma_{S^*}{}^2=\ln(\bar{S}/\sqrt{1+\delta_S{}^2}) \end{aligned}\right\} \qquad (1.22)$$

$$\left.\begin{aligned} &\beta_l=\frac{\ln\{(1-\kappa_l\delta_S)\sqrt{1+\delta_S{}^2}\}}{\sqrt{\ln(1+\delta_S{}^2)}} \\ &\beta_u=\frac{\ln\{(1+\kappa_u\delta_S)\sqrt{1+\delta_S{}^2}\}}{\sqrt{\ln(1+\delta_S{}^2)}} \end{aligned}\right\} \qquad (1.23)$$

式（１．２１）を式（１．７）に代入すれば，

$$\nu_{x,CLN^+}(S)=\frac{\sqrt{\pi}\,\sigma_{\dot{x}}}{(2\pi)^{2/3}\sigma_x\sigma_{S^*}\{\mathrm{Erf}(\beta_l/\sqrt{2})-\mathrm{Erf}(\beta_u/\sqrt{2})\}}$$
$$\cdot\int_{S_l}^{S_u}\frac{1}{S}\exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_x{}^2}\right)\exp\left\{-\frac{(S^*-\bar{S}^*)^2}{2\sigma_{S^*}{}^2}\right\}dS \qquad (1.24)$$

が得られ，これを $\bar{m}$ と δ_S を用いて書き改めれば次のようになる。

$$\nu_{x,CLN^+}(\bar{m},\delta_S)=\frac{\sigma_{\dot{x}}}{4\sqrt{2}\,\pi\sigma_x\sqrt{\ln(1+\delta_S{}^2)}\{\mathrm{Erf}(\beta_l/\sqrt{2})-\mathrm{Erf}(\beta_u/\sqrt{2})\}}\int_{R_l}^{R_u}\exp(-z)\frac{1}{z}$$
$$\cdot\exp\left[-\frac{\{\ln\sqrt{2(1+\delta_S{}^2)z}-\ln\bar{m}\}^2}{2\ln(1+\delta_S{}^2)}\right\}dz \qquad (1.25)$$

式中，

$$R_l=\frac{\bar{m}^2(1-\kappa_l\delta_S)^2}{2},\quad R_u=\frac{\bar{m}^2(1+\kappa_u\delta_S)^2}{2} \qquad (1.26)$$

ただし，右辺の定積分は数値積分に依らざるをえない。

ｄ）材料強度が対数正規分布に従う場合

この場合は式（１．２５）において，$\kappa_l\to\bar{S}/\sigma_S=1/\delta_S$ ，$\kappa_u\to\infty$ とすればよい。このとき式（１２３）より，$\beta_l\to-\infty$ ，$\beta_u\to\infty$ ，さらに式（１．２６）より $R_l\to0$ ，$R_u\to\infty$ となることがわかる。

したがって式（１．２５）において，

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Erf}(\beta_l/\sqrt{2})=\sqrt{\pi}\quad(\beta_l\to-\infty) \\ &\mathrm{Erf}(\beta_u/\sqrt{2})=0\quad(\beta_u\to\infty) \\ &R_l=0\quad(\kappa_l\to1/\delta_S) \\ &R_u=\infty\quad(\kappa_u\to\infty) \end{aligned}\right\} \qquad (1.27)$$

として，所要の式を得ることができる。

$$\nu_{x,LN^+}(\bar{m},\delta_S)=\frac{\sigma_{\dot{x}}}{4\pi\sqrt{2\pi}\,\sigma_x\sqrt{\ln(1+\delta_S{}^2)}}\int_0^\infty\exp(-z)\frac{1}{z}$$
$$\cdot\exp\left[-\frac{\{\ln\sqrt{2(1+\delta_S{}^2)z}-\ln\bar{m}\}^2}{2\ln(1+\delta_S{}^2)}\right]dz \qquad (1.28)$$

なお右辺の定積分は $\int_0^\infty \exp(-z)f(z)dz$ の型をしており，Gauss の数値積分法[18] を使用して数値積分をおこなうことができる。

1．2．2　包絡線過程の強度超過率

狭帯域正規確率過程の包絡線過程もまた確率過程であり，その表示方法としては，やはり Rice[1] によるものが一般的である。この Rice の理論に基づき，Lyon[15] は狭帯域定常正規確率過程に対する包絡線過程 $\boldsymbol{a}(t)$ とその速度 $\dot{\boldsymbol{a}}(t)$ との結合確率密度関数 $f_{a\dot{a}}(a, \dot{a})$ を次式のように求めた。

$$f_{a\dot{a}}(a, \dot{a}) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x{}^2\sigma_1}\exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_x{}^2}-\frac{\dot{a}^2}{2\sigma_1{}^2}\right) \tag{1．29}$$

式中，

$$\sigma_1{}^2 = \sigma_{\dot{x}}{}^2 - \omega_m{}^2\sigma_x{}^2 \tag{1．30}$$

であり，ω_m は狭帯域のなかの代表的周波数である。

さて包絡線過程の強度超過率 $\nu_a{}^+(S)$ が，式（1．5）における $\dot{x}f_{x\dot{x}}(S, \dot{x})d\dot{x}$ の代わりに $\dot{a}f_{a\dot{a}}(S, \dot{a})d\dot{a}$ と置くことによって得られることは容易に理解できる。このとき

$$\nu_a{}^+(S) = \int_{R_S}\left[\int_0^\infty \dot{a}f_{a\dot{a}}(S, \dot{a})d\dot{a}\right]f_S(S)dS \tag{1．31}$$

が成立するので，上式に式（1．29）を代入して次式を得る。

$$\nu_a{}^+(S) = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x{}^2}\int_{R_S} S\exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_x{}^2}\right)f_S(S)dS \tag{1．32}$$

a）材料強度が条件付正規分布に従う場合

材料強度の確率密度関数は式（1．8）で与えられるので，それを式（1．32）に代入すると，

$$\begin{aligned}\nu_{a,CN}{}^+(S) = &\frac{\sigma_1}{2\sqrt{\pi}\,\sigma_S\sigma_x{}^2\{\mathrm{Erf}(-\kappa_l/\sqrt{2})-\mathrm{Erf}(\kappa_u/\sqrt{2})\}}\\ &\cdot\int_{S_l}^{S_u} S\exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_x{}^2}\right)\exp\left\{-\frac{(S-\bar{S})^2}{2\sigma_S{}^2}\right\}dS\end{aligned} \tag{1．33}$$

となる。右辺の定積分はやはり誤差関数によって表され，さらに式（1．13），式（1．14）でそれぞれ定義した δ_S，$\bar{m}$ を用いれば，式（1．33）は次式のように書き改められる。

$$\begin{aligned}\nu_{a,CN}{}^+(\bar{m}, \delta_S) = &\frac{\bar{m}\delta_S\sigma_1}{2\sqrt{\pi}\,\sigma_x(1+\bar{m}^2\delta_S{}^2)\{\mathrm{Erf}(-\kappa_l/\sqrt{2})-\mathrm{Erf}(\kappa_u/\sqrt{2})\}}\\ &\cdot\exp\left(-\frac{1}{2\delta_S{}^2}\right)\left[\exp(\gamma_l)-\exp(\gamma_u)\right.\\ &\left.+\frac{\sqrt{2}}{\delta_S\sqrt{1+\bar{m}^2\delta_S{}^2}}\exp\left\{\frac{1}{2\delta_S{}^2(1+\bar{m}^2\delta_S{}^2)}\right\}\left\{\mathrm{Erf}\left(\frac{\alpha_l}{\sqrt{2}}\right)-\mathrm{Erf}\left(\frac{\alpha_u}{\sqrt{2}}\right)\right\}\right]\end{aligned} \tag{1．34}$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned}\gamma_l&=\frac{-(1+\bar{m}^2\delta_S{}^2)\delta_S{}^2\kappa_l{}^2+2\bar{m}^2\delta_S{}^3\kappa_l+(1-\bar{m}^2\delta_S{}^2)}{2\delta_S{}^2}\\ \gamma_u&=\frac{-(1+\bar{m}^2\delta_S{}^2)\delta_S{}^2\kappa_u{}^2-2\bar{m}^2\delta_S{}^3\kappa_u+(1-\bar{m}^2\delta_S{}^2)}{2\delta_S{}^2}\end{aligned}\right\}\qquad(1.35)$$

b）材料強度が正規分布に従う場合

式（1．34）において，$\kappa_l\to\infty$，$\kappa_u\to\infty$ とすれば，所要の算定式が得られることは明らかである。このとき式（1．35）を考慮すれば $\exp(\gamma_l)-\exp(\gamma_u)$ の項は零になり，また式（1．19）を用いれば，結局次式が得られる。

$$\nu_{a,N^+}(\bar{m},\delta_S)=\frac{\bar{m}\sigma_1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x(1+\bar{m}^2\delta_S{}^2)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\bar{m}^2}{2(1+\bar{m}^2\delta_S{}^2)}\right\}\qquad(1.36)$$

c）材料強度が条件付対数正規分布に従う場合

材料強度の確率密度関数は式（1．21）で与えられるので，これを式（1．32）に代入すれば，

$$\begin{aligned}\nu_{a,CLN^+}(S)=&\frac{\sigma_1}{2\sqrt{\pi}\,\sigma_x{}^2\sigma_S{}^*\{\mathrm{Erf}(\beta_l/\sqrt{2})-\mathrm{Erf}(\beta_u/\sqrt{2})}\\&\cdot\int_{S_l}^{S_u}\exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_x{}^2}\right)\exp\left\{-\frac{(S^*-\bar{S}^*)^2}{2\sigma_S{}^{*2}}\right\}dS\end{aligned}\qquad(1.37)$$

となり，さらに式（1．37）を $\bar{m}$ と δ_S を用いて書き改めれば次式が得られる。

$$\begin{aligned}\nu_{a,CLN^+}(\bar{m},\delta_S)=&\frac{\sigma_1}{2\sqrt{2\pi}\,\sigma_x\sqrt{\ln(1+\delta_S{}^2)}\{\mathrm{Erf}(\beta_l/\sqrt{2})-\mathrm{Erf}(\beta_u/\sqrt{2})\}}\int_{R_l}^{R_u}\exp(-z)\frac{1}{\sqrt{z}}\\&\cdot\exp\left\{-\frac{(\ln\sqrt{2(1+\delta_S{}^2)z}-\ln\bar{m})^2}{2\ln(1+\delta_S{}^2)}\right\}dz\end{aligned}\qquad(1.38)$$

式中の記号については前述のとおりである。

d）材料強度が対数正規分布に従う場合

この場合は，式（1．38）の中に陰に含まれているパラメーター κ_l，κ_u をそれぞれ $1/\delta_S$ および無限大にすればよいことは1．2．1のd）と同様である。したがって式（1．27）を用いれば次式が得られる。

$$\begin{aligned}\nu_{a,LN^+}(\bar{m},\delta_S)=&\frac{\sigma_1}{2\sqrt{2\pi}\,\sigma_x\sqrt{\ln(1+\delta_S{}^2)}}\int_0^\infty\exp(-z)\frac{1}{\sqrt{z}}\\&\cdot\exp\left\{-\frac{(\ln\sqrt{2(1+\delta_S{}^2)z}-\ln\bar{m})^2}{2\ln(1+\delta_S{}^2)}\right\}dz\end{aligned}\qquad(1.39)$$

式（1．17），式（1．20），式（1．25）および式（1．28）にみられるように，材料強度を確率量としたときの，零平均値を有する定常応答過程の強度超過率は，応答および応答速度のr.m.s.値 σ_x，$\sigma_{\dot{x}}$ と，材料強度の平均値 $\bar{S}$ と σ_x との比 $\bar{m}$ および材料強度の変動係数 δ_S という4つのパラメーターにより決定されることがわかる。さらに包絡線過程の強度超過率は，これらのパラメー

ターに加えて式（１．３０）に含まれる狭帯域の代表的周波数 ω_m が必要であることが，式（１．３４），式（１．３６），式（１．３８）および式（１．３９）より理解できる。

１．３　初通過破壊確率の近似解

定常不規則応答過程の初通過確率は，Chapman-Kolmogorov方程式あるいは Fokker-Planck方程式を解けば求められるが[19]，いまだに１自由度振動系の不規則応答の問題に対してさえも厳密解は得られていない。というよりは，不規則応答過程の確率構造が完全に記述できない限り，すなわち任意次数の結合確率密度関数を求めることができない限り，厳密解を得ることは不可能である。したがってポアソン近似をはじめ，各種の近似解法が提案されてきた。

本研究では，応答過程（あるいはその包絡線過程）が強度を超過する現象が互いに独立に発生すると仮定して初通過破壊確率の算定式を定める。なお構造部材の破壊問題を考える場合には，当然引張側と圧縮側の破壊を対象にしなければならない。したがって応答過程あるいは包絡線過程の強度超過率としては，上述の $\nu_x^+(S)$，$\nu_a^+(S)$に，それぞれ $\nu_x^-(S)$，$\nu_a^-(S)$を加えたものを考えなければならない。ここに肩付添字の－は，応答や包絡線が負の勾配で負の材料強度を越える場合の強度超過率であることを示している。しかし，引張強度と圧縮強度が等しい場合には，$\nu_x^+(S)=\nu_x^-(S)$，$\nu_a^+(S)=\nu_a^-(S)$ なる関係が成立し，このとき両強度超過率はそれぞれ $2\nu_x^+(S)$，$2\nu_a^+(S)$ となる。

１．３．１　応答過程による方法

応答が材料強度を越える現象が互いに独立に発生すると仮定して，応答過程の強度超過率を用いて初通過破壊確率を算定する方法を，本論文では「応答過程による方法（ＲＰ法）」と称することにする。前述のように，構造物の非破壊条件による材料強度の確率分布の経時変化が無視できるものとすれば，定常応答過程における強度超過率は時間に無関係となり，したがって定常増分を有するポアソン過程の理論[20]より，初通過破壊確率の算定式は次式によって与えられる。

$$P_f(t_d)=1-P_{s,x}(0)\exp(-(\nu_x^+(S)+\nu_x^-(S))t_d) \qquad (1.40)$$

ここに t_d は振動の継続時間を表し，$P_{s,x}(0)=\mathrm{Prob}[|x(0)|<S]$ である。

上述の仮定から明らかなように，この方法は材料強度と応答にかなり大きな差がなければ精度が悪化する。したがって前述の無次元パラメーター $\bar{m}$ が比較的大きい領域において使用しうる方法である。

１．３．２　包絡線過程による方法

一般に狭帯域周波数特性を示す応答過程を注意深く観察すると，図１．２に示すように応答があるレベルを一度超過すれば，その後数サイクルにおよんで超過現象が発生し易いことがわかる。すなわち応答と材料強度にかなり大きな差がある場合を除き，応答の強度超過現象は密集（clump ）状態で生じる

といえよう。そのような場合には，近接した時刻間における応答の強度超過現象が互いに独立であるとの仮定は成立し難い。

このポアソン近似の欠陥を補うために Lyon[15] により提案された方法は，応答の包絡線が強度を越える現象が互いに独立であるとして初通過破壊確率を計算する方法である。この場合は包絡線過程の強度超過率を用いて，

$$P_f(t_d)=1-P_{s,a}(0)\exp(-(\nu_a^+(S)+\nu_a^-(S))t_d) \qquad (1.41)$$

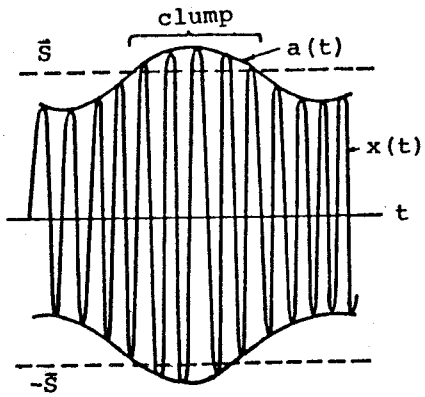


図1．2　clump の概念図

と表せる。ここに，$P_{s,a}(0)=\mathrm{Prob}\,[|a(0)|<S]$ である。

なお本論文では式（1．41）によって初通過破壊確率を算定する方法を，一貫して「包絡線過程による方法（EP法）」と呼ぶことにする。

1．4　線形1自由度振動系に対する数値解析

ここでは線形1自由度振動系にホワイトノイズ状の定常不規則変動外力が作用する場合の強度超過率と初通過破壊確率を，それぞれ1．2と1．3に示した各算定式に基づいて評価し，主として材料強度の確率分布形やばらつきの大きさとの関係について考察する。併せて応答過程による方法と包絡線過程による方法の比較・検討を定量的におこなう。

もちろん，現実には理想的なホワイトノイズ状の不規則外力は存在しない。しかし減衰が小さい振動系を対象とする場合には，ホワイトノイズとして近似的に計算した応答の分散が，厳密なスペクトル解析に対する良好な近似値になることは自明であり，したがってホワイトノイズ状のスペクトルを示す外力に対する応答解析と，その結果に基づいて算定した強度超過率や初通過破壊確率に対する考察は重要な意味をもっている。

さて振動系の減衰定数を ζ，固有円振動数を ω_n，時刻 t における単位質量当りの外力を $f(t)$ とすれば，周知のとおり振動方程式は，

$$\ddot{y}+2\zeta\omega_n\dot{y}+\omega_n^2 y=f(t) \qquad (1.42)$$

である。ここに y は振動変位を，$\dot{y}$，$\ddot{y}$ はそれぞれ速度，加速度を示す。

いま外力が円振動数に無関係に一様なパワースペクトル密度関数（以下，単にパワースペクトルと称する）S_0 を有する定常正規確率過程であるとすれば，不規則振動論により，変位のパワースペクトル $S_{yy}(\omega)$ は次式で与えられる[21]。

$$S_{yy}(\omega)=\frac{S_0}{(\omega_n{}^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2} \qquad (1.43)$$

さらに $y(t)$ と系の代表的な点のある種の応力 $x(t)$ とに線形関係が成立するものとすれば，

$$x(t)=cy(t)$$

なる関係式が得られる。ここに c は長さ，質量，時間に対する基本単位をそれぞれ L，M，T とすれば，$ML^{-2}T^{-2}$ で表される次元を有する定数であり，振動系の特性によって決まる。このとき応力のパワースペクトル $S_{xx}(\omega)$ と変位のパワースペクトル $S_{yy}(\omega)$ との間には明らかに

$$S_{xx}(\omega)=c^2S_{yy}(\omega)$$

なる関係が成立するので，式（１．４３）より

$$S_{xx}(\omega)=\frac{c^2S_0}{(\omega_n{}^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2} \qquad (1.44)$$

となり，応力の分散 $\sigma_x{}^2$ およびその時間的導関数の分散 $\sigma_{\dot{x}}{}^2$ は，

$$\sigma_x{}^2=\int_{-\infty}^{\infty}S_{xx}(\omega)\,d\omega=\frac{\pi c^2S_0}{2\zeta\omega_n{}^3} \qquad (1.45)$$

$$\sigma_{\dot{x}}{}^2=\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2S_{xx}(\omega)\,d\omega=\frac{\pi c^2S_0}{2\zeta\omega_n} \qquad (1.46)$$

で与えられる。このとき

$$\sigma_{\dot{x}}=\omega_n\sigma_x \qquad (1.47)$$

であることがわかる。

さて式（１．３０）で表される $\sigma_1{}^2$ について述べる。いま応答の代表的振動数として固有円振動数を用いるとすれば，式（１．４７）の関係より $\sigma_1{}^2=0$ になり，包絡線過程が成立しなくなることがわかる。この不都合を免れるため Lyon の方法を踏襲する。すなわち図１．３の実線で示した実際の応答のパワースペクトルを，高さがそのピークに等しく，面積が $\sigma_x{}^2$ に等しくなるような矩形スペクトル $S_{xx}{}^*(\omega)$ で置換し，この置換したスペクトルを応答のスペクトルとみなすという条件のもとに ω_n を ω_m として $\sigma_1{}^2$ を計算する。このとき，

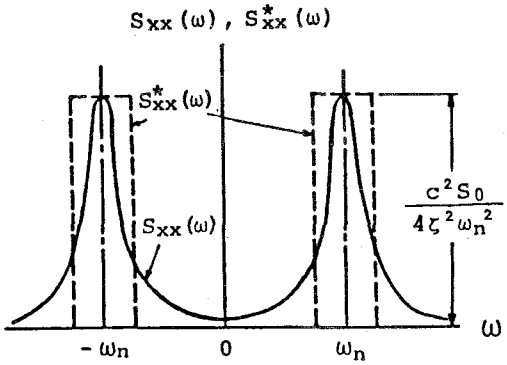


図１．３　置換スペクトル

$$\sigma_1{}^2=\frac{\pi^2\zeta^2\omega_n{}^2}{12}\sigma_x{}^2 \qquad (1.48)$$

となる。

以上より，ホワイトノイズ状の不規則外力を受ける減衰定数の比較的小さい１自由度振動系の強度超過率および初通過破壊確率は，外力のパワースペクトルと前述の定数 c，および振動系の固有円振動数と減衰定数が与えられれば，材料強度の変動係数，材料強度の平均値と応力応答のr.m.s.値との比お

よび振動の継続時間とによって算定できることがわかる。そこで以下では固有円振動数を2π（rad/s）として，それらの値を適宜組合せておこなった数値解析の結果に基づいて，各パラメーターと強度超過率や初通過破壊確率との関係などについて考察を進める。

その前に，Gauss-Laguerreの公式による式（1．28）の数値積分の収束性を図1．4によって示す。図より $\bar{m}=2$ あるいは $\delta_S=0.05$ のように，$\bar{m}$ と δ_S のいずれかの値が小さい場合の収束性はあまり良くないことがわかる。しかしいずれかの値が大きくなるにしたがって，収束性が良好になることは明らかで，たとえば $\bar{m}=5$ の場合には，δ_S が0.05と小さくても，分点数が16程度ですでに積分値が収束している。

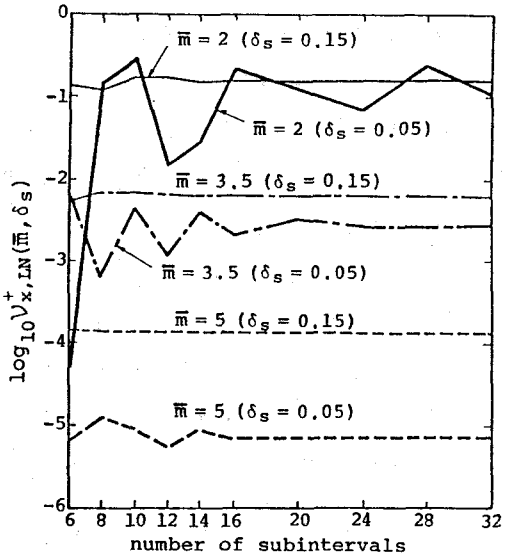


図1．4　Gauss-Laguerre の公式による数値積分の収束性

1．4．1　強度超過率に関する結果と考察

a）応答過程の強度超過率

材料強度を確率量として求めた強度超過率と確定量とした場合の結果との差異を図1．5によって示す。いずれの場合にも，振動系の信頼性にもっとも大きな影響を及ぼすパラメーター $\bar{m}$ の増大とともに強度超過率が減少することはいうまでもないが，強度の変動係数が大きくなるにしたがって，減少の割合が小さくなることを図より理解できる。この傾向は材料強度が正規分布に従う場合により強くなるようである。

強度のばらつきの大きい材料を使用する場合には，断面性能を多少高めても部材の信頼度をそれほど向上させることができないことを図1．5は端的に示しているが，材料強度を確定量とした従来の研究では，このような事実を明確にできない。

次に材料強度の変動係数と強度超過率との関係を

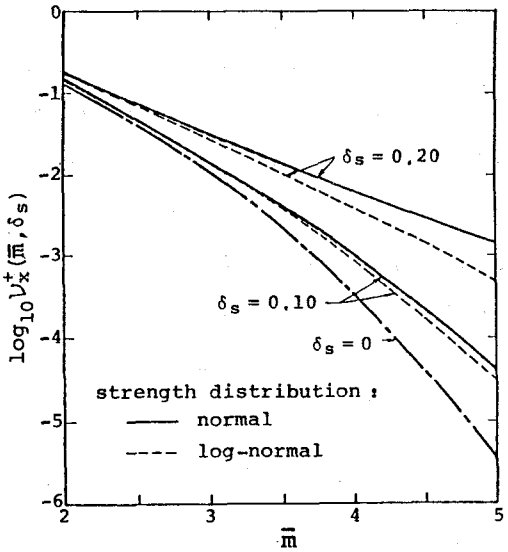


図1．5　$\bar{m}$ と $\nu_x^+(\bar{m},\delta_s)$ との関係

図1．6に示す。図より変動係数の影響は $\bar{m}$ の値が大きい場合ほど著しいことは明らかである。

また材料強度の確率分布形の影響についても同図により考察できる。すなわち強度の変動係数が小さい範囲では，$\bar{m}$ が大きい場合にも材料強度の確率分布形による強度超過率の差異はほとんど認められない。しかし $\bar{m}$ が5を越え，しかも強度の変動係数も 0.15 を上回るような領域では，顕著とはいえないまでもその影響が現れてくる。

b）包絡線過程のレベル超過率

図1．7は減衰定数を 0.01 としたときの $\bar{m}$ と強度超過率との関係を示したものである。図より両者の関係については，応答過程の強度超過率に対する考察がそのまま成立することがわかる。

さらに図1．8に示すように，材料強度の確率分布形や変動係数の影響についても，応答過程の場合と同様の傾向が認められる。なおここでは ζ =0.01の場合の結果のみを示したが，ζ が大きい場合にも定性的にはまったく同様の結果が得られている。

c）応答過程と包絡線過程の強度超過率の比較

図1．9は材料強度が対数正規分布に従うとして，応答過程と包絡線過程の強度超過率を比較したものである。図より $\bar{m}$ と ζ の値が小さいときほど両者の差異が大きくなることがわかる。これは減衰定数が小さくなるほど応答は狭帯域の周波数特性を示し，同時に強度と応答との差が小さくなるにしたがって，前述したクランプが平均的な意味で大きくなることに起因している。なおこの傾向は材料強度の変動係数にはほとんど無関係であることも図より明らかである。

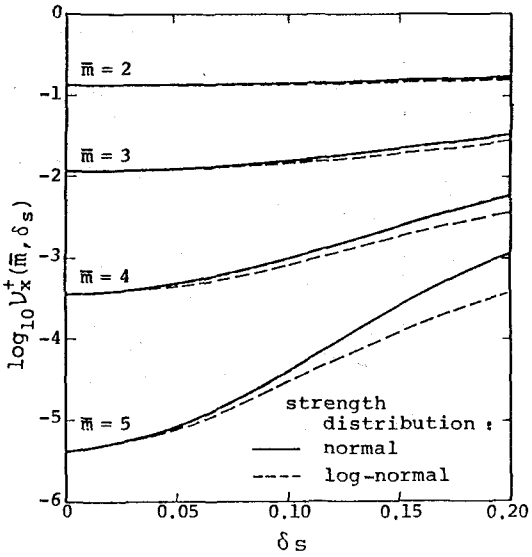


図1．6　δ_s と $\nu_x^+(\bar{m},\delta_s)$ との関係

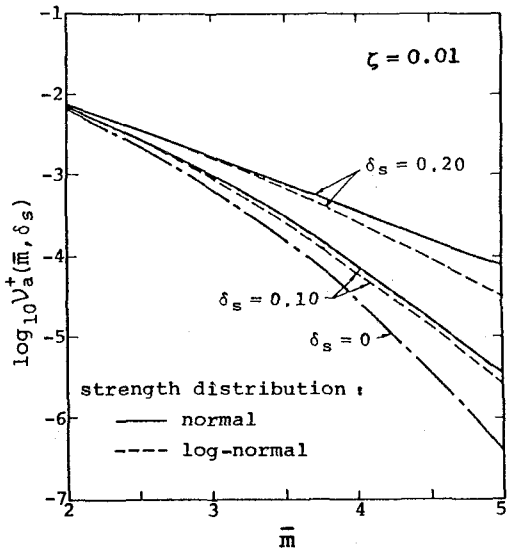


図1．7　$\bar{m}$ と $\nu_a^+(\bar{m},\delta_s)$ との関係

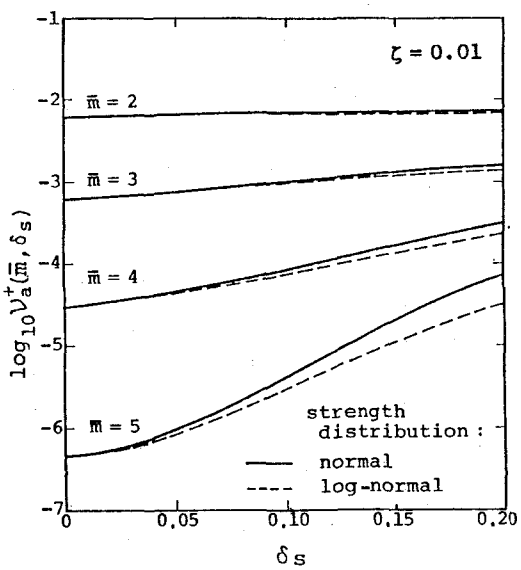


図1．8　δ_S と $\nu_a^+(\bar{m},\delta_s)$ との関係

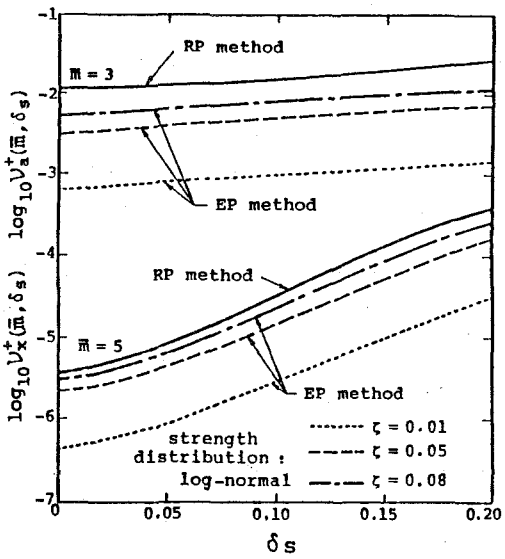


図1．9　$\nu_x^+(\bar{m},\delta_s)$ と $\nu_a^+(\bar{m},\delta_s)$ との比較

1．4．2　初通過破壊確率に関する結果と考察

前項に示した強度超過率により，ＲＰ法（応答過程による方法）とＥＰ法（包絡線過程による方法）に基づいて初通過破壊確率を算定した。

材料強度が正規分布に従うとして，振動系の非減衰時の固有周期 T_n を用いて無次元化した振動継続時間に対する初通過破壊確率の変化を示したものが図1．10である。

以下同図によって考察するが，破壊確率が1に近い時間領域における考察は，実際の構造物の破壊確率がそれよりもはるかに小さい値で設計されていることを考えるとき，あまり意味がないように思われる。したがって，ここでは破壊率があまり大きくない時間領域における結果について考える。

図より、材料の強度を示すパラメーター $\bar{m}$ が大きいときほど破壊確率が小さくなるという当然の結果はともかく，両近似解法による初通過破壊確率は，$\bar{m}$ と ζ が小さい場合ほど著しい差異を示し，その傾向が材料強度のばらつきの大きさにはほとんど無関係であることがわかる。たとえば $\bar{m}=3.0$，$\zeta=0.01$の場合（図1．10（a））には，δ_S の大きさにかかわらず $t_d/T_n<100$ の領域で両近似解に約1桁以上もの差があるのに対して，$\bar{m}=5.0$，$\zeta=0.08$の場合（図1．10（d））には両者にはほとんど差異が認められない。なおこの傾向は材料強度が対数正規分布に従う場合にもほぼ同様である。

したがって閾値のレベルが高く，応答の周波数特性が広帯域であるほどＲＰ法の精度が期待でき，逆に閾値のレベルが低く，応答が狭帯域の周波数特性を示す場合にはＥＰ法がより合理的なアプローチになるという従来の研究結果は，材料強度の分布形や，本研究において設定した程度のばらつきであれば，その変動係数の大きさを問わず成立することは明らかであるといえよう。

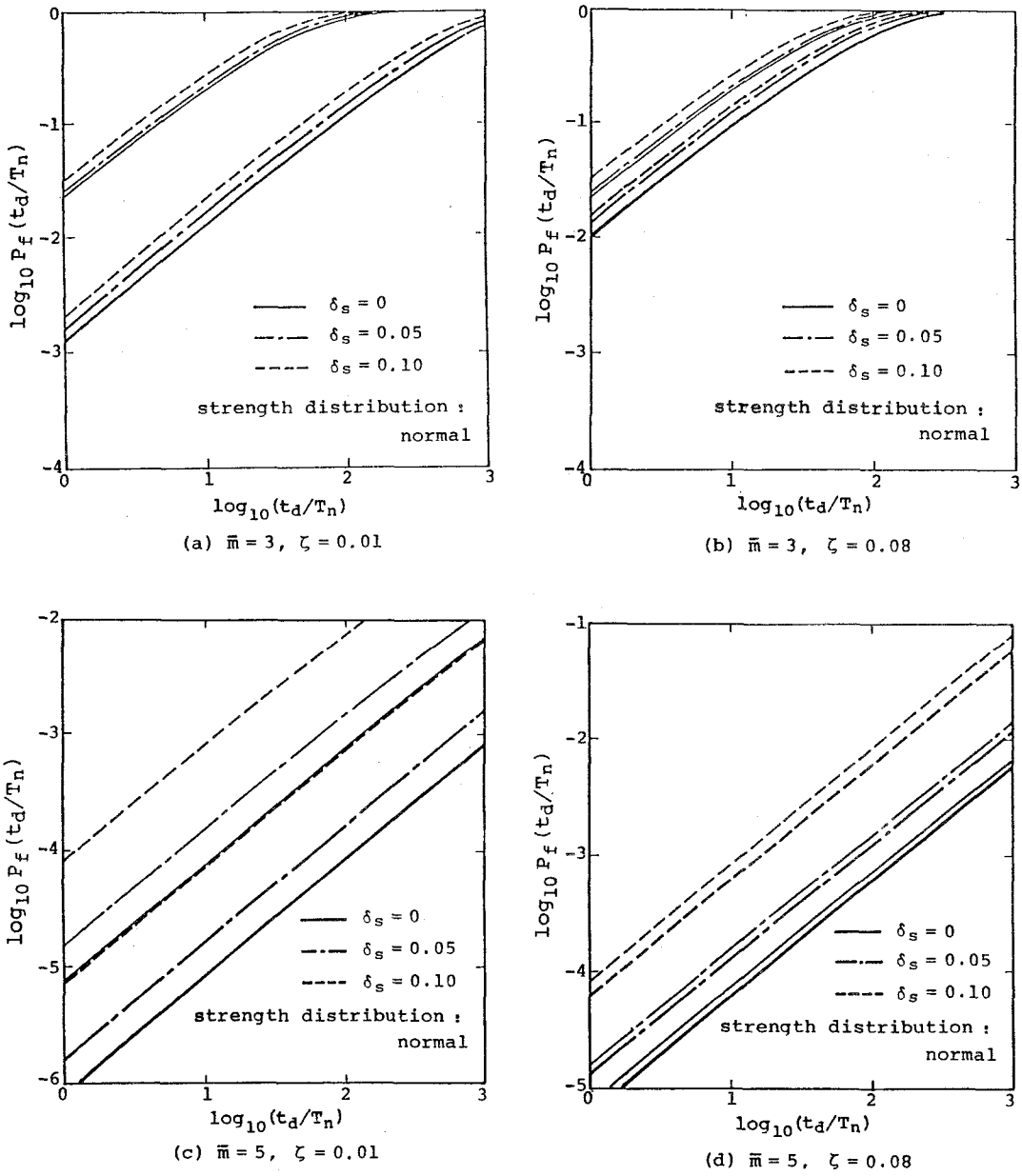
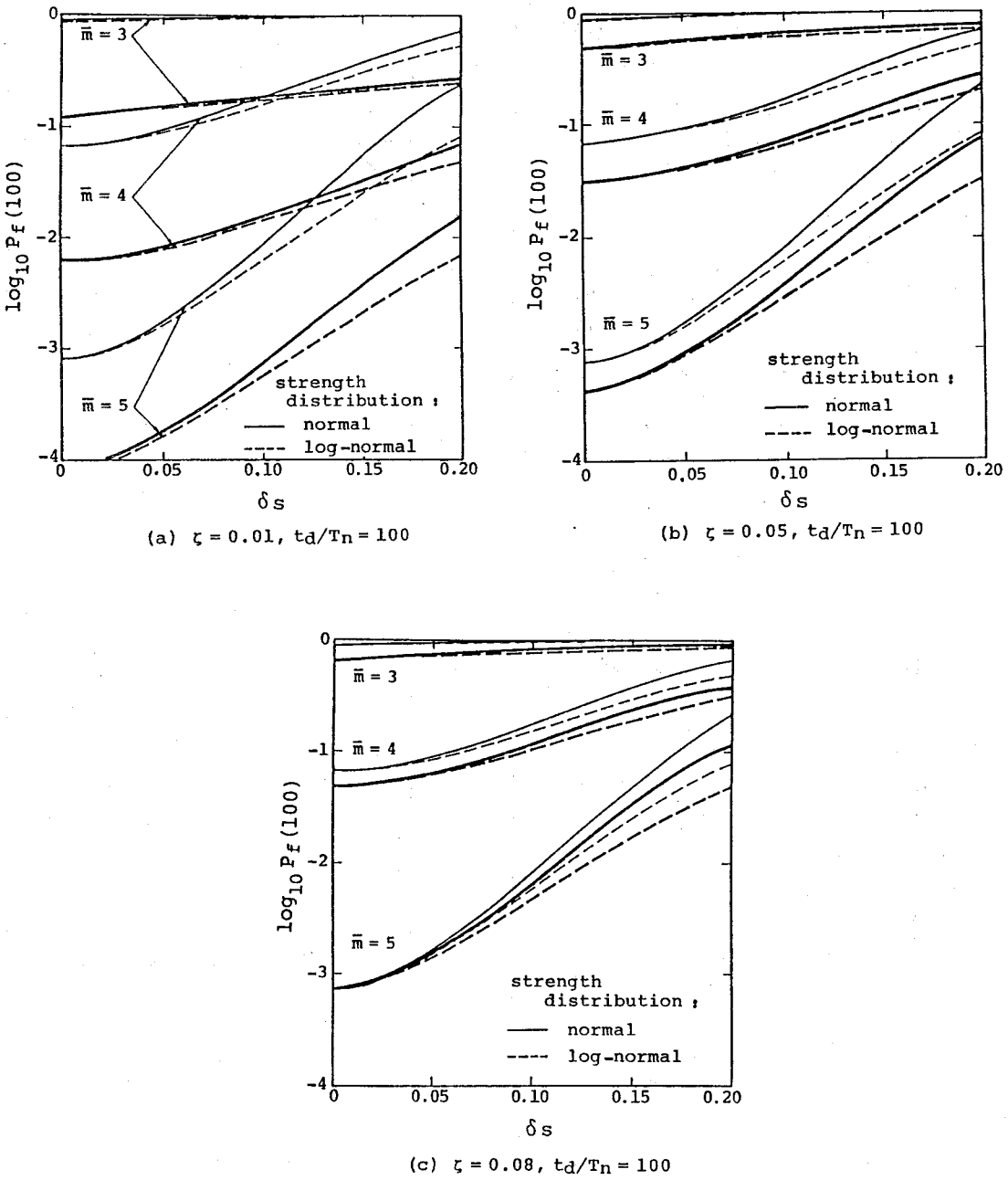


図1．10　初通過破壊確率（細線：ＲＰ法，太線：ＥＰ法）

次に材料強度のばらつきが破壊確率に及ぼす影響を検討するために，$t_d/T_n=100$ のときの初通過破壊確率と材料強度の変動係数との関係を図１．１１に示す。



(a) $\zeta=0.01$, $t_d/T_n=100$

(b) $\zeta=0.05$, $t_d/T_n=100$

(c) $\zeta=0.08$, $t_d/T_n=100$

図１．11　δ_S と初通過破壊確率との関係
（細線：ＲＰ法，太線：ＥＰ法）

図より $\bar{m}$ の値が大きくなると，破壊確率が強度のばらつきに敏感に影響されることを定量的に理解することができる。

減衰定数が 0.01 のとき（図1．11（a））を例にして，EP法による結果に基づいてこのことを具体的に説明する。いま $\bar{m}=3.0$ としてみれば，強度にばらつきがない場合の破壊確率は $P_f=1.2\times10^{-1}$であり，強度が変動係数 0.20 の正規分布に従う場合の破壊確率は $P_f=2.7\times10^{-1}$である。したがって両者にそれほど大きな差異は認められない。これに対して $\bar{m}=5.0$であれば，それらはそれぞれ 8.5×10^{-5}，1.5×10^{-2}と著しい差異になる。

したがって，$\bar{m}$ が大きな場合の初通過破壊確率を精度よく算定するためには，材料強度の変動係数を正確に評価しなければならない。

さらに材料強度の確率分布形が破壊確率に及ぼす影響についても，同図によって定量的に検討することができる。すなわち，$\bar{m}$ と δ_S が小さい場合には強度の分布形の影響はほとんどみられないが，$\bar{m}$ が 4.0を越え，δ_S が 0.10 よりも大きくなると，わずかづつではあるが両分布形による差異が増大していることがわかる。たとえば $\zeta=0.01$，$\bar{m}=5.0$，$\delta_S=0.20$の場合（図1．11（a）），EP法による結果では，強度が正規分布に従うか，対数正規分布に従うかによって，初通過破壊確率はそれぞれ 1.5×10^{-2}および6.4×10^{-3}となり，正規分布に従う場合により大きな破壊確率になることが理解できる。

1．4．3　信頼性設計によるばね剛度

パワースペクトルが S_0なる不規則外力を受ける振動系の所要ばね剛度 k_S は，信頼性設計によれば当然材料強度のばらつきの大きさに影響されるはずである。以下数値計算によって，強度のばらつきの大きさと，振動系に所定の信頼度を与える所要ばね剛度との関係を検討する。ただし設計条件は $\zeta=0.01$，$t_d/T_n=100$ とし，材料強度は正規分布に従うものとする。

いま質量を m，ばね剛度を k とすると，応力度のr.m.s.値は式（1．45）から

$$\sigma_x=\left(\frac{\pi c^2 S_0}{2\zeta\omega_n^3}\right)^{1/2}=\left(\frac{\pi c^2 S_0}{2\zeta}\right)^{1/2}\left(\frac{m}{k}\right)^{3/4} \qquad (1.49)$$

となり，したがって

$$\bar{m}=\frac{\bar{S}}{\sigma_x}=\bar{S}\left(\frac{2\zeta}{\pi c^2 S_0}\right)^{1/2}\left(\frac{k}{m}\right)^{3/4} \qquad (1.50)$$

が成立する。これよりある $\bar{m}$ に対応する振動系のばね剛度が次式のように与えられる。

$$k_S=\left(\frac{\pi^2 c^4 S_0{}^2 m^3}{4\zeta^2\bar{S}^4}\right)^{1/3}\bar{m}^{4/3} \qquad (1.51)$$

さて図1．12はEP法によって，前述の設計条件下における $\bar{m}$ と初通過破壊確率との関係を算出した結果である。設計条件の1つとして振動系の信頼度を設定すれば，同図より $\bar{m}$ を求めることができるので，式（1．51）によりその信頼度に対応する所要ばね剛度を決定することができる。

いま材料強度のばらつきのない理想材料を考え，設計時の信頼度を$1-1\times10^{-3}$と設定したときの$\bar{m}$およびばね剛度をそれぞれ$\bar{m}_0$，$k_{S,0}$とする。このとき式（１．５１）より次式が得られる。

$$k_S=\left(\frac{\bar{m}}{\bar{m}_0}\right)^{4/3}k_{S,0} \qquad (1.52)$$

信頼度を$1-1\times10^{-3}$，$1-1\times10^{-4}$，$1-1\times10^{-5}$と設定し，図１．１２と式（１．５２）とにより算定した設計ばね剛度を表１．１に示す。信頼度を高く設定するほど，設計ばね剛度を大きくしなければならないことはいうまでもないが，表より，材料強度のばらつきが大きい場合には，その割合が著しいことが読取れる。たとえば強度にばらつきのない理想材料の場合，$1-1\times10^{-3}$の信頼度を$1-1\times10^{-4}$にまで向上させるためには約３０％程度剛度を増加させればよい。ところが，$\delta_S=0.15$の材料であれば，約７２％程度もの剛度の増加が必要であることがわかる。したがってこのことより，強度のばらつきの大きい材料を使用する場合には，多少ばね剛度を高めても振動系の信頼性はそれほど向上しないといえる。

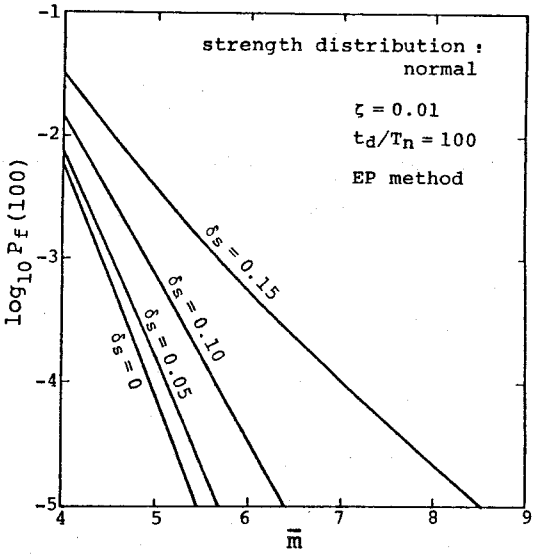


図１．12　$\bar{m}$と初通過破壊確率との関係

表１．１　設計ばね剛度　（$\times 1/k_{S,0}$）

信頼度 ＼ δ_S	0	0.05	0.10	0.15
$1-1\times10^{-3}$	1.000	1.038	1.136	1.376
$1-1\times10^{-4}$	1.153	1.199	1.376	1.812
$1-1\times10^{-5}$	1.311	1.364	1.610	2.369

さらに信頼度を高く設定すれば，強度のばらつきが設計ばね剛度に大きな影響を与えることも明らかである。たとえば信頼度を$1-1\times10^{-3}$に設定してみよう。このとき理想材料のばね剛度は$k_{S,0}$であり，$\delta_S=0.15$の材料のそれは約$1.38\,k_{S,0}$である。これに対して信頼度を$1-1\times10^{-3}$とした場合にはそれぞれ$1.31\,k_{S,0}$，$2.37\,k_{S,0}$と大きな差異になる。このように高信頼度が要求される設計条件下では，経済上の問題にも絡んで材料強度のばらつきの評価が非常に重要になる。

なおここでは簡単のため，質量と減衰係数がいずれもばね剛度に比例するような特別な振動系を想定したが，一般的な振動系についても，定性的には同様の傾向になるものと思われる。

1．4．4　材料強度が保証される場合の信頼性向上効果

さて材料強度には，規定された元素成分，製造過程に応じて，明らかに上限値，下限値が存在するはずであるが，それが明確に定められない以上，所要ばね剛度の設計例のように，設計段階では強度を無条件確率分布とせざるをえない。ところが振動系が完成した暁には，製品・載荷試験などにより欠陥が存在しないことを確認すれば，強度の下限値を保証することができる。したがってその点だけを考慮すれば，少なくとも設計の時点よりも振動系の信頼性は向上する。これはそのまま構造物の信頼性に対してもあてはまり，この効果は，いわば製品試験あるいは載荷試験による信頼性向上効果とでもよぶことができる。以下計算例に基づき，この信頼性向上効果について考察する。

図1．13は強度の下限値を示すパラメーター κ_l を 1.0, 2.0および ∞ として，前述の1自由度振動系の $t_d/T_n=100$ に対する初通過破壊確率と材料強度の変動係数との関係を示したものである。$\kappa_l=1.0$, $\kappa_l=2.0$ の曲線が製品あるいは載荷試験後の，$\kappa_l=\infty$ に対する曲線が設計時における破壊確率を与えている。ただしこれらは，材料強度が正規分布に従うものとし，包絡線過程による方法によって計算した結果である。

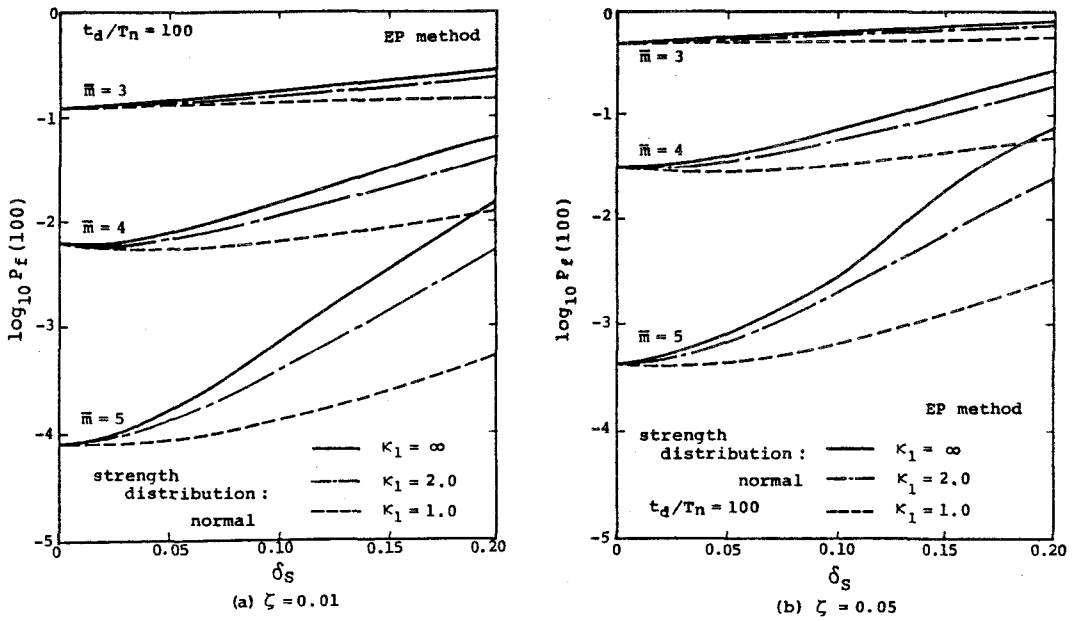


図1．13　製品試験あるいは載荷試験による信頼性向上効果

いま振動系の減衰定数および強度の変動係数をそれぞれ 0.01 および 0.10 として，図1．13（a）によって上述の信頼性向上効果について考えてみる。まず信頼性のレベルを規定するパラメーター $\bar{m}$ を 5.0と設定する。この場合 $\kappa_l=\infty$ に対応する曲線より，振動系の設計段階での信頼度は1 −7 × 10^{-4} （破壊確率は7／10000 ）であることがわかる。ところが，製品・載荷試験によって材料強度の下限が $\bar{S}-\sigma_S$ と保証された時点では，信頼度が1 −1 ×10^{-4}（破壊確率は1／10000 ）まで向上す

ることが，図の $\kappa_l = 1$ に対する曲線よりわかる。これに対して $\bar{m}$ を 3.0と設定した場合の信頼度はそれぞれ 0.8244（破壊確率は1756／10000），0.8687（破壊確率は1313／10000）であり，両者に大きな差異は認められない。また強度の変動係数が大きい場合ほど，この信頼性向上効果が大きいことも同図より理解できる。

以上の2点より，慎重な製品試験または載荷試験による信頼性向上効果は，設計時に設定される信頼性レベルが高く，材料強度のばらつきが大きいときほど顕著であるといえる。したがって構造物の強度劣化を伴うようなレベルまでの載荷試験は当然避けるべきであるが，少なくともそのような支障をきたさない程度の荷重による試験は，特に土木構造物のような注文生産の場合には，その意義が大きいものと思われる。

1．5　動的信頼性理論による材料強度の特性値の算定

いま定常正規不規則変動外力を受ける構造物の材料強度の特性値を次のように定義する。すなわち材料強度を確率量としたときの初通過破壊確率と等価になるようなある確定量をもって，ばらつきを有する強度の特性値 S_c と考える。ところが応答過程が定常過程であれば，前述のように破壊確率と強度超過率との間には明確な関係がある。したがって本研究では，応答過程の強度超過率を等価にすることによって S_c を算定する。

材料強度を確率量および確定量としたときの応答過程の強度超過率をそれぞれ $\nu_{x,p}^{+}(S)$，$\nu_{x,d}^{+}(S_c)$ とすると，$\nu_{x,p}^{+}$ は式（1．20）あるいは式（1．28）により与えられる。一方 $\nu_{x,d}^{+}(S_c)$ は周知のとおり次式で与えられる。

$$\nu_{x,d}^{+}(S_c)=\frac{\sigma_{\dot{x}}}{2\pi\sigma_x}\exp\left(-\frac{S_c^2}{2\sigma_x^2}\right) \tag{1.53}$$

いま $S_c=\bar{S}-\xi\sigma_S$ とし，この S_c を式（1．53）に代入すれば，

$$\nu_{x,d}^{+}(S_c)=\frac{\sigma_{\dot{x}}}{2\pi\sigma_x}\exp\left\{-\frac{(\bar{S}-\xi\sigma_S)^2}{2\sigma_x^2}\right\} \tag{1.54}$$

となる。ここで $\nu_{x,p}^{+}(S)=\nu_{x,d}^{+}(S_c)$ とおくと，ξ が次のように求まる。

$$\xi=\frac{\bar{S}\pm\sigma_x\sqrt{-2\ln\{(2\pi\sigma_x/\sigma_{\dot{x}})\nu_{x,p}^{+}(S)\}}}{\sigma_S} \tag{1.55}$$

しかるに $S_c>0$ より $\xi<\bar{S}/\sigma_S$ であるから，この条件に合致する負号を選び，さらに $\bar{m}$ と δ_S を用いて式（1．55）を書き直すと次式が得られる。

$$\xi=\frac{\bar{m}-\sqrt{-2\ln\{(2\pi\sigma_x/\sigma_{\dot{x}})\nu_{x,p}^{+}(S)\}}}{\bar{m}\delta_S} \tag{1.56}$$

式（1．56）と式（1．20）あるいは式（1．28）により，材料強度が正規分布および対数正

規分布に従うときの ξ は，$\bar{m}$ と δ_S のみの関数であることがわかる。したがって ξ を決定するためのダイアグラムが図１．１４のように得られる。なお図中の λ は，特性値と平均値の比である。

さて西村[17] は種々の鋼材の降伏点のばらつきを調査・検討し，有用な資料を提示している。その結果をみれば，変動係数は鋼種にかかわらず5 ～10％のようであるが，中には16.2％（SS41）に達するデータも得られている。

これらのデータの中から，ばらつきの大きさを規準にして３種類の鋼材を選び，図１．１４のダイアグラムによってそれぞれの特性値を決定した。結果を図１．１５および表１．２に示す。表より，ばらつきが大きくなるほど，特性値の平均値に対する割合が小さくなっていることがわかる。この事実はわれわれの直観にも一致する結果である。また同一のばらつきを有する場合は，信頼性のレベルを示す $\bar{m}$ の値が大きいときほど特性値を低目にとらなければならないことも表より明らかである。

このようにして求められる特性値は，初通過問題において，確率的に等価で，ばらつきのない理想材料の材料強度を表す尺度と考えることができる。

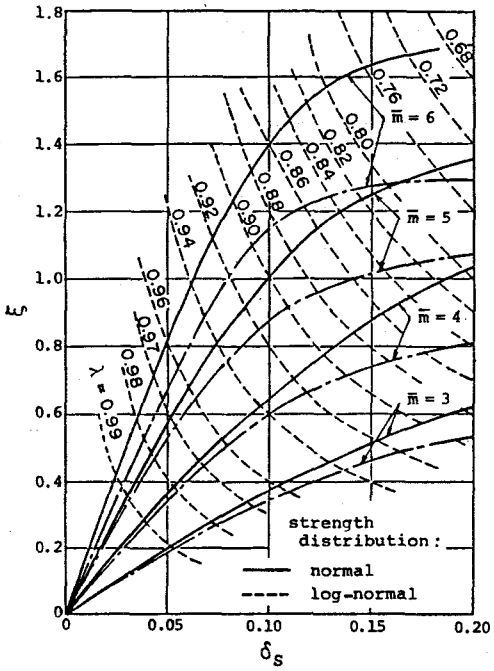


図１．14　材料強度の特性値を決定するためのダイアグラム

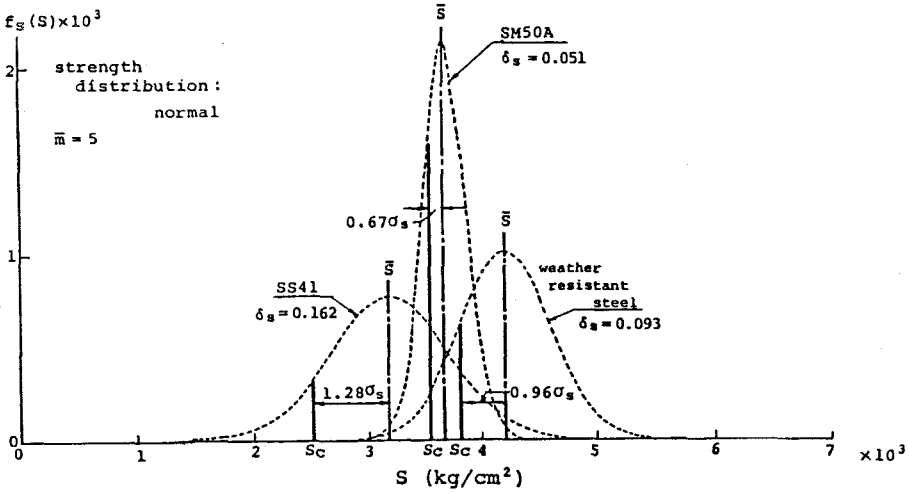


図１．15　各種鋼材の降伏点の特性値

表1．2　材料強度（降伏点）の特性値

鋼種	平均値 $\bar{S}$ (kg/cm²)	変動係数 δ_S	正規分布 $\bar{m}$ 4	正規分布 $\bar{m}$ 5	正規分布 $\bar{m}$ 6	対数正規分布 $\bar{m}$ 4	対数正規分布 $\bar{m}$ 5	対数正規分布 $\bar{m}$ 6
SS41	3189.7	0.162	2715.4	2529.9	2334.0	2797.9	2658.7	2529.9
			0.92	1.28	1.66	0.76	1.03	1.28
SM50A	3678.3	0.051	3611.1	3553.2	3525.2	3614.8	3579.4	3553.2
			0.36	0.67	0.82	0.34	0.53	0.67
耐候性	4197.1	0.093	3957.4	3819.8	3670.5	3973.1	3867.0	3760.9
			0.61	0.96	1.34	0.57	0.84	1.11

(注)　上段：特性値 S_C (kg/cm²)，　下段：ξ

1．6　結　言

本章では，定常正規確率過程によって与えられるような不規則変動外力を受ける構造物の信頼性問題について，初通過破壊確率を指標として論じてきた。得られた結論を要約すると以下のとおりである。

(1)　応答過程および包絡線過程の強度超過率によって表した本文中の算定式により，定常正規不規則変動外力を受ける構造物の初通過破壊確率を，材料強度のばらつきも考慮して算定することができる。

(2)　材料強度の確率分布形を除いた他のすべての条件が同一であるとすれば，強度が正規分布に従うときには，対数正規分布に従うときよりも高い値の初通過破壊確率になる。そして両者の差異は信頼性レベルが高い場合ほど顕著に現れてくる。したがって対数正規分布とする明確な資料のない場合には，強度が正規分布に従うものとして信頼度を評価しておくことが，構造設計上安全側の立場をとることになる。

(3)　「応答過程による方法」と「包絡線過程による方法」に基づく初通過破壊確率の算定値の差異は，構造物の減衰特性および材料強度の平均値と応答のr.m.s.値との比に支配され，材料強度の確率分布形や変動係数にはほとんど無関係である。

(4)　構造物の動的設計において強度のばらつきの大きい材料を使用する場合には，断面性能を高める割には信頼性が向上しないという経済上の効率の悪さが伴う。

(5)　構造物の設計段階における信頼性は載荷試験によって一般には向上すると考えられる。材料強度の確率分布として下限が保証された条件付分布関数を用いた初通過破壊確率の算定式によって，この信頼性向上効果を定量的に算定することができる。

(6)　上述の信頼性向上効果は，設計時の信頼度を高く設定するほど，また材料強度のばらつきが大きいときほど著しく，したがって載荷試験の意義もより大きくなると思われる。

(7)　本研究で定義した特性値を利用すれば，材料強度を確定的に扱って初通過破壊確率を算定することができる。

(8) 適確な信頼性評価値を得るためには，材料学的論拠により強度の上限・下限を設定することが重要である。

参　考　文　献

1) Rice, S. O. :Mathematical Analysis of Random Noise, Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, ed. by Wax, N., Dover, N. Y., pp. 136-246, 1955.

2) Eringen, A. C. :Response of Tall Buildings to Random Earthquakes, Proceedings of the 3rd U. S. Natl. Congr. for Applied Mechanics, p. 141, 1958.

3) Rosenblueth, E. and Bustamante, J. I. :Distribution of Structural Response to Earthquakes, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 88, No. EM3, pp. 75-106, June, 1962.

4) Shinozuka, M. :Probability of Structural Failure Under Random Loading, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 90, No. EM5, pp. 147-170, Oct., 1964.

5) 小松定夫：長大吊橋の耐風設計法と安全性について，土木学会論文集，No. 142, pp. 10-19, 1967年6月.

6) 後藤尚男・亀田弘行：構造物の不規則振動における最大応答の確率分布について，京都大学防災研究所年報，No. 11-A, pp. 239-253, 1968年3月.

7) Crandall, S. H., Chandiramani, K. L. and Cook, R. G. :Some First-Passage Problems in Random Vibration, Jounal of Applied Mechanics, Vol. 33, No. 3, pp. 532-538, Sept., 1966.

8) Shinozuka, M. and Yang, J-N. :On the Bound of First Excursion Probability, Journal of the Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 95, No. EM2, pp. 363-377, Apr., 1969.

9) Gallot, S. :A Bound for the Maximum of a Number of Random Variables, Journal of Applied Probability, Vol. 3, pp. 556-558, 1968.

10) Lin, Y. K. :First-excursion Failure of Randomly Excited Structures, AIAA Journal, Vol. 8, No. 4, pp. 720-725, Apr., 1970.

11) Lin, Y. K. :First-excursion Failure of Randomly Excited Structures II, AIAA Journal, Vol. 8, No. 10, pp. 1888-1890, Oct., 1970.

12) Stratonovich, R. L. :Topics in the Theory of Random Noise, Vol. 1, Gordon and Breach, N. Y., Chap. 6, pp. 143-176, 1963.

13) Yang, J-N. and Shinozuka:On the First-excursion Probability in Stationary Narrow-band Random Vibration, Journal of Applied Mechanics, Vol. 38, No. 4, pp. 1017-1022, Dec., 1971.

14) Racicot, R. L. and Moses, F. :A First-passage Approximation in Random Vibration, Journal

of Applied Mechanics, Vol. 38, No. 1, pp. 143-147, Mar., 1971.

15) Lyon, R. H. :On the Vibration Statistics of a Randomly Excited Hard-spring Oscillator II, Journal of Acoustical Society of America, Vol. 33, No. 10, pp. 1395-1403, 1961.

16) Yang, J-N, :Approximation to First Passage Probability, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 101, No. EM4, pp. 361-372, Aug., 1975.

17) 西村　昭：鋼材の機械的性質のばらつきについて，JSSC, Vol. 5, No. 48, pp. 68-74, 1969年.

18) Rabinowitz, P. and Weies, G. :Tables of Abscissas and Weights for Numerical Evaluation of Integrals of the Form $\int_0^\infty e^{-x}x^n f(x)dx$, Math. Comp., Vol. 13, pp. 285-294, 1959.

19) Lennox, W. C. and Fraser, D. A. :On the First-passage Distribution of a Nonstationary Narrow-band Stochastic Process, Journal of Applied Mechanics, Vol. 41, No. 3, pp. 793-797, Sept., 1974.

20) Papoulis, A. :Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill, Inc., 1965.

21) たとえば Crandall, S. H. and Mark, W. D. :Random Vibration in Mechanical Systems, Academic Press, N. Y. and London, 1963.

第２章　材料強度の確率分布の経時変化を考慮した定常不規則振動体の初通過破壊確率

２．１　緒　言

前述のように，確率過程論における初通過理論を構造物の動的信頼性問題に応用し，初通過破壊確率を指標として構造物の信頼性や安全性を論じた研究はこれまでにも数多くみられるが，その多くは材料強度を確定論的に扱ったものである。

前章ではそのような状況を考えて，定常正規確率過程に従う不規則変動荷重を受ける構造物に関し，強度の統計的変動性を考慮することができ，しかもできるだけ簡便で，精度的にも満足のできる初通過破壊確率の算定式を導いた。そして，静的信頼性理論における中央安全率に相当する無次元パラメーター $\bar{m}$ や材料強度の変動係数を種々組合せたパラメトリック解析によって，信頼性水準の高い重要構造物の初通過破壊確率が強度のばらつきという材料の本来的特性に強く影響されることを定量的に示した[1]。その後，白木・高岡[2]も同様の観点から強度の不確定性に着目し，多次元空間における超過の理論[3]を用いて多部材からなる静定構造物の信頼性解析をおこない，構造物の耐用期間，荷重や部材強度の変動係数，部材の中央安全率などと破壊確率との関係を考察している。ただ同理論は，応答と強度が同一の確率分布に従う場合でなければ具体的には活用しにくい。したがって白木らはそれらがいずれも正規分布に従うものとして数値解析をおこなっている。さらに Yang ・ Heer[4] や小池[5]は疲労クラックの進展による強度の劣化を考慮して構造物の動的信頼性を論じ，特に小池は残存抵抗力の概念の重要性を指摘している。

そこでこの第２章では，前章において無視していた強度の確率分布の経時変化－具体的には２．２で詳述する－を考慮して新たに初通過破壊確率の算定式を誘導し，数値解析によって強度の確率分布の経時変化が定常不規則変動荷重を受ける構造物の破壊確率に及ぼす影響について検討する。

本章ではまず算定式の定式化の過程を示し，次に線形１自由振動系を対象にしてパラメトリックな数値解析をおこなった結果に基づいて，強度の確率分布の経時変化の影響を考察する。さらに Harleman ら[6]が海洋構造物の波浪応答解析を簡易化するために用いたモデルのように，不規則に変動する集中荷重を先端に受ける直立円柱を取り上げ，荷重の大きさや作用時間と断面の降伏超過確率との関係を検討する。なお，ここで考究する内容は１次元確率過程論に属するものであり，破壊領域が２次元あるいはさらに高次元で与えられる初通過破壊問題[7]に対しては，別途破壊確率の評価式を定式化しなければならない。しかし強度の確率分布の経時変化を初通過破壊確率の評価に反映させる概念および手法そのものはその場合にも有効である。

2．2　初通過破壊確率の評価

2．2．1　基本的概念

構造上主要な断面や接合部におけるある種の変動断面力もしくは変動応力（以下動的応答あるいは単に応答と称する）を $x(t)$ とし，$x(t)$ に対応する部材強度あるいは材料強度を S とする。そしてある限定時間にわたる1回の変動荷重の作用下では強度の劣化は無視できるほど小さいものとして，初通過破壊現象を図解的に示すと図2．1のようになる。

図における $x(t)$ と $x_{\max\limits_{0\leq\tau<t}}$ は，それぞれ $x(t)$ および時間区間 $[0, t)$ における $x(t)$ の最大値 $x_{\max\limits_{0\leq\tau<t}}$ の1つの標本関数であり，$f_S(S)$ および $\bar{S}$ はそれぞれ時刻零における強度の確率密度関数と平均値を表している。また $f_S(S|S>x_{\max\limits_{0\leq\tau<t}})$ は，時刻 t までの構造物の非破壊条件によって下限が保証された強度の条件付確率密度関数である。さらに σ_x は，平均値が零の定常正規確率過程 $x(t)$ のr.m.s.値である。

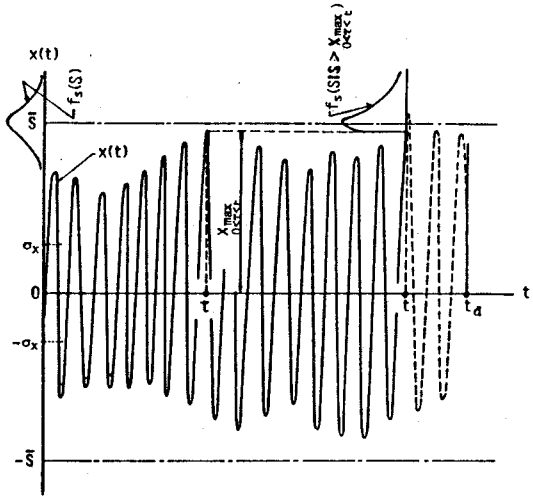


図2．1　初通過破壊の概念図

このとき1回の荷重作用に対する構造物の初通過破壊確率は，$x(t)$ が強度を超過する現象がポアソン過程に従うとすれば，

$$P_f(t_d)=1-P_{s,x}(0)\exp\left\{-\int_0^{t_d}\nu_x{}^+(S,t)\,dt-\int_0^{t_d}\nu_x{}^-(S,t)\,dt\right\} \qquad (2.1)$$

と表せる。ここに $\nu_x{}^+(S,t)$ および $\nu_x{}^-(S,t)$ は時刻 t における応答過程の強度超過率で，$\nu_x{}^+(S,t)$ は正の強度を正の勾配で超過する場合の強度超過率，$\nu_x{}^-(S,t)$ は負の強度を負の勾配で超過する場合の強度超過率である。

ただ前章でも述べたように，構造物の減衰特性が小さく，同時に強度と応答が十分に離れていないときには，応答が強度を越える現象が密集状態で生起するため[8]，応答の強度超過現象をポアソン過程として導かれる式（2．1）は精度的に使用しにくい。したがってその場合には破壊現象を $x(t)$ の包絡線 $a(t)$ の初通過問題としてとらえ，$a(t)$ の時刻 t における強度超過率 $\nu_a{}^+(S,t)$ および $\nu_a{}^-(S,t)$ を用いて初通過破壊確率を評価するのが望ましい。ここに ν に付けた肩付き添字＋あるいは－の意味については $x(t)$ の強度超過率の場合と同様である。この場合，

$$P_f(t_d)=1-P_{s,a}(0)\exp\left\{-\int_0^{t_d}\nu_a{}^+(S,t)\,dt-\int_0^{t_d}\nu_a{}^-(S,t)\,dt\right\} \qquad (2.2)$$

となる。

2．2．2　任意時刻における強度の確率密度関数

構造物の振動継続時間内の任意時刻 t における強度の確率分布は，図2．1に示すように，その時刻まで構造物あるいは構造部材が破壊しなかったという非破壊条件によって条件付けられた条件付確率分布 $F_S(S|S>x_{\max_{0\leqq\tau<t}})$ によって与えられる。すなわち，

$$F_S(S|S>x_{\max_{0\leqq\tau<t}})=\mathrm{Prob}\,[S\leqq S|S>x_{\max_{0\leqq\tau<t}}]$$
$$=\frac{\mathrm{Prob}\,[S\leqq S\cap S>x_{\max_{0\leqq\tau<t}}]}{\mathrm{Prob}\,[S>x_{\max_{0\leqq\tau<t}}]} \qquad (2.3)$$

式中，　$\mathrm{Prob}\,[A|B]$ は事象 B の生起条件のもとで事象 A が生起する確率を表す。

いま振動の継続時間内における強度の劣化はないものとすれば，S と $x_{\max_{0\leqq\tau<t}}$ とは統計的に独立な確率変量であると考えられるので，式（2．3）の分子は以下のように表される。

$$P_n=\mathrm{Prob}\,[S\leqq S\cap S>x_{\max_{0\leqq\tau<t}}]$$
$$=\iint_{D_n} f_{S,x_{\max_{0\leqq\tau<t}}}(u,v)\,du\,dv$$
$$=\int_0^S f_S(u)\left\{\int_0^u f_{x_{\max_{0\leqq\tau<t}}}(v)\,dv\right\}du$$
$$=\int_0^S f_S(u)F_{x_{\max_{0\leqq\tau<t}}}(u)\,du \qquad (2.4)$$

式中 $f_{S,x_{\max_{0\leqq\tau<t}}}(u,v)$ ，$f_S(u)$，$f_{x_{\max_{0\leqq\tau<t}}}(v)$ および $F_{x_{\max_{0\leqq\tau<t}}}(u)$ はそれぞれ S と $x_{\max_{0\leqq\tau<t}}$ との結合確率密度関数，　S の確率密度関数，　$x_{\max_{0\leqq\tau<t}}$ の確率密度関数およびその確率分布関数を示す。また D_n は $(S,x_{\max_{0\leqq\tau<t}})$ 平面において，　$S\leqq S$ かつ $S>x_{\max_{0\leqq\tau<t}}$ なる条件を満たす領域である。

次に式（2．3）の分母を P_d とすれば，同様に

$$P_d=\mathrm{Prob}[S>x_{\max_{0\leqq\tau<t}}]$$
$$=\iint_{D_d} f_{S,x_{\max_{0\leqq\tau<t}}}(u,v)\,du\,dv$$
$$=\int_0^\infty f_S(u)\left\{\int_0^u f_{x_{\max_{0\leqq\tau<t}}}(v)\,dv\right\}du$$
$$=\int_0^\infty f_S(u)F_{x_{\max_{0\leqq\tau<t}}}(u)\,du \qquad (2.5)$$

となる。式中 D_d は $S>x_{\max_{0\leqq\tau<t}}$ を満たす $(S,x_{\max_{0\leqq\tau<t}})$ 平面の領域を示す。

式（2．4）と（2．5）を式（2．3）に代入して次式を得ることができる。

$$F_S(S|S>x_{\max_{0\leqq\tau<t}})=\frac{\int_0^S f_S(u)F_{x_{\max_{0\leqq\tau<t}}}(u)\,du}{\int_0^\infty f_S(u)F_{x_{\max_{0\leqq\tau<t}}}(u)\,du} \qquad (2.6)$$

さらに式（２．６）を S で１回微分すれば，任意時刻における強度の確率密度関数 $f_S(S|S>x_{\max_{0\leq\tau<t}})$ が次式のように求まる。

$$f_S(S|S>x_{\max_{0\leq\tau<t}})=\frac{f_S(S)F_{x_{\max_{0\leq\tau<t}}}(S)}{\int_0^\infty f_S(u)F_{x_{\max_{0\leq\tau<t}}}(u)du} \qquad (2.7)$$

さて式（２．７）における $F_{x_{\max_{0\leq\tau<t}}}(u)$，すなわち定常確率過程の最大値の確率分布についてはいまだ厳密式は得られていない。したがって本研究では次の近似式を用いることにする[9]。

$$F_{x_{\max_{0\leq\tau<t}}}(u)=\left\{1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{Erf}\left(\frac{u}{\sqrt{2}\sigma_x}\right)\right\}\exp\left[-N_{x,0}{}^{+}\,t\exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_x{}^2}\right)\Big/\left\{1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{Erf}\left(\frac{u}{\sqrt{2}\sigma_x}\right)\right\}\right] \qquad (2.8)$$

式中，$N_{x,0}{}^{+}$ は，$x(t)$ が確定的レベル $x=0$ を正の勾配で超過する単位時間当りの回数の期待値である。

２．２．３　新たな強度超過率の概念

以下では $\nu_x{}^{+}(S,t)$ や $\nu_a{}^{+}(S,t)$ にのみ着目して新たな強度超過率の概念について述べるが，$\nu_x{}^{-}(S,t)$，$\nu_a{}^{-}(S,t)$ についても概念そのものはまったく同様である。

前章で示したように，強度が時間には無関係な確率分布で与えられるとき，定常応答過程あるいはその包絡線過程の強度超過率は次式で与えられる。

$$\nu_z{}^{+}(S)=\int_{R_S}\left\{\int_0^\infty \dot{z}f_{z\dot{z}}(u,\dot{z})d\dot{z}\right\}f_S(u)du \qquad (2.9)$$

式中の z は x あるいは a をとり，$\dot{z}$ は z の時間的導関数であり，$f_{z\dot{z}}(z,\dot{z})$ は z と $\dot{z}$ の結合確率密度関数を表している。

したがって強度の確率分布の経時変化を考える場合には，式（２．９）における $f_S(u)$ の代わりに，式（２．７）で与えられる $f_S(u|S>x_{\max_{0\leq\tau<t}})$ を代入すればよい。ただし $x_{\max_{0\leq\tau<t}}$ が確率量であるため，S の存在領域も確率的な領域になり，その結果 $\nu_z{}^{+}$ も確率量になる。同時に時間関数にもなるので，$\nu_z{}^{+}(S)$ を $\nu_z{}^{+}(S,t)$ と表すことにする。

$$\nu_z{}^{+}(S,t)=\frac{1}{\int_0^\infty f_S(u)F_{x_{\max_{0\leq\tau<t}}}(u)du}\int_{R_S}\left\{\int_0^\infty \dot{z}f_{z\dot{z}}(u,\dot{z})d\dot{z}\right\}f_S(u)F_{x_{\max_{0\leq\tau<t}}}(u)du \qquad (2.10)$$

式中，R_S は $S>x_{\max_{0\leq\tau<t}}$ を満たす S の領域を示す。

さて，強度超過率は単位時間に応答が強度を超過する確率と定義されるが，応答が強度を越える事象

を記述する確率変数 x_E が0－1確率変数[10] であることを考えれば，x_E の期待値 $E[x_E]$ であるとも解釈できる。このことより，式（2．10）で与えられる $\nu_z^+(S, t)$ の1つの標本関数 $\nu_z^+(S, t)$は，$S_i \leqq x_{\max_{0 \leqq \tau < t}} \leqq S_i + dS_i$ という条件のもとで応答が強度を超過する事象の期待値，すなわち条件付期待値 $E[x_E/S_i \leqq x_{\max_{0 \leqq \tau < t}} \leqq S_i + dS_i]$ であると考えられる。したがって $x_{\max_{0 \leqq \tau < t}}$ の全事象に対する強度超過率は

$$\nu_z^+(S, t) = \sum_i E[x_E/S_i \leqq x_{\max_{0 \leqq \tau < t}} \leqq S_i + dS_i] \, \mathrm{Prob}[S_i \leqq x_{\max_{0 \leqq \tau < t}} \leqq S_i + dS_i] \qquad (2.11)$$

と表せる[11]。

ところが上述の理由により

$$\nu_{z,i}^+(S, t) = E[x_E/S_i \leqq x_{\max_{0 \leqq \tau < t}} \leqq S_i + dS_i] \qquad (2.12)$$

であり，さらに

$$\begin{aligned} &\mathrm{Prob}[S_i \leqq x_{\max_{0 \leqq \tau < t}} \leqq S_i + dS_i] \\ &\quad = \mathrm{Prob}[\nu_{z,i}^+(S, t) \leqq \nu_z^+(S, t) \leqq \nu_{z,i}^+(S, t) + d\nu_{z,i}^+(S, t)] \end{aligned} \qquad (2.13)$$

となるように $\nu_z^+(S, t)$ の確率密度を決めれば，式（2．12）と式（2．13）を式（2．11）に代入することにより次式が得られる。

$$\begin{aligned} \nu_z^+(S, t) = &\sum_i \nu_{z,i}^+(S, t) \\ &\cdot \mathrm{Prob}[\nu_{z,i}^+(S, t) \leqq \nu_z^+(S, t) \leqq \nu_{z,i}^+(S, t) + d\nu_{z,i}^+(S, t)] \end{aligned} \qquad (2.14)$$

ここで十分小さい $d\nu_{z,i}^+(S, t)$ になるよう dS_i を選んで $d\nu_{z,i}^+(S, t) \longrightarrow d\nu_z^+(S, t) \equiv d\nu$ とし，$\nu_{z,i}^+(S, t)$ を単に ν で表せば

$$\mathrm{Prob}[\nu \leqq \nu_z^+(S, t) \leqq \nu + d\nu] \simeq f_{\nu_z^+}(\nu, t) d\nu \qquad (2.15)$$

が成立する。ここに $f_{\nu_z^+}(\nu, t)$は $\nu_z^+(S, t)$ の確率密度関数である。式（2．15）を式（2．14）に代入し，さらに $d\nu_z^+(S, t) \longrightarrow 0$ とすれば，結局新たな強度超過率として次式が得られることがわかる。

$$\nu_z^+(S, t) = \int_0^\infty \nu f_{\nu_z^+}(\nu, t) d\nu \qquad (2.16)$$

$f_{\nu_z^+}(\nu, t)$ は陽な形では表すことができないが，式（2．10）と $x_{\max_{0 \leqq \tau < t}}$ の確率分布を用いることによって離散的な確率分布として表現することができるので，式（2．16）に基づいて近似的に $\nu_z^+(S, t)$ を算定できる。

2．2．4　応答過程の強度超過率

応答 $x(t)$ が零平均値を有する定常正規確率過程を示すとき，両者の結合確率密度関数 $f_{x\dot{x}}(x, \dot{x})$ は式（1．6）で与えられる。式（2．10）において z を x とし，同式に式（1．6）を代入すれば，$\dot{x}$ に関する定積分を実行することによって次式が得られる。

$$\nu_x^+(S, t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x}\frac{1}{\int_0^\infty f_S(u)F_{\underset{0\leqq\tau<t}{x_{max}}}(u)du}$$

$$\cdot\int_{\underset{0\leqq\tau<t}{x_{max}}}^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_x{}^2}\right)f_S(u)F_{\underset{0\leqq\tau<t}{x_{max}}}(u)du \qquad (2.17)$$

式（2．17）を式（2．16）に適用すれば応答過程の強度超過率が得られる。無載荷材料の強度が正規分布あるいは対数正規分布に従うものとして，式（2．17）を書き改めれば以下のようになる。

a）材料強度が正規分布に従う場合

この場合の $f_S(u)$ は

$$f_S(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_S}\exp\left\{-\frac{(u-\bar{S})^2}{2\sigma_S{}^2}\right\} \qquad (2.18)$$

で与えられる。式中の $\bar{S}$ および σ_S はそれぞれ無載荷材料の強度の平均値と標準偏差である。

式（2．18）を式（2．17）に代入し，同式を前述の無次元パラメーター $\bar{m}$（$=\bar{S}/\sigma_x$）および $\delta_S(=\sigma_S/\bar{S})$ によって表し，さらに $r=u/\sigma_S$ なる無次元量によって変数変換すれば，次式が得られる。

$$\nu_x^+(S, t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x}\frac{1}{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2}+\frac{r}{\delta_S}\right)F_{\underset{0\leqq\tau<t}{x_{max}}}(\sigma_S r)dr}$$

$$\cdot\int_{\underset{\sigma_S}{\underset{0\leqq\tau<t}{x_{max}}}}^\infty \exp\left(-\frac{1+\bar{m}^2\delta_S{}^2}{2}r^2+\frac{r}{\delta_S}\right)F_{\underset{0\leqq\tau<t}{x_{max}}}(\sigma_S r)dr \qquad (2.19)$$

さらに $x_{\underset{0\leqq\tau<t}{max}}=\sigma_x x_{\underset{0\leqq\tau<t}{max}}{}^*$ とおけば式（2．19）は，

$$\nu_{x,N}{}^+(\bar{m}, \delta_S, t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x}\frac{1}{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2}+\frac{r}{\delta_S}\right)F_{\underset{0\leqq\tau<t}{x_{max}}{}^*}(\bar{m}\delta_S r)dr}$$

$$\cdot\int_{\underset{\bar{m}\delta_S}{\underset{0\leqq\tau<t}{x_{max}}{}^*}}^\infty \exp\left(-\frac{1+\bar{m}^2\delta_S{}^2}{2}r^2+\frac{r}{\delta_S}\right)F_{\underset{0\leqq\tau<t}{x_{max}}{}^*}(\bar{m}\delta_S r)dr \qquad (2.20)$$

となる。式中，左辺の下付添字 N は材料強度が正規分布に従うことを意味し，さらに

$$F_{\underset{0\leqq\tau<t}{x_{max}}{}^*}(w)=F_{\underset{0\leqq\tau<t}{x_{max}}}(\sigma_x w) \qquad (2.21)$$

である。$F_{\underset{0\leqq\tau<t}{x_{max}}}(\sigma_x w)$ として式（2．8）を用いれば

$$F_{\substack{x_{max}^* \\ 0\leqq\tau<t}}(\bar{m}\delta_S r)=\left\{1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{Erf}\left(\frac{\bar{m}\delta_S}{\sqrt{2}}r\right)\right\}\exp\left[-N_{x,0^+}\,t\exp\left(-\frac{\bar{m}^2\delta_S^2}{2}r^2\right)\Big/\left\{1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{Erf}\left(\frac{\bar{m}\delta_S}{\sqrt{2}}r\right)\right\}\right] \qquad (2.22)$$

となる。

さて式（２．２２）を式（２．２０）に代入し，確率密度 p_i をもつ $\underset{0\leqq\tau<t}{x_{max,i}^*}$（$\in$ $\underset{0\leqq\tau<t}{x_{max}^*}$）を与えれば，それに対する $\nu_{x,N,i}{}^+(S,t)$ を算定することができる。したがって適当数の $\underset{0\leqq\tau<t}{x_{max,i}^*}$ に対し，それぞれ $\nu_{x,N,i}{}^+(S,t)$ を計算すれば，$\nu_{x,N}{}^+(S,t)$ の確率密度関数 $f_{\nu_x{}^+}(\nu,t)$ を近似的に求めることができる。そして $f_{\nu_x{}^+}(\nu,t)$ を式（２．１６）に代入し，数値積分によって新たな強度超過率が得られる。

ｂ）材料強度が対数正規分布に従う場合

まずこのときの確率密度関数は次式で与えられる。

$$f_S(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\ln(1+\delta_S{}^2)}u}\exp\left[-\frac{\{\ln u-\ln(\bar{S}/\sqrt{1+\delta_S{}^2})\}^2}{2\ln(1+\delta_S{}^2)}\right] \qquad (2.23)$$

以下は正規分布の場合とまったく同様の誘導過程により，$\nu_{x,N}{}^+(\bar{m},\delta_S,t)$ に代わる $\nu_{x,LN}{}^+(\bar{m},\delta_S,t)$ の算定式を導出することができる。結果のみを示せば，次のとおりである。

$$\nu_{x,LN}{}^+(\bar{m},\delta_S,t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x}\frac{1}{\int_0^\infty\frac{1}{r}\exp\left\{-\frac{(\ln r+\ln\delta_S\sqrt{1+\delta_S{}^2})^2}{2\ln(1+\delta_S{}^2)}\right\}F_{\substack{x_{max}^* \\ 0\leqq\tau<t}}(\bar{m}\delta_S r)dr}$$
$$\cdot\int_{\frac{\underset{0\leqq\tau<t}{x_{max}^*}}{\bar{m}\delta_S}}^\infty\frac{1}{r}\exp\left\{-\frac{\bar{m}^2\delta_S{}^2}{2}r^2-\frac{(\ln r+\ln\delta_S\sqrt{1+\delta_S{}^2})^2}{2\ln(1+\delta_S{}^2)}\right\}F_{\substack{x_{max}^* \\ 0\leqq\tau<t}}(\bar{m}\delta_S r)dr \qquad (2.24)$$

２．２．５　包絡線過程の強度超過率

零平均値を有する狭帯域定常正規確率過程の包絡線過程については，前述のように Lyon[8] がその確率モデルを与えている。したがってここでも同式（式（１．２９））を用いることにし，式（２．１０）における z を a とした式に式（１．２９）に代入すれば，次のようになる。

$$\nu_a{}^+(S,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sigma_1}{\sigma_x{}^2}\frac{1}{\int_0^\infty f_S(u)F_{\substack{x_{max}^* \\ 0\leqq\tau<t}}(u)du}$$
$$\cdot\int_{\underset{0\leqq\tau<t}{x_{max}}}^\infty u\exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_x{}^2}\right)f_S(u)F_{\substack{x_{max}^* \\ 0\leqq\tau<t}}(u)du \qquad (2.25)$$

式（２．２０）の $f_S(u)$ に具体的な強度の確率密度関数の式を代入すれば所要の式が得られる。

ａ）材料強度が正規分布に従う場合

式（２．１８）を式（２．２５）に代入し，２．２．４　ａ）で示した変数変換をおこない，

$\nu_a{}^+(S, t)$ を $\nu_{a,N}{}^+(\bar{m}, \delta_S, t)$ と書けば次式を導くことができる。

$$\nu_{a,N}{}^+(\bar{m}, \delta_S, t) = \frac{\bar{m}\delta_S}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma_1}{\sigma_x} \frac{1}{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2}+\frac{r}{\delta_S}\right) F_{\underset{0\leq r<t}{x_{max}*}}(\bar{m}\delta_S r)dr}$$

$$\cdot \int_{\frac{x_{max}*_{0\leq r<t}}{\bar{m}\delta_S}}^{\infty} r \exp\left(-\frac{1+\bar{m}^2\delta_S{}^2}{2}r^2+\frac{r}{\delta_S}\right) F_{\underset{0\leq r<t}{x_{max}*}}(\bar{m}\delta_S r)dr \qquad (2.26)$$

b）材料強度が対数正規分布に従う場合

応答過程に対する式（２．２４）に対応する結果のみを示せば次式のとおりである。

$$\nu_{a,LN}{}^+(\bar{m}, \delta_S, t) = \frac{\bar{m}\delta_S}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma_1}{\sigma_x} \frac{1}{\int_0^\infty \frac{1}{r}\exp\left\{-\frac{(\ln r+\ln \delta_S\sqrt{1+\delta_S{}^2})^2}{2\ln(1+\delta_S{}^2)}\right\} F_{\underset{0\leq r<t}{x_{max}*}}(\bar{m}\delta_S r)dr}$$

$$\cdot \int_{\frac{x_{max}*_{0\leq r<t}}{\bar{m}\delta_S}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\bar{m}^2\delta_S{}^2}{2}r^2-\frac{(\ln r+\ln \delta_S\sqrt{1+\delta_S{}^2})^2}{2\ln(1+\delta_S{}^2)}\right\} F_{\underset{0\leq r<t}{x_{max}*}}(\bar{m}\delta_S r)dr \qquad (2.27)$$

さて以上のようにして求められた $\nu_{x,N}{}^+(\bar{m}, \delta_S, t)$，$\nu_{x,LN}{}^+(\bar{m}, \delta_S, t)$，$\nu_{a,N}{}^+(\bar{m}, \delta_S, t)$，$\nu_{a,LN}{}^+(\bar{m}, \delta_S, t)$ の算定式である式（２．２０），（２．２４），（２．２６），（２．２７）と $F_{\underset{0\leq r<t}{x_{max}*}}(\cdot)$ を表す式（２．２２），さらに最終的に強度超過率を算定する式（２．１６）より理解できるように，任意時刻における応答過程とその包絡線過程の強度超過率は，それぞれ $\bar{m}$，δ_S，$\sigma_{\dot{x}}/\sigma_x$，$t$ および $\bar{m}$，δ_S，σ_1/σ_x，t のみに支配される。特に１自由度振動系によってモデル化される減衰の小さい構造物にホワイトノイズ状の不規則変動荷重が作用する場合には，$\sigma_{\dot{x}}/\sigma_x$ は固有円振動数にほぼ等しくなる。また σ_1/σ_x についても Lyon の方法に従えば，近似的に固有円振動数と減衰定数のみにより表せる（式（１．４８））。したがってその場合には，応答過程の強度超過率を用いるにせよ，包絡線過程の強度超過率を用いるにせよ，いずれにしても構造物の初通過破壊確率は，材料強度の平均値と応答のr.m.s.値との比，材料強度の変動係数，固有円振動数，減衰定数および振動の継続時間により算定することができる。

２．３　線形１自由度振動系の初通過破壊確率

２．３．１　数値解析モデル

強度の確率分布の経時変化が構造物の初通過破壊確率に及ぼす影響を検討するために，ホワイトノイズ状の不規則変動外力を受ける線形１自由振動系を想定し，以下の条件のもとで数値解析をおこなった。

振動系の固有円振動数：$\omega_n = 2\pi$ (rad/s)

振動系の減衰定数：$\zeta = 0.01$

振動継続時間：$t_d = 100 \sim 1800$ (s)〔付録１〕

強度の確率分布：正規分布，対数正規分布

強度の変動係数： δ_S =0.05～0.20[12)]

$\bar{m}$ の範囲： $\bar{m}$ =4 ～8

いま応答に対応する強度が正・負領域でともに等しいものとすれば，$\nu_x{}^+=\nu_x{}^-$ あるいは $\nu_a{}^+=\nu_a{}^-$ であるから，式（２．２２）を式（２．２０）あるいは式（２．２４）などに代入して，前述のように，任意時刻の $\nu_{x.N}{}^+$ あるいは $\nu_{x.LN}{}^+$ などの確率分布を数値的に求め，それらを用いて式（２．１６）の積分をやはり数値的に計算して強度超過率を求めれば，応答過程による方法（ＲＰ法）もしくは包絡線過程による方法（ＥＰ法）によって，$\bar{m}$ ，δ_S ，t_d に対応する振動系の初通過破壊確率を算定することができる。以下に計算結果を示し，考察を加える。なお式（２．２０）や式（２．２４）に含まれる定積分については，予備計算によって収束性を確認した上で Gauss系の公式を用い，式（２．１６）および式（２．１）あるいは式（２．２）の定積分は Sympsonの公式を利用しておこなった。またここでは便宜上，強度の確率分布の経時変化を無視する初通過破壊確率の評価法を「レベルＩの方法」，考慮する場合の評価法を「レベルⅡの方法」と称することにする。

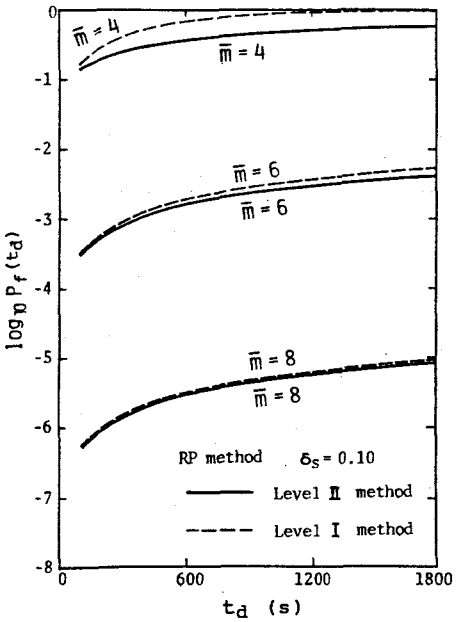
２．３．２　解析結果および考察

ａ）レベルＩの方法とレベルⅡの方法との比較

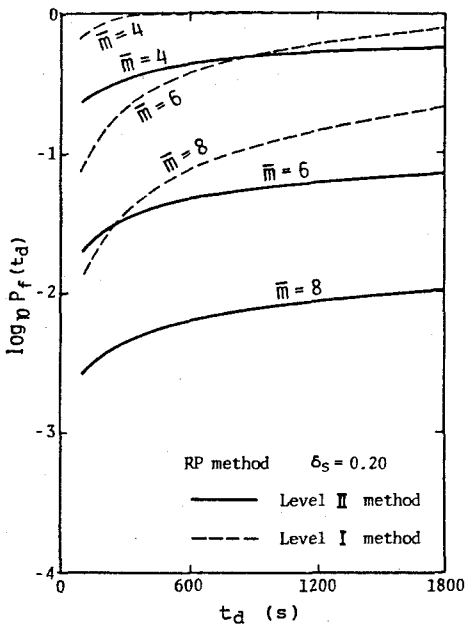
まず応答過程による方法（以下「ＲＰ法」と略記する）を用いて求めた振動継続時間と初通過破壊確率との関係を，$\bar{m}$ をパラメーターにして図２．２（ａ），（ｂ）（強度が正規分布に従う場合）と図２．２（ｃ），（ｄ）（強度が対数正規分布に従う場合）に示す。

本計算結果を待つまでもなく，$\bar{m}$ や δ_S あるいは強度の確率分布形にかかわらず，t_d の増加とともに $P_f(t_d)$ が漸増することは自明であるが，それらの組合せのいかんによっては，レベルＩの方法とレベルⅡの方法に基づく各初通過破壊確率の値にはかなり大きな差異が認められる。すなわち図２．２（ａ）および（ｃ）より，δ_S が 0.10 で，かつ $\bar{m}$ が６を越えるような条件下では，両方法による破壊確率の差異は無視できることがわかる。この結果から判断する限り，無載荷材料の強度つまり初期強度の変動係数が 0.10 より小さく，かつ $\bar{m}$ については，継続時間が短い場合には４以上，長い場合には６以上の領域における初通過破壊問題では，レベルＩの方法で破壊確率を評価してもまず問題はないといえよう。ところが図２．２（ｂ）および（ｄ）にみられるように，δ_S が 0.20 になると両者の差異は顕著になり，特に強度が正規分布に従う場合にその傾向が著しい。たとえば $\bar{m}$ = 8 で t_d =1800（ｓ）の条件下では，レベルＩの方法およびレベルⅡの方法によって求めた破壊確率はそれぞれ 0.21 および 0.01 となり（図２．２（ｂ）を参照），レベルＩの方法では破壊確率をかなり過大に評価する結果を招く。したがってこのような条件で破壊確率を評価する場合には，強度の確率分布の経時変化を考慮すべきであるといえる。

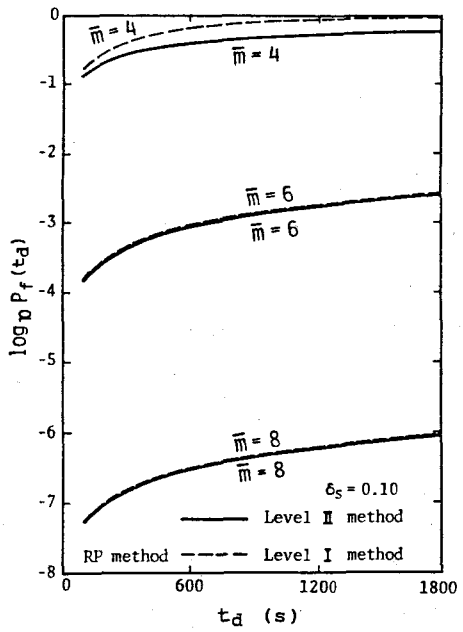
次に強度の確率分布形による破壊確率の差異を検討するために図２．３（ａ），（ｂ）（レベルＩの方法）および図２．３（ｃ），（ｄ）（レベルⅡの方法）を示す。同図より，$\bar{m}$ と δ_S が増大する



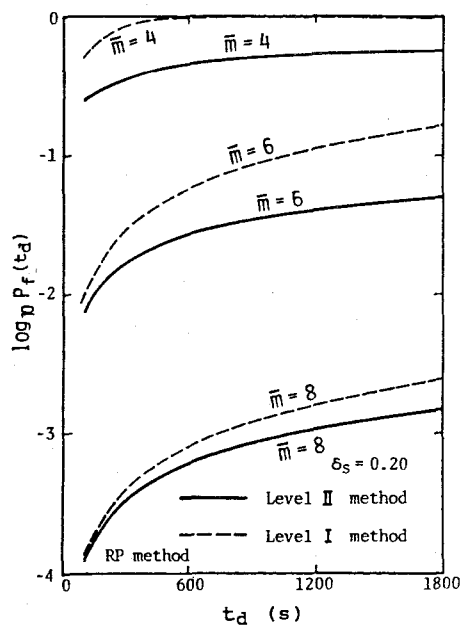
(a) Strength : Normal distribution (δ_s = 0.10)



(b) Strength : Normal distribution (δ_s = 0.20)



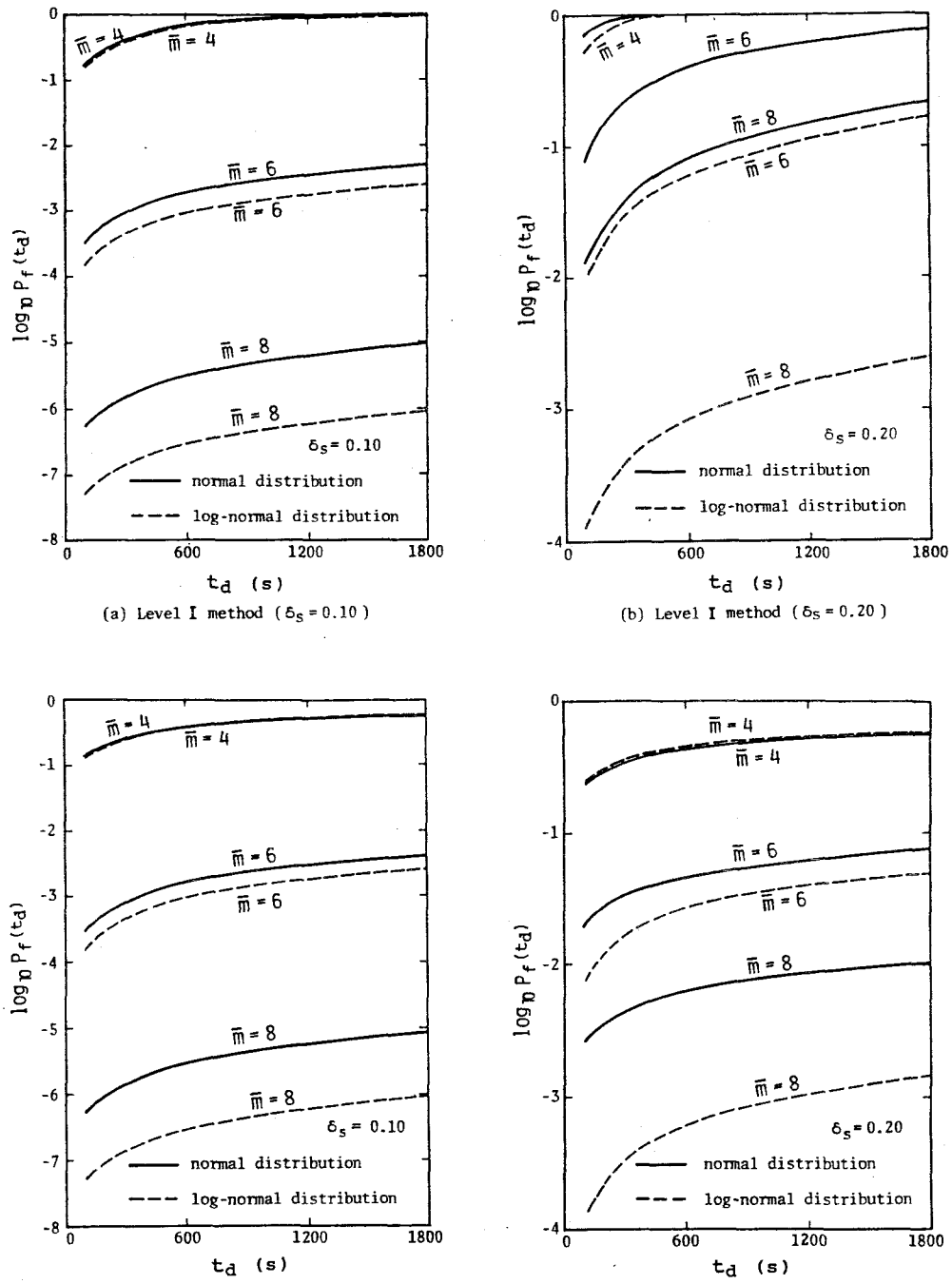
(c) Strength : Log-normal distribution (δ_s = 0.10)



(d) Strength : Log-normal distribution (δ_s = 0.20)

図２．２　初通過破壊確率（レベルⅠの方法とレベルⅡの方法との比較）

とともに強度の確率分布形が破壊確率に及ぼす影響も強くなることがわかる。また強度が正規分布に従う場合には相対的に破壊確率も大きくなることが理解できる。



(a) Level I method ($\delta_s = 0.10$)

(b) Level I method ($\delta_s = 0.20$)

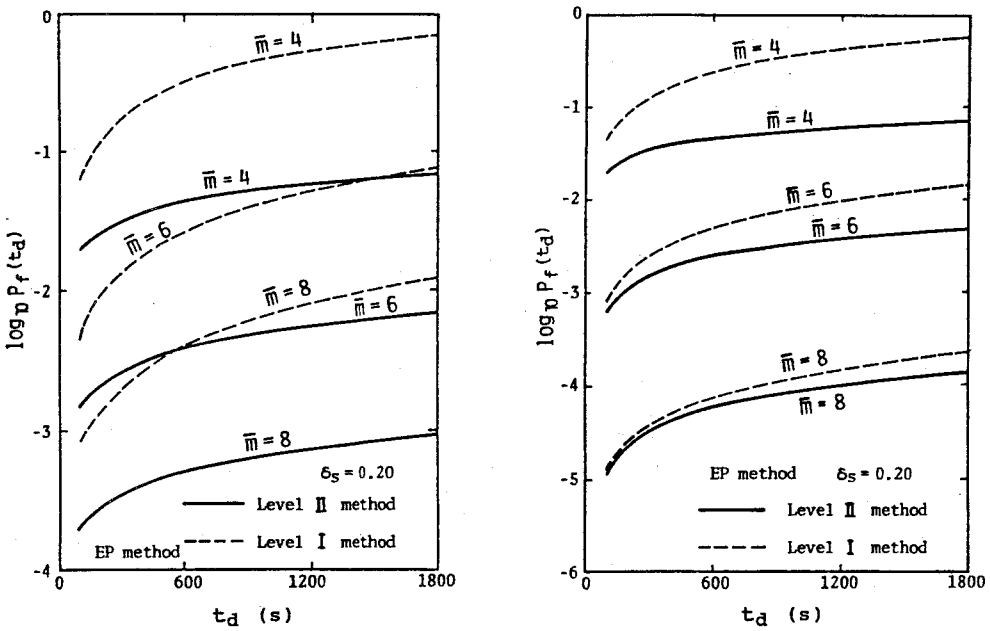
(c) Level II method ($\delta_s = 0.10$)

(d) Level II method ($\delta_s = 0.20$)

図2．3　初通過破壊確率（強度の確率分布形の影響）

以上の結果は定性的には包絡線過程による方法（以下「ＥＰ法」と略記する）の場合も同様であるので，結果の一部のみを図２．４に示す。

ＲＰ法とＥＰ法との比較は，たとえば強度が正規分布に従うものとし，その変動係数を 0.20 とした図２．２（ｂ）と図２．４（ａ）との比較，あるいは強度が対数正規分布に従うものとし，同じくその変動係数を 0.20 とした図２．２（ｄ）と図２．４（ｂ）との対比によってなされる。数値計算モデルの減衰定数が ζ =0.01と小さいために，両近似解法による破壊確率には約１桁程度の差異がみられる。またその傾向はレベルＩの方法を用いても，レベルⅡの方法を用いてもほとんど変わらない。したがってレベルⅡの方法におけるＲＰ法とＥＰ法との差異については，レベルＩの方法に基づく前章の考察結果がそのまま成立するものと考えられる。すなわち $\bar{m}$ が大きく，応答過程が広帯域周波数特性を示す場合にはＲＰ法の精度が期待でき，逆に $\bar{m}$ が小さく，応答過程の周波数特性が狭帯域である場合にはＥＰ法がより合理的であるとの結論は，レベルⅡの方法を用いたとしても同様である。



(a) Strength : Normal distribution (δ_S = 0.20)　　(b) Strength : Log-normal distribution (δ_S = 0.20)

図２．４　包絡線過程の方法による初通過破壊確率

b）初通過破壊確率と $\bar{m}$ との関係

パラメーター $\bar{m}$ は静的信頼性理論における中央安全率に相当するもので，構造物の信頼度を決定するもっとも主要な因子である。ここでは構造物の設計に際し，その重要度に応じて決められる許容破壊確率に対応する $\bar{m}$ の値をレベルⅠの方法とレベルⅡの方法によって各々算定し（それぞれ $\bar{m}^{\mathrm{I}}$，$\bar{m}^{\mathrm{II}}$ と記述する），レベルⅠの方法では実際よりも過度に大きい $\bar{m}$ の値が要求される場合があることを定量的に指摘してみよう。なお計算は振動系の減衰定数が小さいことを考慮してＥＰ法に基づいている。

まず図２．５（ａ），（ｂ）はそれぞれ振動継続時間を 600秒と1800秒としたときの $\bar{m}$ と初通過破壊確率との関係を示したものであり，いずれも材料強度の変動係数は 0.20 としている。

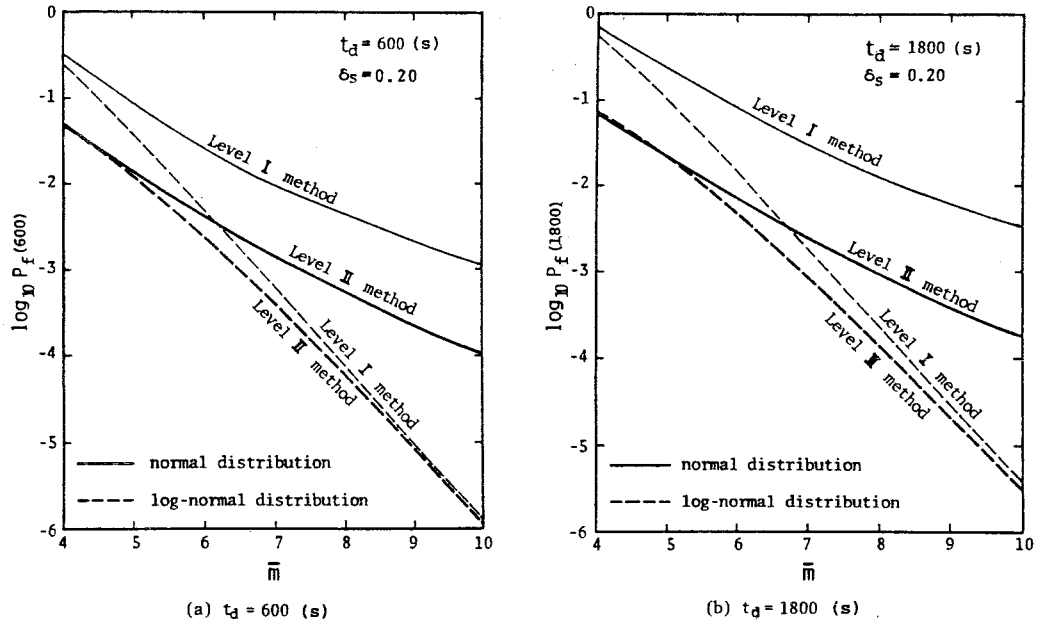


図２．５　$\bar{m}$ と初通過破壊確率との関係

同図を利用して，許容破壊確率 $P_{f,a}$ を 1×10^{-2} と 1×10^{-3} としたときの $\bar{m}$ の値を算定した結果を表２．１に示す。表より，強度の確率分布形や許容破壊確率にかかわらず，レベルⅠの方法を用いたときにはレベルⅡの方法によるよりも高い $\bar{m}$ を算定する結果になり，特に強度が正規分布に従う場合に両者の差が顕著であることがわかる。たとえば強度が正規分布に従うとして，$P_{f,a}=1\times10^{-3}$，t_d =1800（ｓ）とすると　$\bar{m}^{\mathrm{I}}=12.25$，　$\bar{m}^{\mathrm{II}}=7.93$となり，両者に大きな差があることは歴然としている。さらに両者の差は振動の継続時間にも影響され，t_d の増加とともに差が拡がっていることも明瞭である。

次にレベルⅡの方法を用いることによって，強度の確率分布形による所要の $\bar{m}$ 値の変動が，レベルⅠの方法によるよりもかなり小さくなることを示そう。

表２．１　許容破壊確率に対応する $\bar{m}$ の値

(a) $P_{f,a}=1\times10^{-2}$; $\delta_s=0.20$

$f_s(s)$	$t_d(s)$	$\bar{m}^{I}$	$\bar{m}^{II}$	$\bar{m}^{I}/\bar{m}^{II}$
normal	600	6.92	5.25	1.32
	1800	8.23	5.68	1.45
log-normal	600	5.66	5.13	1.10
	1800	6.18	5.53	1.12

(b) $P_{f,a}=1\times10^{-3}$; $\delta_s=0.20$

$f_s(s)$	$t_d(s)$	$\bar{m}^{I}$	$\bar{m}^{II}$	$\bar{m}^{I}/\bar{m}^{II}$
normal	600	10.15	7.35	1.38
	1800	12.25	7.93	1.54
log-normal	600	6.77	6.48	1.04
	1800	7.27	6.92	1.05

いま $P_{f,a}=1\times10^{-3}$，　$t_d=1800$（ｓ）とすると，表２－１（ｂ）の第３，４欄の第３，５行の値を用いて次の結果が得られる。

$$\bar{m}_N{}^{I}/\bar{m}_{LN}{}^{I}=12.25/7.27=1.69$$

$$\bar{m}_N{}^{II}/\bar{m}_{LN}{}^{II}=7.93/6.92=1.15$$

ここに $\bar{m}^{I}$ と $\bar{m}^{II}$ の下付添字 N および LN は強度の確率分布形を示すもので，N は正規分布を，LN は対数正規分布を表している。

この例より，レベルⅡの方法を用いることによって強度の確率分布形が所要の $\bar{m}$ に及ぼす影響を比較的小さく押えられることが理解できることがわかる。したがって強度の分布形をいずれかに決める明確な資料がない場合にも，信頼性評価の有用性が保たれるといえるであろう。

ただし強度のばらつきが小さい場合には，$\bar{m}$ が特別大きい値でない限り，強度の分布形はそれほど破壊確率に影響を及ぼさないし，またレベルⅠの方法でもレベルⅡの方法でも破壊確率に大きな差異は生じないので，このような議論の余地はない。

２．４　応用例　―― 直立円柱の初通過破壊確率 ――

初通過破壊確率を指標として，零平均値を有する水平方向の定常不規則変動荷重を先端に受ける鋼製直立円柱基部断面の降伏超過確率について考える。なお円柱の高さ方向の強度の確率特性が一様で，さらに振動性状が１次モードの卓越したものであれば，基部断面の降伏超過確率は円柱の降伏超過確率に等しい。

ここでは２．２で示したレベルⅡの方法に基づく包絡線過程による方法によって，荷重の大きさや材

料強度の分布形やばらつきが降伏超過確率に及ぼす影響について論述する。

2．4．1　円柱基部断面の降伏超過確率

いま円柱の全断面において局部座屈は生じないものとし，さらに材料の引張側降伏点と圧縮側降伏点が等しいものとする。また自重による圧縮応力も荷重による垂直応力に比較して無視できるほど小さいものと仮定する。このとき1回の変動荷重の作用に対する円柱の基部断面の降伏超過確率は式（2．2）より

$$P_f(t_d)=1-P_{s,a}(0)\exp\left\{-2\int_0^{t_d}\nu_a^+(\bar{m},\ \delta_S,\ t)dt\right\} \qquad (2.28)$$

で与えられる。

したがって不規則振動解析によって基部断面の縁応力度のr.m.s.値を求め，さらにそれを用いて強度超過率 $\nu_a^+(\bar{m},\ \delta_S,\ t)$ を計算すれば，式（2．28）によって降伏超過確率を評価することができる。

2．4．2　円柱基部断面に生じる縁応力度およびその時間的導関数のr.m.s.値

誘導過程は省略するが，弾性応答による基部断面の縁応力度のr.m.s.値は次式によって与えられる。

$$\sigma_x=\left[\frac{22.812}{m^2l^6}\ \frac{(EI)^2}{W^2}\int_0^\infty S_{PP}(\omega)\ \frac{1}{\{(\omega_{n,1}{}^2-\omega^2)^2+4\,\zeta_1{}^2\omega_{n,1}{}^2\omega^2\}}d\omega\right]^{1/2} \qquad (2.29)$$

ただし上式では2次以上の高次振動モードの影響については無視している。また式中の ω は円振動数，$\omega_{n,1}$ ，ζ_1 はそれぞれ円柱の1次モードに対する固有円振動数および減衰定数，l および m はそれぞれ円柱の高さおよび単位長当りの質量，I および W はそれぞれ円柱断面の断面2次モーメントおよび断面係数，E は鋼材のヤング率，$S_{PP}(\omega)$ は荷重 $P(t)$ の片側パワースペクトル密度関数である。

2．4．3　解析モデル

解析モデルとして，ドルフィンなどの脚としてしばしば使用される規模の鋼製中空直立円柱を採用した。断面諸元などの関係諸量は以下のとおりである。

a）円柱

l ＝38.72（m），D ＝150(cm)（直径），t ＝2（cm）（板厚）

$\omega_{n,1}$ ＝2 π (rad/s)，ζ_1 ＝0.01

b）材料

E ＝2.1 ×10^6 (kg/cm^2)，　$\bar{S}$ ＝2850(kg/cm^2)，　δ_S ＝0.10，0.15，0.20

$f_S(S)$：正規分布，対数正規分布

c）荷重

図2．6に示す3種類の定常正規不規則変動荷重

2．4．4　解析結果および考察

まず各荷重（Load A，Load B，Load C）に対する縁応力度のr.m.s.値を式（2．29）によって計算した結果はLoad A，B，Cに対して，それぞれ911 kg/cm²，644 kg/cm²，408 kg/cm²である。なお表2．2は，ここで想定している荷重と円柱の強度との大まかな関係を理解するために，確定論的な概念に従って推定した縁応力度の最大値を示したものである。また降伏超過確率を決定するもっとも主要な因子である $\bar{m}$ の値は，Load A，B，Cに対してそれぞれ3.127，4.423，6.992である。

次に $\zeta_1=0.01$と減衰定数が小さいことを考慮して $\sigma_1/\sigma_x=\pi\zeta_1\omega_{n.1}/\sqrt{12}$（式（1．48））とし，振動継続時間を50等分した各時刻の $\nu_a^+(\bar{m},\delta_S,t)$ を式（2．26）

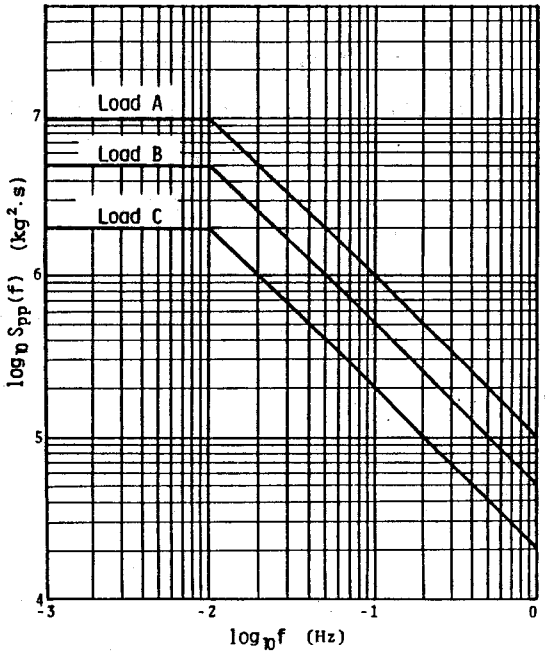


図2．6　変動荷重のパワースペクトル密度関数

表2．2　確定論的な概念による縁応力度の最大値

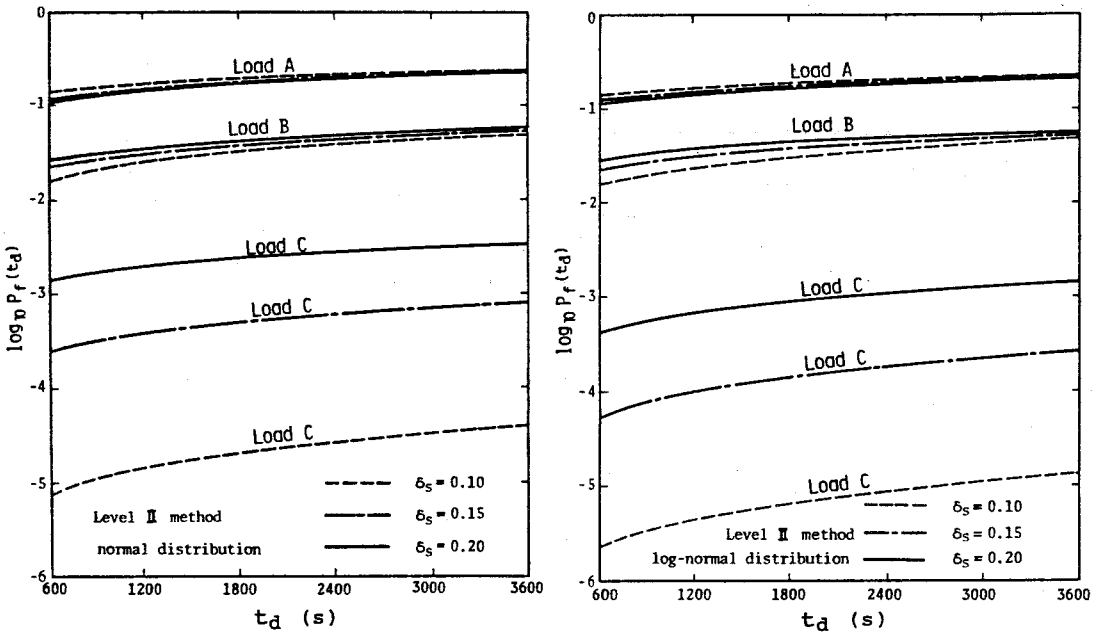
荷重＼縁応力度	σ_x	$2.0\sigma_x$	$2.5\sigma_x$	$3.0\sigma_x$	$3.5\sigma_x$
Load A	911	1822	2278	2733	3189
Load B	644	1288	1610	1932	2254
Load C	408	816	1020	1224	1428

(unit:kg/cm²)

（あるいは式（2．27））と式（2．22）および式（2．16）に基づいて計算した。そして式（2．28）によって，各荷重モデルおよび材料強度の確率特性に対応する降伏超過確率を算定した。横軸に振動継続時間をとり，縦軸に降伏超過確率をとって，計算結果を図2．7（a）（強度が正規分布に従う場合）および図2．7（b）（強度が対数正規分布に従う場合）に示す。

これらの図より，Load A，Bのように，材料強度との相対性においてパワーの大きい荷重がかなりの継続時間にわたって構造物に作用する場合には，降伏点の確率分布形や変動係数はそれほど降伏超過確率（以下単に破壊確率という）に影響していないことがわかる。一方Load Cのように比較的パワーの小さい荷重作用を受ける構造物の破壊確率はそれら2つの因子に強い影響を受けている。

さて非常に大まかな言い方にならざるをえないが，基部断面の縁応力はLoad Aの荷重に対しては降伏点を越える可能性がかなり強く，一方Load Cの荷重に対しては現行の許容応力度（いまの場合SS41



(a) Strength : Normal distribution　　(b) Strength : Log-normal distribution

図２．７　円柱基部断面の降伏超過確率（レベルⅡの方法）

相当の材料を想定しているから，　σ_a =1400 kg/cm²)に達する可能性もあまりないであろうことが，表２．２より推測できる。したがってこのことと図２．７の結果を併せて考えてみれば，降伏点を超過する可能性の強い応力を生じさせるような不規則変動荷重に対する構造物の破壊確率は１×10^{-1}程度であると推量できる。これに対して許容応力度程度の応力しか生じさせないような荷重に対しては，構造物の破壊確率は１×（10^{-3}～10^{-5}）であると考えられる。現行の許容応力度設計法で設計される構造部材の破壊確率がやはり１×（10^{-3}～10^{-5}）程度[13]　であることを考えるとき，この結果は非常に興味深く思われる。

なお参考のために，図２．８にレベルⅠの方法により算定した破壊確率と振動継続時間との関係を示しておく。図２．７と比較すれば，強度の変動係数が破壊確率に及ぼす影響がレベルⅡの方法によるよりもかなり強いことが理解できる。

次に振動継続時間と破壊確率との関係について考えてみると，振動継続時間が１０分と６０分とのように極端に異なる場合には，もちろんそれぞれに対応する破壊確率にも相応の差が認められるが，たとえば３０分と４０分といった程度の継続時間の差は，ほとんど破壊確率には影響しないといえる。これは構造物の耐風安全性に関する篠塚[14]　のコメント，すなわち「暴風あるいは台風の継続時間を３０分と考えても４０分と考えても，ガストレスポンスファクターに大差はない」―したがってこのとき構造物の信頼性レベルにも大きな差異は生じないと理解できる―を，動的信頼性の観点から定量的に示すも

のである。なおガストレスポンスファクター（ガスト応答倍率）の問題については，本論文でも第３章および第４章において詳述する。

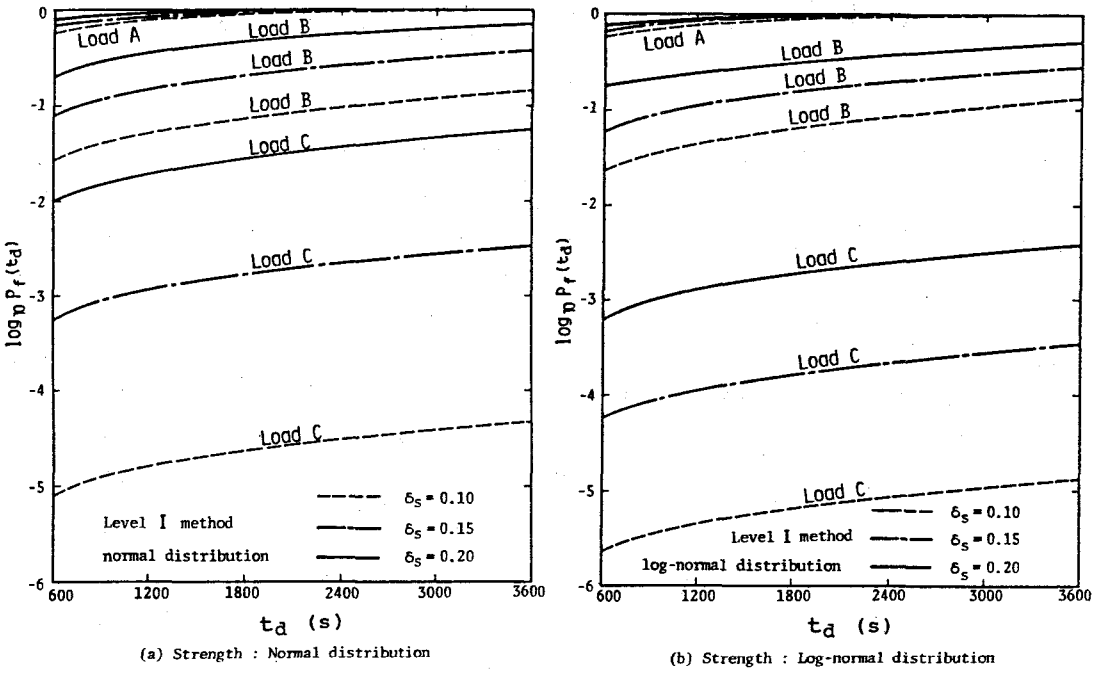


図２．８　円柱基部断面の降伏超過確率（レベルＩの方法）

２．５　結　言

本章では定常正規不規則外力の作用下において，非破壊効果による材料強度の確率分布の経時変化が破壊確率に及ぼす影響に注目し，構造物の初通過破壊確率に関する問題を論述した。得られた結論を要約すると次のとおりである。

(1)　構造物の振動継続時間内における強度の確率分布の経時変化を考慮しうる初通過破壊確率の評価式を，応答過程による方法と包絡線過程による方法とによってそれぞれ定式化できた。ただし材料強度の劣化がない場合についてのみ取り扱っている。それらは強度の確率分布形と変動係数，強度の平均値と応答のr.m.s.値との比 $\bar{m}$ ，構造物の固有振動数と減衰定数，さらに振動継続時間によって表されている。したがってパラメトリックな数値解析が可能であり，それぞれの因子が初通過破壊確率へ及ぼす影響を定量的に検討できる。

(2)　材料強度の変動係数が大きく，かつ $\bar{m}$ が比較的小さい場合には，強度の確率分布の経時変化を無

視した前章の評価手法はかなり過大な初通過破壊確率を与えることがあり，強度が正規分布に従う場合にその傾向が著しい。また強度の確率分布形による破壊確率の差異も実際よりは大きく現われてくる。したがってそのような場合には，強度の確率分布の経時変化を忠実に考慮する必要がある。ただしその場合でも強度の変動係数が 0.10 より小さく，$\bar{m}$ が5～6を越えるような条件（振動継続時間が短い場合には $\bar{m}$ が4程度でも）の下ではその影響はほとんど無視できるので，計算の簡便性を考えて前章の算定式を用いることが望ましい。

(3) 強度の確率分布形が初通過破壊確率に与える影響については，強度の確率分布の経時変化を考慮する場合も，無視する場合も定性的には同様の傾向を示す。すなわち他の条件がすべて同一であるとすれば，強度が対数正規分布に従うときには，正規分布に従うときよりも破壊確率は小さくなる。しかしその差異は $\bar{m}$ と強度の変動係数が小さくなるに従って減少し，$\bar{m}$ が5以下であれば，強度の変動係数が 0.20 のように大きいときにも有意な差異は認められない。

(4) 応答過程による方法（ＲＰ法）と包絡線過程による方法（ＥＰ法）の初通過破壊確率に及ぼす影響についても，強度の確率分布の経時変化を考慮しても，無視しても大差はない。したがってこの点に関する前章の結論はそのまま成立する。すなわちＲＰ法とＥＰ法による破壊確率の評価値の差異は $\bar{m}$ と減衰定数とによってほぼ決まり，無載荷材料の強度の確率分布形や変動係数にはあまり影響を受けない。

参　考　文　献

1） 小松定夫・中山隆弘：材料強度のばらつきを考慮した定常不規則振動体の初通過破壊確率の研究，土木学会論文報告集，No.250, pp.25-36, 1976年6月.

2） 白木　渡・高岡宣善：確率過程論による静定構造物の信頼性解析，土木学会論文報告集，No.258, pp.23-33, 1977年2月.

3） ボロチン，V．V.著／小林繁夫他共訳：構造設計の確率論的方法と信頼性問題，培風館，pp.201-209, 1981年2月.

4） Yang, J-N. and Heer, E.:Reliability of Randomly Excited Structures, AIAA Journal, Vol.9, No.7, pp.1262-1268, 1970.

5） 小池　武：劣化構造物の動的信頼性解析，土木学会論文報告集，No.280, pp.1-11, 1978年11月.

6） Harleman, D.R.F., Nolan, W.C. and Honsinger, V.C.:Dynamic Analysis of Offshore Structures, Proceedings of 8th Conference on Coastal Engineering, pp.482-499, 1962.

7） Veneziano, D., Grigoriu, M. and Cornell, C.A.:Vector-Process Models for System Reliability, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.103, No.EM3, pp.441-460, June, 1977.

8） Lyon, R.H.:On the Vibration Statistics of a Randomly Excited Hard-spring Oscillator II, Jounal of Acoustical Society of America, Vol.33, No.10, pp.1395-1403, 1961.

9） 亀田弘行：不規則地震動に対する構造物の最大応答の推定法について，土木学会論文報告集，No.201，pp.1-12，1972年5月.

10） Papoulis, A.:Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill, Inc., p.140, 1965.

11） 文献10）の P.144.

12） 西村　昭：鋼材の機械的性質のばらつきについて，ＪＳＳＣ，Vol.5，No.48，pp.68-74，1969年

13） 尾坂芳夫・高岡宣善・星谷　勝：土木構造設計法，技報堂出版，P.67，1981年6月.

14） 篠塚正宣：構造物の動的解析および設計，ＪＳＳＣ，Vol.11，No.118，pp.22-27，1975年10月.

第3章　静的荷重と定常不規則変動荷重を同時に受ける構造物の初通過破壊確率

3．1　緒　言

耐用期間中厳しい自然環境の中にさらされる構造物は，しばしばある限定時間にわたって，時間的に変動しない静的荷重と，確率過程として扱わざるをえない不規則変動荷重の作用を同時に受ける。その結果構造物の各部には，零でない平均値を有する変動応力が発生することになる。たとえば道路橋あるいは鉄道橋の各部には，死荷重と走行車両の静的効果による静的応力と，走行車両の動的効果による動的応力が同時に生じる。また自然風を受ける長大橋あるいは煙突，送電線用鉄塔などの塔状構造物の構造部材には，死荷重と平均風圧による静的応力に加えて，風の乱れに起因する動的空気力による動的応力が重畳して作用する。この種の組合せ荷重を受ける構造物の初通過破壊確率の定式化をおこない，構造物の信頼性レベルと全応力に含まれる静的応力と動的応力の割合との関係等について検討することも本研究の目的の1つである。

この方面の研究として，南井[1]は Bolotin[2]の理論を拡張し，零でない平均値を有する外乱が構造物に作用する場合の応答のレベル超過率の算定式を誘導し，わが国における構造物の動的信頼性問題に関する研究に先鞭をつけた。また小松[3]も吊橋の耐風安全性を動的信頼性理論によって評価し，自然風に対する当時の慣用設計法の非合理性を指摘した。しかしこれらの研究では応答の許容値を確定量としているため，そこで展開された理論の応用の範囲を広げるためには，応答の許容値を確率量とした理論への拡張が望ましい。

その後は研究者の関心が主として構造物の耐震問題に向けられたこともあって，動的信頼性理論の応用領域は応答の平均値が零であるような問題にほとんど限定されていた[4]～[6]。そのため零でない平均値を有する不規則変動外力に対する初通過破壊確率を，強度の確率・統計的変動性をも考慮して考究した研究はあまりみられなかったように思われる。高岡・白木・山根[7]は初通過理論を用いて多くの不規則要因で構成される部材の信頼性問題について検討しているが，本研究とは違って静的荷重のみを対象にしている。

本章ではまず前章の定式化に準じて，零でない平均値を有する変動応力の強度超過率の算定式を定式化する。そして若干の数値解析によって全応力に含まれる静的応力と動的応力の割合と初通過破壊確率との関係を数値的に検討し，今後動的信頼性理論を具体的な設計規準に活用するときに，このような問題が重要な検討課題の1つになることを明らかにする。

次に適用例の1つとしてガストに対する構造物の耐風安全性評価問題を考え，構造物の建設地点における地表粗度や平均風速がどのように破壊確率に影響するかを検討する。ただし，ここでは時間的な風の乱れのみが問題になり，しかも1自由度振動系でモデル化できる簡単な構造物を考察の対象にする。

さて Davenport[8),9)] は構造物の耐風設計問題に関し，いわゆる「ガスト応答倍率（ gust response

factor）」の概念を示し，自然風に対する構造物の最大応答値の推定式を提案した。ただ，このガスト応答倍率は応答の最大値の期待値のみによって定義されており，分散に関する情報は含まれていない。したがって，このガスト応答倍率がそのまま利用されて設計される構造物の信頼性レベルは，応答の最大値の分散や構造物の強度の確率特性によって変動することが予想される。

そこで本章では構造物の信頼性レベルとの対応を明確に説明することのできる新たなガスト応答倍率の算定法を荷重係数設計法の概念に従って提示し，上述の振動モデルに対する数値解析によってその有用性を示す。

3．2　初通過破壊確率の評価

定常不規則変動外力と静的外力によって構造部材の主要断面に生ずる断面力あるいは構造上主要な点に生じる応力が，図3．1に示すような，零でない平均値 $\bar{x}$ の上に変動成分の重畳した定常正規確率過程 $\boldsymbol{x}(t)$ に従うものとする。このとき $\bar{x}$ を静的荷重効果，$\boldsymbol{x}_d(t)=\boldsymbol{x}(t)-\bar{x}$ で与えられる $\boldsymbol{x}_d(t)$ を動的荷重効果と考えることができる。なおここでは便宜上一貫して $\bar{x}$ を正とみなすが，そのために一般性が失われることはない。

さてこの場合の初通過破壊確率の評価式において，前章と異なる点は強度超過率の算定式のみである。したがって以下ではその点についてのみ略述する。

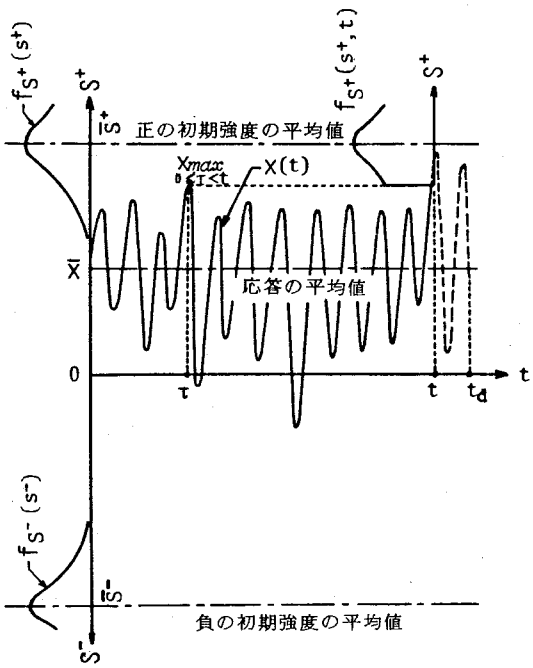


図3．1　応答の強度超過現象の概略図

3．2．1　強度の条件付確率分布

構造物の振動中の任意時刻における材料強度の確率分布については，前章で部材の非破壊条件を考慮し誘導した確率密度関数をそのまま利用することができる。すなわち

$$f_S(S,t)=\frac{f_S(u)F_{\underset{0\leq\tau<t}{x_{max}}}(u)}{\int_0^\infty f_S(u)F_{\underset{0\leq\tau<t}{x_{max}}}(u)du} \qquad (3.1)$$

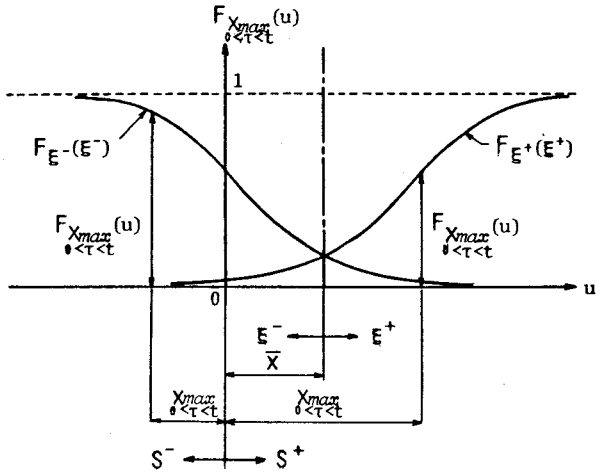


図３．２　応答の最大値の確率分布

ただし，時刻 t までの応答の最大値の確率分布については，$x(t)$ が $\bar{x}$ なる平均値を有していることを考慮して次式を使用する[6]。

$$F_{\underset{0\leq\tau<t}{x_{max}}}(u)=\left\{1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{Erf}\left(\frac{u-\bar{x}}{\sqrt{2}\,\sigma_x}\right)\right\}\exp\left[-N_{x,\bar{x}^+}t\exp\left\{-\frac{(u-\bar{x})^2}{2\sigma_x{}^2}\right\}\Big/\right.$$
$$\left.\cdot\left\{1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{Erf}\left(\frac{u-\bar{x}}{\sqrt{2}\,\sigma_x}\right)\right\}\right] \qquad (3.2)$$

式中，σ_x は $x_d(t)$ のr.m.s.値，$N_{x,\bar{x}^+}$は単位時間当たりに $x(t)$ が $\bar{x}$ を正の勾配で超過する回数の期待値である。この式（３．２）を式（３．１）に代入すれば，無載荷材料の強度の確率密度関数に応じて，任意時刻における強度の確率密度関数を求めることができる。なお図３．２より理解できるように，正の強度 S^+ に対しては式（３．２）の $\bar{x}$ を正値とし，負の強度 S^- に対しては $\bar{x}$ を負値とすれば，式（３．１）は強度の正負にかかわらず有効である。

３．２．２　応答過程の強度超過率

$x(t)$ の時間的導関数を $\dot{x}(t)$ とすれば，$x(t)$ と $\dot{x}(t)$ の結合確率密度関数は

$$f_{x\dot{x}}(x,\dot{x})=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}}\exp\left\{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x{}^2}-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}{}^2}\right\} \qquad (3.3)$$

で与えられる。式中の $\sigma_{\dot{x}}$ は $\dot{x}(t)$ のr.m.s.値である。したがって式（２．１０）の z を x と書き改めた

$$\nu_x{}^+(S,t)=\frac{1}{\int_0^\infty f_S(u)F_{\underset{0\leq\tau<t}{x_{max}}}(u)du}\int_{R_S}\left\{\int_0^\infty\dot{x}\,f_{x\dot{x}}(u,\dot{x})d\dot{x}\right\}f_S(u)F_{\underset{0<\tau<t}{x_{max}}}(u)du \qquad (3.4)$$

に式（３．３）を代入し，$\dot{x}$ に関する積分を実行するとともに，R_S の領域を $x_{\max_{0\leq\tau<t}} \sim \infty$ とすれば次式が得られる。

$$\nu_x^+(S,t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x}\frac{1}{\int_0^\infty f_S(u)F_{x_{\max_{0\leq\tau<t}}}(u)du}$$
$$\cdot\int_{x_{\max_{0\leq\tau<t}}}^0 \exp\left\{-\frac{(u-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}\right\}f_S(u)F_{x_{\max_{0\leq\tau<t}}}(u)du \qquad (3.5)$$

式（３．２）を式（３．５）に代入し，$\nu_x^+(S,t)$ の確率密度関数を前章で述べたように数値的に求め，式（２．１６）の z を x とした

$$\nu_x^+(S,t)=\int_0^\infty \nu f_{\nu_x^+}(\nu,t)d\nu \qquad (3.6)$$

に従って数値積分をおこなえば，所要の強度超過率を算定することができる。

結局式（３．６）が正の強度に対する強度超過率の算定式になるが，負の強度に対する強度超過率 $\nu_x^-(S,t)$ についても，$F_{x_{\max_{0\leq\tau<t}}}(u)$ に関する式（３．２）の $\bar{x}$ を負値とすることにより，同式をそのまま利用できる。したがって以下でも正の強度に対する強度超過率のみを考えてゆく。

a）材料強度が正規分布に従う場合

式（３．５）の $f_S(u)$ を正規確率密度関数とし，新たに

$$n=\bar{x}/\bar{S} \qquad (3.7)$$

によって，確定量とみなせる静的荷重効果を表す無次元パラメーター n を定義すれば，前述の無次元パラメーター $\bar{m}$ と δ_S とによって次式が導出できる。

$$\nu_{x,N}^+(\bar{m},n,\delta_S,t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x}\frac{1}{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2}+\frac{r}{\delta_S}\right)F_{x_{\max_{0\leq\tau<t}}^*}(\bar{m}\delta_S r)dr}$$
$$\cdot\exp\left(-\frac{\bar{m}^2n^2}{2}\right)\int_{\frac{x_{\max_{0\leq\tau<t}}^*}{\bar{m}\delta_S}}^\infty \exp\left(-\frac{1+\bar{m}^2\delta_S^2}{2}r^2+\frac{1+\bar{m}^2\delta_S^2 n}{\delta_S}r\right)F_{x_{\max_{0\leq\tau<t}}}(\bar{m}\delta_S r)dr \qquad (3.8)$$

式中，$x_{\max_{0\leq\tau<t}}^* = x_{\max_{0\leq\tau<t}}/\sigma_x$ であり，$F_{x_{\max_{0\leq\tau<t}}^*}(v)$ は式（３．２）と $v=u/\sigma_x$ なる関係により

$$F_{x_{\max_{0\leq\tau<t}}^*}(v)=\left\{1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{Erf}\left(\frac{v-\bar{m}n}{\sqrt{2}}\right)\right\}\exp\left[-t^*\exp\left\{-\frac{(v-\bar{m}n)^2}{2}\right\}\Big/\right.$$
$$\left.\left\{1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{Erf}\left(\frac{v-\bar{m}n}{\sqrt{2}}\right)\right\}\right. \qquad (3.9)$$

で与えられる。ここに $t^*=N_{x,\bar{x}^+}t$ である。

b）材料強度が対数正規分布に従う場合

やはり式（３．５）の $f_S(u)$ として対数正規確率密度関数を用いれば，次式を導くことができる。

$$\nu_{x,LN}{}^{+}(\overline{m},\ n,\ \delta_S,\ t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x}\frac{1}{\displaystyle\int_0^\infty\frac{1}{r}\exp\left\{-\frac{(\ln r+\ln\delta_S\sqrt{1+\delta_S{}^2})^2}{2\ln(1+\delta_S{}^2)}\right\}F_{x_{\max\atop 0\leqq\tau<t}{}^*}(\overline{m}\delta_S r)dr}$$

$$\cdot\exp\left(-\frac{\overline{m}^2n^2}{2}\right)\int_{\frac{x_{\max\atop 0\leqq\tau<t}{}^*}{\overline{m}\delta_S}}^\infty\frac{1}{r}\exp\left(-\frac{\overline{m}^2\delta_S{}^2}{2}r^2+\overline{m}^2\delta_S nr\right)$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{(\ln r+\ln\delta_S\sqrt{1+\delta_S{}^2})^2}{2\ln(1+\delta_S{}^2)}\right\}F_{x_{\max\atop 0\leqq\tau<t}{}^*}(\overline{m}\delta_S r)dr \qquad (3.10)$$

3．2．3　包絡線過程の強度超過率

$a(t)$ の時間的導関数を $\dot{a}(t)$ とすれば，$a(t)$ と $\dot{a}(t)$ の結合確率密度関数は式（1．29）より

$$f_{a\dot{a}}(a,\ \dot{a})=\frac{a-\overline{x}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x{}^2\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(a-\overline{x})^2}{2\sigma_x{}^2}-\frac{\dot{a}^2}{2\sigma_1{}^2}\right\} \qquad (3.11)$$

で与えられる。式中の σ_1 は式（1．30）の $\sigma_1{}^2=\sigma_{\dot{x}}{}^2-\omega_m{}^2\sigma_x{}^2$ で算定される。ω_m は狭帯域特性を示す振動の代表的周波数である。したがって式（3．4）の x を a とし，その式に式（3．11）を代入し，$\dot{a}$ に関する積分を実行すれば式（3．5）に対応する次式が得られる。

$$\nu_a{}^{+}(S,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sigma_1}{\sigma_x{}^2}\frac{1}{\displaystyle\int_0^\infty f_S(u)F_{x_{\max\atop 0\leqq\tau<t}}(u)du}$$

$$\cdot\int_{x_{\max\atop 0\leqq\tau<t}}^\infty(u-\overline{x})\exp\left\{-\frac{(u-\overline{x})^2}{2\sigma_x{}^2}\right\}f_S(u)F_{x_{\max\atop 0\leqq\tau<t}}(u)du \qquad (3.12)$$

a）材料強度が正規分布に従う場合

式（3．12）の $f_S(u)$ を正規確率密度関数とし，上述の無次元パラメーター n，$\overline{m}$，δ_S を用いることにより次式が誘導できる。

$$\nu_{a,N}{}^{+}(\overline{m},\ n,\ \delta_S,\ t)=\frac{\overline{m}\delta_S}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sigma_1}{\sigma_x}\frac{1}{\displaystyle\int_0^\infty\exp\left(-\frac{r^2}{2}+\frac{r}{\delta_S}\right)F_{x_{\max\atop 0\leqq\tau<t}{}^*}(\overline{m}\delta_S r)dr}\cdot\exp\left(-\frac{\overline{m}^2n^2}{2}\right)$$

$$\cdot\int_{\frac{x_{\max\atop 0\leqq\tau<t}{}^*}{\overline{m}\delta_S}}^\infty\left(1-\frac{n}{\delta_S}\right)\exp\left(-\frac{1+\overline{m}^2\delta_S{}^2}{2}r^2+\frac{1+\overline{m}^2\delta_S{}^2n}{\delta_S}r\right)$$

$$\cdot F_{x_{\max\atop 0\leqq\tau<t}{}^*}(\overline{m}\delta_S r)dr \qquad (3.13)$$

b）材料強度が対数正規分布に従う場合

同じく式（3．12）の $f_S(u)$ に対数正規確率密度関数の式を代入すれば次式が得られる。

$$\nu_{a,LN^+}(\bar{m},\ n,\ \delta_S,\ t)=\frac{\bar{m}\delta_S}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sigma_1}{\sigma_x}\frac{1}{\int_0^\infty \frac{1}{r}\exp\left\{-\frac{(\ln r+\ln\delta_S\sqrt{1+\delta_S^2})^2}{2\ln(1+\delta_S^2)}\right\}F_{x_{\max\,0\leq\tau<t}^*}(\bar{m}\delta_S r)dr}$$

$$\cdot\exp\left(-\frac{\bar{m}^2n^2}{2}\right)\int_{\frac{x_{\max\,0\leq\tau<t}^*}{\bar{m}\delta_S}}^{\infty}\left(1-\frac{n}{\delta_S r}\right)\exp\left(-\frac{\bar{m}^2\delta_S^2}{2}r^2+n\bar{m}^2\delta_S r\right)$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{(\ln r+\ln\delta_S\sqrt{1+\delta_S^2})^2}{2\ln(1+\delta_S^2)}\right\}F_{x_{\max\,0\leq\tau<t}^*}(\bar{m}\delta_S r)dr \qquad (3.14)$$

なお本章でもこれまでと同様，応答過程および包絡線過程の強度超過率を用いる初通過破壊確率の評価法を，それぞれ「応答過程による方法（ＲＰ法）」および「包絡線過程による方法（ＥＰ法）」と称する。

３．３　数値解析例　―― 荷重比と初通過破壊確率との関係 ――

静的荷重効果と動的荷重効果が総荷重効果の中で占める割合と初通過破壊確率との関係を検討するために，ある構造部材に異なる静的荷重効果　$x_s(=\bar{x})$　と動的荷重効果 x_d $(=k\sigma_x)$ を与える３種類の荷重モデルＡ，Ｂ，Ｃを想定する。ただし，ここで総荷重効果と称する　$x_s+x_d=\bar{x}+k\sigma_x$　はいずれの荷重の場合にも等しいものとする。k は応答 $x_d(t)$ の非超過確率に関する定数で，通常２ないし３の範囲の値を採ることが多い。ここでは 2.55 として計算を進めてゆく。なお図３．３に（１）無載荷材料の強度の平均値と総荷重効果との相対関係，（２）各荷重モデルによる静的荷重効果と動的荷重効果の大きさ，（３）各荷重モデルに対する無次元パラメーター $\bar{m}$ および n の値を示しておく。荷重モデルＡは３者の中では比較的動的荷重の割合が大きく，モデルＣは静的荷重の比重の大きい荷重モデルである。それらの中間的な荷重モデルとしてモデルＢが挙げられる。動的荷

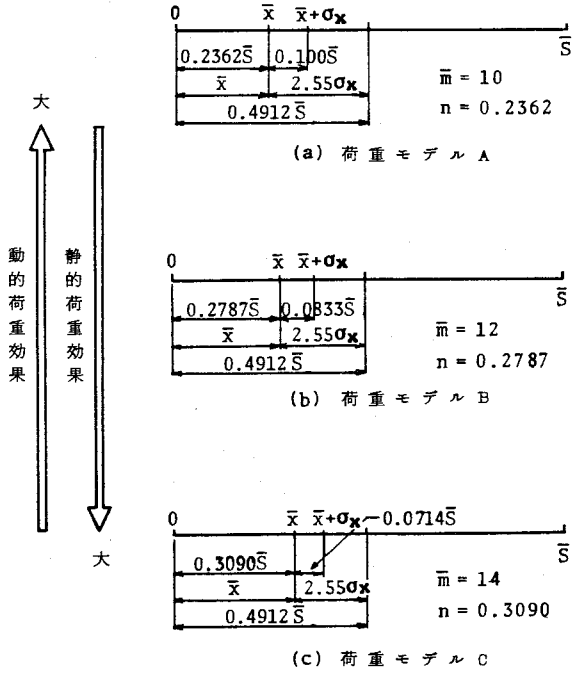


図３．３　静的荷重効果と動的荷重効果の割合

重効果と静的荷重効果の比 ε を荷重比とすれば，ε はモデルA，B，Cの荷重に対して，それぞれ 1.080, 0.762, 0.589 である。

$\sigma_{\dot{x}}/\sigma_x = 2\pi$ (rad/s)，$N_{x,\bar{x}^+} = 2\pi$ (1/s)，$t_d = 600$ (s) と仮定し，さらに強度の確率特性は正負共に等しく，いずれも正規分布に従い，変動係数は 0.10 とする。この条件の下で応答過程による方法によって求めた $\bar{m}$ と n と $P_f(t_d)$ との関係を示したものが図3－4である。そして同図と図3．3に掲げた $\bar{m}$ と n の値を用いて，各荷重モデルに対する部材の初通過破壊確率を求めた結果が表3．1である。

表よりたとえ総荷重効果が確定論的な意味で等しくても，静的荷重効果と動的荷重効果の割合によって部材の信頼性レベルが異なり，本解析例に関しては動的荷重効果の割合が増加することによって信頼性レベルが低下していることがわかる。不規則変動荷重に対する構造設計において，これまで比較的お

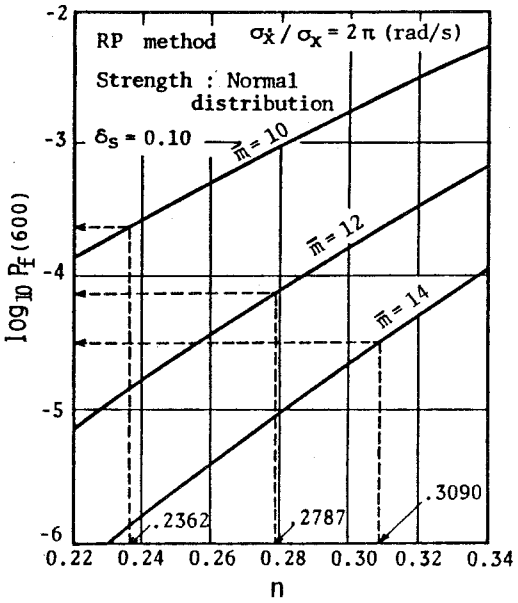


図3．4　n に対する初通過破壊確率の変化

表3．1　荷重モデルによる破壊確率の差異

Load	$\varepsilon = x_d/x_s$	$\bar{m}$	n	$P_f(600)$
A	1.080	10.0	0.2362	2.3×10^{-4}
B	0.762	12.0	0.2787	7.4×10^{-5}
C	0.589	14.0	0.3090	3.2×10^{-5}

ろそかにされていた荷重比と信頼性レベルとの関係をさらに明快にするためには，より詳細な検討が必要であることはいういまでもないが，本解析例によって荷重比の重要性を明らかにすることができたものと考えている。

3．4　応用例　―― 自然風を受ける構造物の信頼性評価問題および耐風設計への活用 ――

ここではまず点状構造物[10]のガストに対する初通過破壊確率について論じる。そして信頼性工学的立場から，ガスト応答倍率を決定する1つの方法を提示したい。なお吊橋などを対象にすれば当然乱れの空間的な相関関数が重要な問題になってくるが，概念そのものは特に変るものではない。

3．4．1　変動抗力に対する点状構造物の応答

定常応答を考えれば構造物の変位応答のr.m.s.値 σ_y と平均値 $\bar{y}$ との比は，平均風速 U ，空力アドミッタンス $X_D(f)$ ，伝達関数 $H(f)$ および変動風速の片側パワースペクトル密度関数 $S_{uu}(f)$ によって，次式にように近似的に与えられる[11]。

$$\frac{\sigma_y}{\bar{y}}=\frac{2}{U}\sqrt{\int_0^\infty |X_D(f)|^2|H(f)|^2 S_{uu}(f)\,df} \qquad (3.15)$$

いま変位 $y(t)$ と構造物の主要な点の応力もしくは主要断面の断面力 $x(t)$ が線形関係にあるとすれば，式（３．１５）の左辺は $x(t)$ のr.m.s.値 σ_x と平均値 $\bar{x}$ との比に等しく，さらに $\sigma_x/\bar{x}$ を前述の無次元パラメーター $\bar{m}$ および n で表すと

$$\frac{\sigma_x}{\bar{x}}=\frac{\sigma_x}{\bar{S}}\cdot\frac{\bar{S}}{\bar{x}}=\frac{1}{\bar{m}n} \qquad (3.16)$$

なる関係式が成立するので，式（３．１５）と（３．１６）より次式を得ることができる。

$$\frac{1}{\bar{m}n}=\frac{2}{U}\sqrt{\int_0^\infty |X_D(f)|^2|H(f)|^2 S_{uu}(f)\,df} \qquad (3.17)$$

なお本研究では空力アドミッタンスについては通常の構造物のようなにぶい断面に対する Vickeryの式[12] を，$S_{uu}(f)$ としては日野の式[13] を用い，さらに変動風速の分散 $\bar{u}^2$ については Davenportの式を使用している。すなわち

$$|X_D(f)|=1\Big/\left[1+\left\{\frac{2f\sqrt{A}}{U}\right\}^{4/3}\right] \qquad (3.18)$$

$$S_{uu}(f)=0.476\,\bar{u}^2/[\beta\{1+(f/\beta)^2\}]^{5/6} \qquad (3.19)$$

$$\bar{u}^2=6\,K_r U_{10}^2 \qquad (3.20)$$

ここに，Ａは気流直角面への構造物の投影面積，U_{10} は高度１０ｍにおける変動風の平均風速である。また

$$\beta=1.169\times10^{-2}\frac{\alpha U_{10}}{\sqrt{K_r}z}\left(\frac{z}{10}\right)^{2m\alpha-1} \qquad (3.21)$$

で，K_r は地表粗度に関係する定数， α は風速の鉛直分布を表すべき指数， z は高度， m は熱フラックスの影響を表す修正係数で，本研究では $m=2$ [14] としている。

3．4．2　平均風速・地表粗度と初通過破壊確率との関係

平均抗力による応答の平均値 $\bar{x}$ はこの場合容易に求まるので，式（３．１５）の右辺の計算を実行することによって σ_x を得ることができる。したがって強度の確率特性を用いて $\bar{m}(=\bar{S}/\sigma_x)$ と n $(=\bar{x}/\bar{S})$を計算すれば，３．２で示した諸式に基づいて構造物の初通過破壊確率を算定することができる。ここではある１つの振動モデルについておこなった数値解析結果を示して，風速や地表粗度あるい

は強度のばらつきが振動系の信頼性に及ぼす影響を検討する。

振動モデルとしては，固有振動数を0.1 Hz，構造減衰定数を0.0052，質量および流れに直面する面積をそれぞれ105kg および1 m²，設置高さを10 mとした。また強度は対数正規分布に従うものとし，高度10 mにおける平均風速が60m/s のときに振動系の破壊確率のオーダーが10^{-1}の程度になるよう，変位と応力との比や強度の平均値を適当に設定した。さらに空気密度，風速の鉛直分布を表すべき指数および抗力係数としてはそれぞれ0.12kg・s²/m⁴ ，1／7および1.2 を用いた。

風速の平均時間を10分間とし，地表粗度の状態を表す定数，平均風速および強度の変動係数を変えて，包絡線過程による方法で求めた初通過破壊確率をまとめて表3．2に示す。平均風速や強度の変動係数

表3．2　振動モデルの破壊確率

(a) $K_r = 0.003$

$\bar{U}_{10}$ (m/s)	n	$\bar{m}$	ζ^*	$P_f(600)$	
				$\delta_s = 0.10$	$\delta_s = 0.20$
30	0.122	33.76	0.0544	——	9.86×10^{-14}
40	0.216	19.05	0.0707	2.73×10^{-15}	1.72×10^{-6}
50	0.388	12.54	0.0871	4.75×10^{-6}	4.48×10^{-3}
60	0.486	9.09	0.1305	5.15×10^{-2}	1.31×10^{-1}

(b) $K_r = 0.004$

$\bar{U}_{10}$ (m/s)	n	$\bar{m}$	ζ^*	$P_f(600)$	
				$\delta_s = 0.10$	$\delta_s = 0.20$
30	0.112	29.74	0.0544	——	1.01×10^{-12}
40	0.216	16.49	0.0707	4.78×10^{-13}	8.24×10^{-6}
50	0.388	10.72	0.0871	8.02×10^{-5}	1.13×10^{-2}
60	0.486	7.68	0.1305	1.47×10^{-1}	2.01×10^{-1}

(c) $K_r = 0.005$

$\bar{U}_{10}$ (m/s)	n	$\bar{m}$	ζ^*	$P_f(600)$	
				$\delta_s = 0.10$	$\delta_s = 0.20$
30	0.122	27.03	0.0544	——	5.85×10^{-12}
40	0.216	14.81	0.0707	1.75×10^{-11}	2.61×10^{-6}
50	0.388	9.54	0.0871	5.10×10^{-4}	2.13×10^{-2}
60	0.486	6.78	0.1305	2.62×10^{-1}	2.64×10^{-1}

ζ^* ： 空力減衰を含む振動系の減衰定数

の増加とともに破壊確率が大きくなるのは当然であるとしても，地表粗度を表す定数もかなり破壊確率に影響を及ぼしている。また図3．5に，平均風速を50m/s ，強度の変動係数を 0.10 として， K_rと破壊確率との関係を示すが， K_r が0.003 から0.005 に増加するだけで，破壊確率が約2オーダー大きくなっていることがわかる。簡単な計算によって，もし $K_r = 0.005$ のときの破壊確率を $K_r = 0.003$ のときと同程度にするためには，材料強度を約30％強増加させる必要があることが理解できる。このように構造信頼性理論は単に信頼性評価のみではなく，設計条件の異なる構造物あるいは構造部材の信頼性レベルを一様にするための有用な手段として活用できる。ただし同一地域では，K_r が大きい地点の

方が同一平均風速の再現期間が大きいので，長期の耐用年数にわたる破壊確率については，かえって K_r の小さい地点よりも小さくなることがあり得る。この点については今後の検討課題であると考えている。

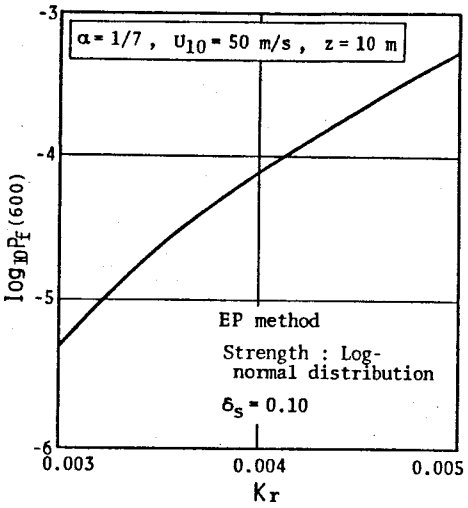


図3．5　地表粗度が破壊確率に及ぼす影響

3．4．3　目標信頼性レベルに応じたガスト応答倍率の決定法および計算例

従来自然風を受ける構造物のガスト応答倍率は，構造物のある主要な点の最大変位あるいは主要な断面の最大断面力の期待値によって定義されることが多かった。この最大変位や最大断面力の期待値が構造物の信頼性を支配する主要な因子であることはいうまでもないが，それだけでは信頼性を定量的に論じることが難しいこともまた明白である。ここでは，構造物の信頼性レベルとの対応を説明できるガスト応答倍率を算定する１つの方法を提示する。ただし構造物に作用する荷重としてはとりあえず風荷重のみを考えることにし[15]，さらに耐風設計が荷重係数設計法の規範に基づいておこなわれるものとする。

さてこの場合，自然風（公称風荷重＊）を受ける部材断面の設計は，荷重係数 γ_w と抵抗力の低減係数 ϕ を用いて

$$\gamma_w(\bar{x}+g\sigma_x) \leqq \phi R \qquad (3.22)$$

か，もしくは

$$\gamma_w G\bar{x} \leqq \phi R \qquad (3.23)$$

を条件式としておこなわれるものと考えてよいであろう。ここに R は抵抗力の公称値である。また $\bar{x}$ と σ_x はそれぞれ応力度もしくは断面力の平均値およびr.m.s.値である。

式（３．２２）の g は平均ピーク係数[11]とよばれているが，ここで問題にしているガスト応答倍率は式（３．２３）の G である。両式より g と G は次式によって関係づけられる。

$$G=1+g\frac{\sigma_x}{\bar{x}} \qquad (3.24)$$

ここでは，式（３．２３）を設計条件式とみなし，さらにその等号条件が成立するときの部材の初通過破壊確率を信頼性レベルの指標とする。

＊　公称風荷重は一般には静的荷重として与えられることが多いと思われるが，本研究ではガスト応答倍率を決定するために，変動成分に対する情報を含む風荷重と考える。

いまある目標とする信頼性レベルに対応する初通過破壊確率を，受認せざるをえない破壊確率という意味で許容破壊確率とよび，$P_{f,a}$ で表すことにすれば，次式で与えられる G が $P_{f,a}$ に対応するガスト応答倍率であるといえる。

$$G=\frac{\phi R}{\gamma_w \bar{x}}=\frac{\phi \alpha_r}{\gamma_w}\frac{\bar{R}}{\bar{x}} \qquad (3.25)$$

ここに $\bar{R}$ は無載荷材料の抵抗力の平均値，α_r は R と $\bar{R}$ との比，すなわち $\alpha_r=R/\bar{R}$ である。

ここで式（３．７）で定義した無次元パラメーター n を導入すれば，式（３．２５）は

$$G=\frac{\phi \alpha_r}{\gamma_w}\frac{1}{n} \qquad (3.26)$$

と書き改められる。一方初通過破壊確率は前述のように，n と $\bar{m}$ および抵抗力の確率分布形と変動係数，さらに無次元化した振動継続時間（たとえば $t_d^*=t_d/T_n$ ）とによって算定される。すなわち

$$P_f(t_d)=f(\bar{m}, n, \delta_S, t_d^*) \qquad (3.27)$$

したがって式（３．２６）に含まれる安全係数 γ_w，ϕ および α_r が与えられるとすれば，式（３．２７）の $P_f(t_d)$を $P_{f,a}$ として，与えられた構造条件（形状や動特性など）および風荷重の条件（平均風速や地表粗度に関する定数など）のもとで式（３．１７）と（３．２７）を同時に満たす１組の $\bar{m}$ と n を求めれば，式（３．２６）によって許容破壊確率に応じたガスト応答倍率を決定することができる。

なおいうまでもなく G は γ_w，ϕ，α_r の値によって変動する。これらのパラメーターの算定方法を検討することも大きな課題であるが，当面は静的な構造設計法で提案されている値を利用しておくことも１つの方法である。

さて以下に，G の算定手順を箇条書にして示す。

１）まずガスト応答解析をおこなって式（３．１７）の右辺を計算し，$c(=1/\bar{m}n)$ の値を算定する。

２）そして抵抗力の確率分布形と変動係数および振動継続時間を設定し，３．２で示した算定式に従って，$1/\bar{m}n=c$ を満たす適当数の $\bar{m}$ と n の組合せに対する初通過破壊確率を計算する。そして横軸に $\bar{m}$，縦軸に $P_f(t_d)$を取り，$\bar{m}\sim c\sim P_f(t_d)$ 曲線を作成する。たとえば図３－６の曲線は，仮に $c=0.300$，$\sigma_{\dot{x}}/\sigma_x=2\pi$ (rad/s)，$t_d=600$ (s)とし，さらに抵抗力が変動係数 0.10 の正規分布に従うものとし，応答過程による方法によって求めた $\bar{m}\sim c\sim P_f(t_d)$ 曲線である。

３）次に設定した許容破壊確率に対応する点を，$\bar{m}\sim c\sim P_f(t_d)$ 曲線上で決定し，その座標を $(\bar{m}_a, P_{f,a})$とする。このとき $1/\bar{m}n=c$ の関係より，$\bar{m}_a$ に対応する n_a が，$n_a=1/\bar{m}_a c$ として求まる。図３．６において $P_{f,a}=1\times10^{-4}$とすれば，$\bar{m}_a \fallingdotseq 11.8$，$n_a=0.282$ となる。

４）この n_a を用いれば，式（３．２６）の関係式により $P_{f,a}$ に対応するガスト応答倍率を決定することができる。仮に $\gamma_w=1.2$，$\phi=0.85$，$\alpha_r=0.87$とすれば

$$G=\frac{\phi\,\alpha_r}{\gamma_w}\frac{1}{n_d}=\frac{0.85\times0.87}{1.20}\cdot\frac{1}{0.282}\fallingdotseq 2.19$$

となる。

この手順に従って，高さ10mにおける平均風速が40m/s の変動風を公称風荷重と仮定して，前述の振動モデルに対するガスト応答倍率を求めてみよう。ただし変動風の平均化時間を10分間とし，これを振動継続時間と考える。初通過破壊確率の計算は包絡線過程による方法に基づいておこなう。 また抵抗力の公称値を決めるパラメーター α_r は変動係数に関係するので，ここでは $\delta_S=0.10$ のとき 0.87, $\delta_S=0.20$ のとき 0.70 とする。さらに γ_w や ϕ については，いまだ確定されたものはないが，数値計算における一例として，それぞれ 1.2，0.85 とする。

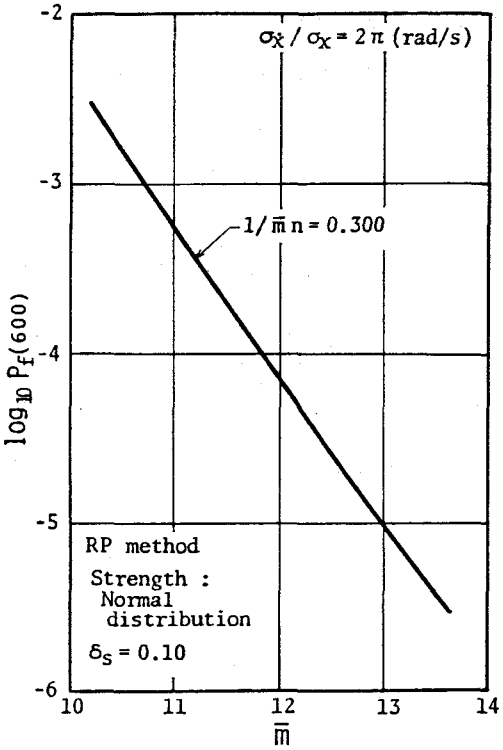


図3．6 $\bar{m}\sim c\sim P_f(t_d)$ 曲線

まず図3．7にガスト応答解析の結果と破壊確率の算定式に基づいて描いた $\bar{m}\sim c\sim P_f(t_d)$ 曲線を示す。そして表3．3に上述の手順3），4）に従って算定した許容破壊確率とガスト応答倍率との関係を示す。表よりガスト応答倍率が信頼性レベルを高く設定すると共に増大していることがわかる。また地表粗度の状態を表す K_r が大きいとき，すなわち粗度が大きいときにはガスト応答倍率も大きくしなければならないことも理解できる。

なお表の最下欄は Davenport[9] が提案したガスト応答倍率の式，すなわち

$$G_D=1+g(\sigma_x/\bar{x}) \tag{3.28}$$

ただし

$$g=\sqrt{2\ln(\nu_0 t_d)}+0.5772/\sqrt{2\ln(\nu_0 t_d)} \tag{3.29}$$

$$\nu_0=\frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \tag{3.30}$$

に基づいて算定したものである。

表より，γ_w，ϕ，α_r が仮定値であることを前提とした論議にはなるが，Davenport の方法により算定したガスト応答倍率を用いて設計される本振動モデルの信頼性レベルは，δ_S が 0.10 のとき1 ×（$10^{-4}\sim10^{-5}$）のオーダーであることが理解できる。ただし前述のように式（3．28）は最大応答の

期待値のみで定義されたものであり，これをそのまま信頼性理論に立脚する構造設計にまで持ち込むとすれば，論理的矛盾を若干包含したガスト応答倍率であることを認識しておく必要がある。

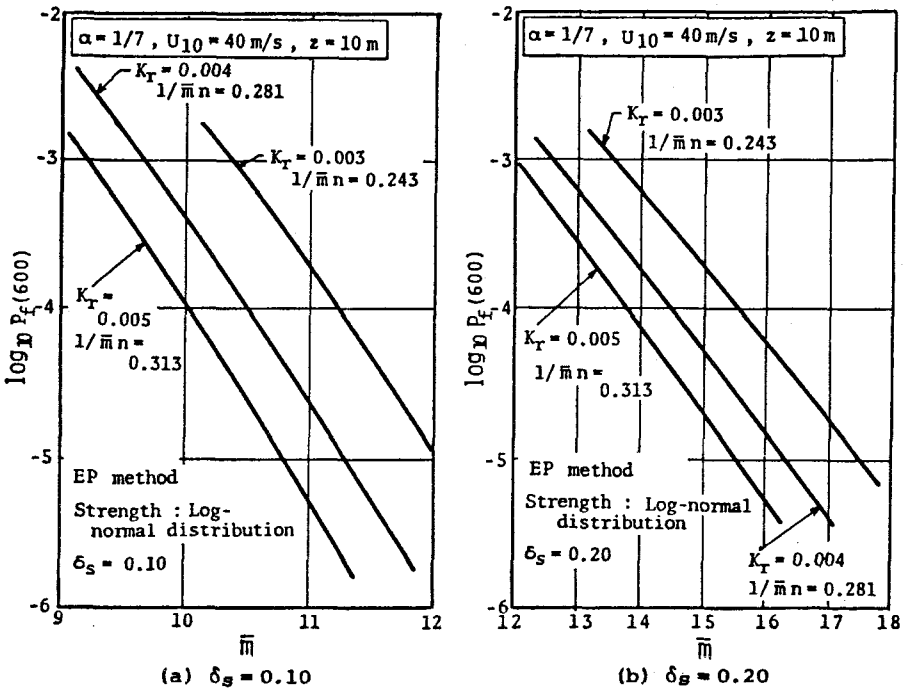


図3．7　振動系モデルに対する $\bar{m}\sim c\sim P_f(t_d)$ 曲線

表3．3　ガスト応答倍率

δ_S	$P_{f,a}$ \ K_r	0.003	0.004	0.005
0.10	1×10^{-3}	1.55	1.68	1.78
	1×10^{-4}	1.68	1.81	1.94
	1×10^{-5}	1.79	1.95	2.08
0.20	1×10^{-3}	1.63	1.75	1.85
	1×10^{-4}	1.88	2.02	2.07
	1×10^{-5}	2.11	2.27	2.41
G_D		1.77	1.89	1.99

3．5 結 言

本章では静的荷重と動的荷重を同時に受ける構造部材の初通過破壊確率の算定式を導出し，それによってその種の組合せ荷重に対する構造物の信頼性について論述した。ここで得られた結論を要約すると以下のとおりである。

(1) ある限定時間にわたって静的応力と同時に正規型の定常不規則変動応力の作用を受ける構造部材の初通過破壊確率の算定式を，部材の非破壊効果による強度の確率分布の経時変化[16),17)] を考慮して誘導した。

(2) 静的応力 $\bar{x}$ に上述の動的応力が重畳した応力履歴を受ける構造部材の信頼度は，たとえ総荷重効果 $\bar{x}+k\sigma_x$ （ σ_x ：動的応力のr.m.s.値，k ：定数）が同一の値をとる場合でも，荷重比 $k\sigma_x/\bar{x}$ によって変動し，本解析例では，動的応力の割合が増加するに従って信頼度が低下する結果が得られた。荷重係数設計法における荷重係数の決定あるいは定数 k の決定に際しては，この点を十分に認識しておく必要がある。

(3) 自然風を受ける構造物の信頼性評価を初通過破壊確率を指標としておこない，設計条件の異なる構造物や構造部材の信頼性を一様にするための手段として信頼性理論が有用であることを示した。

(4) 応答最大値の期待値のみによって定義されるガスト応答倍率を用いて耐風設計がなされるとすれば，構造物の信頼性レベルが普遍的には保証されないことを数値的に示し，構造信頼性レベルとの対応を説明できるガスト応答倍率の一算定法を提示した。

参 考 文 献

1） 南井良一郎：擬定常外乱による統計的線形非定常応答のレベル超過回数について，日本建築学会大会学術講演要旨集，P.8, 1962年9月.

2） Bolotin, V. V. :Statistical Theory of the Aseismic Design of Structures, Proceedings of the 2nd W.C.E.E., Vol. II, pp.1365-1373, 1960.

3） 小松定夫：長大吊橋の耐風設計法と安全性について，土木学会論文集，No.142, pp.10-19, 1967年6月.

4） Shinozuka, M., Itagaki, H. and Hakuno, M. :Dynamic Safety Analysis of Multistory Buildings, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.94, No.ST1, pp.309-330, Jan., 1968.

5） Yamada, Y. and Takemiya, H. :Statistical Estimation of the Maximum Response of Structures Subjected to Earthquake Motion, Proceedings of Japan Society of Civil Engineers, No.182, pp.115-132, Oct., 1970.

6） 亀田弘行：不規則地震動に対する構造物の最大応答の推定法について，土木学会論文報告集，No.201, pp.1-12, 1972年5月.

7） 高岡宣善・白木　渡・山根和弘：多くの不規則要因で構成される構造部材の確率過程論による信頼性解析，土木学会論文報告集，No.269, pp.29-39, 1978年1月.

8） Davenport, A.G. :Buffetting of a Suspension Bridge by Storm Wind, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.88, No.ST3, pp.233-268, June, 1962.

9） Davenport, A.G. :Gust Loading Factors, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.93, No.ST3, pp.11-34, June, 1967.

10） 岡内　功・伊藤　学・宮田利雄：耐風構造，丸善，p.237, 1977年5月.

11） たとえば文献10）の p.239.

12） 文献10）の p.218.

13） 日野幹雄：瞬間最大値と評価時間の関係－とくに突風率について－，土木学会論文集，No.117, pp.23-33, 1965年5月.

14） 本州四国連絡橋公団：本州四国連絡橋耐風設計基準（1976）・同解説，p.43, 1976年3月.

15） 文献14）の p.20 .

16） 小池　武：劣化構造物の動的信頼性解析，土木学会論文報告集，No.280, pp.1-11, 1978 年12月.

17） 小松定夫・中山隆弘：定常不規則変動外力を受ける構造物の初通過破壊確率の高精度評価について，土木学会論文報告集，No.332, pp.11-23, 1983年4月.

第４章　構造物の動的応答係数に対する信頼性工学的アプローチ

４．１　緒　言

コンピューターを駆使した構造設計が常識的になってきたとはいえ，動的荷重を受ける構造物の設計ではまず静的解析によって基本設計をおこない，必要に応じて動的解析も実施してその安全性を照査する方法が一般的である。したがって基本設計の段階において，道路橋については「衝撃係数」，撓性構造物については「ガスト応答倍率」といった，いわゆる動的応答係数の概念を導入することは，構造設計上，依然として有用な手法であると思われる。

さて一般にこれらの動的応答係数は，「動的応答の最大値の期待値と静的応答値との比」，あるいはさらに簡単に，「（静的応答値＋（２～３）×（動的応答のr.m.s.値））と静的応答値との比」によって定義されることが多い。前者の代表的な例は，前章においても若干触れたように，Davenport によるガスト応答倍率[1]である。後者の例としては，道路橋に対する設計衝撃係数の確率論的評価を目的とした彦坂・吉村・内谷[2]の研究などが挙げられる。

これらに対して片山[3]は，地震動に対する構造物の最大応答値を超過確率をパラメーターとして表す概念を提示している。そして，構造物の重要度に応じて異なった超過確率を指定するような設計法を考えなければならないと主張している。またKonishi ・Kitagawa・Katuragi[4]も，吊橋の風に対する信頼性を論じた論文の中で，「it is necessary that the gust factor is determined so that static load may be equivalent to real dynamic loads」と述べ，「the reasonable gust factor will be prposed in the near future」と，合理的なガスト係数を算定する必要性を示唆している。

一方，世界的なすう勢として，構造設計法は従来の許容応力度設計法から，確率論をより積極的に構造安全性の照査に利用しようとする限界状態設計法へと移行しつつある。限界状態設計法の特徴については，従来より種々の文献[5]を通してかなり詳細に述べられているので，ここでは重複を避けるが，部分安全係数方式にしても，ＬＲＦＤ方式にしても，少なくとも理念的には現行の許容応力度設計法に比べて，一歩前進した設計法であると思われる。たとえば英国の橋梁構造物の設計示方書が，１０年以上の長きにわたる調査・研究の後[6]，許容応力度設計法を基本とするＢＳ１５３から，限界状態設計法を基調としたＢＳ５４００へと改訂されたのもそれ故であろう。

本章の研究は上述の２点，すなわち動的応答係数の概念は，コンピューターの発達した現在でも依然として重要であること，そして構造設計法が許容応力設計法から限界状態設計法へと移行しつつあることを踏まえて，限界状態設計法の枠組の中に動的応答係数を組み入れるアプローチを見い出すことに主目的を置いておこなわれた。

本章では，まず構造物あるいは構造部材の構造信頼性レベルとの対応を説明できるような動的応答係数を信頼性工学的手法によって決定する１つの方法を提案する。ただし動的荷重による荷重効果が定常

正規確率過程で記述できる場合に問題を限定している。

次に，パラメトリック・スタディの結果に基づいて動的応答係数と構造信頼性レベルとの関係を定量的に検討する。さらに，提案する方法を強風を受ける鋼製タワーのガスト応答倍率の決定問題に適用して従来のDavenport の方法[1]との比較を試みる。そして，単に最大応答の期待値のみで応答倍率を一義的に定義するDavenport の方法に対し，同方法が応答倍率の決定にあたり，設計者に選択の幅を与えうる，より柔軟な方法であることを示す。

4．2　動的応答係数の信頼性工学的算定法

限界状態設計法を基本とした設計式（安全性照査式ともいわれている）には，大別して，部分安全係数方式とＬＲＦＤ方式とがある。これらの方式については他書[7]に譲るが，本研究では，現在のところ，より実用的であるＬＲＦＤ方式を採用することにする。ただし，以下の概念そのものは部分安全係数方式にも適用できるものであり，いずれを選択するかは，本研究に関する限り本質的な問題にはならない。

さてこの場合の設計式は，

$$\sum_k func.(\gamma_k Q_k{}^*) \leqq func.(\varphi S_{nom}) \qquad (4.1)$$

と表せる。式中 γ_k，φ は，それぞれ荷重の公称値 $Q_k{}^*$ および材料強度の公称値 S_{nom} に関する荷重係数および抵抗係数（これらを総称して，安全係数ということもある）である。また func.（・）は関数を意味する。

いま構造物あるいは構造部材に，死荷重のようにほぼ確定値とみなせるような１つの永久荷重 $Q_P{}^*$ と，風荷重のように時空間的に不規則に変動する１つの定常不規則変動荷重 $Q_1{}^*$ が同時に作用する場合について考える。また荷重 $Q_P{}^*$，$Q_1{}^*$ とそれぞれの荷重効果 Q_P，Q_1，および材料強度と，Q_P や Q_1 と同一次元で与えられる抵抗力 R とが，いずれも線形変換で結び付けられるものと仮定すれば，式（４．１）は次式のように書き改められる。

$$\gamma_P Q_P + \gamma_1 Q_1 \leqq \varphi R \qquad (4.2)$$

ここに γ_P，γ_1 はそれぞれ永久荷重と変動荷重に関する荷重係数である。

さて一般に定常不規則変動荷重による荷重効果 Q_1 は，静的荷重効果 $Q_1{}^S$ と動的荷重効果 $Q_1{}^d$ に分離することができる。たとえば自然風を定常変動荷重と仮定すれば，$Q_1{}^S$ は公称風荷重の平均風圧による荷重効果であり，風の乱れによる動的効果が $Q_1{}^d$ になる。さらに $Q_1{}^d$ を，動的効果のr.m.s.値 σ_{Q_1} と適当な定数 k によって，$Q_1{}^d = k\sigma_{Q_1}$ と表すことにすれば，式（４．２）は

$$\gamma_P Q_P + \gamma_1 (Q_1{}^S + k\sigma_{Q_1}) \leqq \varphi R \qquad (4.3)$$

と表記される。

さらに式（４．３）を整理して，

$$\gamma_P Q_P + \gamma_1 \left(1 + k \frac{\sigma_{Q_1}}{Q_1{}^S}\right) Q_1{}^S \leqq \varphi R \tag{4.4}$$

を得る。ここで

$$K = 1 + k \frac{\sigma_{Q_1}}{Q_1{}^S} \tag{4.5}$$

とおき，この K を，定常不規則変動荷重に対する動的応答係数と定義する。このとき式（４．４）は

$$\gamma_P Q_P + \gamma_1 K Q_1{}^S \leqq \varphi R \tag{4.6}$$

となる。式（４．６）の等号条件をとり，さらに K に着目して変形すれば次式が得られる。

$$K = \frac{1}{\gamma_1}\left(\varphi - \gamma_P \frac{Q_P}{\sigma_{Q_1}} \frac{\sigma_{Q_1}}{R}\right) \frac{R}{Q_1{}^S} \tag{4.7}$$

ここで抵抗力の公称値を適当なパラメーター α_r によって平均値 $\bar{R}$ と $R = \alpha_r \bar{R}$ によって関連づけ式（４．７）を次式のように表す。

$$K = \frac{1}{\gamma_1}\left(\varphi \alpha_r - \gamma_P \frac{Q_P}{\sigma_{Q_1}} \frac{\sigma_{Q_1}}{\bar{R}}\right) \frac{\bar{R}}{Q_1{}^S} \tag{4.8}$$

さらに

$$q_S = \frac{Q_1{}^S}{Q_P} \tag{4.9}$$

$$q_d = \frac{\sigma_{Q_1}}{Q_P} \tag{4.10}$$

とおけば，q_S と q_d は，それぞれ変動荷重の静的荷重効果と動的荷重効果を死荷重効果によって無次元化したパラメーターになる。

また，初通過破壊確率に関係する無次元パラメーター $\bar{m}$ と n を導入する。この場合，

$$\bar{m} = \frac{\bar{R}}{\sigma_{Q_1}} \tag{4.11}$$

$$n = \frac{Q_P + Q_1{}^S}{\bar{R}} \tag{4.12}$$

である。このとき式（４．１１）と（４．１２）より

$$\frac{1}{\bar{m}n} = \frac{\sigma_{Q_1}}{Q_P + Q_1{}^S} \tag{4.13}$$

となり，式（４．１３）に式（４．９）と（４．１０）を代入すれば次式が得られる。

$$\frac{1}{\bar{m}n} = \frac{q_d}{1 + q_S} \tag{4.14}$$

したがって，静的構造解析によって Q_P を，そして動的構造解析つまり振動解析によって Q_1^S と σ_{Q_1} を算定し，それらを式（４．９），（４．１０）に代入すれば q_S と q_d が得られ，さらに式（４．１４）により $1/\bar{m}n$ を求めることができる。

さて式（４．９）～式（４．１２）を式（４．８）に代入すれば次式が得られる。

$$K=\frac{1}{\gamma_1}\left(\varphi\alpha_r-\frac{\gamma_P}{\bar{m}q_d}\right)\left(1+\frac{1}{q_S}\right)\frac{1}{n} \qquad (4.15)$$

一方，前章で示したとおり，この場合構造物あるいは構造部材の初通過破壊確率は，$\bar{m}$，n，抵抗力の変動係数および振動継続時間を不規則振動の代表的振動数で無次元化した $t_d{}^*$ の関数として近似的に与えられる[8]。すなわち，

$$P_f(td)=f(\bar{m},n,\delta_r,t_d{}^*) \qquad (4.16)$$

したがって，抵抗力の変動係数と無次元振動継続時間が与えられるとき，初通過破壊確率は $\bar{m}$ と n のみに支配されることがわかる。逆にある任意の初通過破壊確率を与える $\bar{m}$ と n の組合せが無限に存在することも理解できる。しかし，q_S と q_d によって式（４．１４）の右辺を定めれば，そのとき式（４．１４）を満たし，同時に $P_{f,a}$ を与える一組の $\bar{m}$ と n が決定できる。そして，そのときの $\bar{m}$，n，q_S，q_d を式（４．１５）に代入すれば，ある一組の安全係数（γ_1，γ_P，φ）に対して，任意の初通過破壊確率，たとえば許容破壊確率 $P_{f,a}$ に対応する動的応答係数を決定することができる。

なお荷重係数や抵抗係数を決定する適切な方法を追求するのは非常に重要なことであるが，当面は，静的荷重に対する構造設計における値をそのまま，あるいは若干の修正をおこなって用いるのも一つの方法であろう。

４．３　数値解析

ここでは，不規則変動荷重を受ける構造物の信頼性レベルとの関係を，確率論的に説明できる動的応答係数の算定法を見い出すことを主目的としたが，いうまでもなく，構造物の信頼性レベルには荷重係数や抵抗係数なども関係するので，パラメトリック・スタディによって，それらの相互の関係を検討することにした。

信頼性レベルは初通過破壊確率によって評価したが，抵抗力の変動係数が 0.10 程度であれば，部材の非破壊効果による抵抗力の確率分布の経時変化はほとんど影響を及ぼさない（第２章参照）。したがって，抵抗力の確率分布を正規分布，その変動係数を 0.10 として，付録２に示した簡易式により初通過破壊確率を評価した。なお抵抗力の公称値と平均値との比 α_r としては，公称値が非超過確率５％の値で与えられると仮定し，0.834 と仮定した。

4．3．1　動的応答係数および安全係数と信頼性レベルとの相互関係

γ_P，γ_1，φ などの各安全係数は，荷重のモデル化，構造解析，製作・施工の誤差などによる荷重効果や抵抗力に含まれる不確定性を構造設計の段階で考慮して構造物の安全性を確保するための係数で，コードキャリブレーション，あるいは研究者・技術者の工学的・経験的な判断によって決定されることが多い。ここではとりあえず従来の研究成果[9]を参考にして，適当な数値を設定した。すなわち γ_P については1.0 ～1.3，γ_1 については1.5 ～1.7，φ については0.8 ～0.9 の範囲の値を考えた。なお振動の継続時間を示す無次元パラメーター $t_d{}^*$ は1000とした。

まず図4．1は，$P_{f,a}$ をパラメーターとして，抵抗係数 φ と動的応答係数 K との関係を示したものである。荷重係数 γ_P と γ_1 は別の観点から決定されるが，ここではそれぞれ1.2，1.6 とし，荷重比を表す無次元パラメーター q_S，q_d はそれぞれ0.6，0.1 としている。

同一荷重条件のもとでも，構造物の信頼性レベルを高く設定するほど動的応答係数を大きくしておかなければならないことは自明のことであるが，たとえば抵抗係数を 0.85 としてみると，許容破壊確率

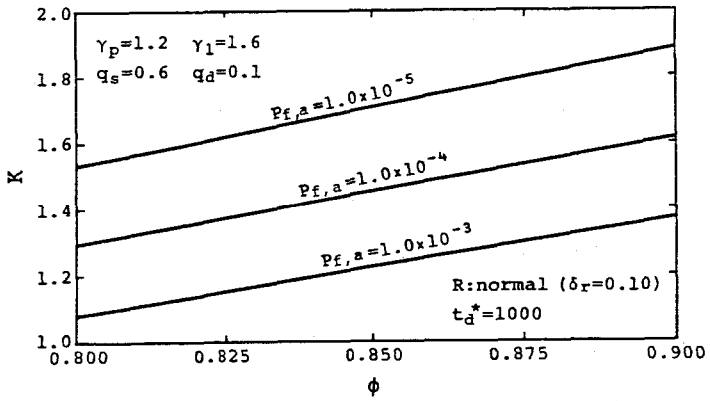


図4．1　信頼性レベルおよび抵抗係数と動的応答係数との相互関係

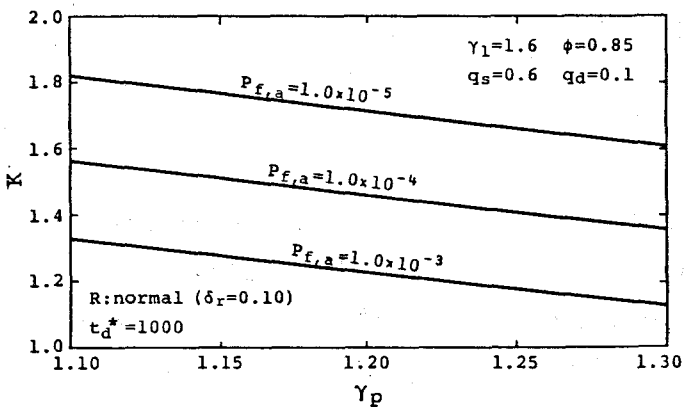


図4．2　信頼性レベルおよび永久荷重係数と動的応答係数との相互関係

を1 ×10^{-3}から1 ×10^{-4}に設定しなおすことにより，動的応答係数を1.23から1.46に増加させることが必要であることなど，図より動的応答係数に対する定量的な情報を得ることができる。

同様の図を図４．２と図４．３に示す。図４．２は図４．１と同様に，φ =0.85， γ_1 =1.6 ， q_S =0.6 ， q_d =0.1 としたときの γ_Pと K との関係を，同じく図４．３は，φ =0.85， γ_P =1.2 ， q_S =0.6， q_d =0.1 としたときの両者の関係を表したものである。

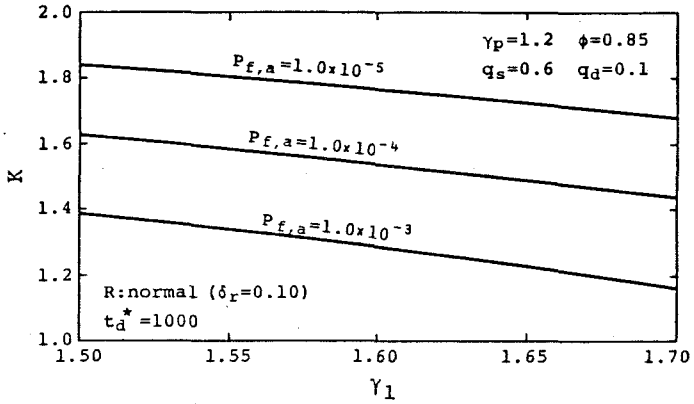


図４．３　信頼性レベルおよび変動荷重係数と動的応答係数との相互関係

４．３．２　荷重比と動的係数との関係

変動荷重の静的荷重効果や動的荷重効果の死荷重効果に対する割合 q_S ， q_d が，動的応答係数とどのように関係するかを検討するために，図４．４に q_S をパラメーターとして， q_d と K との関係を示す。ただし，φ =0.85， γ_P =1.2 ， γ_1 =1.6 ， $P_{f,a}$ = 1 ×10^{-4}としている。

動的荷重効果の割合を表す q_d が増加するに従って動的応答係数が大きくなるのは当然であるとしても，変動荷重の静的荷重効果を表す q_S が小さいときほど動的応答係数は大きく，同時にわずかではあるが， q_d に対する増加率も大きくなることが図より理解できる。

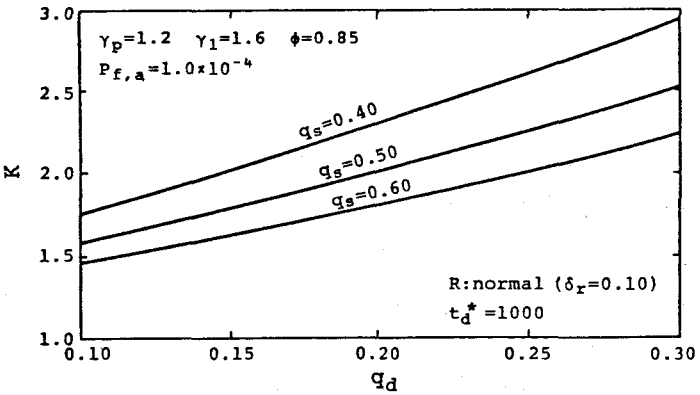


図４．４　荷重比と動的応答係数との関係

4．3．3　振動継続時間が動的応答係数に及ぼす影響

振動継続時間が動的応答係数に及ぼす影響は，$\varphi=0.85$，$\gamma_P=1.20$，$\gamma_1=1.60$，$q_S=0.60$，$q_d=0.10$として求めた K ～ t_d* 曲線（図4．5）にみることができる。

動的応答係数は振動継続時間と共に漸増するが，徐々に t_d* に対する変化率は減少している。たとえば $P_{f,a}=1\times10^{-4}$に対応する曲線より，$t_d*=500$ および1,000 に対し，動的応答係数はそれぞれ 1.49 および 1.57 である。すなわち，両者に 0.08 程度の差が認められる。一方，$t_d*=4500$のときには $K=1.75$，$t_d*=5000$のときには $K=1.77$と，振動継続時間が大きい領域では，t_d*の増加に対し動的応答係数はそれほど影響を受けていないことがわかる。

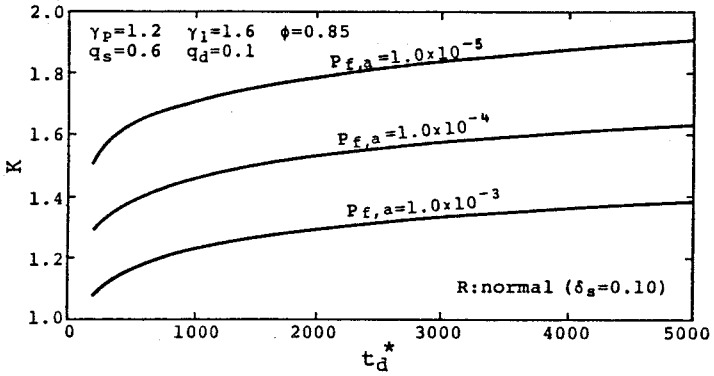


図4．5　変動荷重の作用継続時間と動的応答係数との関係

4．4　事例研究　―― 搭状構造物のガスト応答倍率 ――

4．2で示した方法は，不規則変動荷重を受ける種々の構造物の設計問題に有効であるが，本研究では，強風に対する塔状構造物のガスト応答の問題に適用した。ここでは，従来のDavenport の方法との比較もおこなって，その有用性を示したい。ただし簡単のため，解析対象としては次項で示すような円形断面を有する鋼製タワーを選び，風向方向の曲げ振動に対するガスト応答を考える。

4．4．1　解析モデルの概要

図4．6は，栃木県小山市に建設されている高さ８０ｍ，外径３ｍの，計１４個のリング状ブロックより成る全溶接鋼製円形タワー（通称小山タワー）で，上部に機械室があり，円筒の外周を取囲んだドーナツ型の客室が，行程５４ｍをゆるやかに回転しながら昇降するように設計されている。ただし強風時には，この客室は塔体の下部に設けられる建屋に格納される。また塔体には，客室を昇降させるガイドレールが２本と，カルマン渦による風向直角方向の振動を抑制するための長方形のヒレが断続的に取付けられている。なお筆者らが現地において実測した結果によれば[10]，本タワーの１次固有振動数は 0.45 Hz，減衰定数は0.013 ～0.015 であった。

4．4．2　風荷重

まず平均風速 $U(z)$ の鉛直分布（速度プロフィル）については，べき分布の式を用いた。すなわち，

$$U(z)=U_{10}\left(\frac{z}{10}\right)^{\alpha} \qquad (4.17)$$

ここに，U_{10} は地面上１０ｍの位置における平均風速，z は地面からの高度，α は地面の粗度状態に関係するべき指数である。

次に変動風速のパワースペクトル密度関数としては，Karmanの式を基本形とした日野の式[11),12)]を使用した。なお日野の式は式（３．１６）～式（３．１８）に示している。

さらに高さ方向の空間相関係数 $R_{u_1u_2}(f, z_1, z_2)$ については，文献13) でも使用されている指数関数による近似式と鉛直方向の空間相関を比較的よく表すとされている，Panofsky-Singer の式[14)]を用いている。すなわち，

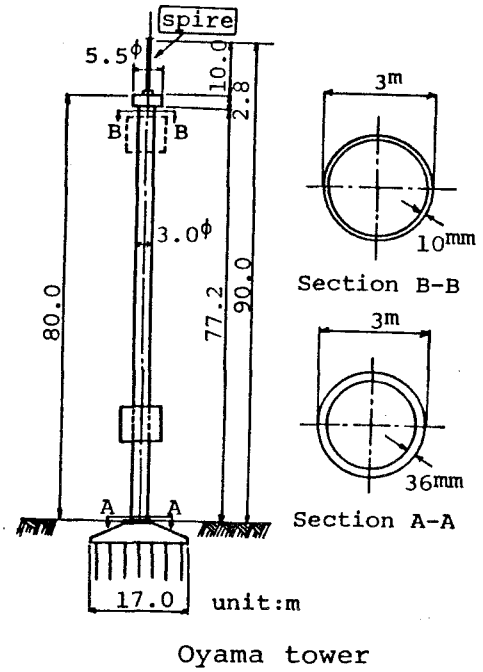


図４．６　小山タワーの概略図

指数関数式：

$$R_{u_1u_2}(f, z_1, z_2)=\exp\left(-\frac{k f|z_1-z_2|}{U_{10}}\right) \qquad (4.18)$$

Panofsky-Singer の式：

$$R_{u_1u_2}(f, z_1, z_2)=\exp\{-c(z_2^{1/3}-z_1^{1/3})\} \qquad (4.19)$$

ここに k や c は定数，z_1，z_2 はいずれも地面からの高度を表す。

空力アドミッタンスについては，断面が円形であることから，周波数 f には無関係に $X_D(f)=1$ とした[15),16)]。

このとき，タワーに作用する抗力による変動風圧の相互パワースペクトル密度関数 $S_{P_1P_2}(f, z_1, z_2)$ は，等方性乱流場の仮定のもとに次式で与えられる。

$$S_{P_1P_2}(f, z_1, z_2)=4\frac{P(z_1)}{U(z_1)}\frac{P(z_2)}{U(z_2)}R_{u_1u_2}(f, z_1, z_2)\sqrt{S_{u_1u_1}(f, z_1)}\sqrt{S_{u_2u_2}(f, z_2)} \qquad (4.20)$$

式中の $P(z)$ は，空気密度を ρ，抗力係数を C_D，タワーの直径を D として次式で表される。

$$P(z)=\frac{1}{2}\rho D C_D U(z)^2 \qquad (4.21)$$

4．4．3　ガスト応答解析

自然風の変動抗力に対する塔状構造物のガスト応答解析に関する研究はこれまでにかなりおこなわれている[15)~18)]。たとえばHanda[16)]は質量力までも考慮しているが，その解析対象は直径や幅の非常に大きい（たとえばD＝18～30m）塔状構造物である。また変動風圧に与える変動風速の2乗の項の影響は，乱れの強さがあまり大きくない場合には一般に無視されることが多い[19)]。さらに各振動モード間の連成効果が応答に与える影響も，構造物の各次数の固有振動数が十分に離れている場合には非常に小さい[20)]。したがって本研究では，振動方程式に含まれる非線形項および各振動モードの連成効果は無視した。

この場合，ガストによる抗力方向の曲げ振動によりタワーの任意断面に生ずる曲げモーメントのパワースペクトル密度関数 $S_{MM}(f, z)$ は，近似的に次式で与えられる。

$$S_{MM}(f, z) = \sum_r [EI(z)]^2 \left(\left. \frac{d^2\varphi_r(z)}{dz^2} \right|_{z=z} \right)^2 |H_r(f)|^2 \cdot \int_0^H \int_0^H \varphi_r(z_1)\varphi_r(z_2) S_{P_1P_2}(f, z_1, z_2) dz_1 dz_2 \tag{4.22}$$

ここに，$EI(z)$ は曲げ剛度，$\varphi_r(z)$ は正規化された r 次の規準振動モード，H はタワーの高さ，また $H_r(f)$ は r 次の規準振動に対する伝達関数であり，次式で表される。

$$|H_r(f)|^2 = \frac{1}{16\pi^4} \frac{1}{(f_{n,r} - f)^2 + 4\zeta_r^{*2} f_{n,r}^2 f^2} \tag{4.23}$$

式中，

$f_{n,r}$ ： r 次の固有振動数（Hz）

$$\zeta_r^* = \zeta_r + \frac{1}{4\pi f_{n,r}} \int_0^H \rho D C_D U(z) \varphi_r^2(z) dz \tag{4.24}$$

ζ_r ： r 次の規準振動に対する構造減衰定数で

$$\zeta_r = \frac{f_{n,r}}{f_{n,1}} \zeta_1 \tag{4.25}$$

式（4．22）に含まれる $\varphi_r(z)$ については，固有値解析によって有限個の要素の各節点変位を求め，スプライン関数による近似式を用いた[21)]。なお，その方法の妥当性は次項に示すように，あらかじめ検証した。

このとき $M(z)$ とその時間的導関数 $\dot{M}(z)$ のr.m.s.値はそれぞれ以下の式で与えられる。

$$\sigma_{M_Z} = \sqrt{\int_0^\infty S_{MM}(f, z) df} \tag{4.26}$$

$$\sigma_{\dot{M}_Z} = \sqrt{4\pi^2 \int_0^\infty f^2 S_{MM}(f, z)} \tag{4.27}$$

4．4．4　規準振動モードのスプライン関数近似法の妥当性

小山タワーのガスト応答解析に先立ち，まず規準振動モード $\varphi_r(z)$ を3次スプライン関数で近似してガスト応答値を算定する方法の妥当性を，振動モードの解析解が得られる等断面のタワー，すなわち幅6m，奥行4m，板厚24mm，高さ100 mの箱形鋼製タワーをモデルにして，数値解析によって検討した。

タワーの1次の規準振動形に対する減衰定数は0.01とし，その他応答を支配するパラメーターである抗力係数 C_D，地面より10mの高さにおける10分間平均風速 U_{10}，速度プロフィルのべき指数 α，大気安定度指数 m，粗度係数 K_r については，それぞれ $C_D=2.2$，$U_{10}=20$ m/s，$\alpha=1/5$，$m=2$，$K_r=0.025$ とした。また空間相関係数については指数関数式を用い，$k=8$ とした。さらに空力アドミッタンスについてはVickery の式（式（3．15））を用いた。

表4．1　固有振動数の比較

次数	要素分割数	固有振動数 (Hz)
1	解析解	0.487896
	8要素	0.487897
	4要素	0.487912
2	解析解	3.057593
	8要素	3.057838
	4要素	3.061156
3	解析解	8.561350
	8要素	8.566557
	4要素	8.627634

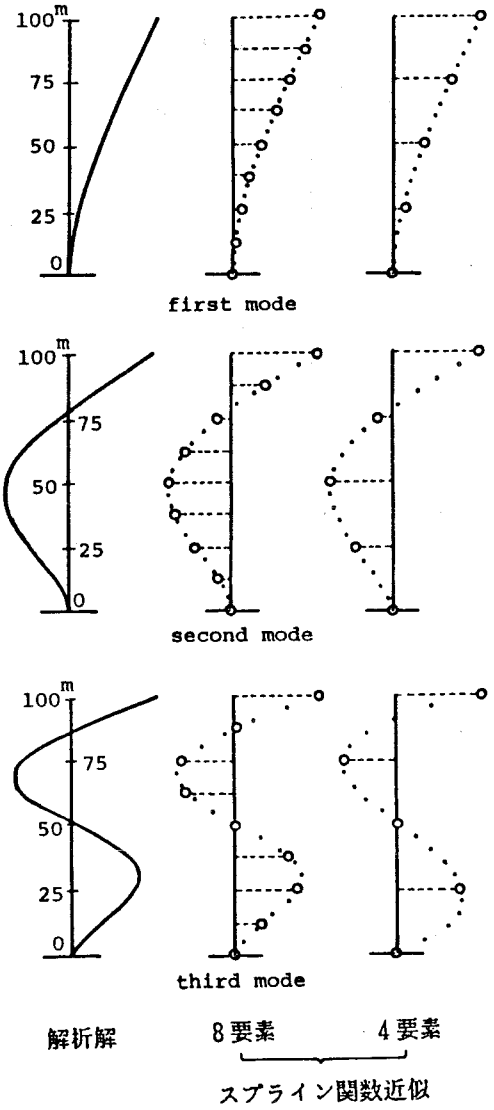
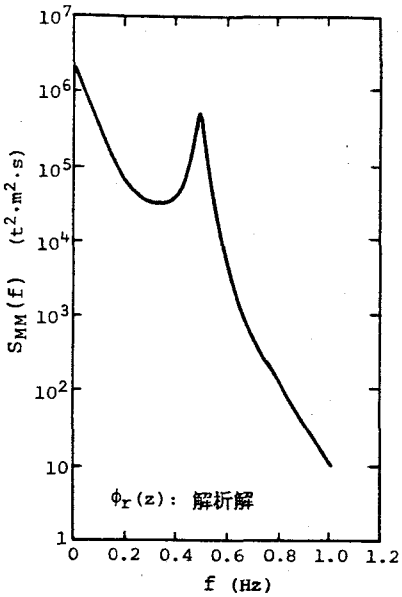
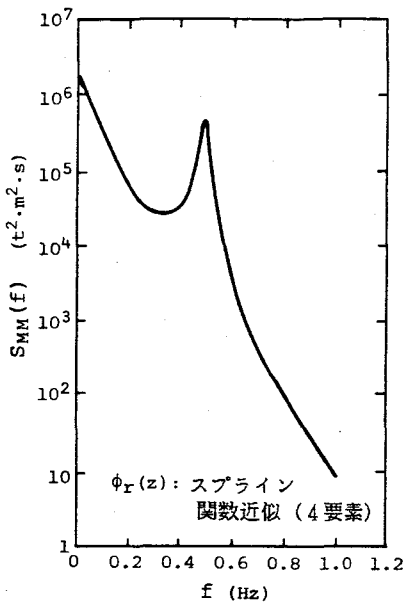


図4．7　振動モードのスプライン関数近似

まず図4．7は，3次までの規準振動モード $\varphi_r(z)$ （$r=1,2,3$）について，解析解[22]とスプライン関数によって近似した結果とを比較したものである。図中の「8要素」および「4要素」はそれぞれタワーを等間隔に8個および4個の要素に分割し，有限要素法に基づく固有値解析によって各節点



（ａ）振動モード：解析解



（ｂ）振動モード：スプライン関数近似

図４．８　ガスト応答解析による基部断面のパワースペクトル密度関数

の水平変位を算定し，その値を用いて３次スプライン関数で $\varphi_r(z)$ を近似したことを意味している。図より３次モード以外は４要素分割によるスプライン関数でも，かなり精度よく規準モードを近似できていることがわかる。８要素に分割した場合には，３次のモードまで，スプライン関数と厳密な規準モードはほとんど一致している。なお参考のため表４．１に固有円振動数の解析解と有限要素解とを掲げておく。

表４．２　ガスト応答解析による基部断面の曲げモーメントのr.m.s.値

応答値 ＼ $\phi_r(z)$	解析解	スプライン関数近似	
		８要素	４要素
σ_M (t·m)	368.6	365.1	355.2
$\sigma_{\dot{M}}$ (t·m/s)	519.1	502.5	489.6

さて図４．８（ａ），（ｂ）はそれぞれ厳密な規準モードおよびスプライン関数によって近似した規準モードを用いて，ガスト応答解析によって求めたタワーの基部断面の曲げモーメントのパワースペクトル密度関数である。図より近似式による解析結果の妥当性を概ね理解することができる。

このことをより定量的に示したものが，同じく基部曲げモーメントのr.m.s.値を掲げた表４．２である。全体的に近似式による値が小さい目ではあるが，特に８要素に分割した場合には，規準モードをスプライン関数によって近似してガスト応答値を算定しても，ほぼ満足できる結果が得られるものと判断できるであろう。

以上述べたように，ガスト応答値の算定式に含まれる規準振動モードを３次スプライン関数で近似する方法は，変断面の撓性タワーに対する応答解析の場合に，有力な方法の１つになるものと思われる。

したがって次項では，小山タワーに対し本解析法を適用した結果について述べる。

4．4．5　解析モデルのガスト応答解析とガスト応答倍率

（ｉ）小山タワーのモデル化と動特性

まず客室については強風時には建屋内部に格納されることから，また尖塔については塔体に比較して直径が非常に小さく，応答に与える影響が小さいことから，共にその存在については無視した。次にガイドレールおよび防振用ヒレに関しても，式（４．２１）や式（４．２４）に含まれる塔体の直径を表すＤを見掛け上３．４ｍと増加させることと，それらの質量を塔長方向に均等に分布させることによって考慮し，曲げ剛性に与える影響は無視した。さらに機械室は，構造要素と内部の機械類の質量とを考慮し，１つの剛体とみなした。

図４．９にモデル化した小山タワーの構造諸元を示す。そしてそれに基づいて固有値解析によって求めた３次までの非減衰固有振動数と規準振動モードをそれぞれ表４．３と図４．１０に示す。

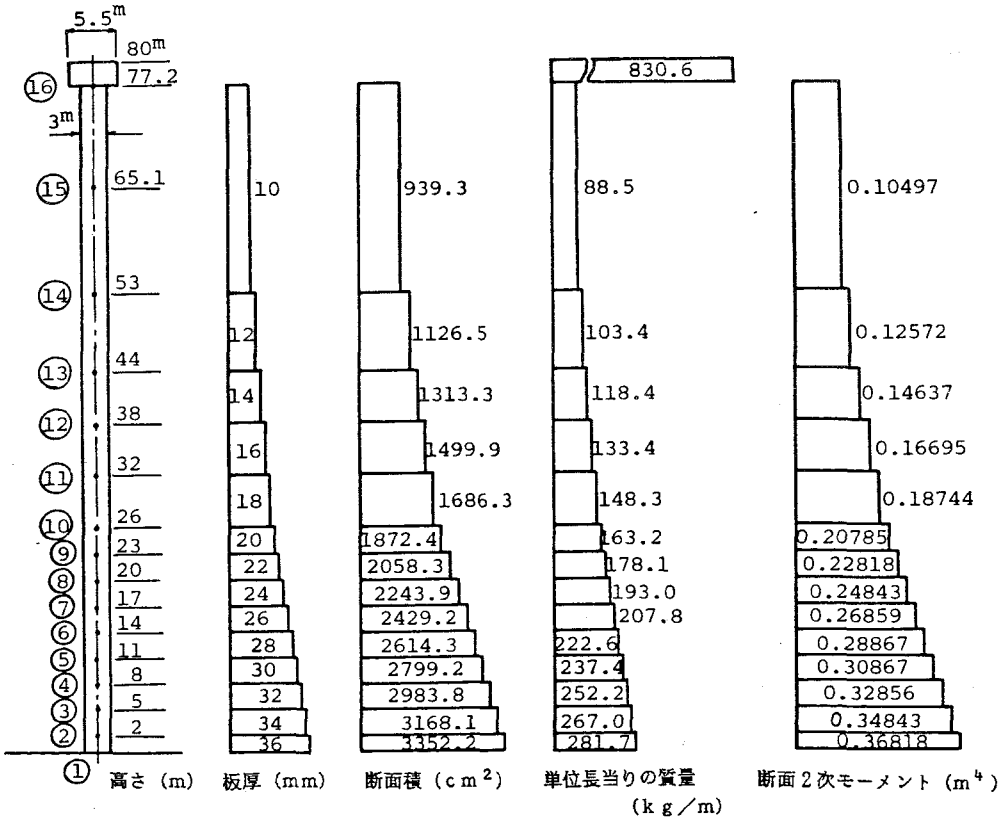


図４．９　小山タワーの構造諸元

表4．3　小山タワーの固有振動数

次数	固有振動数 (Hz)	固有円振動数 (rad/s)
1	0.449	2.821
2	2.580	16.212
3	7.158	44.974

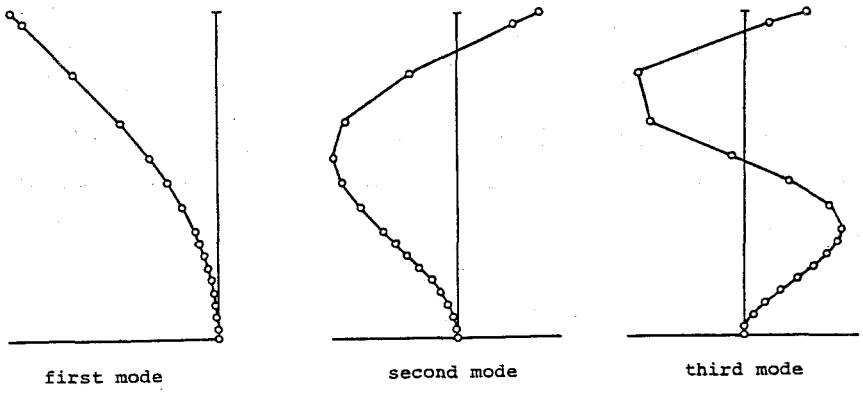


図4．10　小山タワーの振動モード

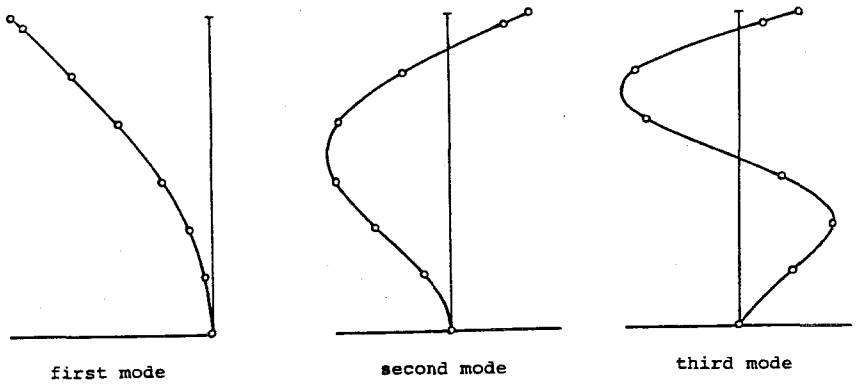


図4．11　スプライン関数で近似した小山タワーの振動モード

また図4．11は，7つの節点（節点番号①，⑥，⑩，⑫，⑭，⑮，⑯）を通るスプライン関数によって規準振動モードを近似した場合の結果である。なお1次モードに対する減衰定数 ζ_1 については，実測結果より0.014 とした。

（ii）風荷重の特性

風荷重の特性を決める前述の諸式に含まれる各パラメーターの数値は以下のように設定した。

平均風速　U_{10} ＝30，40（m／s）

べき指数　α ＝0.20

粗度係数　K_r ＝0.005，0.008，0.010

大気安定度指数　m ＝2.0

空間相関指数　c ＝0.85（$m^{-1/3}$）

抗力係数　C_D ＝1.0（機械室），1.4（塔体）

空気密度　ρ ＝0.00012（t・s／m^4）

（iii）ガスト応答解析結果

上述の条件のもとで求めた基部断面の曲げモーメントの平均値 $\overline{M}$，r.m.s.値 σ_M，曲げモーメントの時間的導関数のr.m.s.値 $\sigma_{\dot{M}}$ および $\sigma_{\dot{M}}/(2\pi\sigma_M)$ の値を表4．4に示す。ただし，予備計算の結果 σ_M，$\sigma_{\dot{M}}$ に対する2次モード以上の影響が小さいことを確認できたので，表には1次モードのみを考慮したときの結果を記した。ちなみに　U_{10} ＝40（m／s），K_r ＝0.008 としたとき，2次モードまでを考慮した結果は，σ_M ＝966.3（t・m），$\sigma_{\dot{M}_z}$ ＝2261.7(t・m/s)であり，1次モードのみを考えて算定した各値，すなわちそれぞれ 965.3（t・m），2181.7（t・m／s）にほぼ等しい。

表4．4　ガスト応答解析結果

K_r	$\overline{U}_{10}$ (m/s)	30	40	50
	$\overline{M}$ (t·m)	1594.8	2835.2	4430.7
0.005	σ_M (t·m)	434.3	788.3	1242.6
	$\sigma_{\dot{M}}$ (t·m/s)	999.1	1851.5	2954.7
	$\sigma_{\dot{M}}/(2\pi\sigma_M)$ (1/s)	0.366	0.374	0.379
0.008	σ_M (t·m)	533.3	965.3	1521.8
	$\sigma_{\dot{M}}$ (t·m/s)	1173.5	2181.7	3495.7
	$\sigma_{\dot{M}}/(2\pi\sigma_M)$ (1/s)	0.350	0.360	0.366
0.010	σ_M (t·m)	589.2	1063.0	1677.2
	$\sigma_{\dot{M}}$ (t·m/s)	1262.3	2365.5	3780.2
	$\sigma_{\dot{M}}/(2\pi\sigma_M)$ (1/s)	0.341	0.353	0.359

（iv）ガスト応答倍率

表4．4のガスト応答解析の結果と自重による基部断面の圧縮応力度 39.5(kg/cm^2) を用いて，圧縮縁の曲げ応力度に対するガスト応答倍率を算定した〔付録2〕。ただし降伏点は正規分布に従うものと仮定し，その変動係数は0.10，公称値と平均値との比は 0.834，振動継続時間は600 秒とした。安全係数については，限界状態設計法が確立されていない現時点で適切な値を設定するのは難しいが，現行の許容応力度設計法の安全率に近い値になるよう，死荷重に関して γ_D ＝1.20，風荷重に関して γ_L ＝1.60，抵抗力に関して φ ＝0.85とした。表4．5に計算結果を示す。なお表中の G_D はDavenport の方法（式（3．25））によって算出したガスト応答倍率である。

表より，いずれの方法でもいえることであるが，応答倍率は平均風速の影響よりは地表粗度の影響をより強く受けていることがわかる。ちなみに高さ 200m の吊橋のタワーに対する宮田の計算結果(Davenport の方法）[13] をみても，平均風速が 40m/sのとき 2.085，50m/s のとき，2.179 と両者に大きな差異は認められない。ただ平均風速が増加するに従って，若干ではあるがガスト応答倍率も増加している。

表4．5　ガスト応答倍率

K_r	P_f \ $\bar{U}_{10}$ (m/s)	30	40	50
0.005	1×10^{-7}	1.924	1.940	1.947
	1×10^{-6}	1.736	1.753	1.760
	1×10^{-5}	1.586	1.603	1.610
	G_D	1.942	1.963	1.973
0.008	1×10^{-7}	2.140	2.159	2.169
	1×10^{-6}	1.932	1.951	1.961
	1×10^{-5}	1.764	1.783	1.793
	G_D	2.152	2.176	2.188
0.010	1×10^{-7}	2.264	2.282	2.295
	1×10^{-6}	2.044	2.062	2.074
	1×10^{-5}	1.866	1.884	1.896
	G_D	2.270	2.293	2.307

さて，あくまで仮定した抵抗力の確率特性あるいは安全係数のもとでの議論にはなるが，平均風速や粗度係数の値にかかわらず，破壊確率を1桁下げるには，設計時に採用すべきガスト応答倍率を約10％程度，2桁下げるには約20％程度大きくすればよいことが表より理解できる。このように本方法によれば，構造物の信頼性のレベルに応じてガスト応答倍率を適切に選択することができる。

4・5　結　言

本章では，構造設計法に信頼性理論を活用しようとする動きが従来になく活発になってきた現状を考えて，信頼性工学的な解釈のできる動的応答係数の算定法を提示した。そして事例研究として，構造物，特に長大な撓性構造物にとってもっとも苛酷な外力の1つとなる強風に対する鋼製タワーのガスト応答倍率の算定を試みた。

その結果，本手法により，構造物の重要度に応じた構造信頼性レベルに対応するガスト応答倍率を，比較的簡単に算定できることを具体的に示すことができた。もちろん，ガスト応答解析に含まれる種々のパラメーターについては仮定値を用いているので，ここで求めた信頼性の数値そのものは一例に過ぎない。また設計式における安全係数の値をどのように決めるかということも今後の重要課題の1つである。また構造物の耐用年数の間の破壊確率の選定についても論議を呼ぶところであろう[1),23)]。

このように信頼性レベルを表す数値により高い精度を与え，さらに説得力のある数値にするためには，解決しなければならない問題が山積している。しかし本研究によって，少なくとも動的応答係数に対する信頼性工学の立場からの合理的アプローチを見い出すことができたものと考えている。

参 考 文 献

1） Davenport, A. G. : Note on the Distribution of the Largest Value of Random Function with Application to Gust Loading, Proceedings, Institution of Civil Engineers, Vol. 28, pp. 187-196, 1964.

2） 彦坂　熙・吉村虎蔵・内谷　保：連行自動車荷重による単純桁橋の非定常ランダム応答と衝撃係数，土木学会論文報告集，No. 290，pp. 31-41，1979年10月．

3） 片山恒雄：最大応答加速度値の分布に関する一考察，土木学会第27回年次学術講演会講演概要集第1部，pp. 491-494，1972年10月．

4） Konishi, I. , Kitagawa, T. and Katsuragi, M. :Structural Reliability Analysis Considering Strength Assurance Level, Reliability Approach in Structural Engineering, pp. 91-110, Maruzen Co. Ltd., Tokyo, 1975.

5） たとえば，小松定夫：限界状態設計法による土木構造物の設計，生産と技術，Vol. 36，No. 1, pp. 11-17，1985年.

6） CIRIA:Rationalisation of Safety and Serviceability Factors in Structural Codes, REPORT 63, London, 1977.

7） たとえば，尾坂芳夫・高岡宣善・星谷　勝：土木構造設計法，技報堂出版，pp. 61-75，1981年6月．

8） 小松定夫・中山隆弘：静的荷重と定常不規則変動荷重を同時に受ける構造物の初通過破壊確率について，土木学会論文報告集，No. 332, pp. 25-33, 1983年4月．

9） Ellingwood, B, Galambos, T. V., MacGregor, J. G. and Cornell, C. A. : Development of a Probability Based Load Criterion for American National Standard A58, U. S. Dept. of Com., Natl. Bur. of Standards, June, 1980.

10） Komatsu, S., Kobayashi, H. and Nakayama, T. : Safety and Reliability of Steel Tower against Wind, Technical Reports of the Osaka University, Vol. 20, No. 972, pp. 823-845, 1970.

11） Komatsu, S. and Nakayama, T. : Some Problems of Wind Loads and its Consideration in Statistical Evaluation for Structural Safety, Proceedings of the Symposium on Load and Safety of Structures, 19th National Symposium on Bridge and Structural Engineering, pp. 37-52, 1974.

12） 前田潤滋・牧野　稔：大気乱流の平均流方向成分の統計的性質に関する研究，日本建築学会論文報告集，No. 287，pp. 77-86, 1980 年1月．

13） Miyata, T. : Calculation of Gust Factors Relevant to Determination of Design Wind Velocity for Flexible Structures, Ann. Report Eng. Res. Inst., Faculty Engineering, Uni

of Tokyo, pp.69-78, 1972.

14) 塩谷正雄：強風の乱流構造，構造物の耐風性に関する第３回シンポジウム論文集， pp. 9-18, 1974年.

15) Vickery, B. J. and Kao, K. H. :Drag or Along-Wind Response of Slender Structures, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.98, No.ST1, pp.21-36, Jan,. 1972.

16) Handa, K. N. and Clarkson. B. L. :Response of Tall Structures to Atomospheric Turbulence, Symposium on Wind Effects on Buildings and Structures organized by Loughborough Univ. of Tech., Natl. Phys. Lab., Royal Aeronotical Society, paper 14.1-14.19, 1967.

17) Simiu, E :Gust Factors and Alongwind Pressure Correlations, Journal of the ASCE, Vol.99, No.ST4, pp.773-782, Apr., 1973.

18) Ahmad, M. B., Pande, P. K. and Krishna, P. :Self-Supporting Towers Under Wind Loads, Journal of Structural Engineering, Vol.110, No.2, pp.370-384 , Feb., 1984.

19) 岡内　功・伊藤　学・宮田利雄：耐風構造，丸善，P.202，1977年５月.

20) Simiu, E. and Scanlan, R. H. :Wind Effects on Structures, Jhon Wiley & Sons, P.184, 1978.

21) 桜井　明編著：スプライン関数入門，東京電機大学出版局，1981年６月.

22) たとえば，小坪清真：土木振動学，森北出版，P.185, 1973 年４月.

23) Simiu, E. :Wind Climate and Failure Risks, Jounal of the Structural Engineering, ASCE, Vol.102, No.ST9, pp.1703-1707, Sept., 1976.

24) Nakayama, T. and Komatsu, S. :Reliability Analysis of Randomly Excited Structures and its Application to Structural Design, Proceedings of ICCOSSAR'85, the 14th International Conference on Structural Safety and Reliability, Vol. II, pp.538-542, 1985 .

第５章　材料強度のばらつきを考慮した非定常不規則振動体の初通過破壊確率

５．１　緒　言

前章までの研究では，すべて定常不規則変動外力を受ける振動系の初通過破壊確率に関連する問題を考究した。これに対して本章ではこれまでの成果を踏まえて，非定常不規則変動外力に対する振動系の初通過破壊確率問題について論述する。

さて非定常確率過程の初通過確率に関する研究は，定常過程のそれに比較してそれほど多くはない。小堀・南井[1]，山田・竹宮[2]は定常正規確率過程におけるRice[3]の式を拡張し，非定常正規確率過程の表式を導いている。いわゆるポアソン仮定に基づき，確率過程があるレベルを超過する現象が互いに独立であるとすれば，レベル超過率は初通過確率と一意的に関連付けられるので，その表式のもつ意義は大きいが，その仮定に限界があることは前述のとおりである。この欠点を補うべくYang[4]は Cramer ・Leadbetter[5]によって展開された定常正規確率過程の包絡線に関する理論を発展させ，非定常正規確率過程の包絡線に関係する諸量の確率関数を導いて，初通過確率の近似計算式を定式化した。そして理論の妥当性を地震力を受ける１自由度振動系に対するシミュレーション結果[6]との比較によって検討している。包絡線過程を用いたものとしては，そのほかLennox・Fraser[7]の研究も挙げられる。またCorotis・Vanmarcke ・Cornell[8] はRiceの理論によって導かれる基本的なレベル超過率の表式を，確率過程のパワースペクトル密度関数の形状によって決まるある種のパラメーターを導入して改良し，良好な結果を得ている。これらはいずれも確率過程論における初通過理論を非定常不規則変動荷重に対する構造物の信頼性評価問題に応用した貴重な研究である。しかし材料強度を確定量と仮定して初通過確率を求めるだけでは，材料が本質的にもっている強度のばらつきを信頼性評価の中に反映させることができないことはこれまで度々言及したとおりである。そこで本研究は，応答の強度超過率を計算する際に直接材料強度のばらつきを考慮し，簡便な動的信頼性評価法を確立することを目的として実施された。

本章では，まず非定常正規不規則外力を受ける構造物のある主要な点に生ずる変動応力とその包絡線過程の強度超過率の算定式を，材料強度を確率量として誘導し，ポアソンの仮定を用いることによって初通過破壊確率の近似式を定式化する。ここでもやはり，応力の変動過程そのものの強度超過率に基づく近似解法を「応答過程による方法（ＲＰ法）」，包絡線過程の強度超過率に基づく方法を「包絡線過程による方法（ＥＰ法）」と称する。なお非定常初通過問題では，初通過確率に影響を及ぼす応答時間は一般にそれほど長くはない。たとえば本研究で対象とする地震動に対しては，高々１０秒程度である。したがって，ここでは構造物の非破壊効果による材料強度の確率分布の経時変化は無視できるものと考えて定式化をおこなう。

次にショットノイズ型[9]の非定常外力に対する線形１自由度振動系の応力度の非定常スペクトル（evolutionary spectrum ）[10] の算定式を示す。そして上述の両近似解法によってパラメトリック解

析をおこない，振動系の初通過破壊確率について論述する。すなわち，材料強度の確率分布形やばらつきが破壊確率に及ぼす影響，両近似解法による破壊確率の値の差異あるいは非定常外力の変動特性と破壊確率との関係などを詳細に検討する。さらに定常問題の所でも論じたように，製品・載荷試験による構造部材あるいは構造物の信頼性向上効果について定量的に考察を進める。

5．2　強度超過率および初通過破壊確率の算定式

時刻 t における応力応答過程（以下では単に応答過程と称する） $x(t)$ とその包絡線過程 $a(t)$ の，正勾配での強度超過率 $\nu_x^+(S, t)$ および $\nu_a^+(S, t)$ はそれぞれ式（1．5）および式（1．31）に対応して以下のように与えられる。

$$\nu_x^+(S, t)=\int_{R_s}\left\{\int_0^\infty \dot{x}(t) f_{x\dot{x}}(S, \dot{x}(t))\, d\dot{x}(t)\right\} f_S(S)\, dS \qquad (5.1)$$

$$\nu_a^+(S, t)=\int_{R_s}\left\{\int_0^\infty \dot{a}(t) f_{a\dot{a}}(S, \dot{a}(t))\, d\dot{a}(t)\right\} f_S(S)\, dS \qquad (5.2)$$

式中 $\dot{x}(t)$， $\dot{a}(t)$ はそれぞれ $x(t)$ および $a(t)$ の標本関数である $x(t)$ および $a(t)$（図5．1を参照）の時間的導関数， $f_{x\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t))$ および $f_{a\dot{a}}(a(t), \dot{a}(t))$ はそれぞれ $x(t)$ と $\dot{x}(t)$ および $a(t)$ と $\dot{a}(t)$ の時刻 t における結合確率密度関数である。

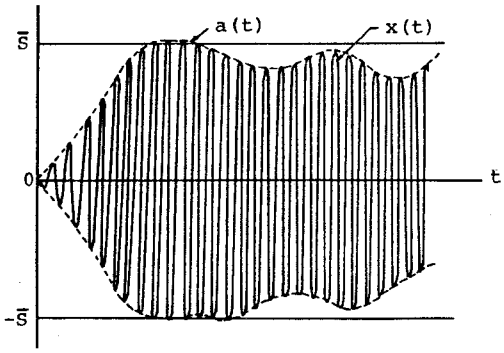


図5．1　応答および包絡線が材料強度を超過する現象の概略図

次に初通過破壊確率については，強度超過率が時間に依存する点のみが定常過程の場合と異なる点であり，したがって

$$P_f(t_d)=1-P_{s,z}(0)\exp\left\{-\int_0^{t_d}\nu_z^+(S, t)dt\ -\int_0^{t_d}\nu_z^-(S, t)dt\right\} \qquad (5.3)$$

と表せる。式中の z は x または a をとる添字で， x であればＲＰ法を， a であればＥＰ法を示すことになる。

5．2．1　応答過程の強度超過率

時刻 t における応答過程 $x(t)$ とその時間的導関数 $\dot{x}(t)$ との結合確率密度関数は， $x(t)$ が正規過程で，かつ $x(t)$ と $\dot{x}(t)$ の期待値を零とすれば，それぞれの分散 $\sigma_x^2(t)$ ， $\sigma_{\dot{x}}^2(t)$ と両者の相互相関係数 $\rho_{x\dot{x}}(t)$ によって次式のように表される。

$$f_{x\dot{x}}(x(t),\ \dot{x}(t))=\frac{1}{2\pi\sigma_x(t)\sigma_{\dot{x}}(t)\sqrt{1-\rho_{x\dot{x}}^2(t)}}\ \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho_{x\dot{x}}^2(t))}\left\{\left(\frac{x(t)}{\sigma_x(t)}\right)^2\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{2\rho_{x\dot{x}}x(t)\dot{x}(t)}{\sigma_x(t)\sigma_{\dot{x}}(t)}+\left(\frac{\dot{x}(t)}{\sigma_{\dot{x}}(t)}\right)^2\right\}\right] \qquad (5.4)$$

式（5．4）を式（5．1）に代入し，$\dot{x}$ に関する半無限区間の定積分を実行すると，

$$\nu_x{}^+(S,\ t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{x}}(t)}{\sigma_x(t)}\int_{RS}f_S(S)\exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_x{}^2(t)}\right)$$
$$\cdot\left[\sqrt{1-\rho_{x\dot{x}}^2(t)}\exp\left\{-\frac{\rho_{x\dot{x}}^2(t)S^2}{2\sigma_x{}^2(t)(1-\rho_{x\dot{x}}^2(t))}\right\}\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{2}\rho_{x\dot{x}}(t)S}{\sigma_x(t)}\mathrm{Erf}\left(-\frac{\rho_{x\dot{x}}(t)S}{\sqrt{2}\sigma_x(t)\sqrt{1-\rho_{x\dot{x}}^2(t)}}\right)\right]dS \qquad (5.5)$$

となる。以下式（5．5）に含まれる材料強度の確率密度関数に条件付正規・正規・条件付対数正規・対数正規の各密度関数の表式を代入し，所要の算定式を誘導する。

a）　材料強度が条件付正規分布に従う場合

条件付正規確率密度関数の表式（1．8）を式（5．5）に代入し，強度に関する積分区間が［S_l, S_u］であることを考慮すれば，

$$\nu_{x,CN}{}^+(S,\ t)=\frac{\sigma_{\dot{x}}(t)}{2\sqrt{2\pi}\sigma_s\sigma_x(t)\{\mathrm{Erf}\ (\lambda_l/\sqrt{2})-\mathrm{Erf}(\lambda_u/\sqrt{2})\}}$$
$$\cdot\int_{S_l}^{S_u}\exp\left\{-\frac{(S-\bar{S})^2}{2\sigma_s{}^2}\right\}\exp\left(-\frac{S}{2\sigma_x{}^2(t)}\right)$$
$$\cdot\left[\sqrt{1-\rho_{x\dot{x}}^2(t)}\exp\left\{-\frac{\rho_{x\dot{x}}^2(t)S^2}{2\sigma_x{}^2(t)(1-\rho_{x\dot{x}}^2(t))}\right\}\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{2}\rho_{x\dot{x}}(t)S}{\sigma_x(t)}\mathrm{Erf}\left(-\frac{\rho_{x\dot{x}}(t)S}{\sqrt{2}\sigma_x(t)\sqrt{1-\rho_{x\dot{x}}^2(t)}}\right)\right]dS \qquad (5.6)$$

となる。

ここで，これまでの $\bar{m}$ に対応する $\bar{m}(t)$ を次式のように定義する。

$$\bar{m}(t)=\frac{\bar{S}}{\sigma_x(t)} \qquad (5.7)$$

この $\bar{m}(t)$ と強度の変動係数および式（1．16）の関係式で与えられる $\kappa_u(=\lambda_u)$，$\kappa_l(=-\lambda_l)$ を用い，さらに $Z=S/\sigma_x(t)$ なる変数変換をおこなえば，式（5．6）は次式のようになる。

$$\nu_{x,CN}{}^+(\bar{m}(t),\ \delta_S,\ t)=\frac{\sigma_{\dot{x}}(t)}{2\pi\sigma_x(t)\{\mathrm{Erf}(-\kappa_l/\sqrt{2})-\mathrm{Erf}(\kappa_u/\sqrt{2})\}}$$
$$\cdot\left[\frac{1-\rho_{x\dot{x}}^2(t)}{\mu(t)}\exp\left\{-\frac{\bar{m}^2(t)}{2\mu^2(t)}\right\}\left\{\mathrm{Erf}\left(\frac{\alpha_l(t)}{\sqrt{2}}\right)\right.\right.$$
$$\left.-\mathrm{Erf}\left(\frac{\alpha_u(t)}{\sqrt{2}}\right)\right\}+\frac{\rho_{x\dot{x}}(t)}{\bar{m}(t)\delta_s}\int_{(1-\delta_s\kappa_l)\bar{m}(t)}^{(1+\delta_s\kappa_u)\bar{m}(t)}Z$$
$$\cdot\exp\left\{-\frac{(1+\bar{m}^2(t)\delta_s{}^2)Z^2-2\bar{m}(t)Z+\bar{m}^2(t)}{2\bar{m}^2(t)\delta_s{}^2}\right\}$$
$$\left.\cdot\mathrm{Erf}\left(-\frac{\rho_{x\dot{x}}(t)}{\sqrt{2(1-\rho_{x\dot{x}}^2(t))}}Z\right)dZ\right] \qquad (5.8)$$

式中，

$$\left.\begin{aligned}\mu(t)&=\sqrt{(1-\rho_{x\dot{x}}{}^2(t))+\bar{m}^2(t)\delta_s{}^2}\\ \alpha_l(t)&=(\bar{m}^2(t)\delta_s-\mu^2(t)\kappa_l)/(\sqrt{1-\rho_{x\dot{x}}{}^2(t)}\cdot\mu(t))\\ \alpha_u(t)&=(\bar{m}^2(t)\delta_s+\mu^2(t)\kappa_u)/(\sqrt{1-\rho_{x\dot{x}}{}^2(t)}\cdot\mu(t))\end{aligned}\right\}\qquad(5.9)$$

である。

b）材料強度が正規分布に従う場合

式（5．8）と式（5．9）において，強度の上限・下限を与えるパラメーター κ_u ， κ_l をそれぞれ無限大にすれば，

$$\begin{aligned}\nu_{x,N^+}(\bar{m}(t),\delta_S,t)=&\frac{\sigma_{\dot{x}}(t)}{2\pi\sigma_x(t)}\left[\frac{1-\rho_{x\dot{x}}{}^2(t)}{\mu(t)}\exp\left\{-\frac{\bar{m}^2(t)}{2\mu^2(t)}\right\}+\frac{\rho_{x\dot{x}}(t)}{\bar{m}(t)\delta_s\sqrt{\pi}}\right.\\ &\cdot\int_{-\infty}^{\infty}Z\exp\left\{-\frac{(1+\bar{m}^2(t)\delta_s{}^2)Z^2-2\bar{m}(t)Z+\bar{m}^2(t)}{2\bar{m}^2(t)\delta_s{}^2}\right\}\\ &\left.\cdot\mathrm{Erf}\left(-\frac{\rho_{x\dot{x}}(t)}{\sqrt{2(1-\rho_{x\dot{x}}{}^2(t))}}Z\right)dZ\right]\end{aligned}\qquad(5.10)$$

となる。

c）材料強度が条件付対数正規分布に従う場合

この場合も条件付対数正規確率密度関数の表式（1．21）を式（5．5）の $f_S(S)$ に代入し，強度に関する積分区間を $[S_l, S_u]$ とすれば次式が得られる。

$$\begin{aligned}\nu_{x,CLN^+}(S,t)=&\frac{\sigma_{\dot{x}}(t)}{2\sqrt{2}\pi\sigma_{s*}\sigma_x(t)\{\mathrm{Erf}(\beta_l/\sqrt{2})-\mathrm{Erf}(\beta_u/\sqrt{2})\}}\\ &\cdot\left[\int_{S_l}^{S_u}\frac{1}{S}\exp\left(-\frac{(S^*-\bar{S}^*)^2}{2\sigma_{s*}{}^2}\right\}\exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_x{}^2(t)}\right)\right.\\ &\cdot\left[\sqrt{1-\rho_{x\dot{x}}{}^2(t)}\exp\left\{-\frac{\rho_{x\dot{x}}{}^2(t)S^2}{2\sigma_x{}^2(t)(1-\rho_{x\dot{x}}{}^2(t))}\right\}\right.\\ &\left.\left.+\frac{\sqrt{2}\rho_{x\dot{x}}(t)S}{\sigma_x(t)}\mathrm{Erf}\left(-\frac{\rho_{x\dot{x}}(t)S}{\sqrt{2}\sigma_x(t)\sqrt{1-\rho_{x\dot{x}}{}^2(t)}}\right)\right]dS\right]\end{aligned}\qquad(5.11)$$

式（5．11）において $S^*=\ln S$， $\sigma_{s*}=\sqrt{\ln(1+\delta_s{}^2)}$ であることを考慮して $Z=S/\sigma_x(t)$ なる変数変換をおこない，さらに $\bar{m}(t)$ と δ_s を導入すれば次式のようになる。

$$\begin{aligned}\nu_{x,CLN^+}(\bar{m}(t),\delta_S,t)=&\frac{\sigma_{\dot{x}}(t)}{2\sqrt{2}\pi\sqrt{\ln(1+\delta_s{}^2)}\sigma_x(t)\{\mathrm{Erf}(\beta_l/\sqrt{2})-\mathrm{Erf}(\beta_u/\sqrt{2})\}}\\ &\cdot\left[\int_{(1-\kappa_l\delta_s)\bar{m}(t)}^{(1+\kappa_u\delta_s)\bar{m}(t)}\frac{1}{Z}\exp\left\{-\frac{(\ln\sqrt{1+\delta_s{}^2}Z-\ln\bar{m}(t))^2}{2\ln(1+\delta_s{}^2)}\right\}\right.\\ &\cdot\exp\left(-\frac{Z^2}{2}\right)\left[\sqrt{1-\rho_{x\dot{x}}{}^2(t)}\right.\\ &\cdot\exp\left\{-\frac{\rho_{x\dot{x}}{}^2(t)}{2(1-\rho_{x\dot{x}}{}^2(t))}Z^2\right\}+\sqrt{2}\rho_{x\dot{x}}(t)Z\\ &\left.\left.\cdot\mathrm{Erf}\left(-\frac{\rho_{x\dot{x}}(t)}{\sqrt{2(1-\rho_{x\dot{x}}{}^2(t))}}Z\right)\right]dZ\right]\end{aligned}\qquad(5.12)$$

d）材料強度が対数正規分布に従う場合

式（5．12）において，下限を示すパラメーター κ_l を $\kappa_l \to \bar{S}/\sigma_S = 1/\delta_S$ とし，上限を示すパラメーター κ_u を無限大にすれば，式（1．23）より $\beta_l \to -\infty$ ，$\beta_u \to \infty$ となるので所要の式は，

$$\nu_{x,LN^+}(\bar{m}(t),\ \delta_S,\ t) = \frac{\sigma_{\dot{x}}(t)}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{\ln(1+\delta_s^2)}\,\sigma_x(t)} \left[\int_0^\infty \frac{1}{Z}\exp\left\{-\frac{(\ln\sqrt{1+\delta_s^2}Z - \ln\bar{m}(t))^2}{2\ln(1+\delta_s^2)}\right\}\right.$$
$$\cdot\exp\left(-\frac{Z^2}{2}\right)\left[\sqrt{1-\rho_{x\dot{x}}^2(t)}\ \exp\left\{-\frac{\rho_{x\dot{x}}^2(t)}{2(1-\rho_{x\dot{x}}^2(t))}Z^2\right\} + \sqrt{2}\,\rho_{x\dot{x}}(t)Z\right.$$
$$\left.\left.\cdot\mathrm{Erf}\left(-\frac{\rho_{x\dot{x}}(t)}{\sqrt{2(1-\rho_{x\dot{x}}^2(t))}}Z\right)\right]dZ\right] \qquad (5.13)$$

となる。

以上いずれの場合も $\sigma_x(t)=\sigma_x$ ，$\sigma_{\dot{x}}(t)=\sigma_{\dot{x}}$ ，$\rho_{x\dot{x}}(t)=0$ ，$\bar{m}(t)=\bar{m}$ とすれば，第1章で提示した定常過程における強度超過率の式に一致することは明らかである。ただし，c），d）で示したように，強度が対数正規分布に従う場合については，見掛け上，式の形は異なっている。しかしそれは変数変換の差異によるものであり，実質的には同一の式となる。

5．2．2　包絡線過程の強度超過率

緒言でも述べたように，Yang[4]は定常過程に対するCramer・Leadbetter[5]の理論を拡張して，非定常正規確率過程の包絡線と，その時間的導関数の結合確率密度関数を次式のように導いた。

$$f_{a\dot{a}}(a(t),\ \dot{a}(t)) = \frac{a(t)}{\sqrt{2\pi\Delta(t)}\,\sigma_x^2(t)}$$
$$\cdot\exp\left\{-\frac{\sigma_x^2(t)\dot{a}^2(t) - C(t)a(t)\dot{a}(t) + a^2(t)(\Delta(t)+C^2(t)/4\sigma_x^2(t))}{2\sigma_x^2(t)\Delta(t)}\right\} \qquad (5.14)$$

式中，

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta(t) = \bar{\lambda}_2(t) - \frac{\bar{\lambda}_1^2(t)}{\sigma_x^2(t)} - \frac{C^2(t)}{4\sigma_x^2(t)} - Q(t) \quad ,\\
&\bar{\lambda}_j(t) = \int_0^\infty |A(t,\omega)|^2 G(\omega)(\omega+\dot{\varepsilon}(t))^j d\omega \ , \quad (j=1,2)\\
&\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\arctan\left\{\frac{I_m A(t,\omega)}{R_e A(t,\omega)}\right\}\right\} ,\\
&\qquad ReA(t,\omega),\ ImA(t,\omega):\ \text{それぞれ}\ A(t,\omega)\ \text{の実部と虚部},\\
&\sigma_x^2(t) = \int_0^\infty |A(t,\omega)|^2 G(\omega)d\omega \quad ,\ |A(t,\omega)|^2 G(\omega):\ \boldsymbol{x}(t)\ \text{の発展スペクトル}\\
&C(t) = 2\int_0^\infty |A(t,\omega)|\frac{\partial|A(t,\omega)|}{\partial t}G(\omega)d\omega \ = 2E[\boldsymbol{x}(t)\dot{\boldsymbol{x}}(t)] \ ,\\
&Q(t) = \int_0^\infty \left(\frac{\partial|A(t,\omega)|}{\partial t}\right)^2 G(\omega)d\omega
\end{aligned}\right\} \qquad (5.15)$$

式（5．14），（5．15）を式（5．2）に代入し，さらに $\dot{a}(t)$ に関する半無限区間積分を実行すれば，包絡線過程の強度超過率の基礎式が次式のように得られる。

$$\nu_a{}^+(S,t)=\frac{\sqrt{\Delta(t)}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x{}^2(t)}\int_{R_S} S\,f_S(S)\exp\left\{-\frac{S^2(\Delta(t)+C^2(t)/4\,\sigma_x{}^2(t))}{2\,\sigma_x{}^2(t)\Delta(t)}\right\}$$
$$\cdot\left[1+\frac{C(t)S}{\sqrt{2\,\Delta(t)}\sigma_x{}^2(t)}\exp\left\{\frac{C^2(t)S^2}{8\,\sigma_x{}^4(t)\Delta(t)}\right\}\mathrm{Erf}\left\{-\frac{C(t)S}{2\sqrt{2\,\Delta(t)}\sigma_x{}^2(t)}\right\}\right]dS \qquad (5.16)$$

以下，強度の確率密度関数の表式を式（5．16）の $f_S(S)$ に代入し，具体的な強度超過率の算定式を誘導する。

a）材料強度が条件付正規分布に従う場合

$f_S(S)$ に条件付正規確率密度関数の表式（式（1．8）を代入し，5．2．1 a）と同様の変数変換をおこない，さらに無次元パラメーター $\bar{m}(t)$ ，δ_s を用いれば

$$\nu_{a,CN}{}^+(\bar{m}(t),\delta_S,t)=\frac{\sqrt{\Delta(t)}\bar{m}(t)\delta_s}{\sqrt{2\pi}\sigma_x(t)\{\mathrm{Erf}(-\kappa_l/\sqrt{2})-\mathrm{Erf}(\kappa_u/\sqrt{2})\}}$$
$$\cdot\left[\frac{1}{1+H(t)}\left[\exp(\gamma_l(t))-\exp(\gamma_u(t))\right.\right.$$
$$+\frac{1}{\delta_s\sqrt{1+H(t)}}\exp\left\{-\frac{H(t)}{2\,\delta_s{}^2(1+H(t))}\right\}$$
$$\left.\left.\cdot\left\{\mathrm{Erf}\left(\frac{\eta_l(t)}{\sqrt{2}}\right)-\mathrm{Erf}\left(\frac{\eta_u(t)}{\sqrt{2}}\right)\right\}\right]+\frac{D(t)}{\bar{m}^2(t)\delta_s{}^2}\int_{(1-\kappa_l\delta_s)\bar{m}(t)}^{(1+\kappa_u\delta_s)\bar{m}(t)}Z^2$$
$$\left.\cdot\exp\left\{-\frac{(1+\bar{m}^2(t)\delta_s{}^2)Z^2-2\,\bar{m}(t)Z+\bar{m}^2(t)}{2\,\bar{m}^2(t)\delta_s{}^2}\right\}\mathrm{Erf}\left(-\frac{D(t)}{\sqrt{2}}Z\right)dZ\right] \qquad (5.17)$$

となる。式中，

$$\left.\begin{aligned}
&H(t)=(1+D^2(t))\bar{m}^2(t)\delta_s{}^2\\
&D(t)=C(t)/(2\sqrt{\Delta(t)}\sigma_x(t))\\
&\gamma_l(t)=-\{(1+H(t))\kappa_l{}^2\delta_s{}^2-2\,H(t)\kappa_l\delta_s+H(t)\}/2\,\delta_s{}^2\\
&\gamma_u(t)=-\{(1+H(t))\kappa_u{}^2\delta_s{}^2+2\,H(t)\kappa_u\delta_s+H(t)\}/2\,\delta_s{}^2\\
&\eta_l(t)=-\{(1+H(t))\kappa_l\delta_s-H(t)\}/(\delta_s\sqrt{1+H(t)})\\
&\eta_u(t)=\{(1+H(t))\kappa_u\delta_s+H(t)\}/(\delta_s\sqrt{1+H(t)})
\end{aligned}\right\} \qquad (5.18)$$

b）材料強度が正規分布に従う場合

この場合は，式（5．17）の中に陽にあるいは陰に含まれる κ_l ，κ_u について，$\kappa_l\to\infty$ ，$\kappa_u\to\infty$ とすればよい。式（5．18）の第1式より $H(t)\geq 0$ であり，したがってこの条件のもとでは $\gamma_l(t)\to-\infty$，$\gamma_u(t)\to-\infty$ ，$\eta_l(t)\to-\infty$，$\eta_u(t)\to\infty$ となる。このとき $\exp(\gamma_l(t))$ ，$\exp(\gamma_u(t))$ はともに零になり，さらに

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{Erf}(-\kappa_l/\sqrt{2})=\mathrm{Erf}(\eta_l(t)/\sqrt{2})=\sqrt{\pi}\\
\mathrm{Erf}(\kappa_u/\sqrt{2})=\mathrm{Erf}(\eta_u(t)/\sqrt{2})=0
\end{aligned}\right\} \qquad (5.19)$$

であるから，所要の式は次式のようになる。

$$\nu_{a,N^+}(\bar{m}(t),\ \delta_S,\ t)=\frac{\sqrt{\Delta(t)}\,\bar{m}(t)\delta_s}{\sqrt{2}\,\pi\sigma_x(t)}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{\delta_s(1+H(t))^{3/2}}\right.$$
$$\cdot\exp\left\{-\frac{H(t)}{2\,\delta_s{}^2(1+H(t))}\right\}+\frac{D(t)}{\bar{m}^2(t)\delta_s{}^2}\int_{-\infty}^{\infty}Z^2$$
$$\left.\cdot\exp\left\{-\frac{(1+\bar{m}^2(t)\delta_s{}^2)Z^2-2\,\bar{m}(t)Z+\bar{m}^2(t)}{2\,\bar{m}^2(t)\delta_s{}^2}\right\}\ \mathrm{Erf}\left(-\frac{D(t)}{\sqrt{2}}Z\right)dZ\right] \qquad (5.20)$$

c）材料強度が条件付対数正規分布に従う場合

やはり式（5．16）の $f_S(S)$ に条件付対数正規確率密度関数の表式（式（1．21））を代入し，以後は5．2．1 c）と同様の手順によって次式が得られる。

$$\nu_{a,CLN^+}(\bar{m}(t),\ \delta_S,\ t)=\frac{\sqrt{\Delta(t)}}{2\sqrt{\pi}\,\sqrt{\ln(1+\delta_s{}^2)}\,\sigma_x(t)\{\mathrm{Erf}(\beta_l/\sqrt{2})-\mathrm{Erf}(\beta_u/\sqrt{2})\}}$$
$$\cdot\left[\int_{(1-\kappa_l\delta_s)\bar{m}(t)}^{(1+\kappa_u\delta_s)\bar{m}(t)}\exp\left\{-\frac{(\ln\sqrt{1+\delta_s{}^2}Z-\ln\bar{m}(t))^2}{2\ln(1+\delta_s{}^2)}\right\}\right.$$
$$\cdot\exp\left\{-\frac{(1+D^2(t))Z^2}{2}\right\}\left\{1+\sqrt{2}D(t)Z\right.$$
$$\left.\left.\cdot\exp\left(\frac{D^2(t)Z^2}{2}\right)\mathrm{Erf}\left(-\frac{D(t)Z}{\sqrt{2}}\right)\right\}dZ\right] \qquad (5.21)$$

d）材料強度が対数正規分布に従う場合

5．2．1 d）と同様，式（5．21）に含まれる κ_l ，κ_u をそれぞれ $1/\delta_s$ ，無限大にすれば

$$\nu_{a,LN^+}(\bar{m}(t),\ \delta_S,\ t)=\frac{\sqrt{\Delta(t)}}{2\,\pi\sqrt{\ln(1+\delta_s{}^2)}\,\sigma_x(t)}\left[\int_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{(\ln\sqrt{1+\delta_s{}^2}Z-\ln\bar{m}(t))^2}{2\ln(1+\delta_s{}^2)}\right\}\right.$$
$$\cdot\exp\left\{-\frac{(1+D^2(t))Z^2}{2}\right\}\left\{1+\sqrt{2}D(t)Z\right.$$
$$\left.\left.\cdot\exp\left(\frac{D^2(t)Z^2}{2}\right)\mathrm{Erf}\left(-\frac{D(t)Z}{\sqrt{2}}\right)\right\}dZ\right] \qquad (5.22)$$

となる。

さて定常過程の包絡線と，その時間的導関数の結合確率密度関数は，非定常過程に対する式（5．14）（5．15）において，$|A(t,\ \omega)|=1$ ，$\dot{\varepsilon}(t)=0$ ，$C(t)=0$ ，$Q(t)=0$ として得られる。したがってここで求めた各強度超過率の算定式にこれらの値を代入すれば，実質的には全て第1章の表式に一致することがわかる。

5．3　線形1自由度振動系の初通過破壊確率

5．3．1　不規則応答の評価式

線形1自由度振動系に作用する単位質量当りの非定常不規則外力を $f(t)$ とし，$f(t)$ として周波数

特性が時間的に変化しないような地震動モデルとしてよく使用される

$$f(t)=g(t)n(t)=U(t)C_1(e^{-\beta_1 t}-e^{-\beta_2 t})n(t) \tag{5.23}$$

を考える。ここに $U(t)$ は単位階段関数，C_1 ，β_1 ，β_2 は形状関数（包絡線関数ともいう） $g(t)$ を決定する適当なパラメーターで，$\beta_2>\beta_1>0$ なる条件が満たされているものとする。また $n(t)$ は定常正規確率過程であるが，ここでは片側パワースペクトル密度 G_0 を有するホワイトノイズとする。

この場合，固有円振動数が ω_n ，減衰定数が ζ の線形１自由度振動系の非定常応答 $y(t)$ は，単位衝撃応答関数 $h(t)$ と，直交過程 $F(\omega)$を用いて次式のように与えられる。

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} M_y(t,\omega)e^{i\omega t}dF(\omega) \tag{5.24}$$

式中

$$M_y(t,\omega)=\int_0^t h(t)B(t-\tau,\omega)e^{-i\omega\tau}d\tau \tag{5.25}$$

$$h(t)=e^{-\zeta\omega_n t}\sin\bar{\omega}_n t/\bar{\omega}_n \tag{5.26}$$

$$\bar{\omega}_n=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{5.27}$$

であり，式（５．25）の $B(t,\omega)$ は t に関して緩やかに変化する関数で，ここでは式（５．23）の $g(t)$ で与えられる。このときPriestley [10] の定義によれば，応答変位の片側非定常スペクトル（以下，単に非定常スペクトルと称する） $f_y(t,\omega)$ は

$$f_y(t,\omega)=2|M_y(t,\omega)|^2E[|dF(\omega)|^2] \tag{5.28}$$

となる。式中 $E[|dF(\omega)|^2]$ は $|dF(\omega)|^2$ の集合平均であり，設定条件により次式で与えられる。

$$E[|dF(\omega)|^2]=\frac{G_0}{2} \tag{5.29}$$

したがって式（５．28）と（５．29）より次式が得られる。

$$f_y(t,\omega)=|M_y(t,\omega)|^2G_0 \tag{5.30}$$

ここで変位 $y(t)$ とある種の応力 $x(t)$ とに線形関係が成立するものとし，

$$x(t)=cy(t) \tag{5.31}$$

とすれば，応力 $x(t)$ の非定常スペクトル $f_x(t,\omega)$ は，

$$\begin{aligned} f_x(t,\omega)&=c^2f_y(t,\omega)\\ &=|M_x(t,\omega)|^2G_0 \end{aligned} \tag{5.32}$$

で与えられる。ここに

$$M_x(t,\omega)=cM_y(t,\omega) \tag{5.33}$$

である。

式（5．25）により $M_y(t,\omega)$ を計算し，式（5．33）に代入すれば，$M_x(t,\omega)$ の実部 $R_eM_x(t,\omega)$ および虚部 $I_mM_x(t,\omega)$ がそれぞれ以下のように求められる。

$$R_eM_x(t,\omega)=\frac{cC_1}{2\bar{\omega}_n}\Bigg[\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\Bigg[\frac{1}{(\beta_k-\zeta\omega_n)^2+(\bar{\omega}_n+\omega)^2}[\{(\beta_k-\zeta\omega_n)\cdot\sin(\bar{\omega}_n+\omega)t-(\bar{\omega}_n+\omega)\cos(\bar{\omega}_n+\omega)t\}e^{-\zeta\omega_n t}+(\bar{\omega}_n+\omega)e^{-\beta_k t}]+\frac{1}{(\beta_k-\zeta\omega_n)^2+(\bar{\omega}_n-\omega)^2}\cdot[\{\beta_k-\zeta\omega_n)\sin(\bar{\omega}_n-\omega)t-(\bar{\omega}_n-\omega)\cos(\bar{\omega}_n-\omega)t\}e^{-\zeta\omega_n t}+(\bar{\omega}_n-\omega)e^{-\beta_k t}]\Bigg]\Bigg] \quad (5.34)$$

$$I_mM_x(t,\omega)=\frac{cC_1}{2\bar{\omega}_n}\Bigg[\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\Bigg[\frac{1}{(\beta_k-\zeta\omega_n)^2+(\bar{\omega}_n+\omega)^2}[\{(\beta_k-\zeta\omega_n)\cdot\cos(\bar{\omega}_n+\omega)t+(\bar{\omega}_n+\omega)\sin(\bar{\omega}_n+\omega)t\}e^{-\zeta\omega_n t}-(\beta_k-\zeta\omega_n)e^{-\beta_k t}]-\frac{1}{(\beta_k-\zeta\omega_n)^2+(\bar{\omega}_n-\omega)^2}\cdot[\{(\beta_k-\zeta\omega_n)\cos(\bar{\omega}_n-\omega)t+(\bar{\omega}_n-\omega)\sin(\bar{\omega}_n-\omega)t\}\cdot e^{-\zeta\omega_n t}-(\beta_k-\zeta\omega_n)e^{-\beta_k t}]\Bigg]\Bigg] \quad (5.35)$$

この $M_x(t,\omega)$ が式（5．15）における $A(t,\omega)$ に相当する。また式（5．34），（5．35）を式（5．32）に代入して $f_x(t,\omega)$ を決定すれば，5．2．2で示した包絡線過程の強度超過率を算定でき，さらに式（5・2）によって初通過破壊確率を求めることができる。

また

$$\sigma_x{}^2(t)=\int_0^\infty f_x(t,\omega)\,d\omega=G_0\int_0^\infty|M_x(t,\omega)|^2d\omega \quad (5.36)$$

$$\sigma_{\dot{x}}{}^2(t)=\int_0^\infty \omega^2 f_x(t,\omega)\,d\omega=G_0\int_0^\infty \omega^2|M_x(t,\omega)|^2d\omega \quad (5.37)$$

$$\rho_{x\dot{x}}(t)=\frac{E[x(t)\dot{x}(t)]}{\sigma_x(t)\sigma_{\dot{x}}(t)}=\int_0^\infty\frac{\partial|M_x(t,\omega)|}{\partial t}|M_x(t,\omega)|d\omega\Big/\sqrt{\int_0^\infty|M_x(t,\omega)|^2d\omega\int_0^\infty\omega^2|M_x(t,\omega)|^2d\omega} \quad (5.38)$$

の各式によって $\sigma_x(t)$，$\sigma_{\dot{x}}(t)$，$\rho_{x\dot{x}}(t)$ が算定できるので，5．2．1）で誘導した応答過程の強度超過率を用いて，式（5．1）によって初通過破壊確率が計算できる。

以上のように，式（5．23）のようにモデル化できる非定常不規則外力を受ける線形1自由度振動系の初通過破壊確率は，外力に関するパラメーター C_1，β_1，β_2，G_0，振動系の動特性を与えるパラメーター ω_n，ζ および材料強度に関するパラメーター $\bar{S}$，δ_s と確率分布形さらに振動継続時間によって決定される。

5．3．2　数値解析モデル

本研究では表5．1に示すような条件を設定し，数値解析をおこなった。表中の $\bar{m}^*$ は図5．2に示すように，$\bar{m}(t)$ の最小値，すなわち材料強度の平均値と振動継続時間中における $\sigma_x(t)$ の最大値

表5．1　数値計算で使用した各パラメーターの値

外　　力		TYPE A (β_1=0.347, β_2=0.694) TYPE B (β_1=0.173 β_2=0.346)
振動系	固有円振動数　ω_n	2π (rad/s)
	減衰定数　ζ	0.01, 0.05, 0.08
材料強度	確率分布	条件付正規，正規，条件付対数正規，対数正規分布
	変動係数　δ_s	0, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20
$\bar{m}^*$		3, 4, 5, 6, 8, 10

$\sigma_{x,max}$ との比である。この $\bar{m}^*$ を便宜上最小中央安全率と名付けることにする。これは後述するように，振動系の破壊確率にもっとも大きな影響を与える重要な無次元パラメーターである。またTYPE　AとTYPE　Bの外力に対応する β_1，β_2 の値については，図5・3に示すように，形状関数 $g(t)$ がそれぞれ2秒（TYPE　A）と4秒（TYPE　B）で最大になり，かつ同一の C_1 について両ピーク値が一致するような値を選定した。

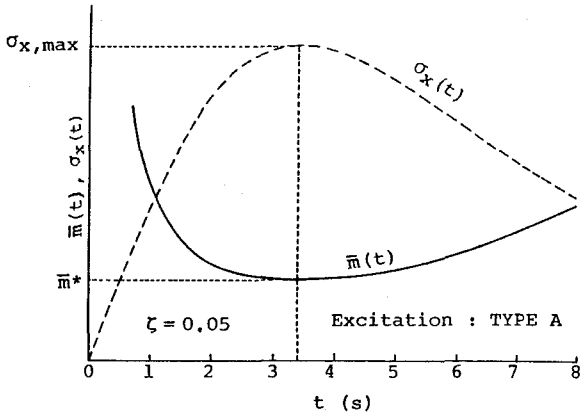


図5．2　$\bar{m}(t)$ の時間的変化

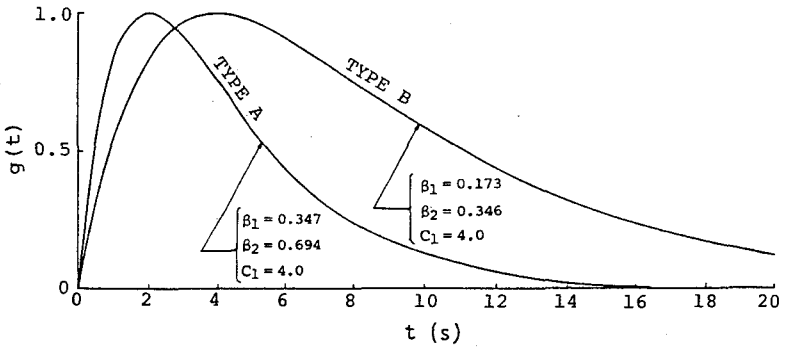


図5．3　形　状　関　数

さらに C_1，G_0，c，$\bar{S}$ の関係については，最小中央安全率 $\bar{m}^*$が３～１０の領域に納まるよう各値を適当に定めた。最小中央安全率としてこの範囲の値を設定した理由について若干の補足説明を加えておく。図５・４は著者らが実施した円形断面を有する鋼製タワーの定常風に対する風洞実験結果[11] であり，縦軸は約８秒の測定記録中における風向直角方向の頂部変位の最大値 y_{max} とそのr.m.s.値 σ_y との比である。基部の曲げ応力に関しても，その最大値とr.m.s.値との比はほぼ同様の値を示すものと思われる。図より両者の比は２から４の間に散らばっていることが認められ，この限られた実験結果の範囲で推量すれば，不規則振動体の変動応力の最大値は，r.m.s.値の２～４倍程度になる確率が非常に高いといえるであろう。もちろん最大値分布の理論[12] を引用するまでもなく，可能性としてはr.m.s.値の５倍，６倍の最大値が生じることもあり得るのであって，ここでも確定論に基づく設計法の問題点が浮き彫りにされる。ともかく現行の許容応力度設計法に基づいて設計された構造物が設計不規則荷重を受ける場合，構造部材に生ずる応力のr.m.s.値は，一般に許容応力度 S_a の1/2 ～1/4 程度になる確率が高いように思われる。さらに許容応力度が公称降伏点の1/1.7 であるとすれば，降伏点の平均値と発生応力のr.m.s.値との比は，３～１０程度の範囲にあると推定できる＊。

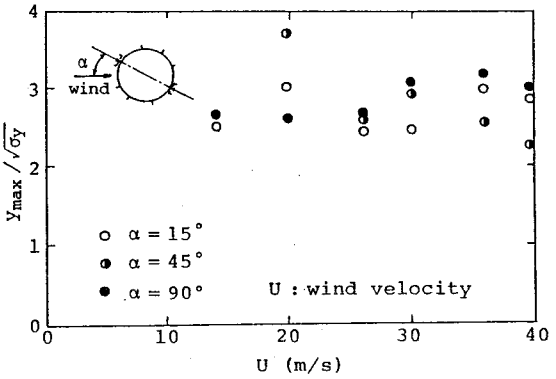


図５．４　不規則振動体の最大変位とr.m.s.値との比

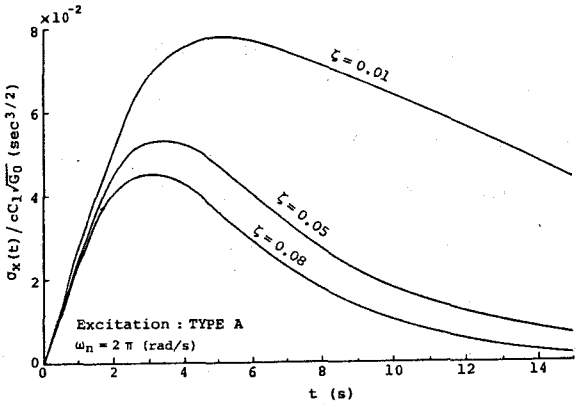
５．３．３　不規則応答の解析結果

まず振動系にＴＹＰＥ　ＡとＴＹＰＥ　Ｂの非定常外力が作用する場合の変動応力のr.m.s.値の計算結果を図５．５に示す。当然予想されることではあるが，たとえ外力の形状関数のピーク値ならびにパワースペクトルが等しくても，形状関数の時間的特性および振動系の減衰定数の大きさによって応答値に明確な差異が生じていることがわかる。この応答特性の差異と振動系の信頼性との関係は，後述するように，初通過破壊確率によって定量的に示される。

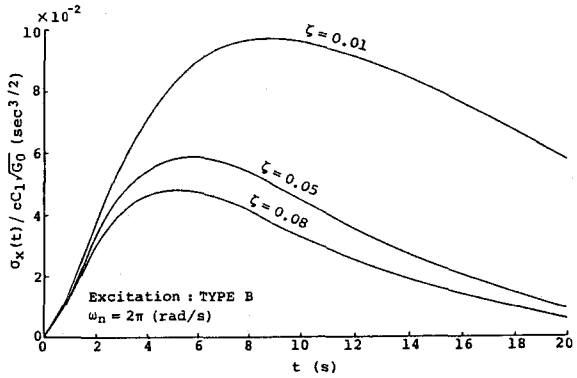
さて第１章で述べたように，定常不規則変動外力を受ける１自由度振動系の初通過破壊確率については，材料強度の平均値と応力応答のr.m.s.値との比，材料強度の変動係数，振動系の固有振動数と減衰

＊　（理由）　公称降伏点 S_{nom} を超過確率95％として決めたとすると，$S_{nom}=\bar{S}-1.645\,\sigma_s$ である。いま強度点の変動係数を 0～0.16[13] とすると，上式より $\bar{S}/S_{nom}=$ 1～1.357 である。故に

$$\bar{m}^*=\frac{\bar{S}}{\sigma_{x,max}}=\frac{S_a}{\sigma_{x,max}}\cdot\frac{S_{nom}}{S_a}\cdot\frac{\bar{S}}{S_{nom}}=(2\sim4)\cdot1.7\cdot(1\sim1.357)=3.4\sim9.23$$



(a) Excitation : TYPE A



(b) Excitation : TYPE B

図5．5　非定常応力応答のr.m.s.値

定数および振動継続時間によって一般的に議論できる。ところが非定常外力を受ける振動系の場合，変動応力やその時間的導関数の分散さらに両者の相関係数が時間的に変動し，またこれらの時間的な変動特性も非定常外力の特性によってかなり異なるので，パラメトリック解析による議論はなかなか難しい。すなわち $\bar{m}(t)$ や $\rho_{x\dot{x}}(t)$ の時間的な変動特性までを考慮して初通過破壊確率を論ずるとすれば，問題があまりにも複雑になる。したがって，ここでは応答がピークに達する時刻の $\bar{m}(t)$ ，すなわち最小中央安全率 $\bar{m}^*$ によって振動系の破壊確率がほぼ決定され，かつその時刻の前後における $\rho_{x\dot{x}}(t)$ の値が非常に小さいという理由により，$\bar{m}^*$ ，δ_s ，ω_n ，ζ が破壊確率を支配する主要なパラメーターであるとして考察を進める。なお図5．6はGauss-Hermite の公式による式（5．10）の定積分の収束性を示したものであるが，$\bar{m}(t)$ あるいは δ_s が大きくなるにしたがって収束性が向上することがわかる。以下に示す結果は，このように定積分の収束性を確認した上で積分区間の分点数を決めて，Gauss 系の公式によって計算をおこなったものである。ただし，強度超過率から破壊確率を計算するときの数値積分はSympson の公式を用いた。

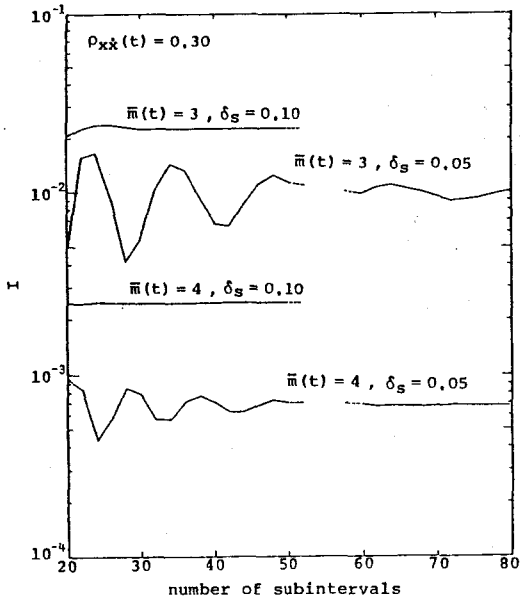
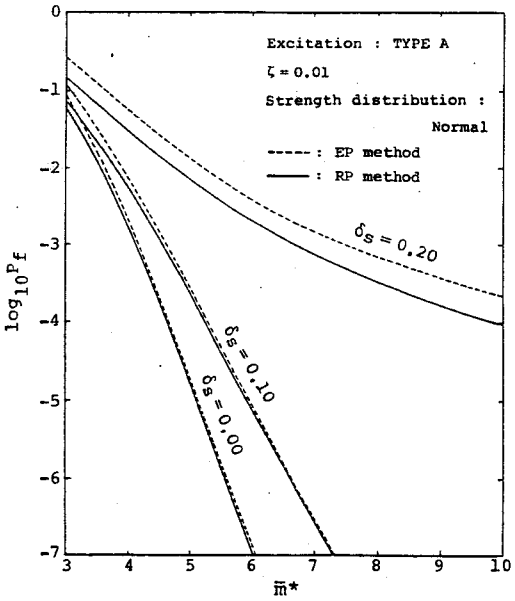


図５．６　Gauss の求積法による数値積分の収束性

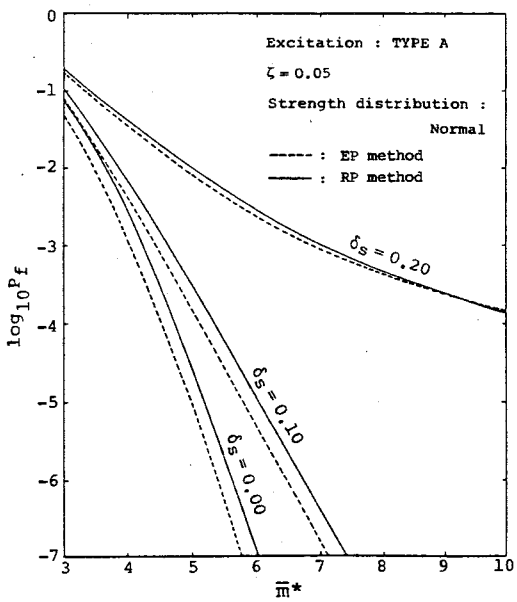
５．３．４　初通過破壊確率に及ぼす各種要因の影響

（ａ）両近似解法と初通過破壊確率との関係

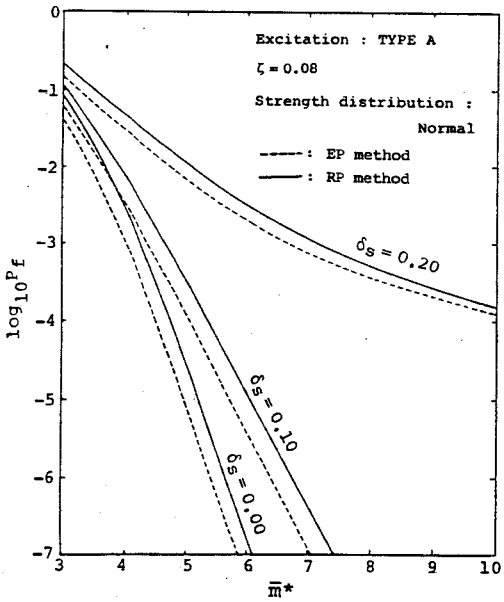
「応答過程による方法」（ＲＰ法）および「包絡線過程による方法」（ＥＰ法）の両近似解法に基づき，表５．１に示した種々の条件下での振動系の初通過破壊確率を算定した。図５．７は外力をＴＹ－ＰＥ　Ａ，材料強度の確率分布を正規分布とした場合の破壊確率と最小中央安全率との関係を，強度の変動係数をパラメーターとして示したものである。図より，定常問題の場合に比べて，両近似解法による破壊確率の推定値に顕著な差異が認められないことがわかる。さらに振動系の減衰定数が0.05（同図（ｂ））あるいは0.08（同図（ｃ））になると両推定値の差が $\bar{m}^*$ や δ_s の値にほとんど無関係になり，僅かではあるがＥＰ法に基づく破壊確率の方がＲＰ法によるよりも大きい値を示していることが理解できる。Yang[4]によっても指摘された，このＥＰ法の精度の悪化は，Lyon[14] によって定義されたクランプ・サイズ（clump size）の期待値が１を下回ったためであろうと思われるが，詳細な検討はシミューレーションによって応答過程と包絡線過程を発生させ，求めたクランプの統計量によらなければならない。なお以下では一応ＥＰ法によって得られた結果について考察を進める。



(a) ζ = 0.01



(b) ζ = 0.05



(c) ζ = 0.08

図５．７　両近似解法による初通過破壊確率の比較

（ｂ）各種要因が初通過破壊確率に及ぼす影響

１）材料強度のばらつきの影響

材料強度のばらつきが振動系の破壊確率に及ぼす影響については，強度の変動係数をパラメーターとし，破壊確率と最小中央安全率との関係を示す図５．８によって考察することができる。

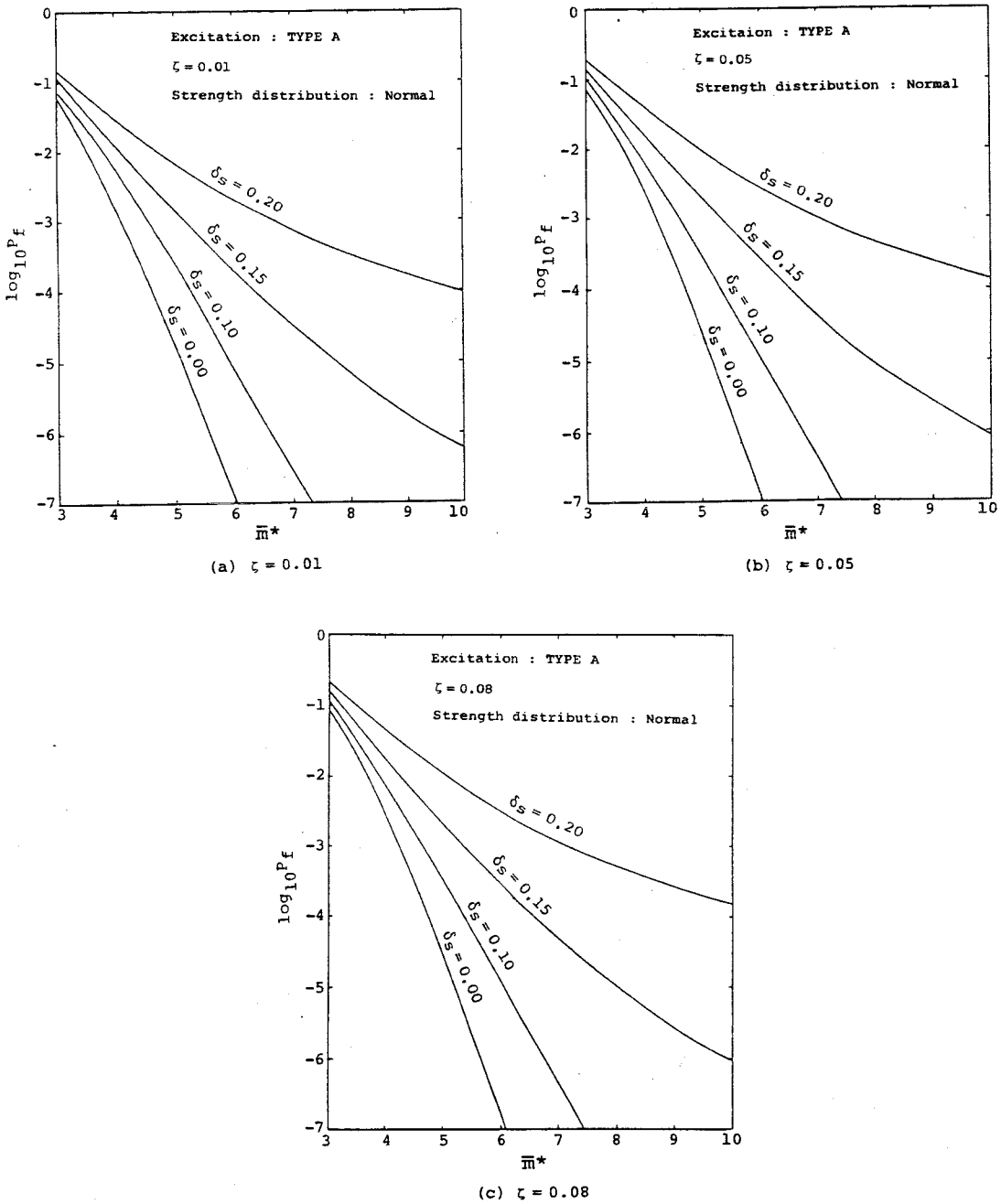


図５．８　最小中央安全率と初通過破壊確率との関係

同図は外力をＴＹＰＥ　Ａ，材料強度の確率分布を正規分布としたときの結果であるが，ＴＹＰＥ　Ｂの外力の場合にも定性的にはほぼ同様の傾向を示す。図より最小中央安全率 $\bar{m}^*$ の値が大きいときほど，強度のばらつきの破壊確率へ及ぼす影響が強いことは明瞭であるが，このことを定量的に把握するために，ζ ＝0.01（同図（ａ））のときの，３～６の $\bar{m}^*$ に対する破壊確率を表５．２に示す。表より $\bar{m}^*$ が３のときには δ_s による破壊確率の変動は比較的小さいことがわかる。これに対して $\bar{m}^*$ が６

表５．２　最小中央安全率と初通過破壊確率との関係

$\bar{m}^*$ \ δ_s	0	0.05	0.10	0.15	0.20
3	5.6×10^{-2}	6.1×10^{-2}	7.6×10^{-2}	1.0×10^{-1}	1.4×10^{-1}
4	1.7×10^{-3}	2.3×10^{-3}	5.0×10^{-3}	1.2×10^{-2}	2.9×10^{-2}
5	2.0×10^{-5}	4.0×10^{-5}	2.1×10^{-4}	1.4×10^{-3}	6.8×10^{-3}
6	1.2×10^{-7}	3.6×10^{-7}	8.3×10^{-6}	1.9×10^{-4}	2.0×10^{-3}

の場合にはその変動がかなり大きくなっている。したがって，そのような場合には，破壊確率の評価に際して，材料強度のばらつきに対する慎重な配慮が必要になる。

２）材料強度の確率分布形の影響

図５・９は材料強度の確率分布と破壊確率との関係を表したものである。強度の変動係数と最小中央安全率がともに大きいときには，強度の分布を正規分布と仮定するか，対数正規分布とみなすかによって，破壊確率の推定値にかなり大きな差異が認められる。しかし δ_s が 0.10 以下で，かつ $\bar{m}^*$ も５を下回るような領域では，対数正規分布と明確に判断できる統計的資料がある場合にはともかく，そうでない場合には，若干簡便であるという理由によって，正規分布に従うものとして破壊確率を評価するのが得策と考える。以下では強度が正規分布に従うものとして考察をおこなうが，その結果は対数正規分布にたいしても定性的に成立するものである。

３）減衰定数の影響

振動系の減衰特性は応答値に強い影響を与えるが，われわれにとって興味深いのは，それがどのように系の信頼性に影響するかという問題である。図５．10はそれに対する解答を与えてくれる。同図（ａ）は振動系がＴＹＰＥ　Ａの外力を受ける場合の破壊確率と材料強度の平均値との関係を示したものであり，同図（ｂ）はＴＹＰＥ　Ｂの外力に対する結果である。ただし，いずれも強度の変動係数は 0.10としている。

これらの図より，固有振動数および強度の確率特性（確率分布形と変動係数）の等しい振動系に形状関数が等しい非定常不規則外力が作用するときの破壊確率と減衰定数との関係を一般的に論ずることが

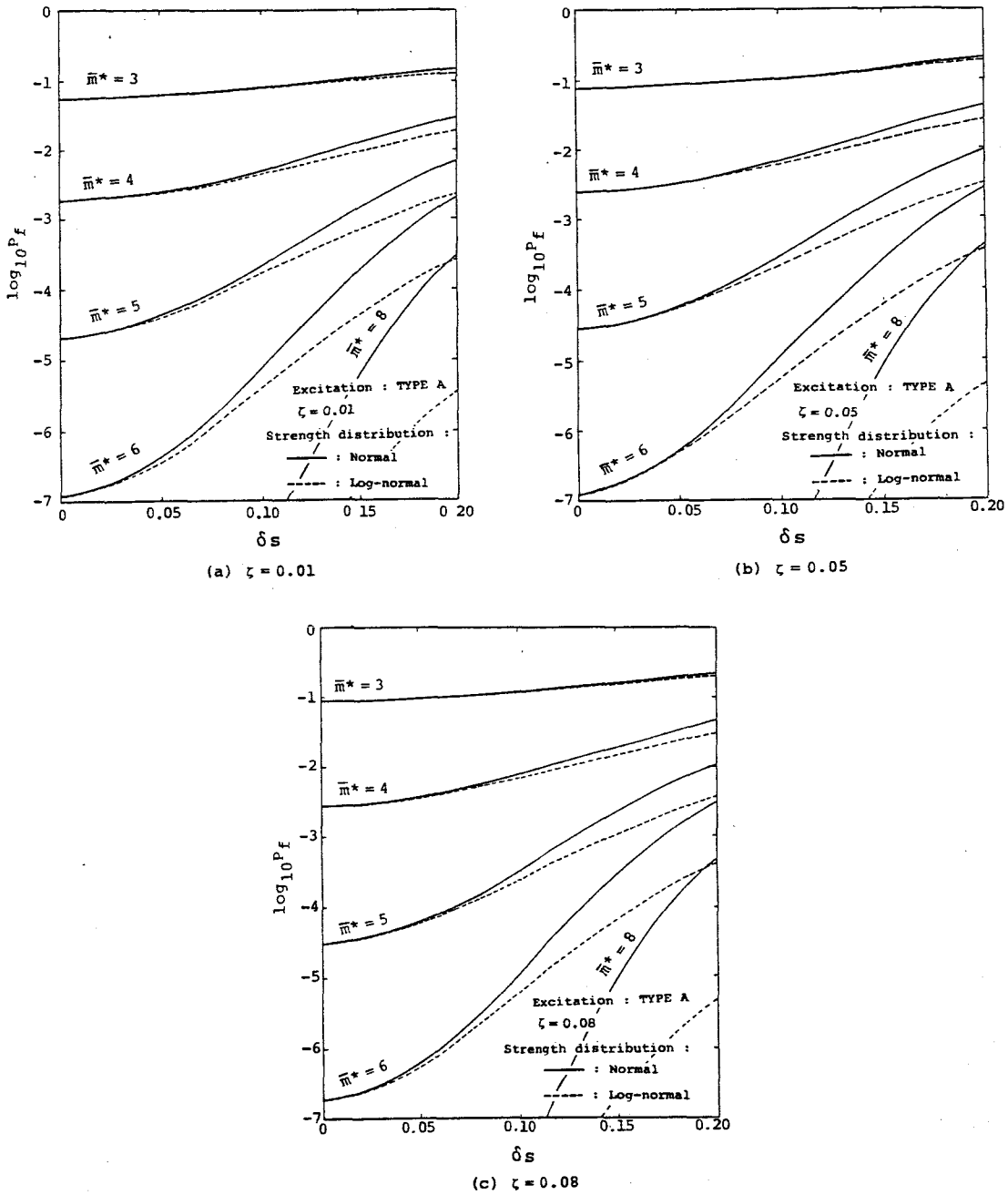


図５．９　材料強度の確率分布形による初通過破壊確率の差異

できる。たとえば同図（ａ）より，$\bar{S}/cC_1\sqrt{G_0}$ が 0.25(s$^{3/2}$) 程度であれば，ζ =0.08の振動系と ζ =0.05の振動系の破壊確率には，破壊確率が１×（10^{-3}～10^{-4}）の領域で約１オーダーの差があることが理解できる。

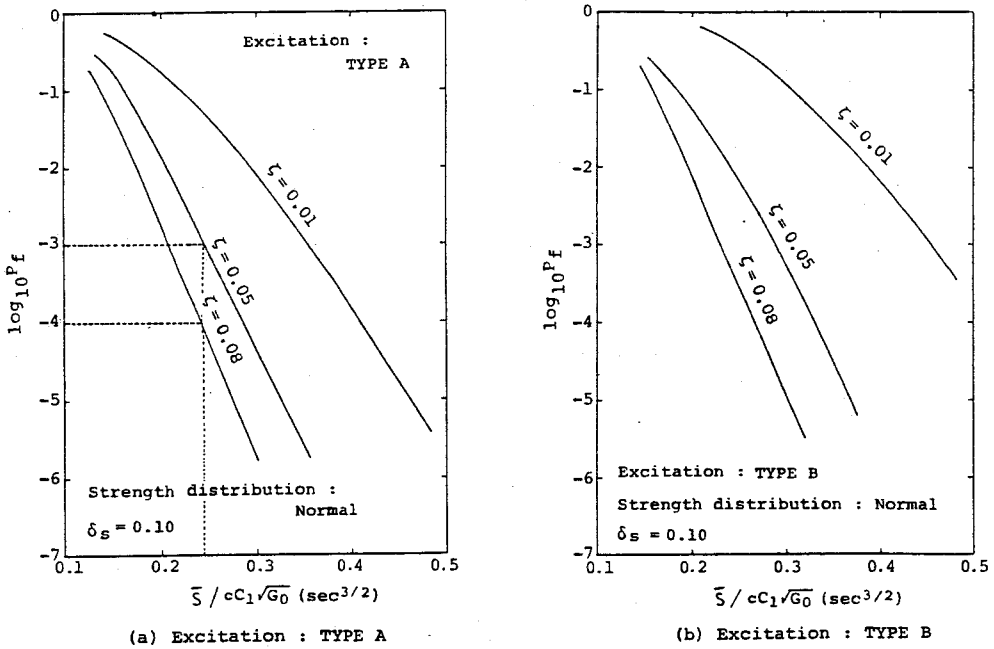


図５．10　振動系の減衰性と初通過破壊確率との関係

４）外力の形状関数の影響

振動系の応答値は，たとえ形状関数のピーク値やパワースペクトルの等しい外力であっても，形状関数間的特性によって大きく異なる場合がある。その影響が破壊確率に及んでゆくことは当然であるが，ＴＹＰＥ　ＡとＴＹＰＥ　Ｂの外力に対する破壊確率と $\bar{S}/cC_1\sqrt{G_0}$ との関係を示した図５．11はそのことを定量的に示している。たとえば ζ =0.01に対する同図（ａ）により，ＴＹＰＥ　Ａの外力に対しては破壊確率が1 ×10^{-4}である振動系も，形状関数の時間変化の特性のみが異なるＴＹＰＥ　Ｂの外力に対しては，それが4 ×10^{-3}程度に増大していることがわかる。さらに同図（ａ）～（ｃ）の図を互いに比較すれば，減衰定数の小さい振動系ほど，外力の形状関数によって信頼性が大きく変動することが理解できる。

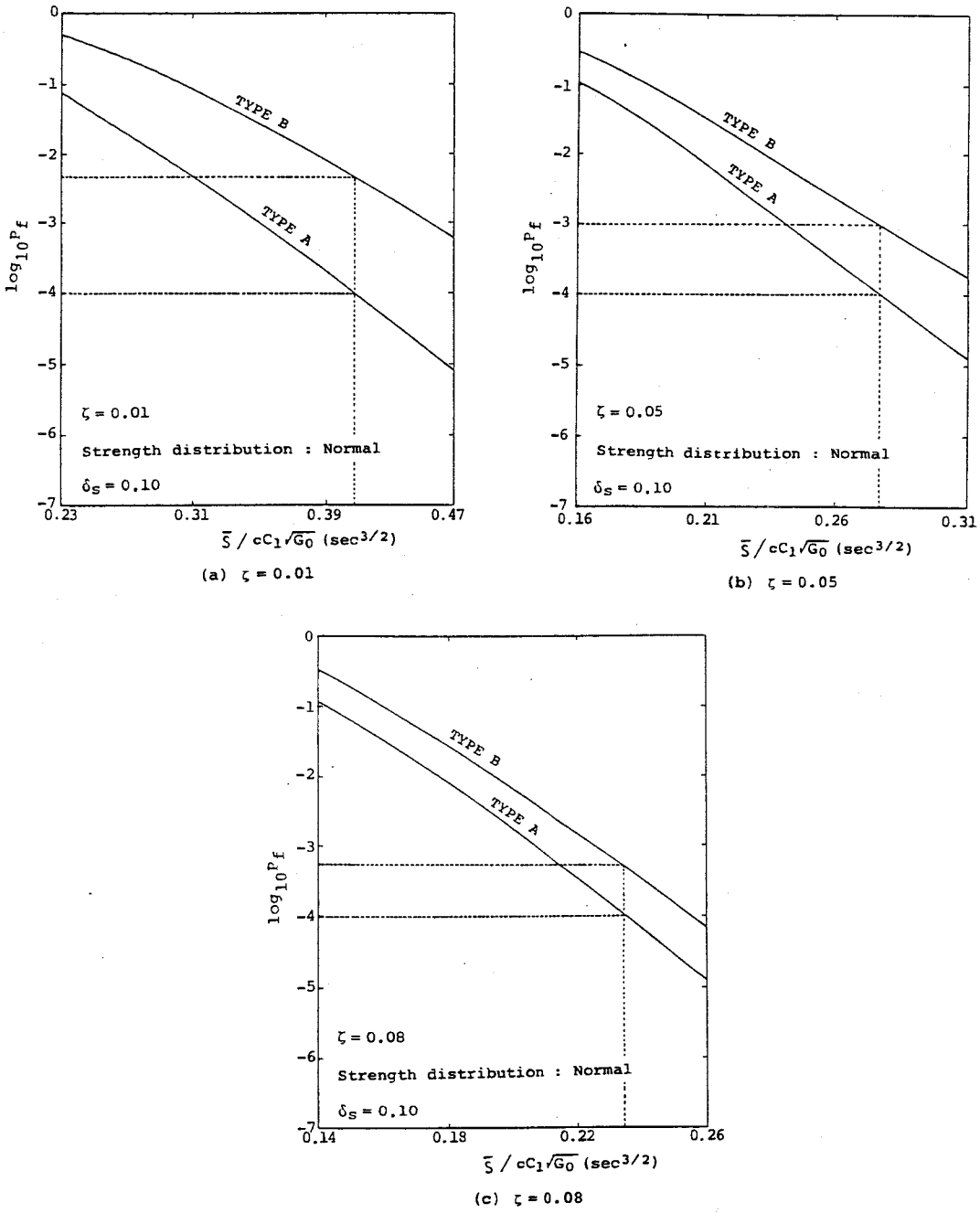


図５．11　非定常外力の形状関数と初通過破壊確率との関係

5．3．5　信頼性設計における材料強度のばらつきの影響

前述のように，非定常不規則外力を受ける構造物の信頼性は，厳密には $\bar{m}^*$ のみでなく，$\bar{m}(t)$ に関係する。しかし設計の初期の段階では，許容破壊確率 $P_{f,a}$（栗林・田崎[15]によれば，“社会的に受忍されうる危険率”）に対応する最小中央安全率（以下 $\bar{m}_a^*$ とする）を安全性水準を示す1つの指標とすることが考えられる。

図5．12は，減衰定数が0.01，固有円振動数が2π（rad/s）の振動系に，TYPE　Aの外力が作用するときの $\bar{m}_a^*$ と δ_s との関係を $P_{f,a}$ をパラメーターとして描いてものである。この図より，ある適当な許容破壊確率を設定することにより，材料強度の変動係数に応じた $\bar{m}_a^*$ を決定することができる。定義により $\bar{m}^*=\bar{S}/\sigma_{x,max}$ であるから，$\sigma_{x,max}$ が $\bar{S}/\bar{m}_a^*$ を超過しないよう部材断面を設計すれば振動系はあらかじめ設定された信頼性をほぼ有することになる。

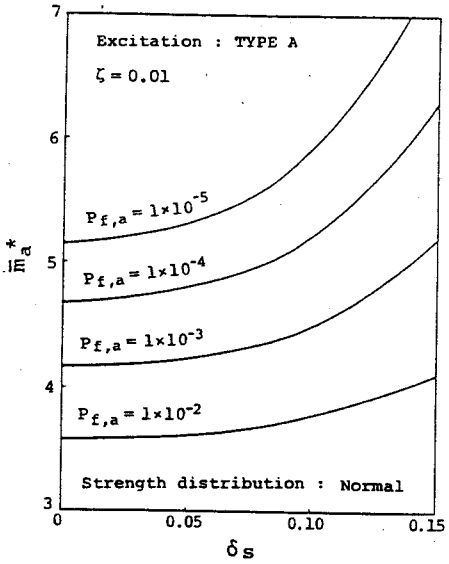


図5．12　許容破壊確率と所要最小中央安全率との関係

次に材料強度のばらつきが $\bar{m}_a^*$ に及ぼす影響について考えてみる。表5．3はいずれもTYPE Aの外力に対する $P_{f,a}$ と δ_s および $\bar{m}_a^*$ との関係を示したものである。いま同表（a）（ζ = 0.01）より，$P_{f,a}$ =1 ×10^{-2}とすれば δ_s =0.0 のとき $\bar{m}_a^*$ =3.58，δ_s =0.10 のとき $\bar{m}_a^*$ = 3.78であることがわかる。これより強度のばらつきがあまり $\bar{m}_a^*$ に影響していないといえよう。一方 $P_{f,a}$=1 ×10^{-4}と設定すれば，それらはそれぞれ 4.67 ，5.22 と両者の差異は大きくなっている。もし変動係数が15％にも達すれば，その差はさらに拡がり，ばらつきの弊害が大きくクローズアップされる。したがって高信頼度が要求される構造設計においては，信頼度の推定に際して，材料強度のばらつきを正確に評価しなければならないと同時に，ばらつきをできるだけ小さくするような対策が，経済上の見地から特に要求される。

表5．3　許容破壊確率と所要最小中央安全率 $\bar{m}_a^*$ との関係

(a)　ζ = 0.01

$P_{f,a}$ \ δ_s	0	0.05	0.10	0.15
1×10^{-2}	3.58	3.62	3.78	4.11
1×10^{-3}	4.16	4.23	4.51	5.20
1×10^{-4}	4.67	4.80	5.22	6.38
1×10^{-5}	5.13	5.31	5.93	7.76

表5．3　（つづき）

(b) $\zeta = 0.05$

$P_{f,a}$ \ δ_s	0	0.05	0.10	0.15
1×10^{-2}	3.67	3.72	3.88	4.27
1×10^{-3}	4.23	4.31	4.63	5.33
1×10^{-4}	4.73	4.87	5.33	6.51
1×10^{-5}	5.13	5.31	5.93	7.76

(c) $\zeta = 0.08$

$P_{f,a}$ \ δ_s	0	0.05	0.10	0.15
1×10^{-2}	3.69	3.73	3.93	4.31
1×10^{-3}	4.24	4.32	4.65	5.38
1×10^{-4}	4.74	4.88	5.36	6.60
1×10^{-5}	5.21	5.39	6.09	8.04

5．3．6　材料強度が保証される場合の信頼性向上効果

第1章でも述べたように，載荷試験は理論や計算の妥当性を判断するうえでの貴重な資料を提供するとともに，構造部材の強度に保証を与え，信頼度を設計時よりも向上させるという2つの目的を有していると考えられる。この信頼性向上効果は，図5．13によって定量的に把握することができる。いずれも減衰定数が 0.05 の振動系にＴＹＰＥ　Ａの外力が作用するものとしている。同図（ａ），（ｂ）は材料強度の変動係数がそれぞれ 0.10 および 0.15 に対する結果である。図中の κ_l は材料強度の下限を決めるパラメーターである。設計時には強度の下限が不明であるので，$\kappa_l = \infty$として振動系の破壊確率を推定せざるをえない。これに対して $\kappa_l = 1.0$ あるいは 2.0に対する曲線が，製品・載荷試験後の破壊確率を与える。図より最小中央安全率の値が大きいほど，すなわち設計時に高信頼度が要求される場合ほど，信頼性向上効果が大きいことがわかる。また図（ａ）と（ｂ）を比較すれば，材料強度のばらつ　きが大きいときほどその効果が著しいことは明らかである。

従来の構造物の信頼性に関する研究は，一部の研究[16),17)] を除けば，そのほとんどが設計時における信頼度を論じたものである。しかし社会あるいは世人にとって問題になるのは，構造物が完成し，供用が開始された後の構造信頼性であろう。したがってここで取上げた信頼性向上効果，あるいは逆に構造物の耐用期間中における材料の劣化等に伴う信頼性の低下[18)] に関する問題を究明する意義は大きいものと思われる。

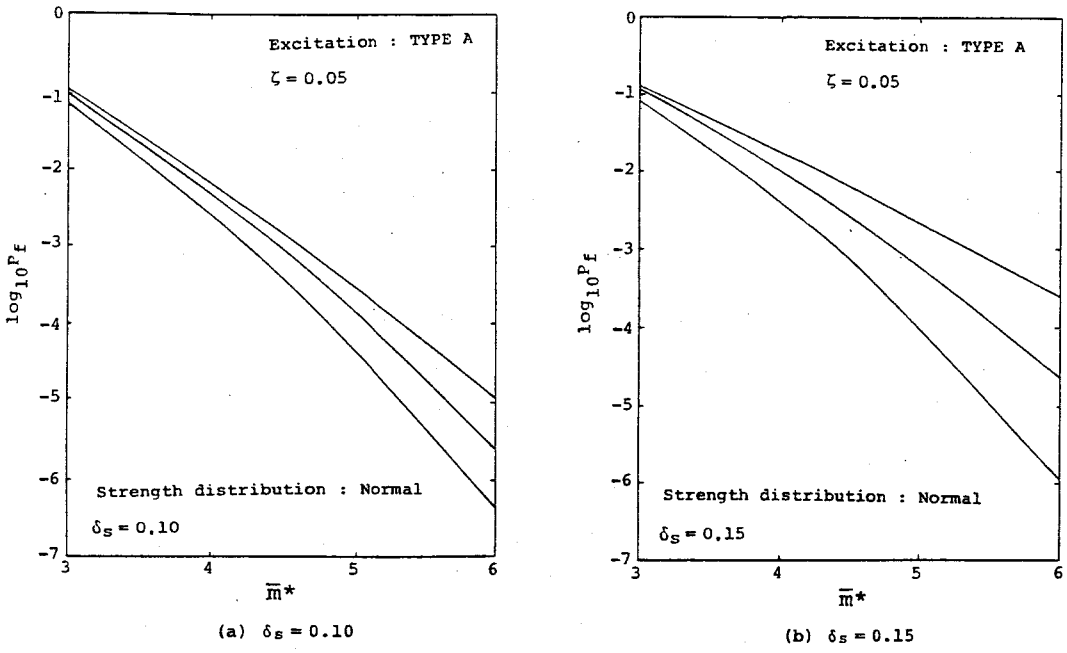


図５．13　製品・載荷試験による信頼性向上効果

５．５　結　言

非定常不規則変動外力を受ける振動系の初通過破壊確率に関し，特記すべき研究成果は次のとおりである。

（１）両近似解法－応答過程による方法および包絡線過程による方法－による初通過破壊確率の推定値の差異は，定常問題の場合に比べるとかなり小さい。したがって，振動系の減衰定数が小さい場合にも幅広く応答過程による方法を利用することができる。

（２）非定常外力を表す形状関数の時間的な変動特性により振動系の初通過破壊確率にかなり大きな差異が生じる。この傾向は系の減衰定数が小さいときほど著しく，したがって減衰定数の小さい構造物の信頼性を議論する場合には，非定常外力のモデル化について慎重な検討が必要である。

さらに非定常外力を受ける振動系に関しても，新たに最小中央安全率を定義することによって，定常外力に対する初通過破壊確率に関する研究によって得られたものと，定性的にはほぼ同様の知見が得られた。すなわち，

（３）材料強度の平均値と非定常応力応答の最大r.m.s.値との比である最小中央安全率，あるいは材料強度の変動係数が大きい場合には，強度のばらつきが振動系の破壊確率に非常に強い影響を及ぼす。したがって高信頼度が要求される構造設計においては，強度のばらつきに対する配慮を欠かせない。

（４）材料強度の確率分布については，対数正規分布に従うとする統計的根拠に乏しい場合には，安全

側であるとの理由によって，正規分布に従うものとして破壊確率を評価するのが望ましい。

（５）構造物の動的設計において強度のばらつきが大きい材料を使用する場合には，断面性能を高める割には信頼度が向上しないので，非常に不経済である。

（６）製品・載荷試験による構造物の信頼性向上効果は，設計時の設定信頼度が高く，材料強度のばらつきが大きいときほど著しい。

（７）最小中央安全率を用いて，信頼性理論に基づく部材断面の動的設計へのアプローチが提示された。

参 考 文 献

1） 小堀鐸二・南井良一郎：非定常ランダム応答の等価線形化解法，京都大学防災研究所年報，No.10-A, pp.235-260, 1967 年３月.

2） Yamada, Y. and Takemiya, H. :Statistical Estimation of the Maximum Response of Structures Subjected to Earthquake Motion, Proceedings of Japan Society of Civil Engineers, No.182, pp.115-132, Oct., 1970.

3） Rice, S.O. :Mathematical Analysis of Random Noise, Selected papers on noise and stochastic processes, ed. by Wax, N., Dover, N.Y., pp.136-246, 1955.

4） Yang, J-N :Nonstationary Envelope Process and First Excursion Probability, Journal of Structural Mechanics, Vol.1, No.2, pp.231-248, 1972.

5） Cramer, H. and Leadbetter, M.R. :Stationary and Related Stochastic Processes, John Wiley & Sons, Inc., 1967.

6） Shinozuka, M. and Sato, Y. :Simulation of Random Processes, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.93, No. EM1, pp.11-40, Jan., 1967.

7） Lennox, W.C. and Fraser, D.A. :On the First-Passage Distribution of a Nonstationary Narrow-Band Stochastic Process, Journal of Applied Mechanics, Vol.41, No.3, pp.793-797, Sept., 1974.

8） Corotis, R.B., Vanmarcke, E.H. and Cornell, C.A. : First-Passage of Non-stationary Random Processes, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.98, No. EM2, pp.401-414, Apr., 1972.

9） Lin Y.K. :Nonstationary Shot Noise, Journal of Acoustical Society of America, Vol.36, No. 1, pp.82-84, Jan., 1964.

10） Priestley, M.B. :Power Spectral Analysis of Non-stationary Random Processes, Jounal of Sound and Vibration, Vol.6, No.1, pp.86-97, 1967.

11） Komatsu, S., Kobayashi, H. and Nakayama, T. :Safety and Reliability of Steel Tower

against Wind, Technical Reports of the Osaka University, Vol.20, No. 972, pp.823-845, 1970.

12) Cartwright, D.E. and Longuet-Higgins, M.S. :The Statistical Distribution of the Maxima of a Random Function, Proceedings of Royal Society, A237, pp.212-232, 1956.

13) 西村　昭：鋼材の機械的性質のばらつきについて，JSSC, Vol.5, No.48, pp.68-74, 1969年.

14) Lyon, R.H. :On the Vibration Statistics of a Randomly Excited Hard-spring Oscillator II, Jounal of Acoustical Society of America, Vol.33, No.10, pp.1395-1403, 1961.

15) 栗林栄一・田崎忠行：サイズミックリスクを考慮した経年変化をともなう構造物の設計手法の適用例，土木学会第31回年次学術講演会講演概要集第１部， pp.386-387, 1976 年10月.

16) Konishi, I., Kitagawa, T. and Katsuragi, M. :Structural Reliability Analysis Considering Strength Assurance Level, Reliability Approach in Structural Engineering, pp.91-110, Maruzen Co.Ltd., Tokyo, 1975.

17) Fuzino, Y. and Lind, N.C. :Proof-Load Factors and Reliability, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.103, No.ST4, pp.853-870, Apr., 1977.

18) Kameda, H. and Koike, T. : Reliability Analysis of Deteriorating Structures, Reliability Approach in Structural Engineering, pp.61-76, Maruzen Co.Ltd., Tokyo, 1975.

第6章　複素変調法による非定常スペクトル解析法

6．1　緒　言

前章では，振幅特性を与える形状関数と周波数特性を表す定常確率過程の積によってモデル化できる非定常不規則外力に対する振動系の初通過破壊確率について考究した。しかし，そのような分離過程でモデル化できる非定常外力は，むしろ特殊なものであると考えておかなければならない。これに対してここからの内容は，形状関数と定常確率過程に分離できない，いわゆる非分離過程によって記述される非定常不規則外力に対する初通過破壊問題に関するものである。

まず本章では，非分離過程に従う非定常不規則外力の非定常性を解明するための非定常スペクトル解析法について論述する。

従来非定常過程の非定常性の把握を目的として，発展スペクトル（evolutionary spectrum），物理スペクトル（physical spectrum ）などの非定常スペクトル理論や，マルチフィルタリングの原理に基づいた非定常スペクトル解析法が提案され，たとえば地震動に対する解析が数多くなされてきた[1)~5)]。ただし，地震動のもつ位相の非定常については，重要性を指摘されながらも[2)]，注目されることは少なかったように思われる。その理由としては，通常の耐震設計において，位相が応答に与える影響は小さいと考えられてきたこと，また従来の非定常スペクトル解析法が，位相の非定常性まで明確にできるような解析法ではなかったことなどが考えられる。

しかし，長大橋あるいはライフラインシステムの耐震設計においては，入力地震動のもつ位相差が構造物に対して不利に作用することも指摘されており，位相差を考慮できる地震応答解析法も提案されている[6)]。したがって，今後設計用地震動を確率過程としてモデル化するためには，地震動記録から，周波数特性や振幅特性のみではなく，位相特性をも明らかにできる非定常スペクトル解析法を確立しておくことが必要である。

さて，ここでは，物理的解釈が容易で，その定義方法も定常確率過程の拡張として理解しやすい，Priestley の発展スペクトル理論[7),8)] に，J.W.Tukey によって開発された複素変調法（complex demodulation methed ，以下ＣＤ法と略記する）[9)]を適用して，振幅，周波数および位相の非定常を考慮できる非定常スペクトル解析法を提案する。なおＣＤ法は，通信工学の分野ではヘテロダイン法としてよく知られている非定常周波数解析の一手法で，これまで脳波の分析などに適用された例がある[10)]。

以下ではまずＣＤ法を用いた非定常スペクトル解析法を定式化し[11)]，次に本解析法に適するフィルターの選択条件を示す。そして解析例として地震動をとり上げ，選択条件にうまく適合するOrmsbyのフィルター[12)] を用いて解析した実際の地震動記録の非定常スペクトルと，時間的に変化する位相特性を提示する。さらに本解析法の有効性を，解析結果を用いて求めた再合成波形と原波形との比較によって示すとともに，従来無視されることの多かった位相の非定常性を考慮することの重要性を指摘する。た

だし，その地球物理学的意味については，現段階では言及していない。

なお定式化は一般的な非定常確率過程を想定しておこなっているが，実際の解析は１つのサンプル関数が対象である。具体的には，1968年の十勝沖地震の際に室蘭で得られた地震動記録のＮＳ成分に対するものである。

６．２　複素変調法による非定常パワースペクトル密度関数と位相の算定法

６．２．１　非定常パワースペクトル密度関数の定義

まず非定常確率過程　$x(t)$ の非定常パワースペクトル密度関数（以下，簡単に非定常スペクトルという）を，Priestley の発展スペクトル理論によって定義する。

いま　$x(t)$ が，時間および周波数に対して，ゆるやかに変化する確定的な変調関数（modulating function）$A(t,\omega)$　によって，

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(t,\omega)e^{i\omega t}dX(\omega) \tag{6.1}$$

と表されるものとする。ただし，式中の $X(\omega)$ は次式を満たす直交関数である。

$$E[dX(\omega_1)dX^*(\omega_2)]=\begin{cases}dG(\omega);(\omega=\omega_1=\omega_2)\\0;(\omega_1\neq\omega_2)\end{cases} \tag{6.2}$$

ここに，$X^*(\omega)$は $X(\omega)$ の共役複素数である。

このとき，非定常スペクトル　$g_x(t,\omega)$ は次式のように定義される。

$$g_x(t,\omega)d\omega=|A(t,\omega)|^2dG(\omega) \tag{6.3}$$

６．２．２　複素変調法（ＣＤ法）

ＣＤ法は，ある周波数に対する振幅（包絡線）および位相の時間的変化を算出できる点にその特徴がある。以下，その概念を簡単に説明する。

いま，単一円周波数 ω_0 をもち，振幅 $a(t)$ および位相 $\varphi(t)$ がいずれも時間 t の関数で与えられるような時間関数　$u(t)$ を考える。

$$u(t)=a(t)\cos(\omega_0 t+\varphi(t)) \tag{6.4}$$

式（６．４）の両辺に，　$\cos\omega_0 t$　あるいは　$\sin\omega_0 t$　を掛けて三角函数の加法定理によって各式の右辺を整理すれば，

$$\left.\begin{aligned}u(t)\cos\omega_0 t&=\frac{1}{2}a(t)\{\cos(t)+\cos(2\omega_0 t+\varphi(t))\}\\u(t)\sin\omega_0 t&=\frac{1}{2}a(t)\{-\sin\varphi(t)+\sin(2\omega_0 t+\varphi(t))\}\end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

となる。さらに式（６．５）にローパスフィルター処理 F を施して，式（６．５）における $2\omega_0$ の

円周波数成分をカットし，　0 の円周波数成分のみを取り出す。すなわち，

$$\left.\begin{aligned} p(t,\omega_0) &= F(u(t)\cos\omega_0 t) = \frac{1}{2}a(t)\cos\varphi(t) \\ q(t,\omega_0) &= F(u(t)\sin\omega_0 t) = -\frac{1}{2}a(t)\sin\varphi(t) \end{aligned}\right\} \qquad (6.6)$$

式（6．6）より，次式が成立することがわかる。

$$\left.\begin{aligned} a(t) &= 2\{p(t,\omega_0)^2 + q(t,\omega_0)^2\}^{\frac{1}{2}} \\ \varphi(t) &= -\arctan\{q(t,\omega_0)/p(t,\omega_0)\} \end{aligned}\right\} \qquad (6.7)$$

なお　$\varphi(t)$ は，$-\pi \leqq \varphi(t) \leqq \pi$　で，　$q(t,\omega_0)$　と　$-\sin\varphi(t)$　とが同符号になるようにとるものとする[13]。

以上のように，原波形　$u(t)$ に，式（6．5）と式（6．6）で表される処理を施すことにより，式（6．7）によって単一円周波数 ω_0 をもつ関数　$u(t)$ の振幅　$a(t)$ および位相　$\varphi(t)$ の時間的変化を知ることができる。

さて地震動はもちろん，実際の物理的現象あるいは社会的現象は，ほとんどの場合単一周波数成分のみではなく，ある周波数帯域をもつ関数によって表現される。したがって，そのような問題への適用方法を考えておかなければならない。

その場合には，関数にあらかじめ中心円周波数が　ω_0 のバンドパスフィルターを掛けて得られる新たな関数に対しＣＤ法を適用し，もとの関数の　ω_0 成分に対する振幅ならびに位相を検出すればよい。すなわち，具体的には以下に示すとおりである。

まず，　N 個の周波数成分を含む関数を考え，それが次式によって表されるものとする。

$$v(t) = \sum_{i=1}^{N} a_{\omega_i}(t)\cos(\omega_i t + \varphi_i(t)) \qquad (6.8)$$

式（6．8）で与えられる　$v(t)$ に，中心円周波数が　ω_j　の狭帯域バンドパスフィルターを掛けると，新たな関数 $v_j(t)$　が得られ，

$$v_j(t) = \sum_{i=j-m}^{j+m} a_{\omega_i}(t)\cos(\omega_i t + \varphi_i(t)) \qquad (6.9)$$

と表せる。ここで適切な狭帯域バンドパスフィルターを用いることにすれば，式（6．9）の　$v_j(t)$ は，近似的に次式のようになる。

$$v_j(t) \simeq a_{\omega_j}(t)\cos(\omega_j t + \varphi_j(t)) \qquad (6.10)$$

式（6．10）の　$v_j(t)$ に対して，式（6．5）～式（6．7）で示した処理を施すと，関数　$v(t)$ の　ω_j の円周波数成分に対する振幅　$a_{\omega_j}(t)$　と位相　$\varphi_j(t)$ が得られる。以後，　ω_j を着目円周波数（あるいは単に着目周波数）と称する。

6．2．3　CD法による非定常スペクトルおよび位相の算定

式（6．1）において，

$$dF(t,\omega)=A(t,\omega)dX(\omega) \tag{6.11}$$

とおくと，次式が得られる。

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}dF(t,\omega) \tag{6.12}$$

このとき式（6．3）より，　$x(t)$ の非定常スペクトルは

$$g_x(t,\omega)d\omega=E[|dF(t,\omega)|^2] \tag{6.13}$$

と表せる。

さて，　$dF(t,\omega)$ の実部，虚部をそれぞれ　$dF_R(t,\omega)$　，$dF_I(t,\omega)$　と書けば，式（6．12）は

$$\begin{aligned}x(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}(\cos\omega t+i\sin\omega t)\{dF_R(t,\omega)+idF_I(t,\omega)\}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\{dF_R(t,\omega)\cos\omega t-dF_I(t,\omega)\sin\omega t\}\\&\quad+i\int_{-\infty}^{\infty}\{dF_I(t,\omega)\cos\omega t+dF_R(t,\omega)\sin\omega t\}\end{aligned} \tag{6.14}$$

となる。しかるに　$x(t)$ は実関数であるから，式（6．14）の虚部は0である。すなわち　$dF_R(t,\omega)$ と　$dF_I(t,\omega)$　は　ω に関し，それぞれ偶関数および奇関数となる。したがって式（6．14）は，

$$\begin{aligned}x(t)&=2\int_{0}^{\infty}\{dF_R(t,\omega)\cos\omega t-dF_I(t,\omega)\sin\omega t\}\\&=2\int_{0}^{\infty}|dF(t,\omega)|\cos\{\omega t+\varphi(t,\omega)\}\end{aligned} \tag{6.15}$$

となる。ただし　$\varphi(t,\omega)=\arctan\{dF_I(t,\omega)/dF_R(t,\omega)\}$　であり，　$\varphi(t,\omega)$ は，　$-\pi\leqq\varphi(t,\omega)\leqq\pi$　で $dF_I(t,\omega)$　と同符号になるように選ぶ。

ここで，式（6．15）を近似的に次式のように表す。

$$x(t)\simeq 2\sum_{i=1}^{N}|dF(t,\omega_i)|\cos\{\omega_i t+\varphi(t,\omega_i)\} \tag{6.16}$$

式（6．8）と式（6．16）には完全な対応関係があり，このことより，CD法によって式（6．16）の　$|dF(t,\omega_i)|$ と $\varphi(t,\omega_i)$ を求めうることがわかる。さらに　$|dF(t,\omega_i)|$　が求まれば，式　（6．13）に基づいて非定常スペクトルが得られる。ただしこれからは，$\omega>0$ の領域でのみ定義される非定常スペクトル，すなわち片側スペクトル　$f_x(t,\omega)$ を　$x(t)$ の非定常スペクトルと考えてゆくことにする。この場合，

$$f_x(t,\omega_i)\Delta\omega_i=2E[|dF(t,\omega_i)|^2] \tag{6.17}$$

となる。ただし　$\Delta\omega_i$　はバンドパスフィルターの帯域幅である。

以上，非定常確率過程　$x(t)$ に対する非定常スペクトル解析法について述べてきたが，1つの確定時

間関数 $x(t)$ についても，まったく同様のプロセスによって，その非定常スペクトル $f_x(t, \omega_i)$ と位相特性の時間的変化を求めることができる。すなわち非定常スペクトルについては，式（6．17）に対して，

$$f_x(t, \omega_i)\Delta\omega_i = 2|dF(t, \omega_i)|^2 \tag{6．18}$$

と考えればよい。ここでも，式（6．18）を強震記録の解析に適用している。

6．2．4　本解析で使用したフィルター

本解析では，以下の条件を考慮して，使用するフィルターを選定した。

i）バンドパスフィルターに対する条件

a）位相遅れがないこと

b）各バンドを通して得られたフィルター処理後の関数　$x_i(t)$　$(i=1\sim N)$ の，時刻　t における総和が，もとの関数　$x(t)$ に一致すること，すなわち次式が成立すること。

$$x(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i(t) \tag{6．19}$$

c）フィルター処理した周波数帯域が明確であること。

d）フィルターの帯域幅　$\Delta\omega_i$ を統一的に説明できること。

ii）ローパスフィルターに対する条件

a）位相遅れがないこと。

b）カットオフ周波数や遮断周波数が明確であること。

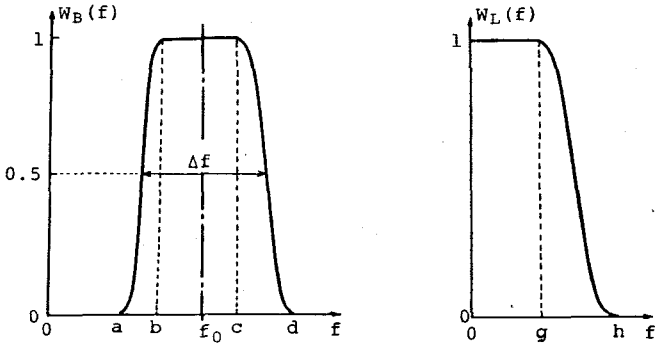
以上のような条件を満たすフィルターとして，図6．1に示すようなOrmsbyのフィルター[12]を用いた。まずバンドパスフィルターの周波数領域での重み関数　$W_B(f)$ は，周波数 f(Hz)を用いて，

$$W_B(f) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{f-a}{b-a}+1\right)\pi ; (a \leqq f \leqq b) \\ 1 \qquad\qquad\qquad\qquad ; (b \leqq f \leqq c) \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{f-c}{d-c}\right)\pi ; (c \leqq f \leqq d) \end{cases} \tag{6．20}$$

で与えられる。また時間領域での重み関数　$w_B(t)$ は $W_B(f)$ のフーリエ変換によって

$$w_B(t) = \frac{1}{2\pi t}\left(\frac{\sin 2\pi ct + \sin 2\pi dt}{1-4(d-c)^2t^2} - \frac{\sin 2\pi at + \sin 2\pi bt}{1-4(b-a)^2t^2}\right) \tag{6．21}$$

と表される。



（a）バンドパスフィルター　　（b）ローパスフィルター

図6．1　Ormsbyのフィルター

次に，ローパスフィルターの周波数領域での重み関数 $W_L(f)$ と時間領域における重み関数 $w_L(t)$ はそれぞれ以下に示すようである。

$$W_L(f)=\begin{cases}1 & ;(0\leqq f\leqq g)\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{f-g}{h-g}\right)\pi & (g\leqq f\leqq h)\end{cases} \tag{6．22}$$

$$w_L(t)=\frac{1}{2\pi t}\left(\frac{\sin 2\pi gt+\sin 2\pi ht}{1-4(h-g)^2t^2}\right) \tag{6．23}$$

6．3　数値解析

本解析法は，時間的あるいは空間的に非定常な変動特性を示す種々の現象に適用できるが，ここでは土木構造物に作用する非定常外力の中でも，もっとも代表的なものと考えられる，地震動の非定常解析について論及する。

6．3．1　使用した地震動記録

本解析で使用した地震動データは，1968年の十勝沖地震のときに室蘭で得られた地震波のNS成分であり，記録時間が90.11 秒，記録時間間隔が0.01秒のディジタル記録である。また最大加速度は図6．2に示すように，約205 ガルである。なお本研究では解析法の精度の検証に主眼を置いたので，解析はこの地震動のみに対しておこなった。

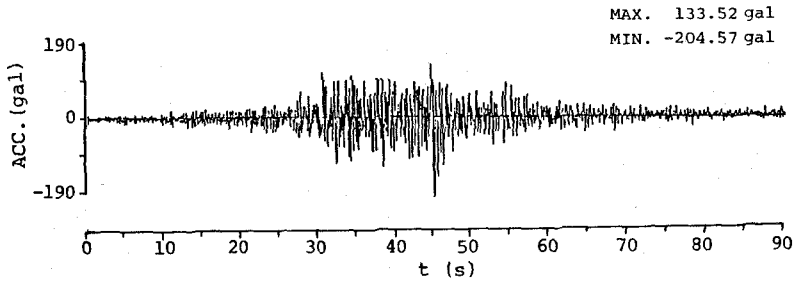


図6．2　室蘭地震波

6．3．2　解析した周波数帯域

地震動の特性を考えて，解析は0.1 ～11.0 Hz の周波数帯域でおこなった。そして表6．1に示す15個の周波数 f_0 (Hz)に着目し，各着目周波数に対する非定常スペクトルと非定常位相特性を算出した。各着目周波数を中心周波数とするバンドパスフィルター $W_B(f)$ の一部を図6．3に示す。なおフィルターの帯域幅 $\Delta\omega_i$ としては，図6．1（a）に示した周波数間隔 Δf を用いて， $\Delta\omega_i = 2\pi\Delta f_i$

表6．1　各バンドの中心周波数およびフィルターの重み関数の定数

No.	f_0 (Hz)	a (Hz)	b (Hz)	c (Hz)	d (Hz)	g (Hz)	h (Hz)
1	0.101	0.079	0.090	0.110	0.124	0.050	0.140
2	0.140	0.110	0.124	0.152	0.172	0.110	0.200
3	0.194	0.152	0.172	0.212	0.240	0.180	0.290
4	0.271	0.212	0.240	0.296	0.335	0.290	0.400
5	0.378	0.296	0.335	0.413	0.468	0.360	0.500
6	0.529	0.413	0.468	0.578	0.655	0.500	0.800
7	0.740	0.578	0.655	0.809	0.917	0.700	1.000
8	1.037	0.809	0.917	1.133	1.284	0.800	1.500
9	1.450	1.133	1.284	1.586	1.794	1.300	2.000
10	2.024	1.586	1.794	2.210	2.501	2.100	3.000
11	2.823	2.210	2.501	3.083	3.490	3.100	4.000
12	3.941	3.083	3.490	4.304	4.874	4.500	5.900
13	5.505	4.304	4.874	6.014	6.812	5.000	8.000
14	7.695	6.014	6.812	8.408	9.523	8.000	11.800
15	10.757	8.408	9.523	11.753	13.314	10.000	16.000

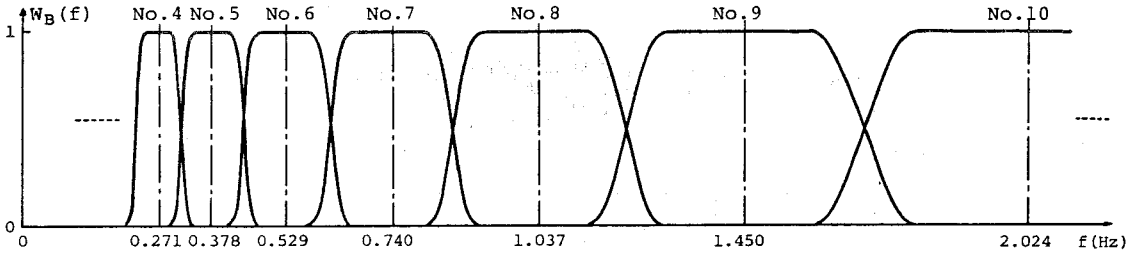


図6．3　解析に用いたバンドパスフィルター

と定めた。さらに中心周波数，すなわち着目周波数 f_0 は，各バンドパスフィルターの周波数領域における重み関数の重心とした。

さて図6．3のように設定したバンドパスフィルターが本解析に適したものであるかどうかは，原波形をフィルターに通して得られた波形と，その波形を利用してＣＤ法によって求めた非定常スペクトルと位相を用いて，後述する式（6．25）によって再構成した波形とを比較することにより判定できる。さらに0.1 Hz～11.0 Hz の帯域を15個の部分周波数帯域に分割して地震動の非定常性を議論することの妥当性については，原波形と，やはり後述する式（6．26）によって再合成した波形との比較によって検証できる。本研究ではさらに，原波形および再合成した波形を入力加速度として得られた両加速度応答スペクトルを比較して，その妥当性を検討することにした。

6．3．3　地震動の再合成

亀田は文献2)において，強震記録を解析して得られた非定常スペクトル $\bar{G}(t, \omega_i)$ を用いて，次式によって加速度波形を再合成する方法を示している。

$$x(t)=\sum_{k=1}^{m}\sqrt{2\bar{G}(t,\,2\pi k\Delta f)(2\pi\Delta f)}\cos(2\pi k\Delta ft+\varphi_k) \qquad (6.24)$$

ただし，φ_k は 0 ～ 2π (rad/s) の間で一様分布する乱数である。

これに対して本研究では位相の非定常性を考慮するため，まず

$$\tilde{x}_i(t)=\sqrt{2f_x(t,\,\omega_i)\Delta\omega_i}\cos\{\omega_i t+\varphi(t,\,\omega_i)\} \qquad (6.25)$$

によって，第 i 番目の着目周波数に対する波形を再構成し，さらに次式によって加速度波形を再合成した。

$$\tilde{x}(t)=\sum_{i=1}^{N}\tilde{x}_i(t) \qquad (6.26)$$

なお以下では $\tilde{x}_i(t)$ および $\tilde{x}(t)$ を，それぞれ部分周波数構成波形および再合成波形と称する[4)]。

6．3．4　解析結果と考察

まず図6．4に，本解析法に基づいて算出した室蘭地震波の非定常スペクトルと位相特性を示す。

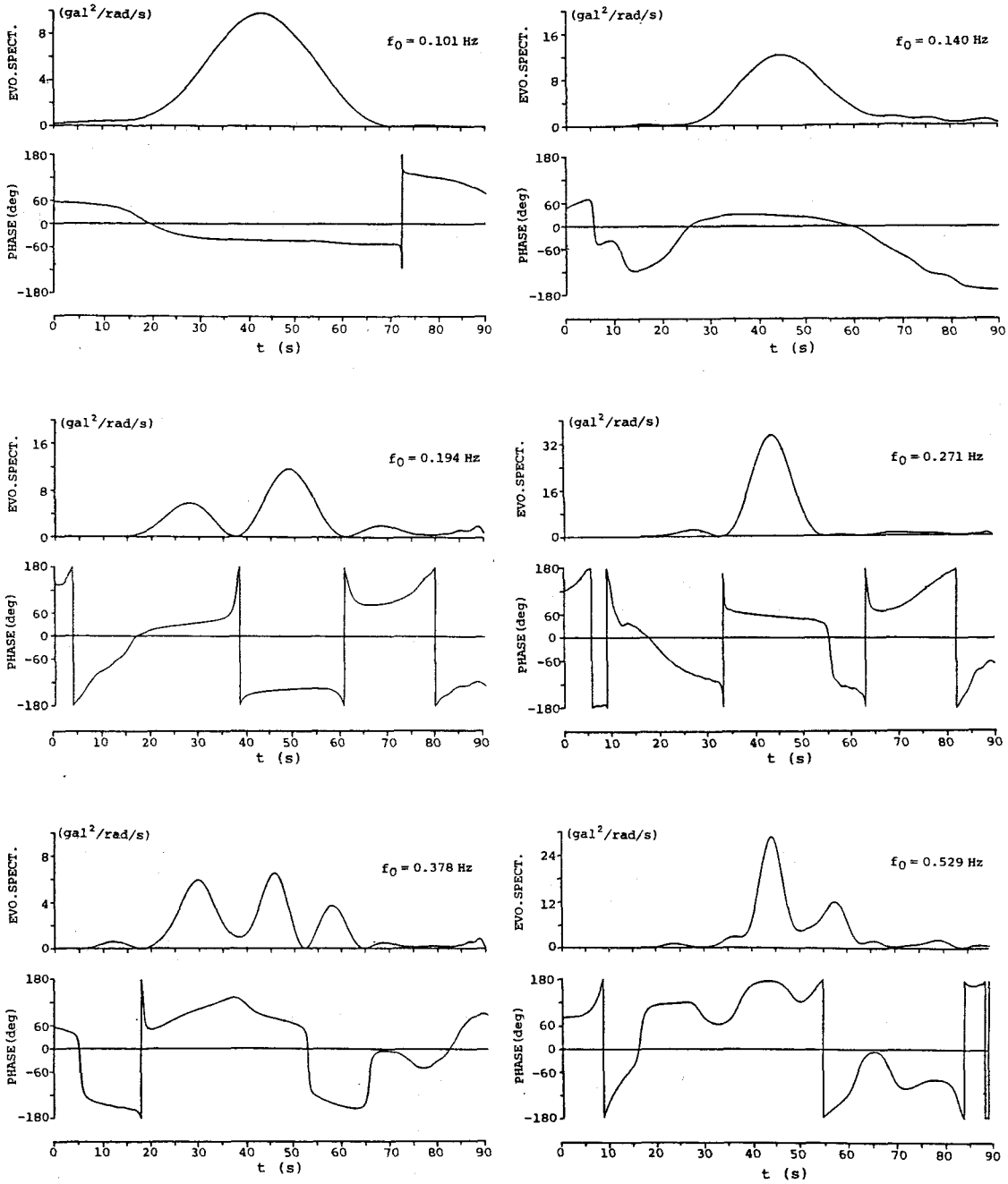


図6．4　室蘭地震波の非定常スペクトルおよび位相特性

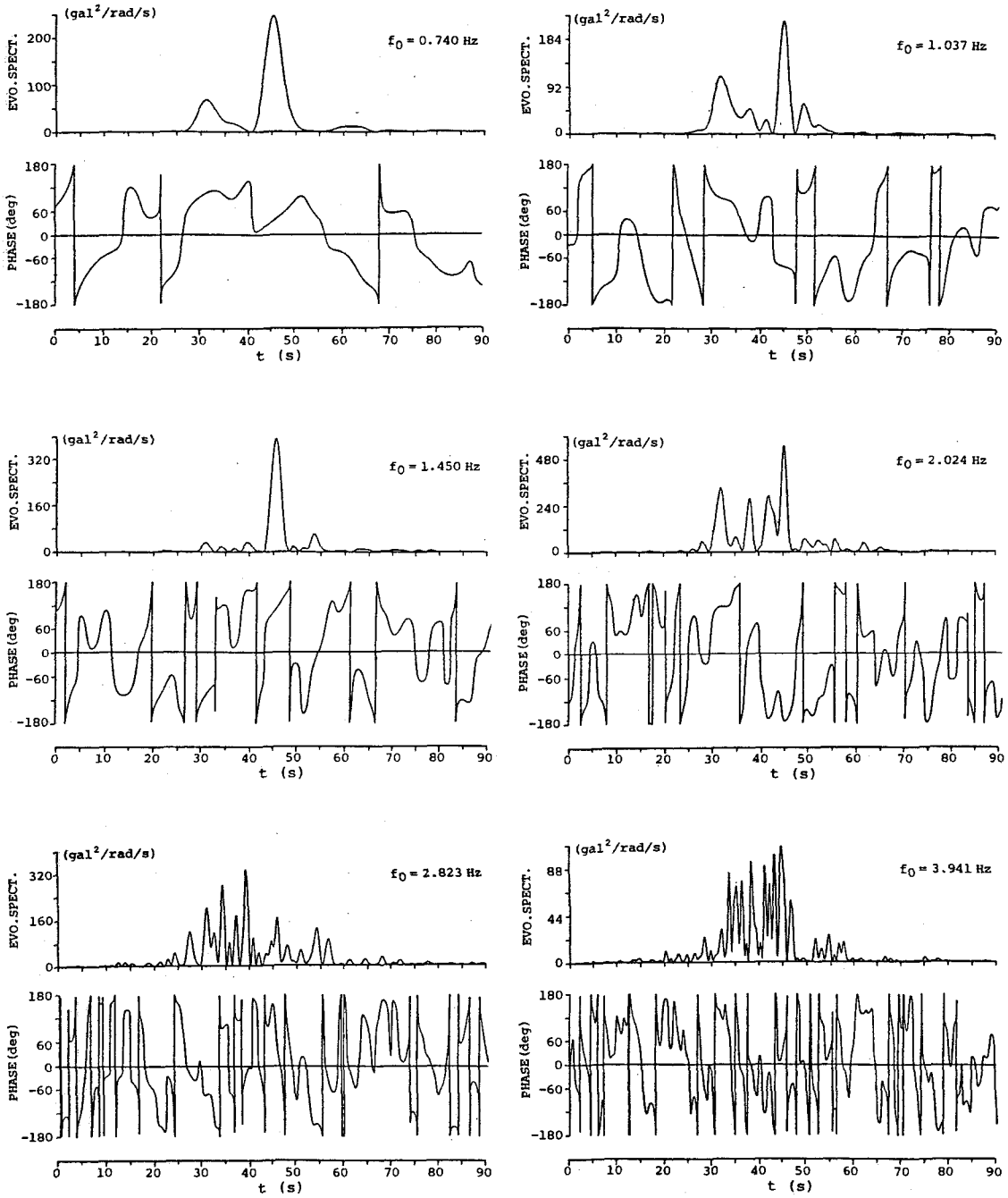

(gal²/rad/s)
EVO.SPECT.
f0 = 0.740 Hz
f0 = 1.037 Hz
f0 = 1.450 Hz
f0 = 2.024 Hz
f0 = 2.823 Hz
f0 = 3.941 Hz
PHASE (deg)
t (s)

図6．4 （つづき）

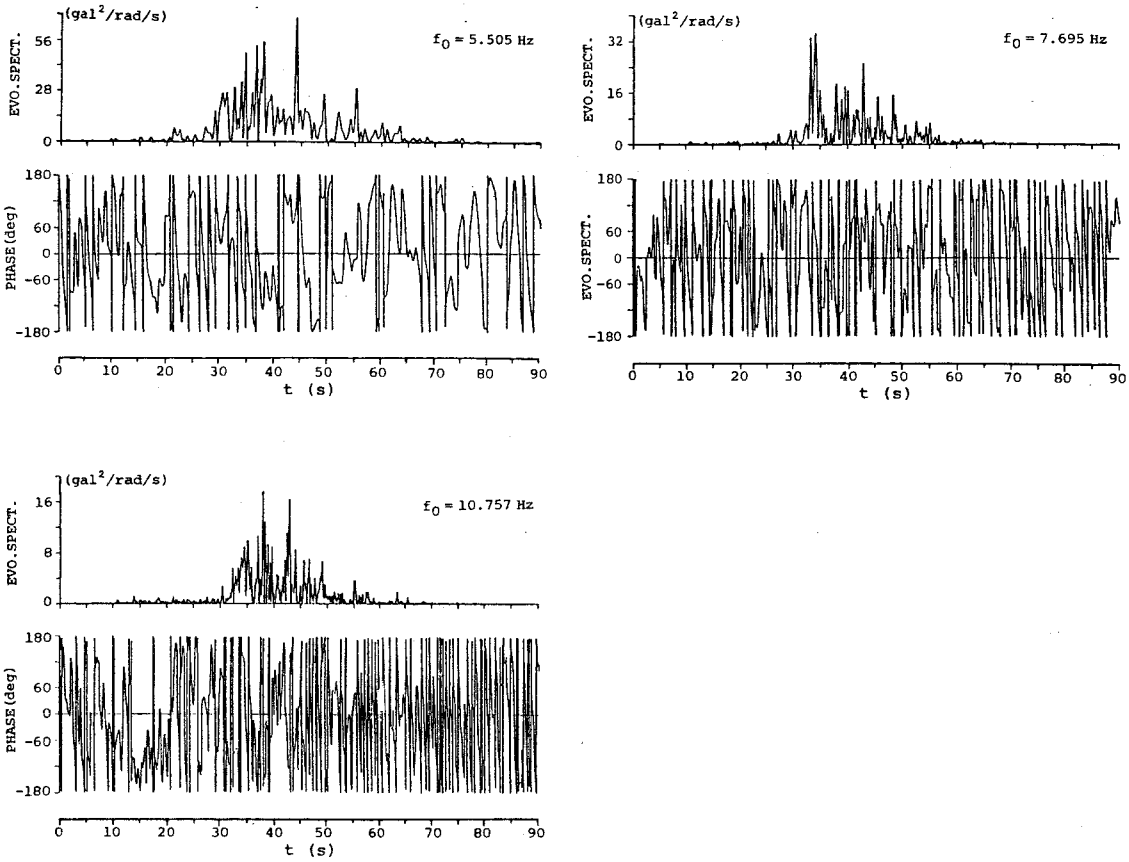
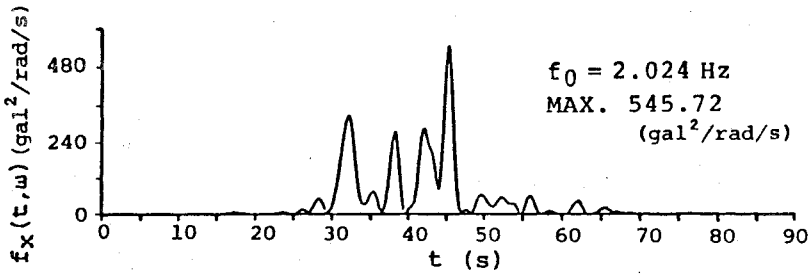


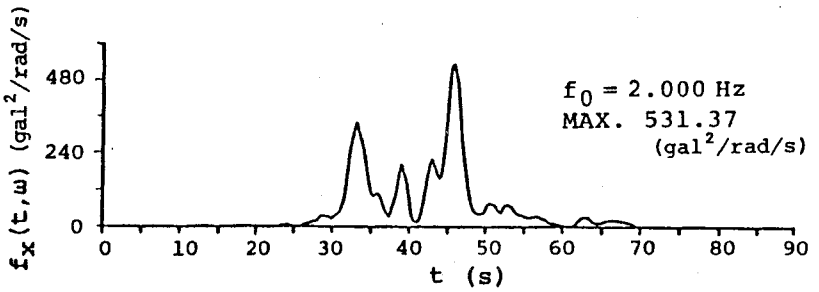
図6．4　（つづき）

図より，2.823 Hz，7.695 Hz，10.757 Hz を除く，ほとんどの中心周波数について45秒付近にスペクトルのピークが発生していることがわかる。また0.740 ～3.941 Hzの範囲のパワーが卓越していることも理解できる。また周波数が大きくなるに従って，スペクトルおよび位相の時間的変化が激しくなっていることも理解できる。

また図6．5（a）は，中心周波数を2.0 Hzとして，亀田の計算法[2]に基づいて得られた非定常スペクトルであり，減衰定数を0.05として，さらに平滑化の操作をおこなったものである。図より，ピーク値の大きさと，その発生時刻は，図6．5（b）に示した本解析結果とほぼ一致していることがわかる。



（ａ） 亀田の計算法[2)]



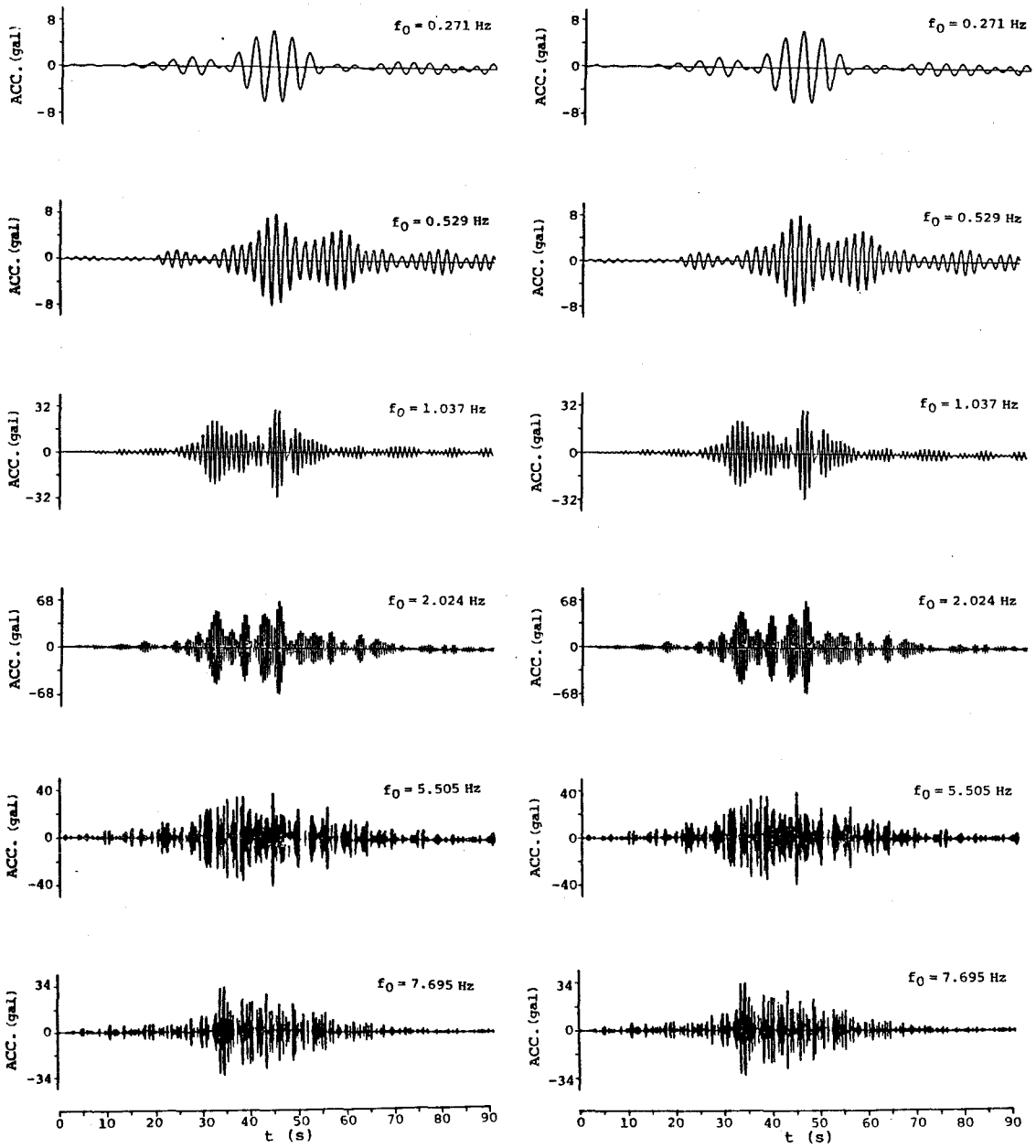
（ｂ） 本計算法

図６．５ 亀田の計算法との比較

次に図６．６は，原波形を各バンドパスフィルターに通して得られた波形と，式（６．25）によって，非定常スペクトルと位相を用いて再構成した波形，すなわち部分周波数再構成波形とを比較したものの一部である。幅広い周波数範囲にわたって両波形は非常によく一致しており，この結果より，ＣＤ法による非定常解析が良好におこなわれたものと判断できる。

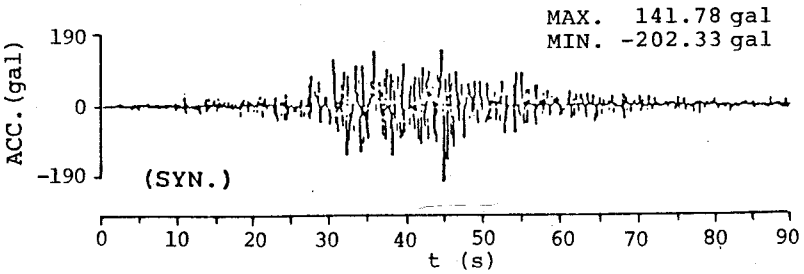
さらに図６．７は式（６．26）に基づいて求めた再合成波形（同図（ａ））を原波形（同図（ｂ））と比較したものである。また図６．８は位相の非定常性を無視した式（６．24）によって算出した再合成波形であり，異なる二組のランダム位相角に対する計算結果を示している。

まず図６．７より，位相の非定常性を考慮して再合成した加速度波形は，振幅の時間的変動の性状，さらにはその最大値．最小値のいずれの点に関しても，ほぼ原波形に近いものであるといえよう。これに対し図６．８からは，位相の非定常性を無視した場合には，亀田[2)]も指摘しているように，φ_k の選択によって，再合成波形がかなり異なることがわかる。なお図６．７（ａ）の再合成波形が原波形に近いものであることは，両加速度波形を用いて計算して描いたそれぞれの加速度応答スペクトル（図６．９（ａ）および（ｂ））の比較によっても理解できる。

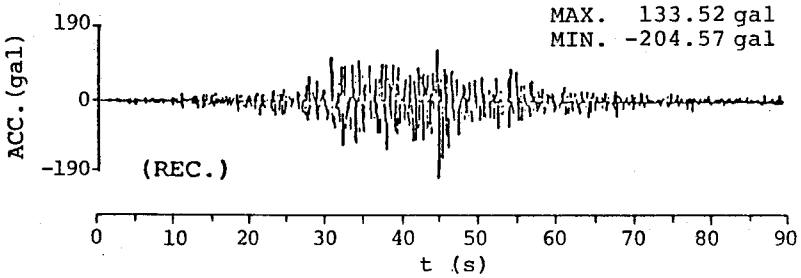


（a） バンドパスフィルター処理後の原波形　　（b） 部分周波数再構成波形

図6．6　バンドパスフィルター処理後の原波形と部分周波数再構成波形との比較

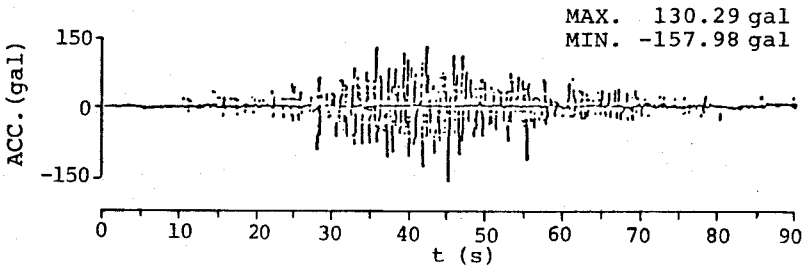


（ａ） 再合成波形

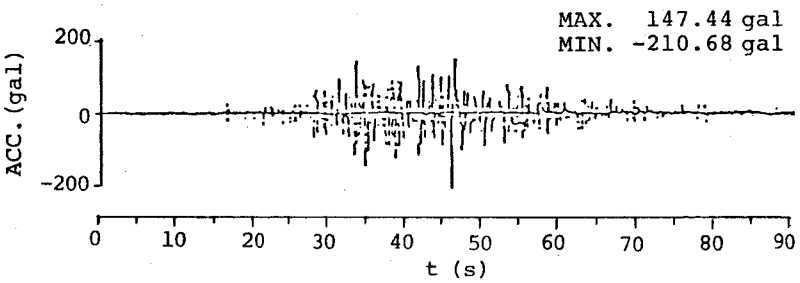


（ｂ） 原波形

図６．７ 再合成波形と原波形との比較

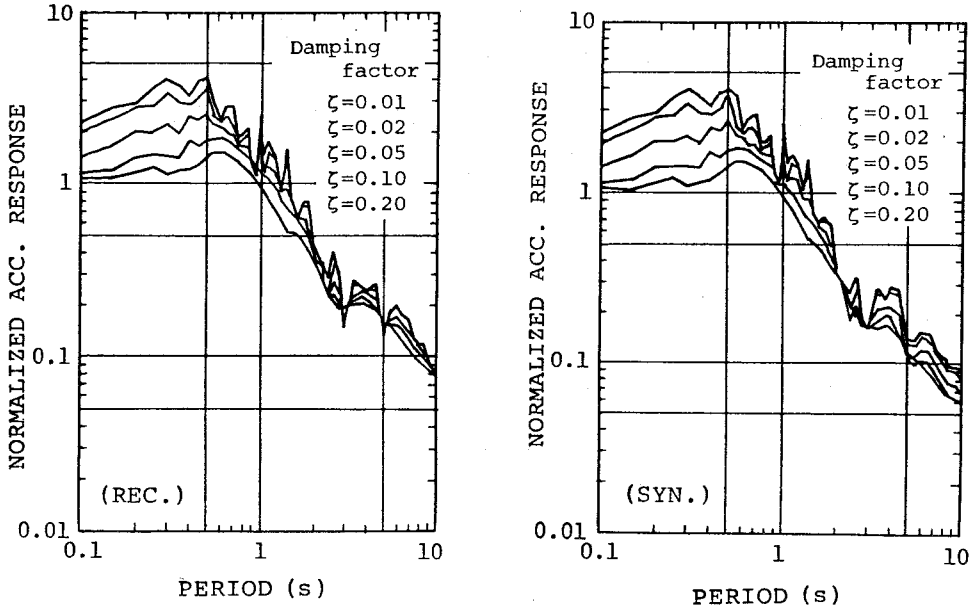


（ａ） case 1



（ｂ） case 2

図６．８ 位相の非定常性を無視した再合成波形



（a） 原波形による加速度応答スペクトル （b） 再合成波形による加速度応答スペクトル

図6．9 原波形および再合成波形による加速度応答スペクトルの比較

以上の結果を総合的に判断し，本章で示した非定常スペクトルおよび非定常な位相の算定法は，地震動を始め，種々の非定常不規則過程のスペクトル解析法として非常に有力な方法であると考えている。

6．4 結 言

本章では，複素変調法を用いて非定常不規則過程の非定常スペクトルと位相の非定常特性を算出する方法を提案し，それを実際の地震動データに適用してその有用性を実証した。得られた結論は以下の3点に要約できる。

(1) 複素変調法を活用した非定常スペクトル解析によれば，非定常不規則過程の振幅や周波数特性のみならず，位相の時間的変化までも算出できる。したがって本方法は，地震動などの非定常現象の非定常特性を抽出する方法として非常に有効である。

(2) 非定常スペクトルを用いて再合成した地震動の波形は，位相の非定常性を忠実に考慮することにより原波形とほぼ完全に一致する。

(3) Ormsbyのフィルターは，重み関数に含まれる定数を適切に選択すれば，本解析法における良好なフィルターになり得る。

本章で提案した方法は上述のような特徴をもっているが，同時に非定常不規則変動外力を受ける構造物の非定常スペクトル応答解析法にも有効に活用できる。次章ではこの問題について考える。

参 考 文 献

1） 神山　眞：強震地震動の非定常スペクトル特性とその波動論的考察，土木学会論文報告集，No.284, pp. 35-48, 1974 年4月.

2） 亀田弘行：強震地震動の非定常パワースペクトルの算出法に関する一考察，土木学会論文報告集，No.235, pp. 55-62, 1975 年3月.

3） 星谷　勝・千葉利晃・草野直幹：地震加速度の非定常特性とシミュレーション，土木学会論文報告集，No.245, pp. 51-56, 1976 年1月.

4） 吉田　裕・増田陳紀・澤　　正・若葉弘之：数値濾波の計算法と地震記録の非定常スペクトル解析への応用，土木学会論文報告集，No.274, pp. 1-4, 1978 年6月.

5） Dziwonski, A., Bloch, S. and Landisman, M. :Technique for the Analysis of Transient Seismic Signals, Bull. Seismo. Soc. Am., Vol. 59, No. 1, pp. 427-444, Feb., 1969.

6） 青柳史郎：地震動の位相差を考慮した長大吊橋の地震応答について，土木学会論文報告集，No.190, PP. 37-48, 1971 年6月.

7） Priestley, M. B. :Evolutionary Spectra and Non-stationary Processes, Journal of Royal Statitical Society, Ser. B, Vol. 27, pp. 204-237, 1965.

8） Priestley, M. B. :Power Spectral Analysis of Non-stationary Random Processes, Jounal of Sound and Vibration, Vol. 6, No. 1, pp. 86-97, 1967.

9） Granger, C. W. J. :Spectral Analysis of Economic Time Siries, Princeton University Press, Chapter 9, 10, 1964.

10） 野川徳二・片山尅行・田畑吉雄・大塩達一郎・川原琢治：大脳電位のインパルス応答，システムと制御，Vol. 21, No. 4, pp. 199-205, 1977 年

11） 小松定夫・藤原豪紀・中山隆弘：コンプレックス．ディモデュレーション法による非定常スペクトル解析（土木学会論文集に投稿中）

12） 朝倉夏雄：ディジタルフィルターの設計と反射地震探鉱への適用，物理探鉱，Vol. 23, No. 4, pp. 18-27, 1970 年8月.

13） 理工系のための数学ハンドブック，丸善，P. 28, 1973 年9月.

第７章　構造振動系の非定常スペクトル応答解析法

７．１　緒　言

土木構造物にとって厳しい外力となる地震動は，本来非定常特性を有する不規則振動を示す。しかし，本来地震動を受ける構造物の応答解析においては，入力としての地震動を定常確率過程として取り扱うことが多かった。そのおもな理由は，地震動を非定常確率過程として数学的に表現する方法が確立されていなかったからである。多くの研究者により，地震動を非定常確率過程として定式化する試みがなされてきたが，いまだ満足なものはない。たとえば地震動の非定常性を表現する近似的手法として，第５章においてもそうであったように，包絡線関数（形状関数と称することもある）を用いることがよくおこなわれる。たとえばJennings[1]の包絡線関数がある。しかしこれでは非定常性の本質を表現するにはあまりにも初歩的であるといわざるをえない。地震動の非定常性の本質を十分に含む数学的表現を確立することによって初めて，地震動を受ける構造物の非定常不規則応答を不規則振動論の立場から把握することができるものと考える。

そこで前章では，Priestley [2]が定義した発展スペクトル（evolutionary spectrum ，以下単に非定常スペクトルという）に着目し，この非定常スペクトルを利用して，非定常確率過程としての地震動の振幅，周波数，ならびに位相の特性の時間的変化を正確に表現できる非定常スペクトル解析法を提示した。

さてHammond[3] は，非定常不規則変動外力が非定常スペクトルで表現できたものと仮定して，１自由度および多自由度振動系の入力－出力関係式を誘導した。しかし，外力に関する変調関数（modulating function）については，直観的な推論から，実数領域の関数であることを前提条件としている。その上，応答にもある漸近特性（asymptotic fomrs）を仮定している。その後Shinozuka[4] は応答特性にその種の前提条件を付加することなく，より簡潔で，明瞭な入力－出力関係式の誘導を考え，形式的にはHammondとまったく同様の関係式を導出している。しかし，上述の変調関数の具体的内容についてはなんら触れていない。実用的見地から外力に関する変調関数を具体的に決定することができなければ，Hammond-Shinosukaの式を具体的に活用することができない。

本章ではHammond-Shinosuka の入力－出力関係式について概要を述べた後，複素変調法（ＣＤ法）による不規則過程の変調関数の算定法を提示し，さらに実地震動に対する１自由度振動系の応答解析をおこなった結果に基づいて，提案する方法の有用性を示すことにする。またHammond のように，変調関数を実関数と仮定した場合の応答解析結果についても言及し，その問題点を指摘する。

もちろん，構造物の応答の非定常性については，まずシミュレーション法で時系列解析によって応答を計算し，得られた応答波形を非定常スペクトルにより解析することによっても把握できるが，本研究の方法は，外力の非定常スペクトルから応答や応答速度の非定常スペクトルを簡明な関係式で解析的に

決定できるので，計算の効率化が達成できる点に特徴がある。また非定常スペクトル応答解析法は，周知の定常スペクトル応答解析法に対応し，それを一般化したものであるということができる。したがって本方法を確立することは，学術的ならびに実用的にきわめて意義のあることと考える。

7．2　非定常スペクトルを媒介とする外力と応答との関係式

緒言でも述べたように，Shinozuka[4] はHammond[3] の示した非定常不規則過程の入力－出力関係式を，より簡潔な方法で表現することを試みている。

いま，非定常不規則過程で与えられる入力 $x(t)$ が，次式のように表せるものと仮定する。

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(t,\omega)e^{i\omega t}dX(\omega) \tag{7.1}$$

そして，この $x(t)$ がある線形システムに作用したときの出力 $y(t)$ も，変調関数 $G(t,\omega)$ と直交過程 $Y(\omega)$ とによって次式のように表されるものとする。

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(t,\omega)e^{i\omega t}dY(\omega) \tag{7.2}$$

このとき $y(t)$ の非定常スペクトル $f_y(t,\omega)$ は，$x(t)$ の非定常スペクトル $f_x(t,\omega)$ と，システムの伝達関数 $H(\omega)$ を用いて，

$$f_y(t,\omega)=f_x(t,\omega)\frac{|H(\omega)|^2|G(t,\omega)|^2}{|A(t,\omega)|^2} \tag{7.3}$$

のように与えられる[3),4)]。

したがって入力の変調関数 $A(t,\omega)$ をなんらかの方法によって求めることができれば，次式によって算出される $G(t,\omega)$ [4)]を式（7．3）に用いて，$y(t)$ の非定常スペクトルを算出することができる。

$$G(t,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)A(t-\tau,\omega)\frac{e^{-i\omega\tau}}{H(\omega)}d\tau \tag{7.4}$$

ここに $h(\tau)$ は単位衝撃応答関数である。

さて，筆者の知る限りでは，$A(t,\omega)$ の評価法についてはHammond の論文[3)]があるのみである。Hammond はジェットエンジンの吹き出し口付近の圧力変動を非定常不規則過程とみなして圧力変動過程の非定常スペクトル解析をおこなった際に，関係式

$$f(t,\omega)=|A(t,\omega)|^2f(\omega) \tag{7.5}$$

を用いて $|A(t,\omega)|^2$ を決定している。ただし $f(\omega)$ としては圧力変動の定常スペクトル密度を準用している。そして，$|A(t,\omega)|^2$ の平方根をもって $A(t,\omega)$ を定めている。このように直観的な大きな

2つの仮定を設けて，線形1自由度振動系に対する応答解析をおこなっている。しかし，Hammond 自身が“ $A(t,\omega)$ empirically derived ”と述べているように， $|A(t,\omega)|^2$ の平方根を $A(t,\omega)$ とする理論的根拠は特にない。なお，Shinozuka も $A(t,\omega)$ を決定する方法については，具体的には言及していない。したがって式（7．4）の計算を，実際に合理的に実行するためには，実数関数に限定することなく変調関数 $A(t,\omega)$ を解析する必要がある。

以下において，これまでに不明確であったこの基本的問題を，CD法の活用によって解決する1つの方法を提示する[5]。

7．3 CD法による変調関数の新算定法

前章で示したように，式（7．1）を

$$dF(t,\omega)=A(t,\omega)dX(\omega) \tag{7．6}$$

と置いて書き直し， $x(t)$ が実関数であることを利用すれば，近似的に

$$x(t)=2\sum_{i=1}^{N}|dF(t,\omega_i)|\cos\{\omega_i t+\varphi(t,\omega_i)\} \tag{7．7}$$

が成立する。ここに

$$\varphi(t,\omega_i)=\arctan\left\{\frac{dF_I(t,\omega_i)}{dF_R(t,\omega_i)}\right\} \tag{7．8}$$

であり， $dF_R(t,\omega_i)$ ， $dF_I(t,\omega_i)$ は，それぞれ $dF(t,\omega_i)$ の実部と虚部である。

さて中心周波数が ω_i であるような狭帯域バンドパスフィルターに $x(t)$ を通し，得られた成分波を $x_i(t)$ と表せば，式（7．7）より $x_i(t)$ は近似的に次式によって与えられる。

$$x_i(t)=2|dF(t,\omega_i)|\cos\{\omega_i t+\varphi(t,\omega_i)\} \tag{7．9}$$

式（7．9）の両辺にそれぞれ $\cos\omega_i t$ を掛けて右辺を整理すれば，

$$x_i(t)\cos\omega_i t=|dF(t,\omega_i)|[\cos\varphi(t,\omega_i)+\cos\{2\omega_i t+\varphi(t,\omega_i)\}] \tag{7．10}$$

となり，同様に $\sin\omega_i t$ を掛けて整理すると次式が得られる。

$$x_i(t)\sin\omega_i t=|dF(t,\omega_i)|[-\sin\varphi(t,\omega_i)+\sin\{2\omega_i t+\varphi(t,\omega_i)\}] \tag{7．11}$$

次に式（7．10）と式（7．11）のそれぞれにローパスフィルター処理 F を施して， $2\omega_i$ の円周波数成分をカットすれば，次の関係式が成立する。

$$\left.\begin{aligned}F\{x_i(t)\cos\omega_i t\}&=|dF(t,\omega_i)|\cos\varphi(t,\omega_i)\\F\{x_i(t)\sin\omega_i t\}&=-|dF(t,\omega_i)|\sin\varphi(t,\omega_i)\end{aligned}\right\} \tag{7．12}$$

これより

$$\varphi(t, \omega_i) = \arctan\left(\frac{-F\{x_i(t)\sin\omega_i t\}}{F\{x_i(t)\cos\omega_i t\}}\right) \tag{7.13}$$

となる。

ここで式（7．8）と式（7．13）とを比較することによって，

$$\left.\begin{aligned} dF_R(t, \omega_i) &= F\{x_i(t)\cos\omega_i t\} \\ dF_I(t, \omega_i) &= -F\{x_i(t)\sin\omega_i t\} \end{aligned}\right\} \tag{7.14}$$

であることがわかる。

すなわち，$dF(t, \omega_i)$ の実部と虚部は，$x(t)$ に2回のフィルター処理（バンドパスフィルター処理とローパスフィルター処理）を施すことによって求めることができる。

したがって，ある ω_i の周波数に着目し，それによって $x(t)$ の変調関数 $A(t, \omega_i)$ を求めるには以下のようにすればよい。

式（7．6）より

$$A(t, \omega_i)dX(\omega_i) = dF(t, \omega_i)$$

であるから，$A(t, \omega_i)$ の実部 $A_R(t, \omega_i)$ と虚部 $A_I(t, \omega_i)$，および $dX(\omega_i)$ の実部 $dX_R(\omega_i)$ と虚部 $dX_I(\omega_i)$ を用いて，

$$\{A_R(t, \omega_i) + iA_I(t, \omega_i)\}\{dX_R(\omega_i) + idX_I(\omega_i)\} = dF_R(t, \omega_i) + idF_I(t, \omega_i) \tag{7.15}$$

が得られる。式（7．15）の両辺の実部と虚部を対応させれば，次式が成立することがわかる。

$$\begin{pmatrix} dX_R(\omega_i) & -dX_I(\omega_i) \\ dX_I(\omega_i) & dX_R(\omega_i) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A_R(t, \omega_i) \\ A_I(t, \omega_i) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dF_R(t, \omega_i) \\ dF_I(t, \omega_i) \end{Bmatrix} \tag{7.16}$$

したがって

$$\begin{Bmatrix} A_R(t, \omega_i) \\ A_I(t, \omega_i) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} dX_R(\omega_i) & -dX_I(\omega_i) \\ dX_I(\omega_i) & dX_R(\omega_i) \end{pmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} dF_R(t, \omega_i) \\ dF_I(t, \omega_i) \end{Bmatrix} \tag{7.17}$$

となる。

ここに，$dX_R(\omega_i)$ と $dX_I(\omega_i)$ は十分大きな時間 T と $x(t)$ のフーリエ変換の実部 $F_{x,R}(\omega_i)$ と虚部 $F_{x,I}(\omega_i)$ とによって与えられる次式で算定するものとする。

$$\left.\begin{aligned} dX_R(\omega_i) &= \frac{2\pi}{T}F_{x,R}(\omega_i) \\ dX_I(\omega_i) &= \frac{2\pi}{T}F_{x,I}(\omega_i) \end{aligned}\right\} \tag{7.18}$$

結局本計算では，CD法によって $x(t)$ の非定常スペクトル $f_x(t, \omega_i)$ を求める過程で得られる $dF(t, \omega_i)$ の実部 $dF_R(t, \omega_i)$ と虚部 $dF_I(t, \omega_i)$，および $x(t)$ のフーリエ変換によって求められる

$dX_R(\omega_i)$ ， $dX_I(\omega_i)$ とを用いて，式（７．17）により $A(t,\omega_i)$ の実部と虚部を求めることになる。

７．４　数値解析による本方法の検討

７．４．１　本方法の妥当性の検証

７．３で示した方法の工学的見地からの妥当性を具体的に検討するために，本研究では地震動の作用を受ける線形１自由度振動系の応答問題を取り上げた。地震動としては， El Centro地震波のＮＳ成分の，主要動を含む22秒間の加速度記録（図７．１）を用いた。ただし，実際の解析に使用したのは，0.01秒の周期でサンプリングされたディジタル記録である。なお振動系の固有振動数 f_n および減衰定数 ζ は，それぞれ2.0 Hzおよび0.05としている。

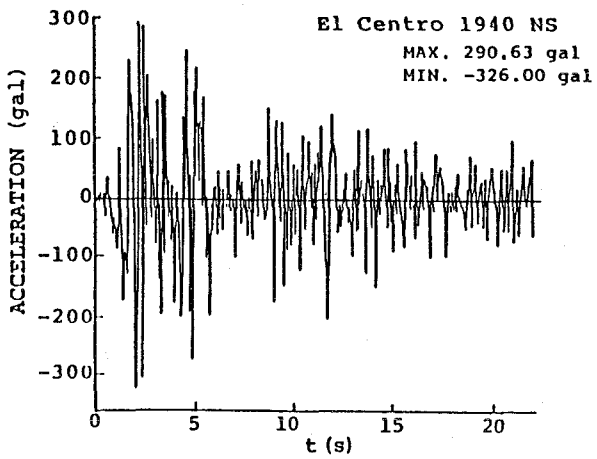


図７．１　El Centro地震波

さて検証方法の流れは図７．２に要約したとおりである。すなわち，まず地震動の非定常スペクトルと変調関数の実部と虚部を，それぞれ前章で示した方法と本章で提示した方法により算定する。そしてそれらを用いて，７．２の諸式によって応答の非定常スペクトル $f_y(t,\omega)$ を求める。この $f_y(t,\omega)$ が周波数領域における解析によって得られた応答の非定常スペクトルということになる。一方，時系列解析によって求めた応答 $y(t)$ の，前章の方法によるスペクトル解析によって得られた非定常スペクトルを $f_y{}^*(t,w)$ とすれば， $f_y{}^*(t,\omega)$ は，時間領域における解析によって算定された応答の非定常スペクトルといえる。この $f_y{}^*(t,\omega)$ と $f_y(t,\omega)$ を定性的ないし定量的に比較することによって，本応答解析法が適当であるか否かの判断ができる。なお本研究では，Hammond の考え方に基づいて，式（７．４）の $A(t-\tau,\omega)$ として $|A(t-\tau,\omega)|$ を用いた場合のスペクトル応答解析もおこなって応答

の非定常スペクトル $f_y^H(t, w)$ を求め，本解析法との比較を試みた。

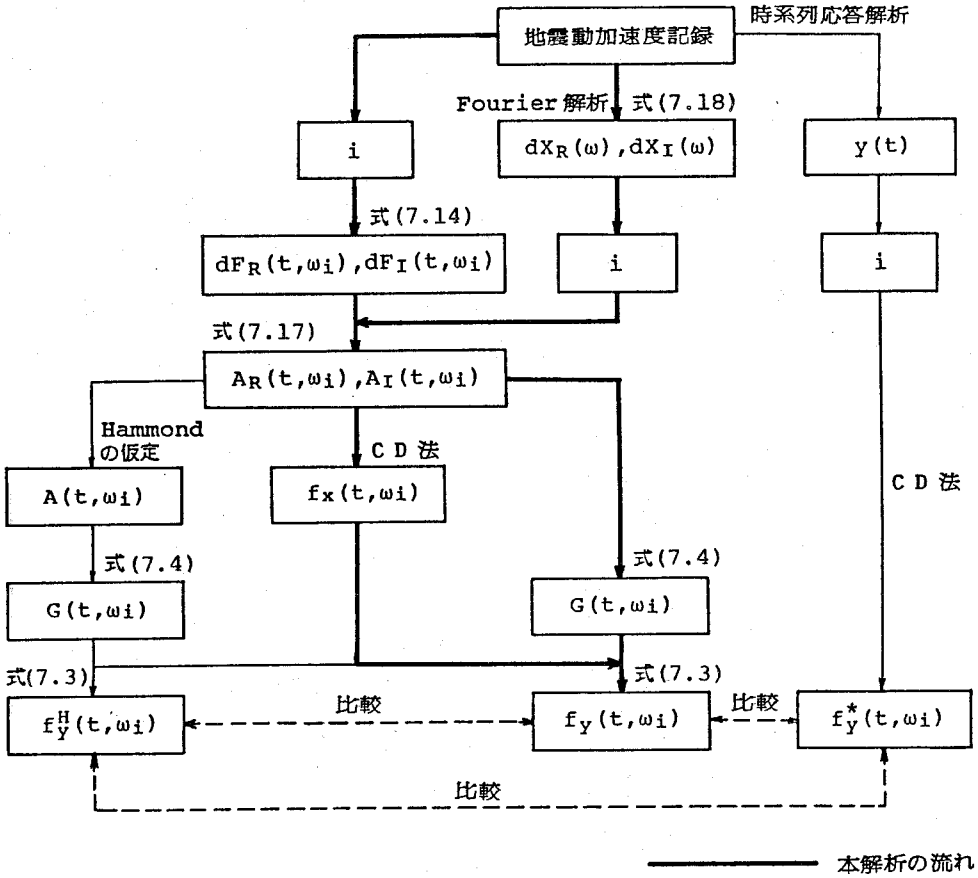


図7．2　本解析法の検証手順の流れ

7．4．2　地震動の非定常スペクトルと変調関数

図7．3は，0.1 Hzから11Hzまでの15個の周波数に着目し，前章に述べたCD法によるスペクトル解析によって求めた El Centro地震波の非定常スペクトルの一部である。なお解析で用いたフィルターおよびそれに関する各定数については前章で掲げたものと同様である。図より，時刻2秒付近では2Hz，時刻12秒付近では1.45Hzが卓越周波数であることがわかる。

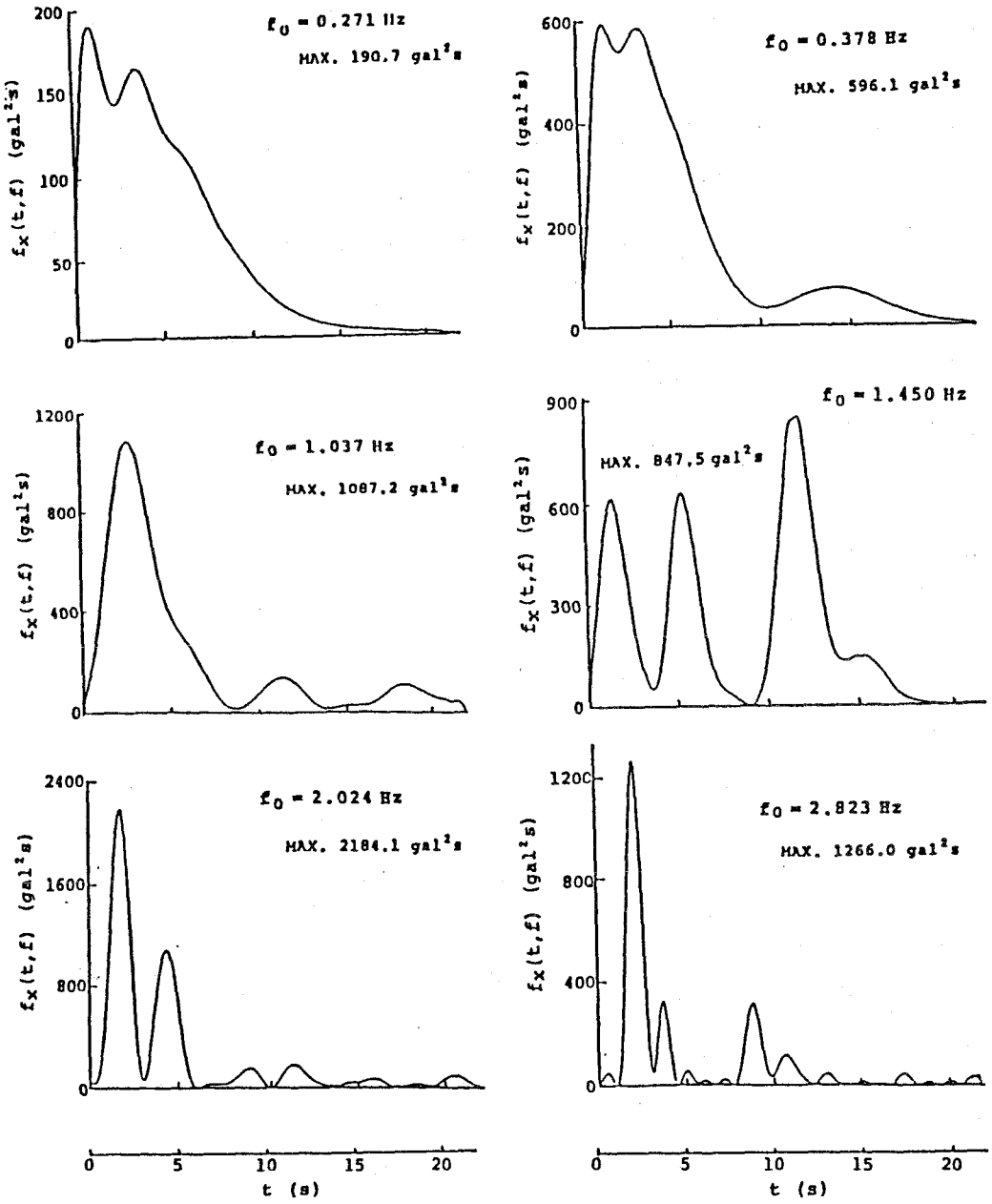


図7．3　El Centro地震波の非定常スペクトル

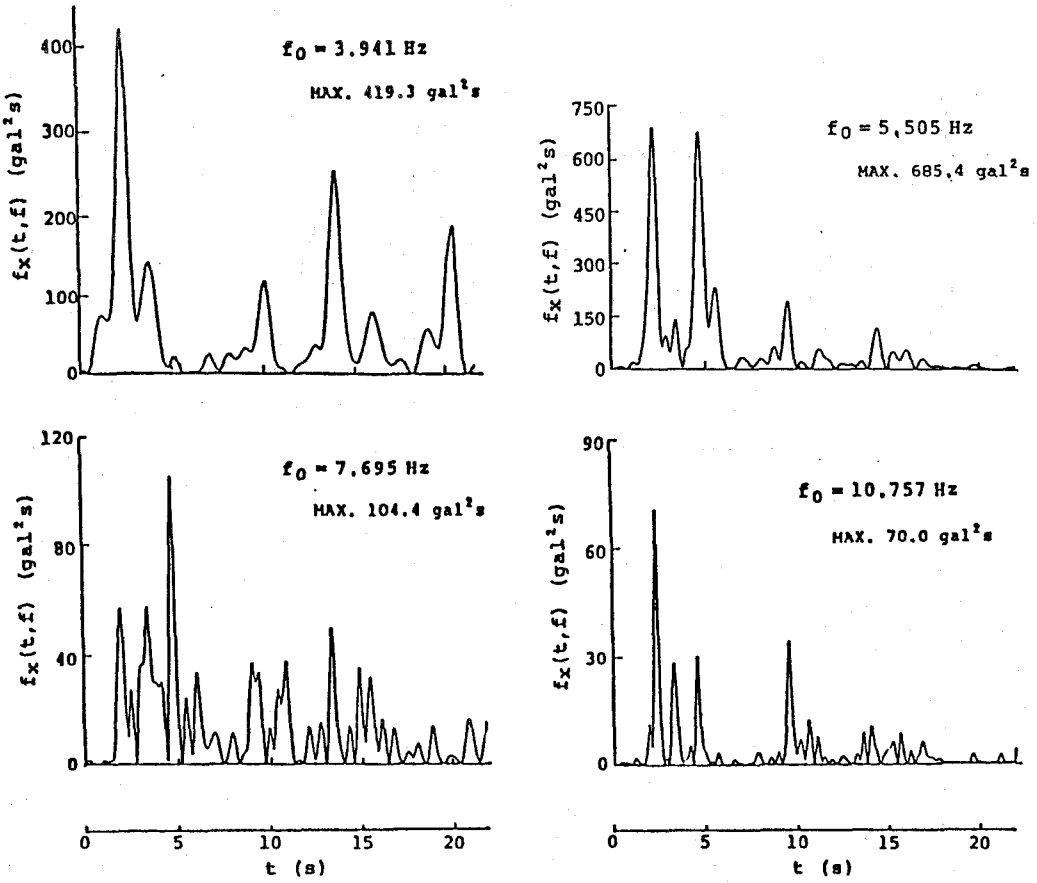


図7．3　（つづき）

さて図7．3の非定常スペクトルと位相（掲載は省略）を用いて，前章の式（6．25），（6．26），すなわち

$$\tilde{x}_i(t) = \sqrt{2 f_x(t, \omega_i)\Delta\omega_i} \cdot \cos\{\omega_i t + \varphi(t, \omega_i)\} \qquad (6.25)$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^{15} \tilde{x}_i(t) \qquad (6.26)$$

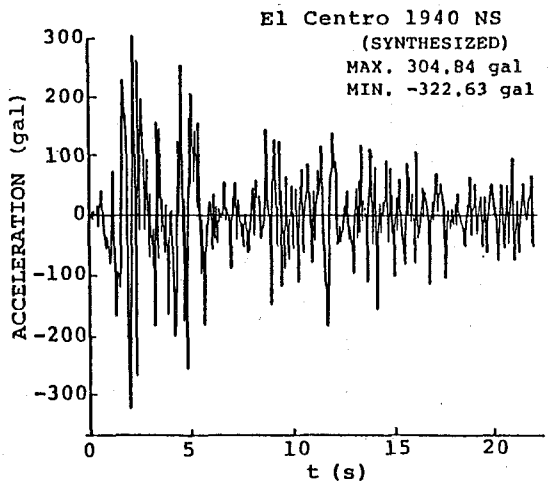


図7．4　El Centro地震波（再合成波形）

によって再合成した波形 $\tilde{x}(t)$ を図7．4に示すが，同図と図7．1の原波形とを比較することにより，本非定常スペクトル解析が良好におこなわれたものと判断することができる。

次に本章で提示した方法によって算出した変調関数の計算結果の一部を図7．5に掲げる。着目周波数が大きくなるとともに変調関数の変化も激しくなっているが，目視により $f_0 \fallingdotseq 11$Hzの場合でも，その卓越周期は振動系の固有周期よりは長いことがわかる。

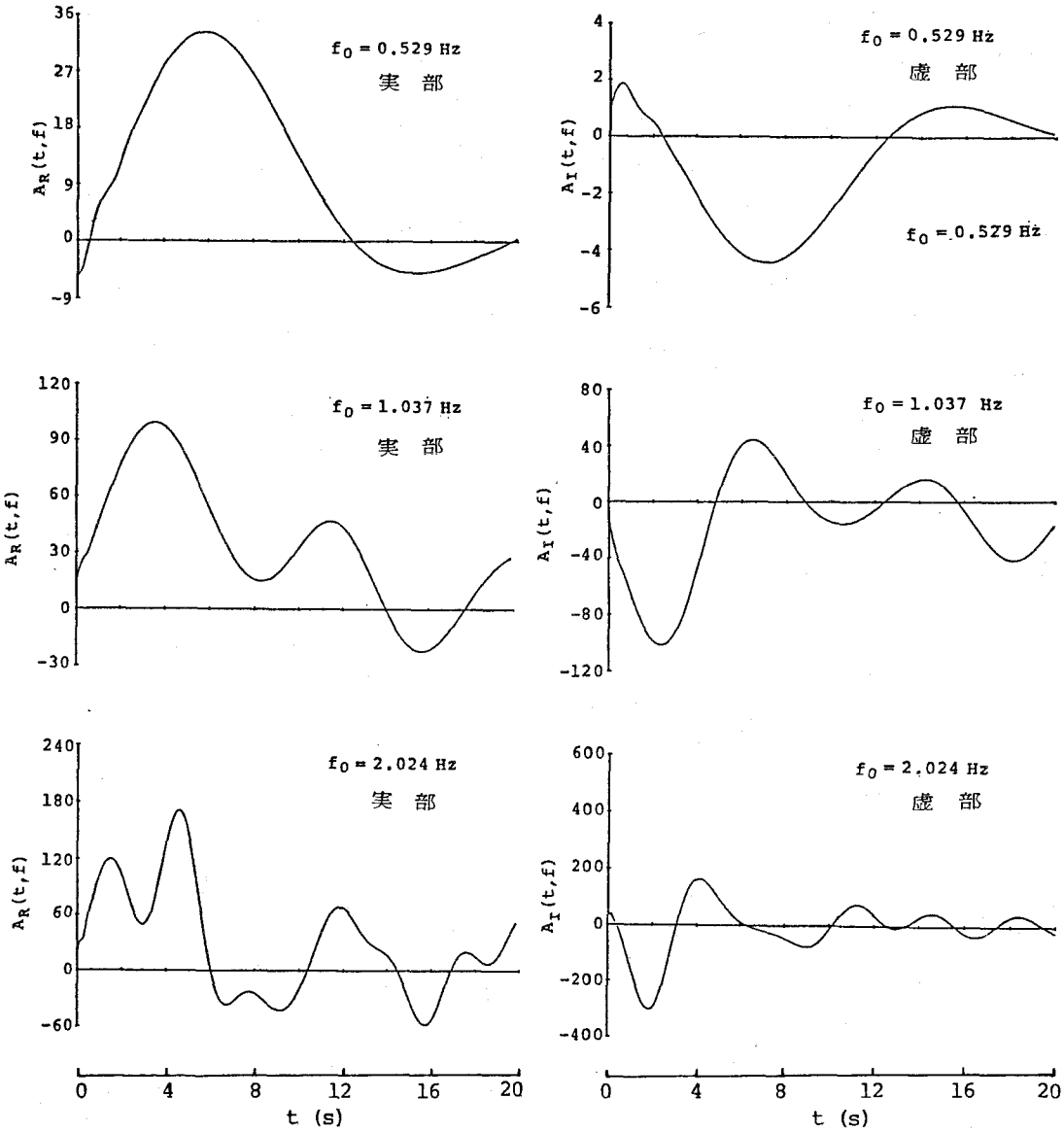


図7．5　El Centro地震波の変調関数

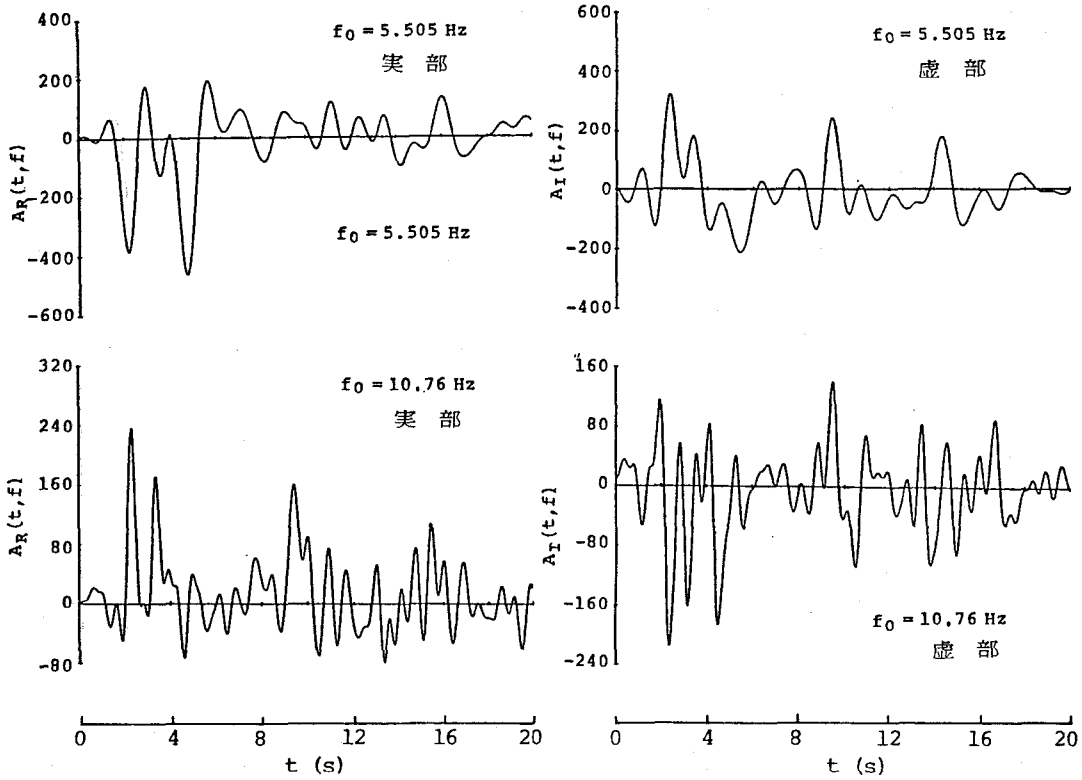


図7．5 （つづき）

7．4．3 応答解析結果および考察

まず図7．6に，逐次積分法による時系列応答解析によって求めた変位応答の計算結果を示す。なお前述のように，振動系の固有振動数は2 Hz，減衰定数は0.05である。

さて図7．7は，本解析法，時系列応答解析による方法およびHammond の考え方に基づく方法の各解析法によって求めた非定常スペクトル応答解析結果の一部である。

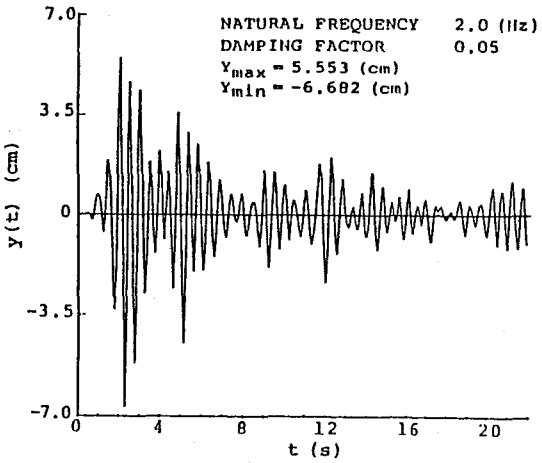


図7．6 時系列応答解析結果

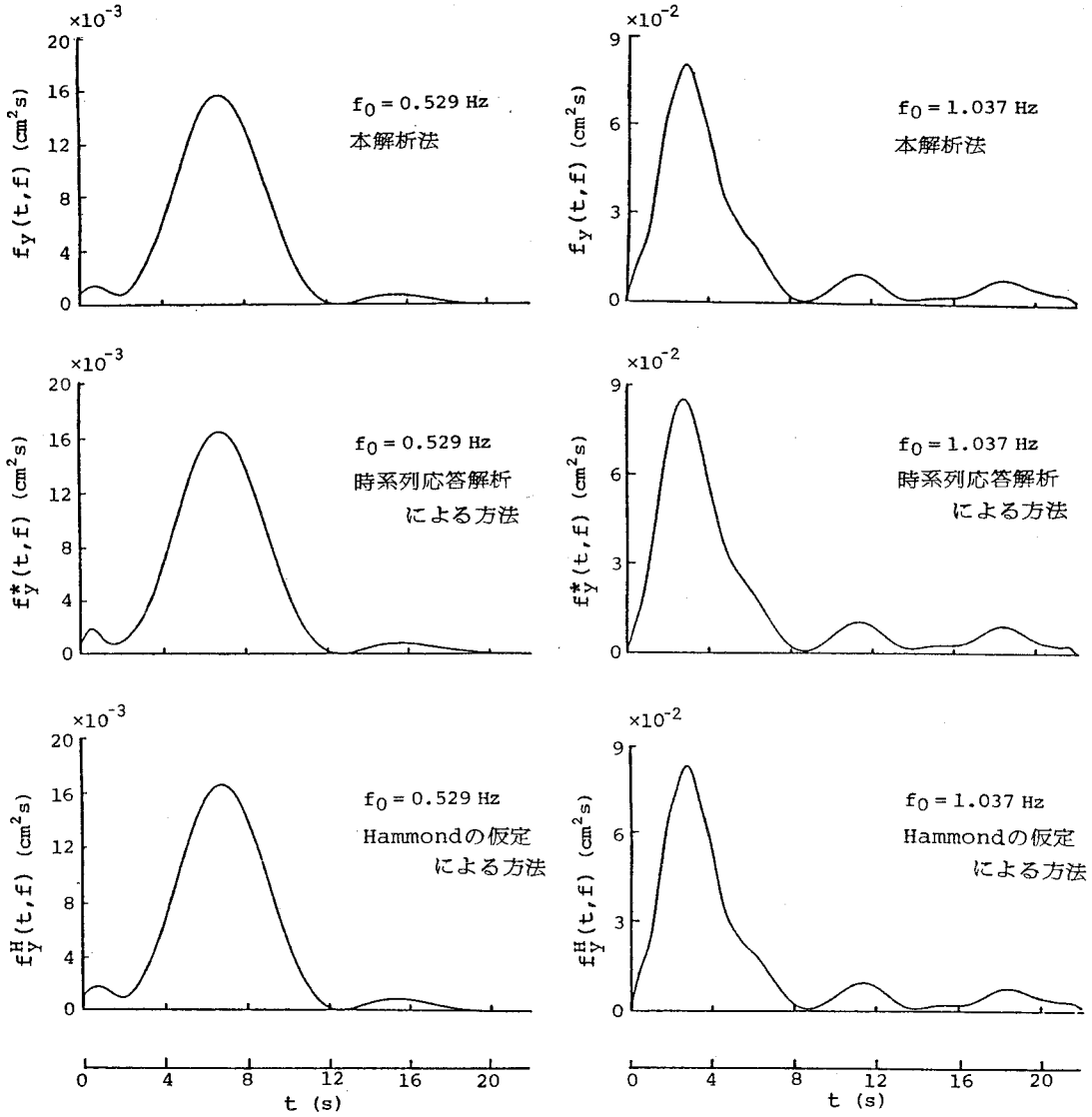


図7．7　各応答解析法の比較

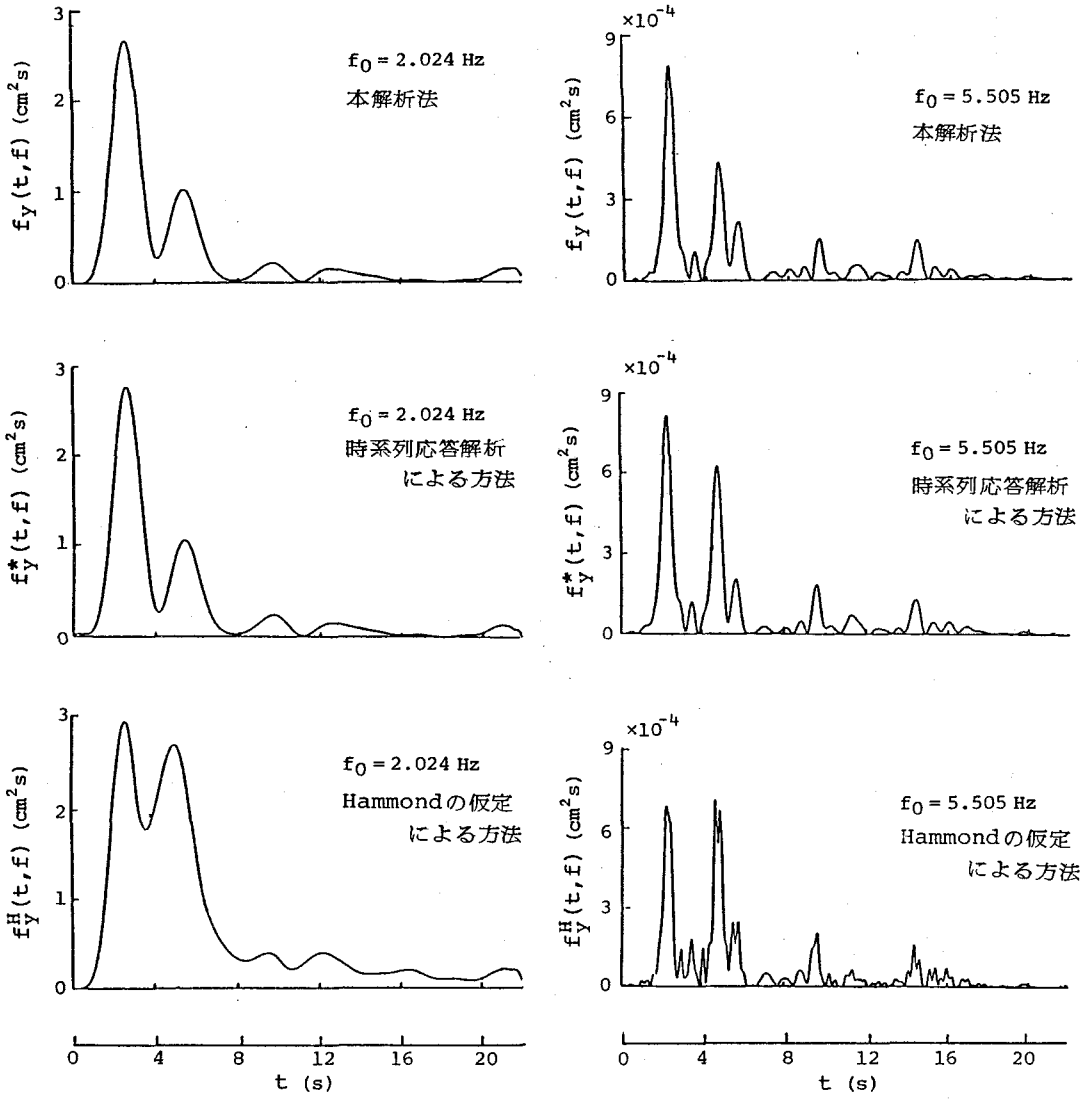

f_0 = 2.024 Hz
本解析法
f_0 = 5.505 Hz
本解析法
f_0 = 2.024 Hz
時系列応答解析
による方法
f_0 = 5.505 Hz
時系列応答解析
による方法
f_0 = 2.024 Hz
Hammondの仮定
による方法
f_0 = 5.505 Hz
Hammondの仮定
による方法
$f_y(t,f)$ (cm^{2}s)
$f_y^*(t,f)$ (cm^{2}s)
$f_y^H(t,f)$ (cm^{2}s)
×10^{-4}
t (s)

図7．7　（つづき）

同図より，着目周波数が0.529 Hzあるいは1.037 Hzの場合には，本解析法およびHammond の方法のいずれも時系列応答解析による結果とほぼ同様の結果を与えていることがわかる。ところがHammond の方法は，応答値にもっとも大きな影響を与える共振周波数付近の周波数，すなわち2.024 Hzに着目した場合には，時系列解析による方法とかなり異なる特性を示している。着目周波数が5.505 Hzの場合も同様である。これに対して本応答解析法は，5.505 Hzにおける5秒付近のピーク値に若干の差異が認められるものの，幅広い周波数帯域にわたって，時系列解析による結果と良好な一致を示している。このことより，変調関数を実数とするHammond の考え方では，応答の非定常特性をかなり歪めることもあるといえよう。

本方法とHammond の方法との相違点は，以下に示すように，振動系の応答を支配する $G(t,\omega)$ の表式を用いて明瞭にすることができる。

式（7．4）で与えられる $G(t,\omega)$ は，$\Delta\tau$ を適当に設定することにより，次式で近似的に計算できる。

$$G(t,\omega)=\sum_j h(\tau_j)A(t-\tau_j,\omega)\frac{e^{-i\omega\tau_j}}{H(\omega)}\Delta\tau \tag{7.19}$$

式中の $H(\omega)$ は，

$$H(\omega)=\frac{1}{(\omega_n{}^2-\omega^2)+2i\zeta\omega_n\omega} \tag{7.20}$$

で与えられるから，この式（7．20）を式（7．19）に代入して整理すれば次式が得られる。

$$G(t,\omega)=\sum_j A(t-\tau_j,\omega)\{S_R(\tau_j,\omega)+iS_I(\tau_j,\omega)\} \tag{7.21}$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} S_R(\tau_j,\omega)&=\frac{\{(\omega_n{}^2-\omega^2)\cos\omega\tau_j-2\zeta\omega_n\omega\sin\omega\tau_j\}h(\tau_j)\Delta\tau}{\{(\omega_n{}^2-\omega^2)^2+4\zeta^2\omega_n{}^2\omega^2\}}\\ S_I(\tau_j,\omega)&=-\frac{\{(\omega_n{}^2-\omega^2)\sin\omega\tau_j+2\zeta\omega_n\omega\cos\omega\tau_j\}h(\tau_j)\Delta\tau}{\{(\omega_n{}^2-\omega^2)+4\zeta^2\omega_n{}^2\omega^2\}}\end{aligned}\right\} \tag{7.22}$$

まず $A(t,\omega)$ を複素関数として式（7．21）を書き改めれば，次式のようになる。

$$\begin{aligned} G(t,\omega)=\sum_j\ &[\{A_R(t-\tau_j,\omega)S_R(\tau_j,\omega)-A_I(t-\tau_j,\omega)S_I(\tau_j,\omega)\}\\ &+i\{A_R(t-\tau_j,\omega)S_I(\tau_j,\omega)+A_I(t-\tau_j,\omega)S_R(\tau_j,\omega)\}]\end{aligned} \tag{7.23}$$

さて式（7．3）によれば，応答の非定常スペクトル $f_y(t,\omega)$ は $|G(t,\omega)|^2$ に関係する。したがって式（7．23）により $|G(t,\omega)|^2$ を計算することにすれば，

$$\begin{aligned} |G(t,\omega)|^2=&[\sum_j\{A_R(t-\tau_j,\omega)S_R(\tau_j,\omega)-A_I(t-\tau_j,\omega)S_I(\tau_j,\omega)\}]^2\\ &+[\sum_j\{A_R(t-\tau_j,\omega)S_I(\tau_j,\omega)+A_I(t-\tau_j,\omega)S_R(\tau_j,\omega)\}]^2\end{aligned} \tag{7.24}$$

となる。

式（7．24）を整理して次式を得ることができる。

$$
\begin{aligned}
|G(t,\omega)|^2 = & \sum_j |S(\tau_j,\omega)|^2 |A(t-\tau_j,\omega)|^2 \\
& + \sum_{\substack{j \\ (j \neq k)}} \sum_k \{S_R(\tau_j,\omega)S_R(\tau_k,\omega) + S_I(\tau_j,\omega)S_I(\tau_k,\omega)\} \\
& \times \{A_R(t-\tau_j,\omega)A_R(t-\tau_k,\omega) + A_I(t-\tau_j,\omega)A_I(t-\tau_k,\omega)\} \\
& + 2\{\sum_j A_R(t-\tau_j,\omega)S_I(\tau_j,\omega)\sum_k A_I(t-\tau_k,\omega)S_R(\tau_k,\omega) \\
& - \sum_j A_R(t-\tau_j,\omega)S_R(\tau_j,\omega)\sum_k A_I(t-\tau_j,\omega)S_I(\tau_k,\omega)\}
\end{aligned}
\qquad (7.25)
$$

ただし，

$$
\left.
\begin{aligned}
|S(\tau_j,\omega)|^2 &= S_R{}^2(\tau_j,\omega) + S_I{}^2(\tau_j,\omega) \\
|A(t-\tau_j,\omega)|^2 &= A_R{}^2(t-\tau_j,\omega) + A_I{}^2(t-\tau_j,\omega)
\end{aligned}
\right\}
\qquad (7.26)
$$

次に変調関数を実関数とし，式（7．21）の $A(t-\tau_j,\omega)$ に，

$$
|A(t-\tau_j,\omega)| = \{A_R{}^2(t-\tau_j,\omega) + A_I{}^2(t-\tau_j,\omega)\}^{\frac{1}{2}} \qquad (7.27)
$$

を代入すれば，

$$
G(t,\omega) = \sum_j |A(t-\tau_j,\omega)|S_R(\tau_j,\omega) + i\sum_j |A(t-\tau_j,\omega)|S_I(\tau_j,\omega) \qquad (7.28)
$$

となる。このとき式（7．25）に対応する $|G(t,\omega)|^2$ は，

$$
\begin{aligned}
|G(t,\omega)|^2 = & \{\sum_j |A(t-\tau_j,\omega)|S_R(\tau_j,\omega)\}^2 \\
& + \{\sum_j |A(t-\tau_j,\omega)|S_I(\tau_j,\omega)\}^2
\end{aligned}
\qquad (7.29)
$$

となる。式（7．26）を整理すれば次式のようになる。

$$
\begin{aligned}
|G(t,\omega)|^2 = & \sum_j |A(t-\tau_j,\omega)|^2 |S(\tau_j,\omega)|^2 \\
& + \sum_{\substack{j \\ (j \neq k)}} \sum_k |A(t-\tau_j,\omega)|\,|A(t-\tau_k,\omega)| \cdot \\
& \{S_R(\tau_j,\omega)S_R(\tau_k,\omega) + S_I(\tau_j,\omega)S_I(\tau_k,\omega)\}
\end{aligned}
\qquad (7.30)
$$

式（7．25）と式（7．30）が，それぞれ本解析法およびHammond の考え方に従う $|G(t,\omega)|^2$ に対

応するものである。両式の右辺の第2項以下の相異が，応答の非定常スペクトルにみられる両解析法の差異になって現れるものと考えられる。

7．5 結 言

本章では，地震動を受ける構造物の安全性や信頼性の評価システムに関する研究の一環として，振幅特性や周波数特性，さらには位相特性が時間的に変化するような非定常不規則変動外力を受ける構造物の，周波数領域における応答解析法（非定常スペクトル応答解析法）に関する一つの提案を試みた。すなわち，従来Hammond やShinozuka によって導出された外力－応答関係式を実際に非定常応答解析に適用する場合に問題となる，非定常外力の表式に含まれる変調関数を，複素変調法（ＣＤ法）によって決定する方法を提示した。その方法は，Shinozuka により定式化された外力－応答関係式に適用され，実地震動に対する応答解析により妥当性が確認された。Hammond が変調関数を実関数に限定しているのに対して，本方法は変調関数の実部と虚部を決定することができるので，より精度の高いスペクトル応答解析が可能である。

構造物の地震応答の確率論的評価に関するアプローチはこれまでにも数多くみられるが[6]，本解析法はその種の研究の発展の基礎になるものと考えている。

また本方法によれば数値計算はマイコンによっても遂行できるので，本方法が計算の効率化という点でも優れていることが認められる。

参 考 文 献

1） Jennings, P. C., et al. :Simulated Earthquake Motions, Earthquake Engineering Research Laboratory, CIT, Apr., 1968.

2） Priestley, M. B. :Evolutionary Spectra and Non-stationary Processes, Journal of Royal Statistical Society, Ser. B, Vol. 27, pp. 204-237, 1965.

3） Hammond, J. K. :On the Response of Single and Multidegree of Freedom Systems to Non-stationary Random Excitations, Journal of Sound and Vibration, Vol. 7, No. 3, pp. 393-416, 1968.

4） Shinozuka, M. :Random Processes with Evolutionary Power, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 96, No. EM4, pp. 543-545, 1970.

5） 小松定夫・藤原豪紀・中山隆弘：コンプレックス．ディモデュレーション法による非定常スペクトル解析，（土木学会論文集に投稿中）．

6） たとえば，最近のものでは Spanos, P-T, D. and Solomos, G. P. :Barrier Crossing Due to Tran-

sient Excitation, Jounal of the Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 110, No. 10, pp. 20-36, Jan., 1984., あるいは，辰巳安良：地震応答スペクトルに関する確率論的考察，土木学会論文集，No. 356／Ⅰ-3, pp. 517-526, 1985 年4月.

7） 中山隆弘・小松定夫・角田直行：構造振動系の非定常スペクトル応答解析法について，（土木学会論文集に投稿中）.

第8章　非定常スペクトルによってモデル化される不規則外力を受ける構造物の初通過破壊確率

8．1　緒　言

近年，不規則振動論における初通過理論は，地震動に対する構造物の最適設計法[1]，原子力格納容器などの具体的な構造物の耐震性評価法[2]，応答スペクトルの確率論的評価法[3]などの諸問題に積極的に利用されている。これらの研究が構造物の合理的な耐震設計法を確立してゆく上で，有用かつ重要な研究であることは論をまたない。しかし，地震動が定常確率過程と仮定されていたり，閾値が確定量とされている点など，多くの検討すべき問題点を包含している。

もちろん，これまでにも地震動を非定常確率過程で記述して構造物の信頼性評価を試みた研究も数多い[4]。ただそのほとんどは振幅の包絡形状を与える形状関数と正規定常確率過程との積によって外力モデルを構成している。しかし，このモデルは真の非定常性を表現していないので，多様な非定常性を示す不規則変動外力のすべてに適用できる一般的な信頼性評価手法を開発するためには，形状関数と定常確率過程に分離できない非定常外力に対する応答解析法と信頼性評価法に関する研究が不可欠になる。

さて非定常スペクトルによって与えられる非定常外力を受ける線形振動系を対象として，Spanos[5),6)]はFokker-Planck の方程式をGalerkin法によって近似的に解いて応答の確率分布を求める手法を提示している。ただし，振動系の減衰定数 ζ には $\zeta \ll 1$ の制約条件が設けられ，さらに外力の非定常スペクトルについても，時刻にかかわらず，幅広い周波数帯域において同一オーダーのパワーを有すること，すなわち広帯域特性を示すことを仮定している。したがって，狭帯域スペクトルをもつような非定常外力，あるいは大きな減衰特性を示す振動系（たとえば，多自由度振動系の高次モード振動系）への適用には困難が伴うものと思われる。

一方筆者らは[7),8)]，振幅，周波数および位相の特性が時間的に変化するような非定常不規則外力を非定常スペクトルによって表し，その種の非定常外力を受ける線形振動系のスペクトル応答解析を具体的におこなう方法とその有用性を示した。

本章では，非定常スペクトルによってモデル化された非定常不規則外力に対する構造物の信頼性評価システムに関連する問題として，地震動を受ける線形1自由度振動系および事例研究として取り上げた鋼製タワーに対する初通過破壊確率の計算過程と計算結果について言及する。なお，地震動の非定常スペクトルによるモデル化の問題は考察の対象から外し，特定の地震動の解析によって得られた非定常スペクトル[8)]によって解析を進めたが，解析手順は，任意の特性を有する非定常スペクトルにそのまま適用できる。

8．2　線形1自由度振動系の初通過破壊確率

8．2．1　非定常応答および応答速度の分散および共分散

非定常スペクトルでモデル化される非定常不規則外力　$\boldsymbol{x}(t)$ に対する線形1自由度振動系の応答変位 $\boldsymbol{y}(t)$ が，

$$\boldsymbol{y}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(t,\omega)e^{i\omega t}d\,\boldsymbol{Y}(\omega) \tag{8．1}$$

のように，直交過程　$\boldsymbol{Y}(\omega)$ と式（7．4）すなわち

$$G(t,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)A(t-\tau,\omega)\frac{e^{-i\omega\tau}}{H(\omega)}d\tau$$

で表される変調関数　$G(t,\omega)$ で与えられるものとする[9]。

このとき　$\boldsymbol{y}(t)$ の共分散関数　$R_{\boldsymbol{y}}(t,s)$ は，$\boldsymbol{Y}(\omega)$ の直交性より，　$|d\,\boldsymbol{Y}(\omega)|^2$ の期待値 $E[|d\,\boldsymbol{Y}(\omega)|^2]$ を用いて，

$$R_{\boldsymbol{y}}(t,s)=\int_{-\infty}^{\infty}G(t,\omega)G^*(s,\omega)e^{i\omega(t-s)}E[|d\,\boldsymbol{Y}(\omega)|^2] \tag{8．2}$$

と表せる。ただし，　$G(s,w)$ の肩付記号＊は，　$G^*(s,\omega)$ が　$G(s,w)$ の共役複素数であることを意味する。以下でも同様である。式（8．2）において $s=\mathrm{t}$ とすれば，$\boldsymbol{y}(t)$ の分散 $R_{\boldsymbol{y}}(t,t)$ が次式のように与えられる。

$$R_{\boldsymbol{y}}(t,t)=2\int_{0}^{\infty}|G(t,\omega)|^2E[|d\,\boldsymbol{Y}(\omega)|^2] \tag{8．3}$$

ところが両側非定常スペクトル　$f_{\boldsymbol{y}}(t,\omega)$ は，

$$f_{\boldsymbol{y}}(t,\omega)d\omega=2|G(t,\omega)|^2E[|d\,\boldsymbol{Y}(\omega)|^2] \tag{8．4}$$

と表せるから，式（8．3）は式（8．4）より，

$$R_{\boldsymbol{y}}(t,t)=\int_{0}^{\infty}f_{\boldsymbol{y}}(t,\omega)d\omega \tag{8．5}$$

なる関係が成立することがわかる。さらに，式（7．3）より，

$$f_{\boldsymbol{y}}(t,\omega)=f_{\boldsymbol{x}}(t,\omega)\frac{|H(\omega)|^2|G(t,\omega)|^2}{|A(t,\omega)|^2} \tag{8．6}$$

であるから，結局，非定常不規則外力に対する振動系の応答変位の任意時刻における分散　$\sigma_y{}^2(t)$ は，外力の非定常スペクトル　$f_{\boldsymbol{x}}(t,\omega)$ と変調関数 $A(t,\omega)$，および振動系の伝達関数 $H(\omega)$ を用いて，次式によってあたえられることがわかる。

$$\sigma_y{}^2(t)=\int_{0}^{\infty}f_{\boldsymbol{x}}(t,\omega)\frac{|H(\omega)|^2|G(t,\omega)|^2}{|A(t,\omega)|^2}d\omega \tag{8．7}$$

次に応答速度 $\dot{\boldsymbol{y}}(t)$ については，式（８．１）より，

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{dG(t,\omega)}{dt}+i\omega G(t,\omega)\right\}e^{i\omega t}d\,Y(\omega) \tag{8.8}$$

となるので，

$$Q(t,\omega)=\frac{dG(t,\omega)}{dt}+i\omega G(t,\omega) \tag{8.9}$$

とおけば次式が得られる。

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}Q(t,\omega)e^{i\omega t}d\,\boldsymbol{Y}(\omega) \tag{8.10}$$

したがって $\dot{\boldsymbol{y}}(t)$ の分散 $\sigma_{\dot{y}}{}^2(t)$ は， $\boldsymbol{y}(t)$ の場合と同様にして，

$$\sigma_{\dot{y}}{}^2(t)=2\int_0^{\infty}|Q(t,\omega)|^2E\left[|d\,\boldsymbol{Y}(\omega)|^2\right] \tag{8.11}$$

で与えられる。しかるに式（８．４）と式（８．６）によれば，

$$E\left[|d\,\boldsymbol{Y}(\omega)|^2\right]=\frac{1}{2}f_{\boldsymbol{x}}(t,\omega)\frac{|H(\omega)|^2}{|A(t,\omega)|^2} \tag{8.12}$$

であり，式（８．12）を式（８．11）に代入すれば

$$\begin{aligned}\sigma_{\dot{y}}{}^2(t)&=\int_0^{\infty}f_{\dot{\boldsymbol{y}}}(t,\omega)d\omega\\&=\int_0^{\infty}f_{\boldsymbol{x}}(t,\omega)\frac{|H(\omega)|^2|Q(t,\omega)|^2}{|A(t,\omega)|^2}d\omega\end{aligned} \tag{8.13}$$

さらに，変位と速度の共分散関数 $R_{\boldsymbol{y}\dot{\boldsymbol{y}}}(t,s)$ については，やはり $\boldsymbol{Y}(\omega)$ の直交性より，式（８．１）と式（８．10）とによって

$$R_{\boldsymbol{y}\dot{\boldsymbol{y}}}(t,s)=\int_{-\infty}^{\infty}G(t,\omega)Q^*(s,\omega)e^{i\omega(t-s)}E\left[|d\,\boldsymbol{Y}(\omega)|^2\right] \tag{8.14}$$

で与えられる。ところが $R_{\boldsymbol{y}\dot{\boldsymbol{y}}}(t,s)$ が実関数であることより，若干の計算をおこなって次式が得られる。

$$\begin{aligned}R_{\boldsymbol{y}\dot{\boldsymbol{y}}}(t,s)=\int_{-\infty}^{\infty}&|G(t,\omega)|\,|Q^*(s,\omega)|\times\\&\cos\{\omega(t-s)+\delta_1(t,\omega)-\delta_2(s,\omega)\}E\left[|d\,\boldsymbol{Y}(\omega)|^2\right]\end{aligned} \tag{8.15}$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned}\delta_1(t,\omega)&=\arctan\left\{\frac{G_I(t,\omega)}{G_R(t,\omega)}\right\}\\\delta_2(t,\omega)&=\arctan\left\{\frac{Q_I{}^*(t,\omega)}{Q_R{}^*(t,\omega)}\right\}\end{aligned}\right\} \tag{8.16}$$

であり，式（8．16）より以下添字 R，I はそれぞれ複素数の実部と虚部を表す。

ここで　$s=t$　とすれば，時刻　t　における変位と速度との共分散　$\sigma_{y\dot{y}}{}^2(t)$　が次式で与えられる。

$$\sigma_{y\dot{y}}{}^2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}|G(t,\omega)|\,|Q^*(t,\omega)|\cos\{\delta_1(t,\omega)-\delta_2(t,\omega)\}E[|d\,Y(\omega)|^2] \tag{8．17}$$

さらに式（8．16）より，

$$\cos\{\delta_1(t,\omega)-\delta_2(t,\omega)\}=\frac{G_R(t,\omega)Q_R{}^*(t,\omega)+G_I(t,\omega)Q_I{}^*(t,\omega)}{|G(t,\omega)|\,|Q^*(t,\omega)|} \tag{8．18}$$

となるから，式（8．18）を式（8．17）へ代入すれば，

$$\begin{aligned}\sigma_{y\dot{y}}{}^2(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}\{G_R(t,\omega)Q_R{}^*(t,\omega)+G_I(t,\omega)Q_I{}^*(t,\omega)\}E[|d\,Y(\omega)|^2]\\&=2\int_0^{\infty}Re[G(t,\omega)Q^*(t,\omega)]E[|d\,Y(\omega)|^2]\end{aligned} \tag{8．19}$$

となる。ところが式（8．9）より，

$$\begin{aligned}Q(t,\omega)&=\frac{dG(t,\omega)}{dt}+i\omega G(t,\omega)\\&=\{\dot{G}_R(t,\omega)-\omega G_I(t,\omega)\}+i\{\dot{G}_I(t,\omega)+\omega G_R(t,\omega)\}\end{aligned} \tag{8．20}$$

である。ただし　$\dot{G}_R(t,\omega)$　および　$\dot{G}_I(t,\omega)$　は，それぞれ　$G_R(t,\omega)$　および　$G_I(t,\omega)$　の時間に関する導関数である。したがって　$Q^*(t,\omega)$　は次式のようになる。

$$Q^*(t,\omega)=\{\dot{G}_R(t,\omega)-\omega G_I(t,\omega)\}-i\{\dot{G}_I(t,\omega)+\omega G_R(t,\omega)\} \tag{8．21}$$

ゆえに，

$$Re[G(t,\omega)Q^*(t,\omega)]=G_R(t,\omega)\dot{G}_R(t,\omega)+G_I(t,\omega)\dot{G}_I(t,\omega) \tag{8．22}$$

となる。結局式（8．12）と式（8．22）を式（8．19）に代入すれば，次式が得られる。

$$\begin{aligned}\sigma_{y\dot{y}}{}^2(t)&=\int_0^{\infty}f_{y\dot{y}}(t,\omega)d\omega\\&=\int_0^{\infty}f_x(t,\omega)\frac{|H(\omega)|^2[G_R(t,\omega)\dot{G}_R(t,\omega)+G_I(t,\omega)\dot{G}_I(t,\omega)]}{|A(t,\omega)|^2}d\omega\end{aligned} \tag{8．23}$$

さらに変位と速度の相関係数　$\rho_{y\dot{y}}(t)$　は次式によって算定できる。

$$\rho_{y\dot{y}}(t)=\frac{\sigma_{y\dot{y}}{}^2(t)}{\sqrt{\sigma_y{}^2(t)}\sqrt{\sigma_{\dot{y}}{}^2(t)}} \tag{8．24}$$

以上のように，非定常不規則外力の非定常スペクトルと変調関数が与えられれば，式（８．７），（８．13），（８．23），および（８．24）によって，それぞれ１自由度線形振動系の変位，速度の各分散，変位と速度の共分散および変位と速度の相関係数を求めることができる。

８．２．２　数値解析例

土木構造物に作用する代表的な非定常不規則変動外力として地震力を想定し，ある規模の地震動を受ける振動系の応答変位が，振動継続時間に少なくとも一回，確率量で与えられる閾値を超過する確率すなわち初通過確率について考えてみる。

地震動としては El Centro地震波のＮＳ成分を用い，振動系の固有振動数は2.0 Hz，減衰定数は0.05とする。

まず図８．１に解析手順の流れを示す。いうまでもなく，単に一つの地震動の解析によって得られた非定常スペクトルを，ただちに同一のマグニチュード，震源距離，地盤条件における地震動の非定常スペクトルとして採用することには無理があるが，その問題は将来にわたる重要課題とし，ここではとりあえず El Centro地震波の非定常スペクトルをそのまま同一条件・同一規模の地震動の非定常スペクトルとみなして，閾値の大きさや変動係数などと振動系の初通過確率との関係を検討する。

さて El Centro地震動の非定常スペクトル解析の結果についてはすでに前章で示した。したがってここでは，式（８．７），（８．13）および（８．24）によって算出した振動系の応答変位，応答速度の各分散と両者の相関係数の時間的変化を示すに止める（図８．２）。ただし図には，応答の主要部分（$0 \leqq t \leqq 7.8$ (s)）のみを示している。なお式（８．７）と（８．13）の数値積分は，図８．３に示すように，各着目周波数間のスペクトルが，対数軸に対して直線的に変化するものと仮定し，積分値に影響を及ぼす周波数領域を積分域とし，台形則によって求めた。ただし，変位と速度の共分散を算定する式（８．23）については，$f_{y\dot{y}}(t, \omega)$ が負値をとる領域があるため，対数をとることなく，シンプソンの積分公式を使用した。

応答変位の分散の最大値は図８．２（ａ）に示したとおり約6.7 cm² であるから，そのr.m.s.値は約2.6 cmである。この値と El Centro地震動に対する変位応答スペクトルより得られる変位の最大値（確定量で約6.7 cm）との定量的な関係を不規則振動論的見地より比較してみれば，非定常スペクトルにより与えられる地震動を受ける振動系の応答の統計量を，図８．１に示した手順によって算定する方法の妥当性が推察できる。この点については，後述する事例研究の所でも簡単に触れる。

初通過確率　$P_f(t_d)$　については，応答が正規過程に従い，閾値　$\boldsymbol{B}$ も正規分布に従うものとして，応答過程のレベル超過率を用いた次式によって近似的に算定した[10]。

$$P_f(t_d) = 1 - P_{s,y}(0)\exp\left\{-2\int_0^{t_d} \nu_y{}^+(t)dt\right\} \qquad (8.25)$$

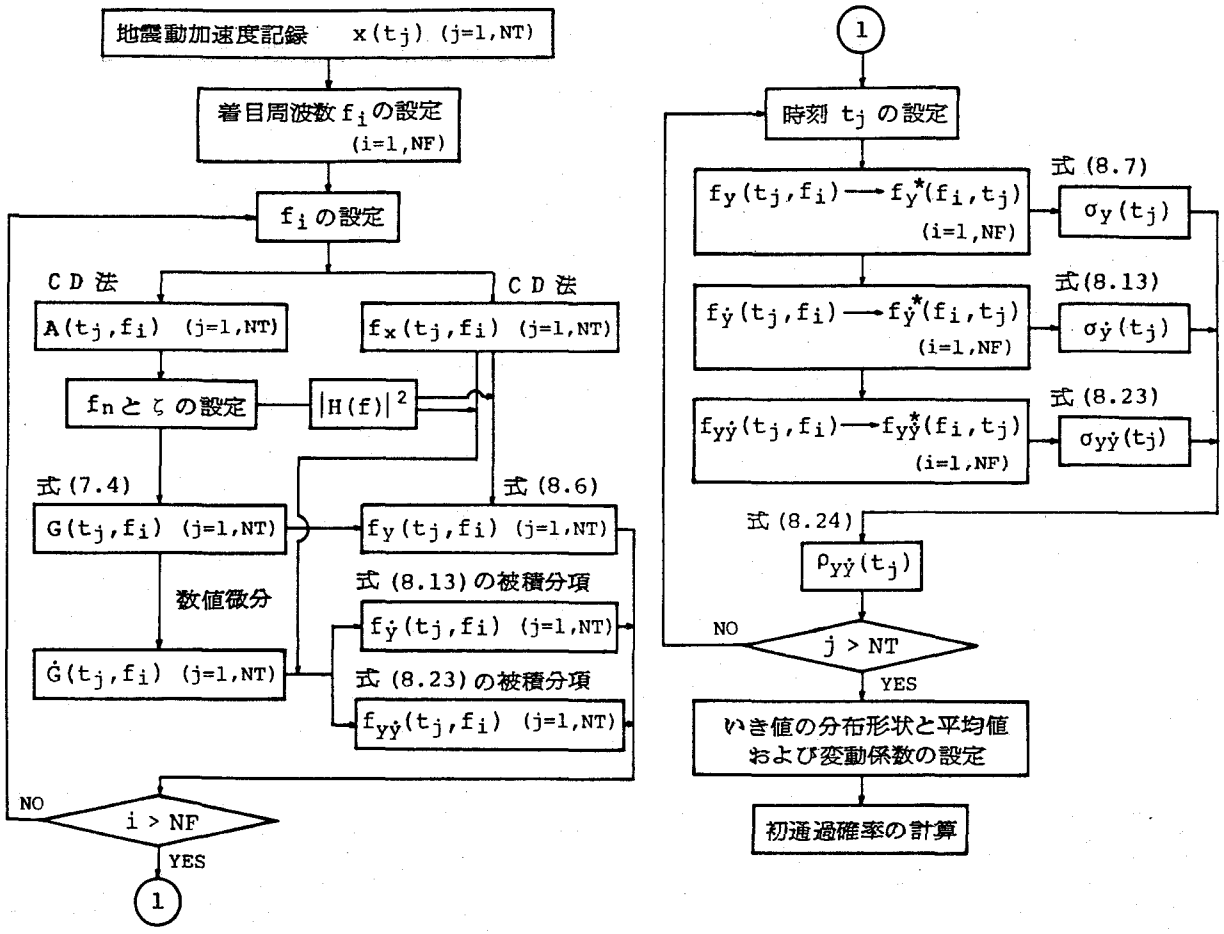
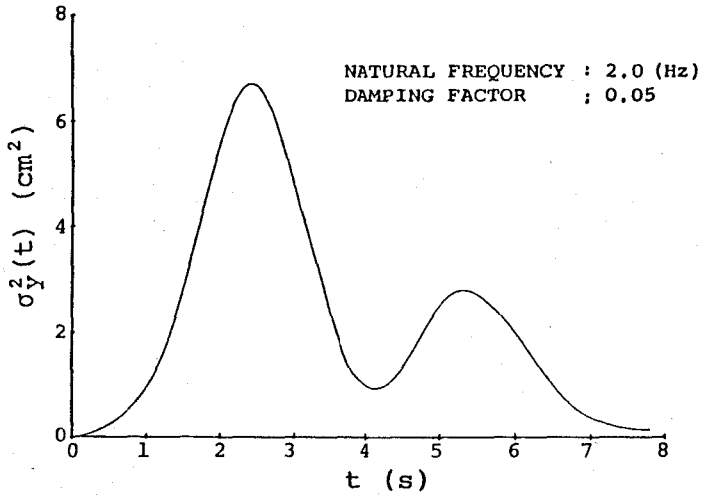
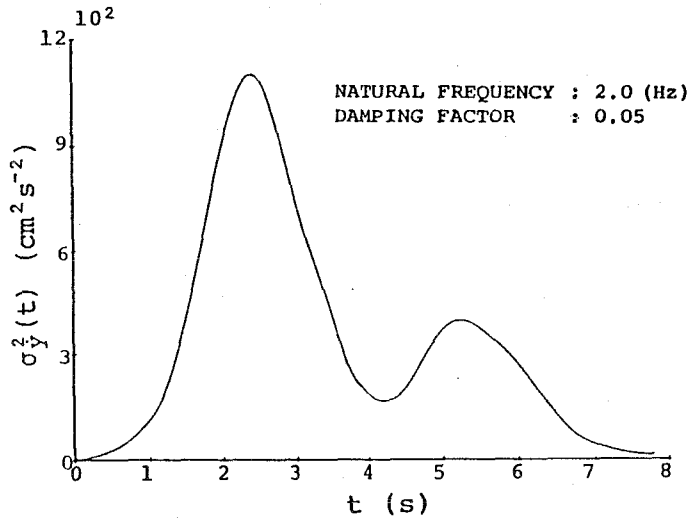


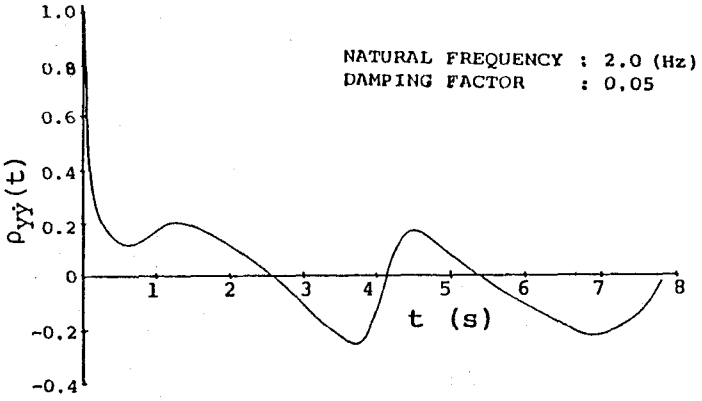
図8．1　初通過確率の計算手順の流れ



（ａ） 変位の分散



（ｂ） 速度の分散



（ｃ） 変位と速度の相関係数

図８．２ 応答の各種統計量の時間的変化

式中，

$$P_{s,y}(0) = \mathrm{Prob}[|\boldsymbol{y}(0)| \leqq \boldsymbol{B}]$$

$$\nu_{\boldsymbol{y}}{}^{+}(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{y}}(t)}{\sigma_y(t)}\left[\frac{1-\rho_{y\dot{y}}{}^2(t)}{\mu(t)}\right.$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{\bar{m}^2(t)}{2\mu^2(t)}\right\} + \frac{\rho_{y\dot{y}}(t)}{\sqrt{\pi}\,\bar{m}(t)\delta_B}\int_{-\infty}^{\infty} z$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{(1+\bar{m}^2(t)\delta_B{}^2)z^2 - 2\bar{m}(t)z + \bar{m}^2(t)}{2\bar{m}^2(t)\delta_B}\right\}$$

$$\left.\cdot\ \mathrm{Erf}\left\{-\frac{\rho_{y\dot{y}}(t)z}{\sqrt{2(1-\rho_{y\dot{y}}{}^2(t))}}\right\}dz\right] \qquad (8.26)$$

$$\mu(t) = \sqrt{1-\rho_{y\dot{y}}{}^2(t) + \bar{m}^2(t)\delta_B{}^2},$$

$$\bar{m}(t) = \bar{B}/\sigma_y(t),$$

$\bar{B}$ ：閾値の正および負の平均値

δ_B ：閾値の変動係数

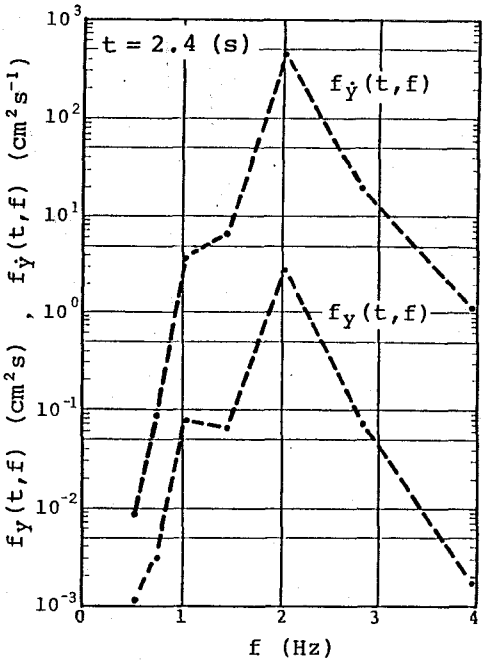


図8．3　変位および速度の非定常スペクトル

閾値の変動係数 δ_B と，その平均値 $\bar{B}$ と $\sigma_y(t)$ の最大値との比 $\bar{m}^*$（最小中央安全率）を変化させて算定した結果をまとめて図8．4に示す。なお式（8．26）の右辺の定積分は，ガウス．エルミート公式によっておこない，分点数は68とした。

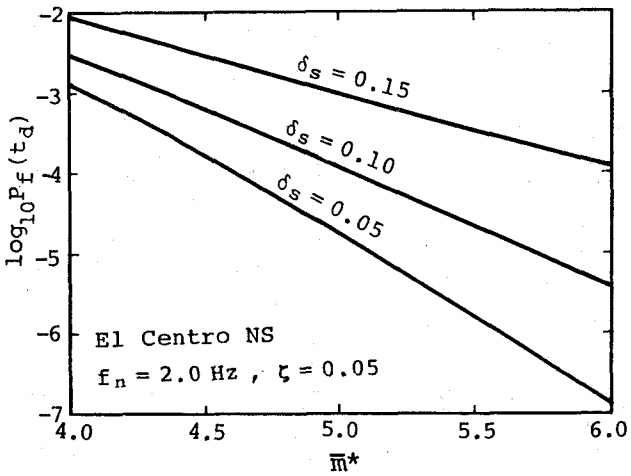


図8．4　最小中央安全率と初通過確率との関係

同図より $\bar{m}^*$ の増加にともなって，初通過確率に及ぼす閾値の変動係数の影響が強くなっていることが理解できる。たとえば $\delta_B=0.05$ の場合と $\delta_B=0.15$ の場合を比較してみれば，$\bar{m}^*$ が4.0 のときには初通過確率に1桁以内の差異しか認められないのに対し，$\bar{m}^*$ が6.0 のときには，3桁近い差になることがわかる。

逆に，初通過確率の許容値 $P_{f,a}$ が設定できれば，$P_{f,a}$ と δ_B に対応する閾値の平均値 $\bar{B}_a$ を同図により求めることができる。仮に $P_{f,a}=1\times10^{-3}$，$\delta_B=0.05$ としてみれば，$\bar{m}^*\fallingdotseq4.07$ であるから，$\bar{B}_a=\bar{m}^*\sigma_{y,max}\fallingdotseq10.6$（cm）となる。同様に $\delta_B=0.10$，0.15に対しては，それぞれ $\bar{B}_a\fallingdotseq11.3$（cm），12.9（cm）となる。$P_{f,a}=1\times10^{-4}$ とすれば，当然ながら，それらはそれぞれ12.0（cm），13.1（cm）および15.8（cm）に増加する。

さて古川[1]は，田治見が提案した地震動の加速度スペクトル，あるいは El Centro 1940 NS，Taft 1952 N21E の記録に類似したスペクトル（ただし，定常スペクトル）によって地震動をモデル化し，初通過理論によって地震力を受けるラーメン構造物の最適設計問題を論じている。ただし制約条件となる限界変位や限界応力度などは確定量とみなしている。振動の継続時間や刺激係数が同文献には与えられていないので，本研究との比較はできないが，このように閾値を公称値や特性値で代表させる場合は多い。したがって，地震動の非定常性をより厳密に考慮して算出した本初通過確率をその種の研究成果と比較．検討するためには，平均値と変動係数で表した上述の計算結果を，特性値などに換算しておくことが望ましい。

ここでは，変動係数の大きさにかかわらず閾値の特性値 B_c が非超過確率5％の点で与えられるもと仮定し，$\bar{m}_c^*=B_c/\sigma_{y,max}$ で定義される $\bar{m}_c^*$ を $P_{f,a}$ と関係づけておく。$B_c=\bar{B}(1-1.645\sigma_B)$ なる関係を利用すれば，簡単な計算によって，$P_{f,a}=1\times10^{-3}$ のとき，$\delta_B=0.05$，0.10，0.15に対し，それぞれ $\bar{m}_c^*=3.73$，3.63，3.74であることがわかる。また $P_{f,a}=1\times10^{-4}$ とすれば，それらはそれぞれ $\bar{m}_c^*=4.24$，4.20，4.60となる。

8．3　事例研究 ──地震動を受ける塔状構造物の初通過破壊確率 ──

8．3．1　非定常応答および応答速度の分散および共分散

塔状構造物の地震応答に対する運動方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{EI(z)\frac{\partial^2 \boldsymbol{y}}{\partial z^2}\right\}+c(z)\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial t}+m(z)\frac{\partial^2 \boldsymbol{y}}{\partial t^2}=-m(z)\boldsymbol{x}(t) \qquad (8.27)$$

式中，$\boldsymbol{y}(z,t)$ は塔の地盤に対する相対変位，z は高度，$EI(z)$ は曲げ剛度，$c(z)$ は減衰係数，$m(z)$ は単位長当りの質量，$\boldsymbol{x}(t)$ は地盤の水平加速度である。ここで式（8．27）の解を自由振動モード $\varphi_r(z)$ で展開し，

$$\boldsymbol{y}(z,t)=\sum_{r=1}^{\infty}\varphi_r(z)\alpha_r(t)$$

と表し，さらに振動工学の慣用法に従い減衰係数 $c(z)$ に関し，

$$\int_0^H c(z)\varphi_q(z)\varphi_r(z)dz = \begin{cases} C_r(r=q) \\ 0 \quad (r \neq q) \end{cases} \tag{8.28}$$

が成立するものと仮定すれば，周知のとおり，規準座標 $\alpha_r(t)$ は，次式で与えられる1自由度振動系の運動方程式に従う。

$$\ddot{\alpha}_r + 2\zeta_r\omega_{n,r}\dot{\alpha}_r + \omega_{n,r}{}^2\alpha_r = P_r(t) \tag{8.29}$$

式中，

$$\left.\begin{aligned} &P_r(t) = \beta_r x(t) \\ &\beta_r = -\left(\int_0^H m(z)\varphi_r(z)dz\right) : \text{刺激係数} \\ &\zeta_r = \frac{C_r}{2\omega_{n,r}} \end{aligned}\right\} \tag{8.30}$$

であり，H は塔の高さ，$\omega_{n,r}$ は r 次の固有円振動数(rad/s) である。

したがって $\alpha_r(t)$ が変調関数 $G_r(t,\omega)$ と直交過程 $Y_r(\omega)$ によって

$$\alpha_r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_r(t,\omega)e^{i\omega t}d\,Y_r(\omega) \tag{8.31}$$

と表せるならば，

$$y(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\varphi_r(z)G_r(t,\omega)e^{i\omega t}d\,Y_r(\omega) \tag{8.32}$$

となる。ただし，$G_r(t,\omega)$ は，$\alpha_r(t)$ を8．2．1における $y(t)$ と考えることにより，次式で算定できる。

$$G_r(t,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_r(\tau)A_r(t-\tau,\omega)\frac{e^{-i\omega\tau}}{H_r(\omega)}d\tau \tag{8.33}$$

式中，$h_r(\tau)$ は r 次の振動モードに対する単位衝撃応答関数，$A_r(t,\omega)$ は $P_r(t)$ に関する変調関数 $(=\beta_r A(t,\omega))$，$A(t,\omega)$ は地震加速度 $x(t)$ に関する変調関数，$H_r(\omega)$ は r 次の振動モードに対する伝達関数である。

式(8．32)より $y(z,t)$ の共分散関数 $R_{y_z}(t,s)$ は，$Y_r(\omega)$ の直交性により，

$$\begin{aligned} R_{y_z}(t,s) = &\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\varphi_q(z)\varphi_r(z)G_q(t,\omega)G_r{}^*(s,\omega)\cdot \\ &e^{i\omega(t-s)}E[d\,Y_q(\omega)d\,Y_r{}^*(\omega)] \end{aligned} \tag{8.34}$$

となる。

ここで $s=t$ とし，さらに各モードの固有振動数が互いに十分離れている場合には，いわゆるカップリングの影響が無視できることを考慮すれば，$y(z,t)$ の時刻における分散 $\sigma_{y_z}{}^2(t)$ として次式が得

られる。

$$\sigma_{y_z}{}^2(t)=2\int_0^\infty\sum_{r=1}^{\infty}\varphi_r{}^2(z)|G_r(t,\omega)|^2E[|d\,\boldsymbol{Y}_r(\omega)|^2] \tag{8.35}$$

しかるに，式（8．3）との対応より，　$2|G_r(t,\omega)|E[|d\,\boldsymbol{Y}_r(\omega)|^2]$ は，一般化力　$\boldsymbol{P}_r(t)$ に対する1自由度振動系の応答　$\boldsymbol{\alpha}_r(t)$ の非定常スペクトル　$f_{\boldsymbol{\alpha}_r}(t,\omega)$ と次式によって関係づけられる。

$$f_{\boldsymbol{\alpha}_r}(t,\omega)\ =2|G_r(t,\omega)|^2E[|d\,\boldsymbol{Y}_r(\omega)|^2] \tag{8.36}$$

さらに　$f_{\alpha_r}(t,\omega)$　は式（8．4）の　$f_{\boldsymbol{y}}(t,\omega)$ に対応し，次式で与えられる。

$$f_{\boldsymbol{\alpha}_r}(t,\omega)=f_{\boldsymbol{P}_r}(t,\omega)\frac{|H_r(\omega)|^2|G_r(t,\omega)|^2}{|A_r(t,\omega)|^2} \tag{8.37}$$

ただし，　$f_{\boldsymbol{P}_r}(t,\omega)$　は一般化力　$\boldsymbol{P}_r(t)$　の非定常スペクトルである。

したがって，式（8．36）と式（8．37）を式（8．35）に代入すれば，

$$\sigma_{y_z}{}^2(t)=\int_0^\infty\sum_{r=1}^{\infty}\varphi_r{}^2(z)f_{\boldsymbol{P}_r}(t,\omega)\frac{|H_r(\omega)|^2|G_r(t,\omega)|^2}{|A_r(t,\omega)|^2}d\omega \tag{8.38}$$

が得られ，さらに　$f_{\boldsymbol{P}_r}(t,\omega)$ が地動加速度の非定常スペクトル　$f_{\boldsymbol{x}}(t,\omega)$ によって

$$f_{\boldsymbol{P}_r}(t,\omega)=\beta_r{}^2f_{\boldsymbol{x}}(t,\omega) \tag{8.39}$$

と表せることと，式（8．33）の関係式を考えれば，次式が成立することがわかる。

$$\sigma_{y_z}{}^2(t)=\int_0^\infty\frac{f_{\boldsymbol{x}}(t,\omega)}{|A(t,\omega)|^2}\sum_{r=1}^{\infty}\beta_r{}^2\varphi_r{}^2(z)\,|H_r(\omega)|^2|G_{r,0}(t,\omega)|^2d\omega \tag{8.40}$$

ただし，

$$G_{r,0}(t,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h_r(\tau)A(t-\tau,\omega)\frac{e^{-i\omega\tau}}{H_r(\omega)}d\tau \tag{8.41}$$

次に，応答速度の分散についても，8．2．1と同様の手順により算定することができる。すなわち式（8．32）より

$$\dot{\boldsymbol{y}}(z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\varphi_r(z)\left\{\frac{dG_r(t,\omega)}{dt}+i\omega G_r(t,\omega)\right\}e^{i\omega t}d\,\boldsymbol{Y}_r(\omega) \tag{8.42}$$

であるから，

$$Q_r(t,\omega)=\frac{dG_r(t,\omega)}{dt}+i\omega G_r(t,\omega) \tag{8.43}$$

とおけば，

$$\dot{\boldsymbol{y}}(z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\varphi_r(z)Q_r(t,\omega)e^{i\omega t}d\,\boldsymbol{Y}_r(\omega) \tag{8.44}$$

となり， $\dot{y}(z, t)$ の分散 $\sigma_{\dot{y}_z}{}^2(t)$ は $y(z, t)$ の場合と同様に次式で与えられる。

$$\sigma_{\dot{y}_z}{}^2(t) = 2\int_0^\infty \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \varphi_q(z)\varphi_r(z)Q_q(t, \omega)Q_r{}^*(t, \omega)E[d\,\boldsymbol{Y}_q(\omega)d\,\boldsymbol{Y}_r(\omega)] \tag{8.45}$$

モード間のカップリングの項が無視できる場合には，

$$\sigma_{\dot{y}_z}{}^2(t) = 2\int_0^\infty \sum_{r=1}^{\infty} \varphi_r{}^2(z)|Q_r(t, \omega)|^2 E[|d\,\boldsymbol{Y}_r(\omega)|^2] \tag{8.46}$$

となり，式（8．36）と式（8．37）より，

$$E[|d\,\boldsymbol{Y}_r(\omega)|^2] = \frac{1}{2} f_{P_r}(t, \omega)\frac{|H_r(\omega)|^2}{|A_r(t, \omega)|^2}d\omega \tag{8.47}$$

であるから，式（8．46）は

$$\sigma_{\dot{y}_z}{}^2(t) = \int_0^\infty \sum_{r=1}^{\infty} \varphi_r{}^2(z) f_{P_r}(t, \omega)\frac{|H_r(\omega)|^2|Q_r(t, \omega)|^2}{|A_r(t, \omega)|^2}d\omega \tag{8.48}$$

となる。ここで式（8．39）の関係を用いれば，結局次式を得ることができる。

$$\sigma_{\dot{y}_z}{}^2(t) = \int_0^\infty \frac{f_{\boldsymbol{x}}(t, \omega)}{|A(t, \omega)|^2} \sum_{r=1}^{\infty} \beta_r{}^2\varphi_r{}^2(z)|H_r(\omega)|^2|Q_{r,0}(t, \omega)|^2 d\omega \tag{8.49}$$

ただし，

$$Q_{r,0}(t, \omega) = \frac{dG_{r,0}(t, \omega)}{dt} + i\omega G_{r,0}(t, \omega) \tag{8.50}$$

さらに変位と速度の共分散についても，1自由度振動系との対応により，

$$\begin{aligned}\sigma_{y_z\dot{y}_z}{}^2(t) = 2\int_0^\infty \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \varphi_q(z)\varphi_r(z)Re[G_q(t, \omega)Q_r{}^*(t, \omega)]\cdot \\ E[d\,\boldsymbol{Y}_q(\omega)d\,\boldsymbol{Y}_r{}^*(\omega)]\end{aligned} \tag{8.51}$$

となり，各モード間のカップリングの影響を無視できる場合には，

$$\sigma_{y_z\dot{y}_z}{}^2(t) = 2\int_0^\infty \sum_{r=1}^{\infty} \varphi_r{}^2(z)Re[G_r(t, \omega)Q_r{}^*(t, \omega)]E[|d\,\boldsymbol{Y}_r(\omega)|^2] \tag{8.52}$$

となることがわかる。ここで式（8．43）より，

$$Re[G_r(t, \omega)Q_r{}^*(t, \omega)] = G_{r,R}(t, \omega)\dot{G}_{r,R}(t, \omega) + G_{r,I}(t, \omega)\dot{G}_{r,I}(t, \omega)$$

であること， $E[|d\,\boldsymbol{Y}_r(\omega)|^2]$ については式（8．47）が成立すること，さらに式（8．39）の関係を考えれば，式（8．52）を次式のように書き改めることができる。

$$\begin{aligned}\sigma_{y_z\dot{y}_z}{}^2(t) = \int_0^\infty \frac{f_{\boldsymbol{x}}(t, \omega)}{|A(t, \omega)|^2} \sum_{r=1}^{\infty} \beta_r{}^2\varphi_r{}^2(z)|H_r(\omega)|^2 \times \\ [G_{r,0,R}(t, \omega)\dot{G}_{r,0,R}(t, \omega) + G_{r,0,I}(t, \omega)\dot{G}_{r,0,I}(t, \omega)]d\omega\end{aligned} \tag{8.53}$$

高度 z の位置における変位と速度の相関係数 $\rho_{y_z\dot{y}_z}(t)$ は，定義により次式で与えられる。

$$\rho_{y_z\dot{y}_z}(t)=\frac{\sigma_{y_z\dot{y}_z}{}^2(t)}{\sqrt{\sigma_{y_z}{}^2(t)}\sqrt{\sigma_{\dot{y}_z}{}^2(t)}} \tag{8.54}$$

さて，最小断面係数に対応する縁応力度 $s(z,t)$ と，その時間的導関数 $\dot{s}(z,t)$ の分散あるいはそれらの共分散の表式については，縁距離 $\eta(z)$ を用いて表される。

$$s(z,t)=-E\eta(z)\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \tag{8.55}$$

なる関係を利用し，

$$\psi_r(z)=-E\eta(z)\frac{d^2\varphi_r}{dz^2} \tag{8.56}$$

で定義される $\psi_r(z)$ により，それぞれ式（8．40），（8．49），（8．53）を用いて，以下のように導出される。すなわち，

$$\sigma_{s_z}{}^2(t)=\int_0^\infty\frac{f_x(t,\omega)}{|A(t,\omega)|^2}\sum_{r=1}^{\infty}\beta_r{}^2\psi_r{}^2(z)|H_r(\omega)|^2|G_{r,0}(t,\omega)|^2d\omega \tag{8.57}$$

$$\sigma_{\dot{s}_z}{}^2(t)=\int_0^\infty\frac{f_x(t,\omega)}{|A(t,\omega)|^2}\sum_{r=1}^{\infty}\beta_r{}^2\psi_r{}^2(z)|H_r(\omega)|^2|Q_{r,0}(t,\omega)|^2d\omega \tag{8.58}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{s_z\dot{s}_z}{}^2(t)=&\int_0^\infty\frac{f_x(t,\omega)}{|A(t,\omega)|^2}\sum_{r=1}^{\infty}\beta_r{}^2\psi_r{}^2(z)|H_r(\omega)|^2\cdot\\&[G_{r,0,R}(t,\omega)\dot{G}_{r,0,R}(t,\omega)+G_{r,0,I}(t,\omega)\dot{G}_{r,0,I}(t,\omega)]d\omega\end{aligned} \tag{8.59}$$

そして $s(z,t)$ と $\dot{s}(z,t)$ との相関係数 $\rho_{s_z\dot{s}_z}(t)$ は，

$$\rho_{s_z\dot{s}_z}(t)=\frac{\sigma_{s_z\dot{s}_z}{}^2(t)}{\sqrt{\sigma_{s_z}{}^2(t)}\sqrt{\sigma_{\dot{s}_z}{}^2(t)}} \tag{8.60}$$

によって算定できる。

8．3．2 数値解析例

地震動の非定常スペクトルとしては，前節と同様 El Centro地震波の解析により得られたものを用いて＊，第4章で取り上げた小山タワー[11] の非定常応答の統計量と，降伏破壊に対する初通過破壊確率について検討する。なおタワーの基部は完全に固定されているものと仮定し，その基部に水平地震動が作用するものとしている。

タワーの構造諸元や節点番号などの詳細については，すでに第4章に示したので，ここでは，3次の

＊ただし，最大加速度を500gal[16),17)] とし，着目周波数としてタワーの1次および2次の固有振動数に相当する0.45Hzと2.58Hzを付け加えている。

スプライン関数で近似した１次と２次の振動モードと刺激係数および７個の節点における $\psi_r(z)$（式（８．56））の値のみを図８．５に示しておく。

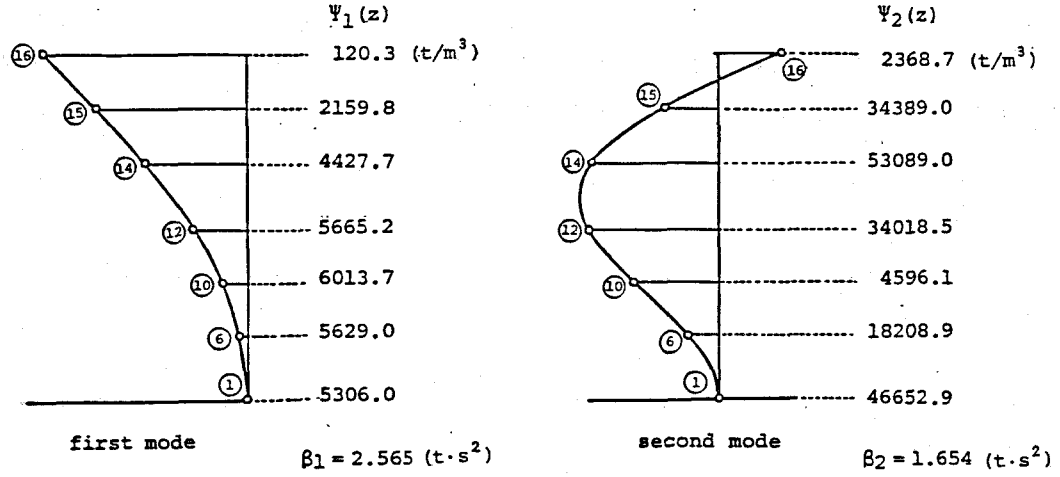
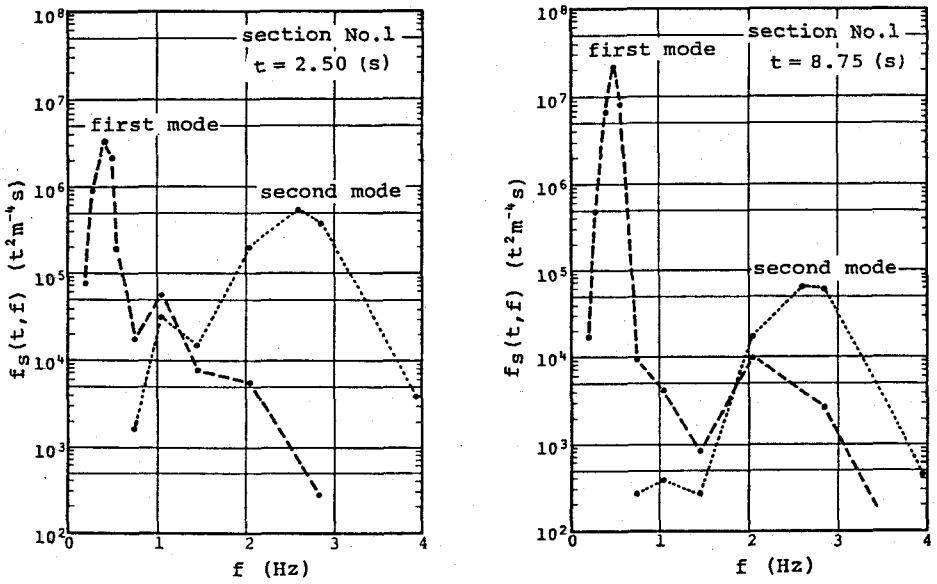


図８．５　スプライン関数で近似した小山タワーの
規準振動モードと $\psi_r(z)$ および β_r の値

安全性を照査する断面は，１次の振動モードに対する $\psi_1(z)$ が相対的に大きい節点番号⑩に対応する断面（以下では断面10と称する）と，２次モードにおける $\psi_2(z)$ の大きい節点番号⑭に対応する断面（以下，断面14と呼ぶ），および両モードに対する $\psi_r(z)$ の大きい基部断面とする。

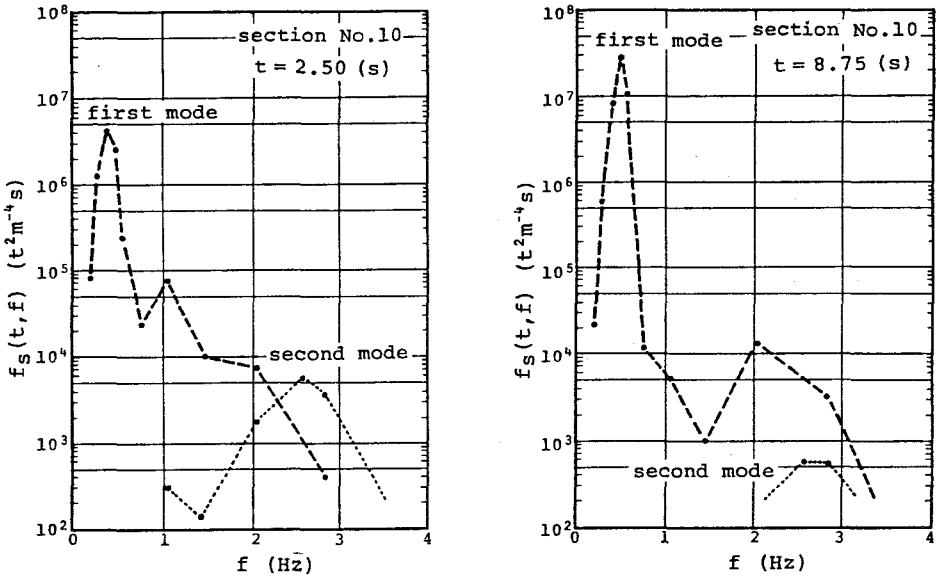
さて，図８．６（ａ），（ｂ）は，それぞれ２次モード応答および１次モード応答が卓越する時刻



（ａ）　ｔ＝2.50（ｓ）　　（ｂ）　ｔ＝8.75（ｓ）

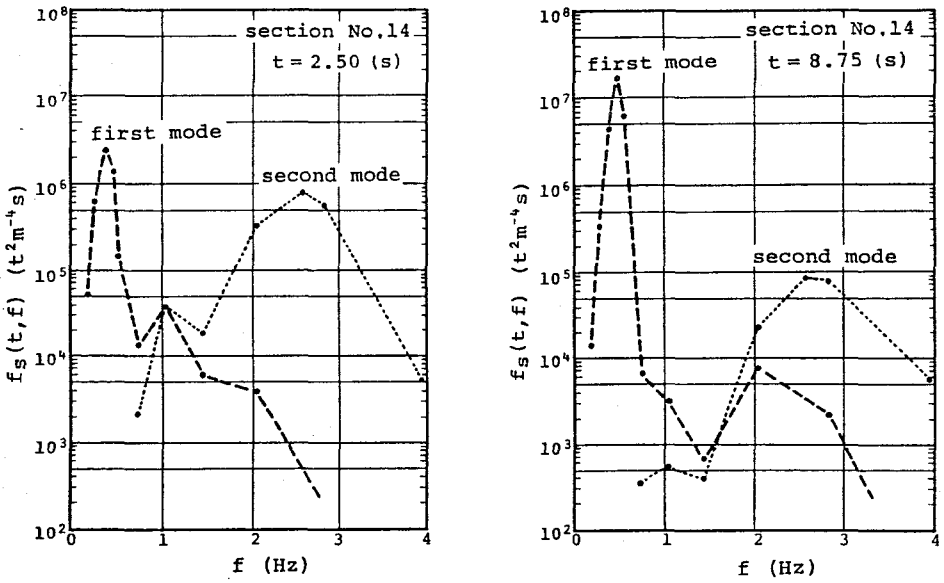
図８．６　基部断面における縁応力度の非定常スペクトル

2.5 秒および8.75秒における基部断面の縁応力度の非定常スペクトルである。同様に図8．7，図8．8は，それぞれ断面10および断面14に対する結果である。



（a）　t＝2.50（s）　　（b）　t＝8.75（s）

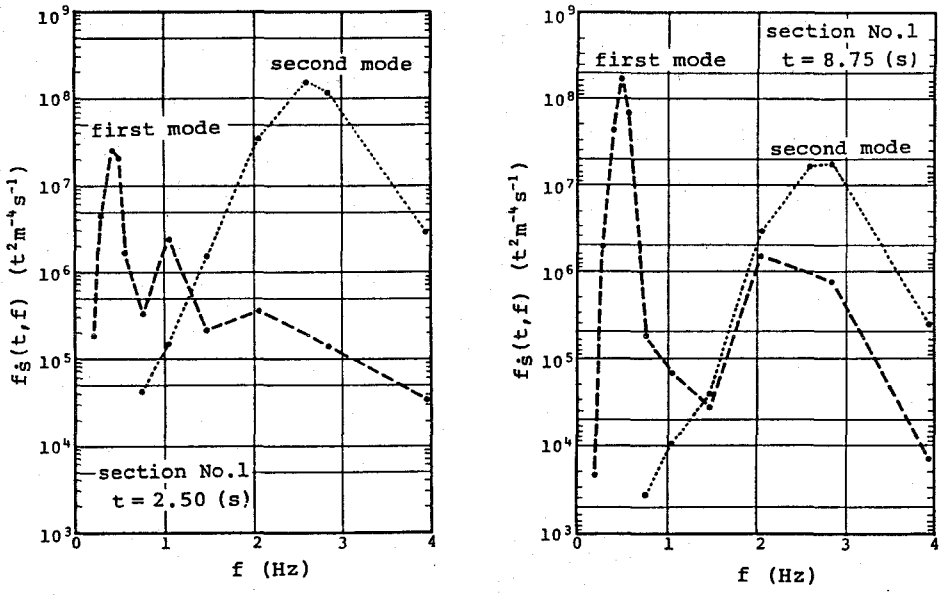
図8．7　断面10における縁応力度の非定常スペクトル



（a）　t＝2.50（s）　　（b）　t＝8.75（s）

図8．8　断面14における縁応力度の非定常スペクトル

これらの図より，いずれの時刻，いずれの断面においても，1次の振動モードが卓越していることがわかる。特に断面10の縁応力度は，時刻にかかわらず，1次の振動モードのみに支配されている。これはいうまでもなく，断面10では2次モードに対する $\psi_r(z)$ が，他の断面に比べて著しく小さいことによるものである。一方，基部断面と断面14における縁応力度には，2次モードの影響もわずかながら現れており，特に t =2.50（秒）ではその傾向が強い。なお，縁応力度の時間的変化率のスペクトルについては，基部断面に対する結果のみを図8．9に掲げる。当然ではあるが，応力度の時間的変化率には，2次モード応答の影響が非常に強く現れている。

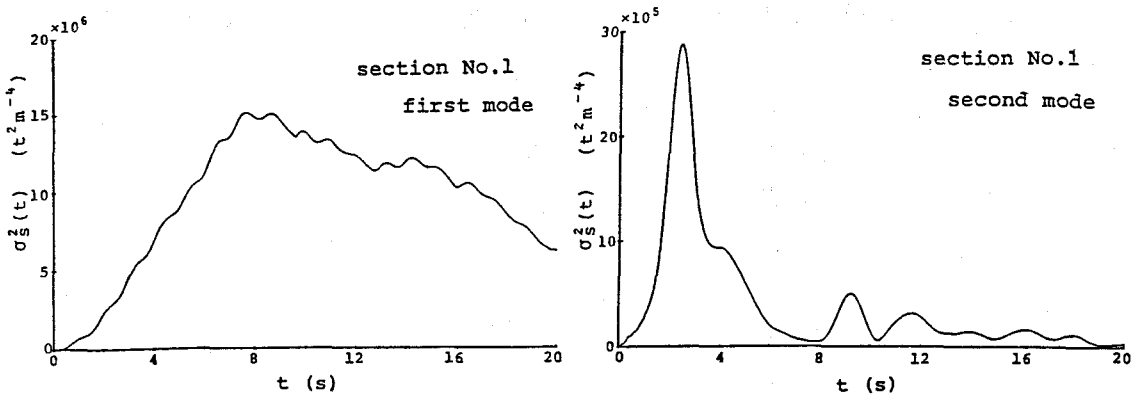


（a）　t =2.50（s）　　（b）　t =8.75（s）

図8．9　基部断面における縁応力度の時間的変化率の非定常スペクトル

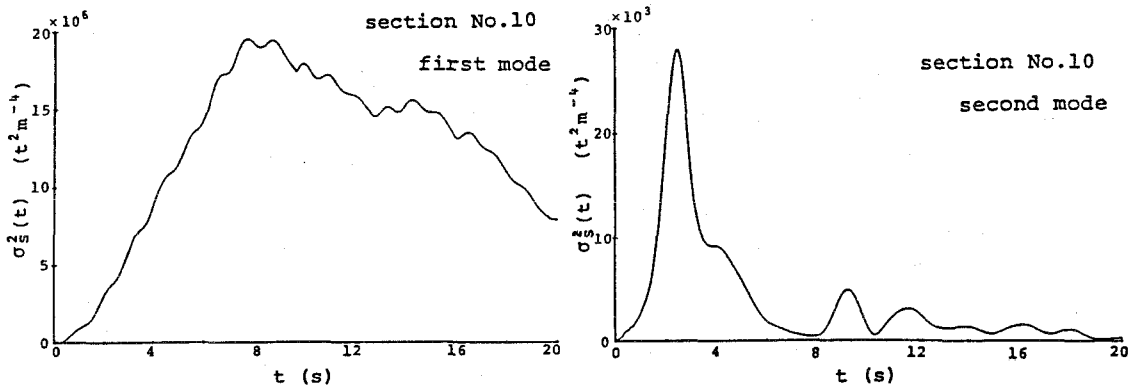
地震動の非定常性と上述のタワーの応答の非定常性との関係は，第7章の図7．3に示した地震動の非定常スペクトルの時間的推移とタワーの動的特性を勘案すれば理解できる。すなわち，地震動に含まれる2～3Hzの周波数成分は1.7 ～2.0 秒でピークに達する。この成分がタワーの2次モード（固有振動数は2.58Hz）を励起するため，時刻2.5 秒付近では2次モード応答が卓越することになる。これに対して，1次モード応答が時刻8秒付近で最大になるのは，減衰定数が0.014 と非常に小さいために振動継続時間が長くなることに加えて，その固有振動数0.45Hzに近い地震動の低周波数成分が，時刻4～7秒でかなり大きくなることに起因するものと考えられる。

さて1自由度振動系の場合と同様に，各時刻における各モード応答の非定常スペクトルを，周波数軸上で数値積分して得られた各断面の縁応力度の分散の時間的変化を，図8．10～図8．12に示す。また3断面に対し，それぞれ2次までのモード応答を加え合せた結果を図8．13に示す。図8．13より，縁



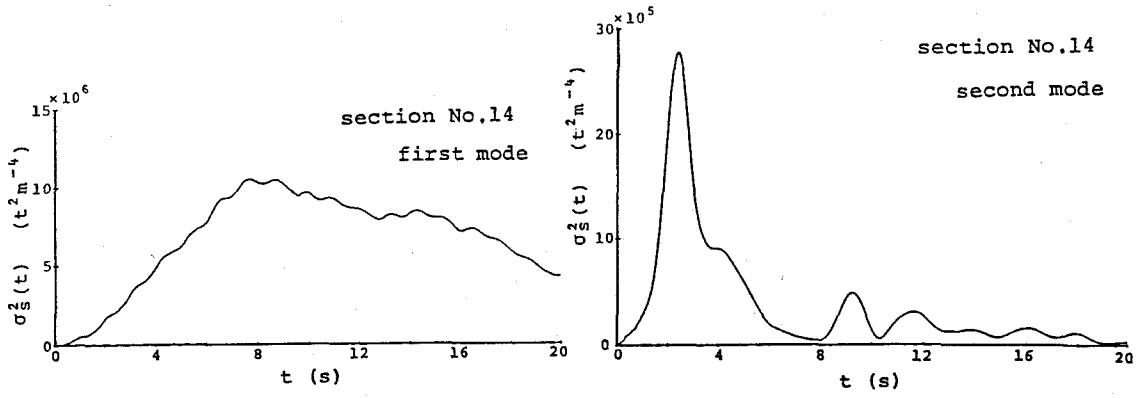
（ａ）　１次モード　　（ｂ）　２次モード

図８．10　基部断面における縁応力度の分散の時間的推移



（ａ）　１次モード　　（ｂ）　２次モード

図８．11　断面10における縁応力度の分散の時間的推移



（ａ）　１次モード　　（ｂ）　２次モード

図８．12　断面14における縁応力度の分散の時間的推移

応力度の分散は断面10で最大になることが理解できる。その値はr.m.s.値に換算して，439.7 kg/ cm² である。これに対し基部断面および断面14における縁応力度の最大r.m.s.値は，それぞれ392.8 kg/ cm² 330.7 kg/ cm² である。

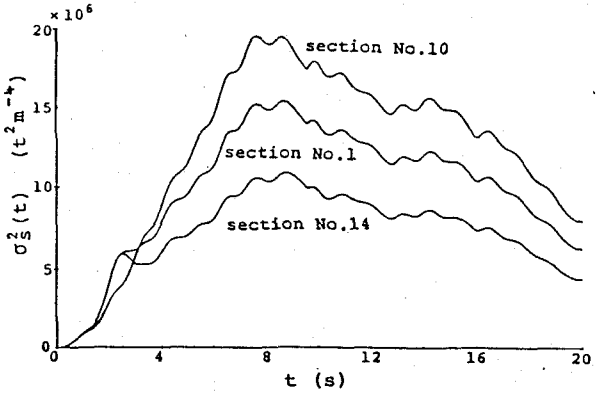


図8．13　各断面における縁応力度 の分散の時間的推移

さらに図8．14および図8．15は，それぞれ各断面の縁応力度の時間的変化率の分散，および縁応力度とその時間的変化率の相関係数の時間的推移を示したものである。図8．14より，断面10の縁応力度の時間的変化率が他の2つの断面のそれに比べて非常に小さいことがわかる。また図8．15より，断面10における傾向が他の2断面と若干異なるものの，ほぼいずれの断面においても，縁応力度とその時間的変化率との相関係数は，地動加速度がピークになるころには非常に小さくなることが理解できる。

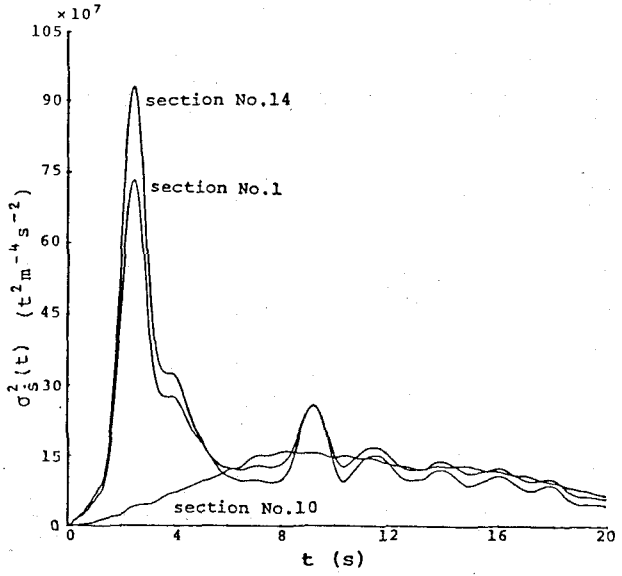
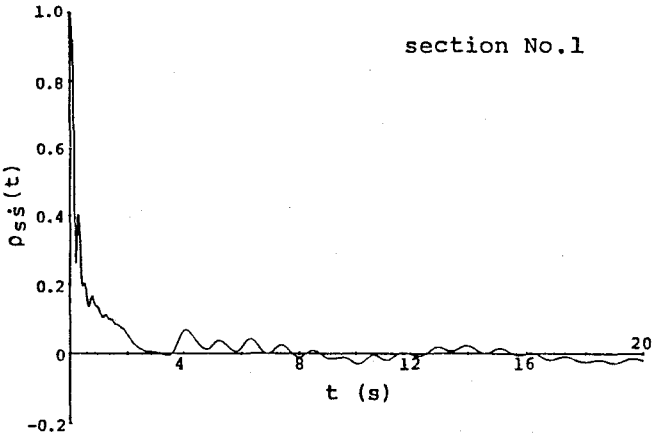
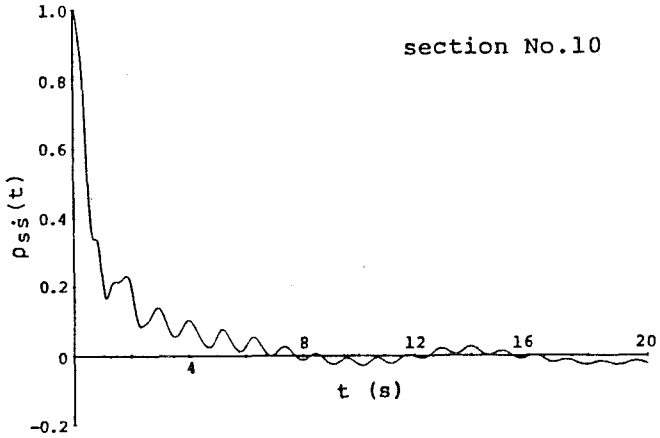


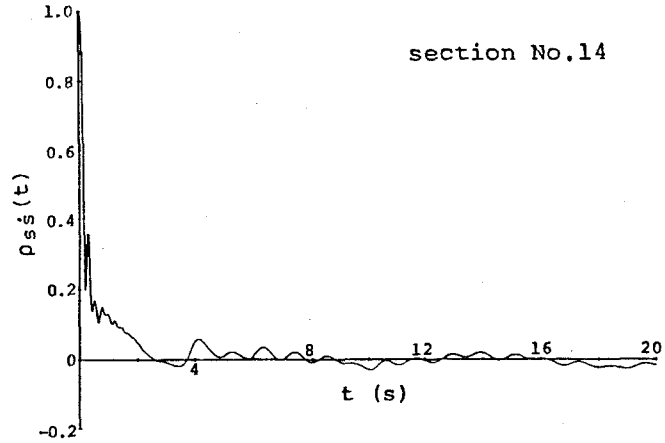
図8．14　各断面における縁応力度の時間的変化率の時間的推移



（ａ） 基部断面



（ｂ） 断面10



（ｃ） 断面14

図８．15 縁応力度とその時間的変化率との相関係数の時間的推移

以上に示した応答の各統計量を用いて，式（8．25）に基づいて各断面の降伏超過確率を算出した。ただし，塔体の材料であるSM41A の降伏点と変動係数は文献12) に与えられている数値を参考にして，それぞれ引張および圧縮に対し，共に2815 kg/cm^2 ，0.15とした。なお死荷重による各断面の圧縮応力度については，いずれも降伏超過確率に与える影響が非常に小さいので，無視した。その結果得られた各断面の降伏超過確率は，それぞれ2.4 $\times 10^{-5}$（基部断面），7.8 $\times 10^{-5}$（断面10），3.8 $\times 10^{-6}$（断面14）である。限られた計算結果ではあるが，現行の設計規準による構造物の破壊確率が1 ×（10^{-3}～10^{-5}）であり，かつ想定最大加速度が500 gal であることを考えると，本タワーの地震に対する信頼性は十分高いと判断できよう。

このように非定常スペクトル応答解析をおこなうことにより，種々の特性をもつ地震動に対する構造信頼性について数理的な議論を展開することができる。なお，ここでは地震動の最大加速度を確定的に想定したが，確率分布が明らかになれば，本手法により，最大加速度を確率量として構造物の降伏超過確率等を論じることが可能になる。今後の課題としたい。

8．4 結 言

本研究では，形状関数と定常確率過程の積の形では表すことのできない，一般的な非定常不規則外力を非定常スペクトルによって与え，そしてその種の外力に対する線形振動系の初通過破壊確率を近似的に算定する一連のプロセスを開発した。さらに同方法に基づいて，地震動に対する実際の構造物の応答の統計量や信頼度を算出し，同方法がほぼ満足のゆくものであると判断することができた。

本研究は，今後さらに，応答の正規性[13] や，構造物の動的特性のばらつき[14] などを考慮できる方法へ発展させるべきであると考えている。また耐震設計への実用的活用ということになれば，地震動の非定常スペクトルのモデル化が非常に大きな問題としてクローズアップされてくることはいうまでもない[15]。

将来これらの課題に関する研究が推進され，本研究が一日も早く実用化へと発展することを願うものである。

参 考 文 献

1） 古川浩平：土木構造物の耐震設計における最適化手法の応用に関する研究，京都大学学位論文，第4章，1981年3月．

2） 川上 純・篠塚正宣：既存の原子炉格納容器の信頼性解析，土木学会第39回年次学術講演会講演概要集第Ⅰ部，pp. 481-482, 1984 年10月．

3） 辰巳安良：地震応答スペクトルに関する確率論的考察，土木学会論文集，No.356／Ⅰ-3, pp.517-526, 1985年4月.

4） たとえば最近の例では，星谷　勝・辻田・満・樫出正人・永田　茂：断層モデルを用いたスロッシング解析の確率論的評価法，土木学会論文集，No.350／Ⅰ-2, pp.311-319, 1984年10月.

5） Spanos, P-T.D. and Lutes.L.D.:Probability of Response to Evolutionary Process, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.106, No.EM2, pp.213-224, Apr., 1980.

6） Spanos, P-T.D. and Solomos, G.P.:Barrier Crossing Due to Transient Excitation, Journal of the Engineering Mechanics, Division, ASCE, Vol.110, No.10, pp.20-36, Jan., 1984.

7） 小松定夫・藤原豪紀・中山隆弘：コンプレックス．ディモデュレーション法による非定常スペクトル解析（土木学会論文集に投稿中）.

8） 中山隆弘・小松定夫・角田直行：構造振動系の非定常スペクトル応答解析法について（土木学会論文集に投稿中）.

9） Shinozuka, M.:Random Processes with Evolutionary Power, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.96, No.EM4, pp.543-545, 1970.

10） 小松定夫・中山隆弘：材料強度のばらつきを考慮した非定常不規則振動体の初通過破壊確率，土木学会論文報告集，No.278, pp.25-38, 1978年10月.

11） 中山隆弘・小松定夫：構造物の動的応答倍率に対する信頼性工学的アプローチ（土木学会論文集に投稿中）.

12） 西村　昭：鋼材の機械的性質のばらつきについて，JSSC, Vol.5, No.38, pp.68-74, 1969年.

13） Grigoriu, M.:Crossing of Non-Gaussian Translation Processes, Journal of the Engineering Mechanics, ASCE, Vol.110, No.4, pp.610-620, Apr., 1984.

14） 中桐　滋・久田俊明：確率有限要素法入門，培風館，pp.163-210, 1985 年5月.

15） 後藤尚男・北浦　勝：地震動の非定常スペクトルとその模式化，土木学会論文報告集，No.236, pp.47-58, 1975 年4月.

16） 久保慶三郎：地震と輸送．交通施設，東京大学公開講座「地震」，東京大学出版会，pp.107-141, 1976年11月.

17） 土岐憲三：構造物の耐震解析，技報堂出版，P.209, 1981年4月.

結　　論

静的構造信頼性理論に関する多くの研究成果は徐々に設計示方書の中に具現化されつつある。一方，動的信頼性理論については，基礎的研究は少なからず見られるものの，実用化に向けての研究は非常に乏しいのが現状である。本研究はこのような状況にかんがみて，不規則変動外力に対する構造物の初通過破壊確率の概念を基調として，使用限界状態に対する簡便な信頼性評価法の確立と，その構造設計への応用を目的として実施したものである。

本研究で考究した主な事項と得られた成果を，本論文の流れに従って要約すると以下のようになる。

まず第１章では，ある限定時間にわたって定常不規則変動外力の作用を受ける線形振動系の局部降伏破壊確率を，材料強度に内在するばらつきを考慮して初通過破壊確率によって評価するための簡便な算定式を導出した。そして，「応答過程による方法（ＲＰ法）」と「包絡線過程による方法（ＥＰ法）」によってパラメトリック解析をおこない，材料強度の平均値と応答のr.m.s.値の比によって定義した無次元パラメーター $\bar{m}$ と振動系の減衰定数 ζ がともに小さいときほど両解法により推定した破壊確率の差が著しいことを数値的に示し，そのような場合にはＥＰ法を使用すべきであることを明らかにした。

また，材料強度の確率分布形や変動係数と初通過破壊確率との関係についても検討し，他の条件がすべて同一であれば，強度が正規分布に従うときには，対数正規分布に従うときよりも破壊確率が大きくなり，両者の差は，$\bar{m}$ や強度の変動係数が大きくなるにしたがって顕著になることを確認した。

さらに材料強度が条件付確率分布に従う場合の算定式を用いて，載荷実験の意義について信頼性工学的見地より言及することができた。

また，材料強度の確率分布形と変動係数および $\bar{m}$ とによって，その特性値を簡単に算定できる図表を作成した。この図表を用いて求められる特性値は，初通過破壊問題において，確率的に等価で，ばらつきのない理想材料の強度を表す尺度と考えられる。

第２章では，構造物の非破壊条件によって任意時刻における材料強度の確率分布の下限に条件が付けられることを考慮できる初通過破壊確率の算定式を誘導することができた。この非破壊条件を考慮した場合と無視した場合の両破壊確率の差異は，材料強度の変動係数が大きく，前述の無次元パラメーター $\bar{m}$ が小さいときほど顕著であり，特に強度が正規分布に従うときには，非破壊条件の影響を無視できないことが数値解析によって明らかになった。

ただ，一般に構造用鋼材の強度の変動係数は0.10を下回ることが多い。さらに $\bar{m}$ の値についても５～６の範囲が問題になるケースが多々ある。そのような場合には，計算の簡便性を考えて非破壊条件を無視しても，ほとんど支障のないことを確認することができた。本章と同じ考え方は強度劣化を伴う材料に対して極めて有効である。

第３章では，静的荷重と定常不規則変動荷重の作用を同時に受ける構造物ならびに構造部材の信頼性について考察するために，前章の概念に基づいて初通過破壊確率の表式を導いた。そして数値解析によ

って，部材に生じる動的荷重効果と静的荷重効果の比，すなわち荷重比により，部材の信頼性レベルが変動することを示した。また算定式を用いてガストを受ける点状構造物の信頼性を検討し，地表面の粗度や減衰定数と初通過破壊確率との関係を定量的に示すことができた。さらに，すでに定着した観のあるDavenport の方法はあくまで準確率論的方法であるとの判断に立ち，構造物の信頼性レベルとの関係を確率論的に説明できるガスト応答倍率の算定法を提示した。この研究が第４章の基礎となった。

第３章までのほとんどの内容が定常応答過程の初通過破壊確率に関する基礎的研究であったのに対し，第４章では応用的な問題を扱った。すなわち，現在使用されている衝撃係数やガスト応答倍率などの動的応答係数の有用性を十分に認識した上で，さらに発展的な動的応答係数の算定法の開発を試みた。その結果，荷重係数設計法の設計式と初通過破壊確率の算定式を利用することにより，許容破壊確率に応じた動的応答係数を算定する一方法を提示することができた。なお同方法の有用性は，鋼製タワーのガスト応答倍率の算定結果をDavenport の方法と比較．検討することによって明らかにされた。本研究によって，限界状態設計法の枠組の中に動的応答係数を組み入れるアプローチをみいだすことができたと考えている。

第５章からは，非定常不規則外力を受ける構造物の動的応答問題と初通過破壊確率の問題について論述した。

まず第５章では，形状関数と定常正規確率過程の積でモデル化できるような非定常不規則外力を受ける振動系の初通過破壊確率の算定式を，やはり材料強度を確率量として定式化し，数値解析に基づいて第１章と同様の検討をおこなった。数値解析の結果，「応答過程による方法（ＲＰ法）」と「包絡線過程による方法（ＥＰ法）」の両近似解析法による破壊確率の差異は，定常応答問題の場合に比較してかなり小さくなることがわかった。これより非定常応答問題においては，計算がより簡単なＲＰ法を利用できるパラメーターの領域（主として振動系の減衰定数 ζ と，閾値の平均値と応答の最大r.m.s.値との比で定義される $\bar{m}^*$ の領域）が広がることが確かめられた。また振動系の減衰定数が小さい場合には，形状関数の形が破壊確率に与える影響が強いことを定量的に示した。

一方，材料強度の確率分布形や変動係数と破壊確率との関係，載荷実験による部材の信頼性向上効果などについては，定常問題とほぼ同様の傾向を示すことを確認することができた。

第５章で述べた解析法は，振幅特性を表す形状関数と周波数特性を表す定常確率過程に分離できる（separable process ）非定常外力でモデル化のできるような不規則外力に対する構造信頼性問題などへの適用が可能である。しかし，非分離過程（non-separable process ）に従う非定常不規則外力に対する問題に対処するためには，非定常外力の本質を失わないように，モデルそのものをより一般化しなければならない。そしてモデル化された外力に対する適切な非定常応答解析法を確立する必要がある。そこで第６章では，非定常外力を発展スペクトル（evolutionary spectrum ）で表す方法について，さらに第７章では，発展スペクトルでモデル化された非定常外力に対する振動系の応答解析法について論述した。

まず第６章では，従来の解析法ではいずれも位相の非定常性を明確にできないことを考えて，Priestly

の定義による発展スペクトルに，複素変調法（complex demodulation method ，ＣＤ法）を適用して，振幅．周波数．位相の各非定常性をすべて明らかにできる非定常スペクトル解析法を提示した。そして同解析法によって実際の地震動加速度記録のスペクトル解析をおこない，時間的に変化する非定常スペクトルを用いて再合成した再合成地震波形と元の地震波形との比較，あるいは他の解析法による計算結果との対比など，種々の見地からの検討によってその有用性を立証した。さらに位相の非定常性と加速度波形とは密接に関連しており，位相を，たとえば０から２π（rad/s ）の一様乱数で与えて地震動をシミュレートする従来の手法では，十分に地震動を再現できないことを明確にした。

次に第７章では第６章の成果を受けて，非定常スペクトルによって与えられる非定常外力を受ける線形振動系の応答解析法に関連する１つの重要なテーマを扱った。

すなわち，外力スペクトルと応答スペクトルとの関係式は，すでにHammond やShinozuka によって導出されているものの，非定常外力の非定常性を特徴づける変調関数（modulating function ）については，算定方法に問題が残されていた。したがって，具体的にその関係式を活用するためには，変調関数を決定する適切な方法を見い出す必要があった。そこで本研究では，上述のＣＤ法を利用して変調関数を決定する方法を案出した。同方法を地震動に対する応答問題に適用し，得られた応答の非定常スペクトルを時系列解析によって得られた非定常スペクトルあるいはHammond の考え方に基づいて求めた非定常スペクトルなどと比較することによって，その妥当性を検証することができた。そしてこの方法が，次章の問題に有効に活用されることになった。

第８章の目的は，第６章と第７章の成果を活用すれば一般的な非定常不規則変動外力を受ける構造物の応答の統計量を算定でき，また初通過破壊確率について論じることができることを，事例研究によって示すことであった。そのために構造物の応答統計量の算定式をまず誘導し，実際の鋼製タワーの地震動に対する信頼性解析をおこなって本信頼性評価システムの有用性を示した。

以上，本研究で得られた成果を総括したが，構造物の動的特性の不確定性あるいは動的特性や強度の時間的変化を破壊確率の評価に取り入れる手法の開発，静的信頼性問題でおこなわれているようなコード．キャリブレーションなど，今後の課題は山積している。構造物の動的信頼性設計法の体系化は，種々のデータ収集も含めて，これらの諸問題を克服し，実用化へ向けての研究の蓄積を待たねばならないが，本論文が動的信頼性設計法の確立のための重要な礎石となることを夢みつつ，本稿を終えるものである。

謝　　辞

本論文は，著者が大阪大学工学部に在学・在職中より広島工業大学工学部に勤務する今日まで，大阪大学工学部小松定夫教授の御指導のもとに遂行した研究をまとめたものである。この間，先生からは数々の有益な教示はもちろんのこと，温かい激励や時には厳しい叱正を賜った。深謝の気持を込めて厚くお礼申し上げます。また大阪大学工学部室田明教授ならびに椹木　亨教授には，在学中の講義を通して学問の深遠さを教えて頂くと同時に，本論文のとりまとめに際しても心温まる御指導を賜ることができた。深く感謝申し上げます。さらに大阪大学工学部五十嵐定義教授には，本論文の細部にわたり，的確な助言と貴重な御意見を賜った。心よりお礼申し上げます。

大阪大学工学部西村宣男講師，川谷充郎助手，奈良　敬助手には，4年前1年間の内地留学をさせて頂いた折にいろいろとお世話になった。また現在立命館大学理工学部に籍を置かれている小林紘士教授には，特別研究の折に一方ならぬ迷惑をお掛けして以来，常に温かく見守って頂いた。この機会に厚く謝意を表します。

小松先生の御配慮により，内地留学の際に本研究の遂行に協力頂いた，当時大阪大学大学院の学生であった藤原豪紀，角田直行両氏，また一人一人のお名前を挙げはしないが，これまで本研究の遂行上一方ならぬお世話になった多くの方々に心から感謝の意を表す次第である。

付録1　構造物の振動継続時間

定常不規則変動外力を受ける構造物の初通過問題を論じる場合，その振動継続時間は外力の作用時間にほぼ一致すると考えても支障はない。対象とする外力の種類，あるいは構造物の地理的位置などにより作用時間はかなり異なるが，たとえば海洋構造物の耐波設計問題を想定すると，まず海洋鋼構造物設計指針（案）[1]によれば，設計波高H_{max}は1/3 有義波高 $H_{1/3}$ と次式で関係づけられている。

$$H_{max}=\min\{2H_{1/3},\ H_b\} \qquad (A\cdot 1)$$

式中，$\min\{a, b\}$ は a または b のいずれか小さい方の値をとることを意味している。また H_b は砕波限界波高である。

一方不規則振動論によると，H_{max} と $H_{1/3}$ との関係は波数 N_0 と超過確率 μ とによって次式のように近似的に与えられる[2]。

$$\frac{(H_{max})_\mu}{H_{1/3}}\fallingdotseq 0.706\sqrt{\ln\left[\frac{N_0}{\ln\{1/(1-\mu)\}}\right]} \qquad (A\cdot 2)$$

いま H_{max} が $(H_{max})_\mu$ を超過する確率 μ を5％と仮定すれば，式（A．2）は，

$$\frac{(H_{max})_{0.05}}{H_{1/3}}\fallingdotseq 0.706\sqrt{\ln\left\{\frac{N_0}{\ln(1/0.95)}\right\}} \qquad (A\cdot 3)$$

となる。

ここで，式（A．3）の右辺を式（A．1）と比較して2.0 とすれば，$N_0\fallingdotseq 157$ が得られる。

さらに1/3 有義波周期 $T_{1/3}$ を，ごく一般的な海洋波に対する値として10～12秒としてみれば，前記の設計指針（案）の設計波高は，波浪の継続時間 T_d として

$$T_d=T_{1/3}\cdot N_0=(10\sim 12)\times 157=1\,587\sim 1\,884(\mathrm{s})$$

で与えられる程度の値を考えているものと推察できる。

このような資料に基づいて，本研究では構造物の振動継続時間 t_d を100 ～1800秒（ただし2.4 の応用例だけは3600秒まで）とした。

付録2　定常正規応答過程に従う構造物の初通過破壊確率と動的応答係数の算定手順

いま，平均値（いわば静的荷重効果）が $\bar{x}$ の定常正規応答過程 $\boldsymbol{x}(t)$ を考えれば，$\boldsymbol{x}(t)$ とその時間的導関数 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ の結合確率密度関数は

$$f_{x\dot{x}}(x,\dot{x})=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}}\exp\left\{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}\right\} \qquad (A\cdot 4)$$

と表せる。式中，σ_x^2 ，$\sigma_{\dot{x}}^2$ はそれぞれ $x(t)$ および $\dot{x}(t)$ の分散である。

このとき，構造物の非破壊効果による抵抗力の確率分布の経時変化を無視すれば，$x(t)$ が確率変数で与えられる抵抗力 R を正の勾配で超過する単位時間当りの回数の期待値，すなわち強度超過率 ν_x^+ は

$$\nu_x^+=\frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x}\int_{R_r}\exp\left\{-\frac{(r-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}\right\}f_R(r)dr \qquad (A\cdot 5)$$

によって計算できる。式中，$f_R(r)$ は抵抗力の確率密度関数，R_r は積分区間を表す。

いま R が正規分布に従うものとすれば，式（A．5）より，若干の計算によって

$$\nu_x^+=\frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x}\frac{1}{\sqrt{1+\bar{m}^2\delta_r^2}}\exp\left\{-\frac{\bar{m}^2(1-n)^2}{2(1+\bar{m}^2\delta_r^2)}\right\} \qquad (A\cdot 6)$$

が得られる。式中，δ_r は抵抗力の変動係数で，$\bar{m}$ ，n はそれぞれ

$$\bar{m}=\frac{\bar{R}}{\sigma_x} \qquad (A\cdot 7)$$

$$n=\frac{\bar{x}}{\bar{R}} \qquad (A\cdot 8)$$

と定義される無次元パラメーターである。

ここで，応答が抵抗力を超過する現象が非常にまれで，ポアソンの仮定が成立するものとし，さらに $\bar{x}$ が0より相当大きいとすれば，初通過破壊確率 $P_f(t_d)$ は近似的に次式によって与えられる。

$$P_f(t_d)\fallingdotseq 1-P_{S,x}(0)\exp(-\nu_x^+t_d) \qquad (A\cdot 9)$$

式中，t_d は振動の継続時間，$P_{S,x}(0)=\mathrm{Prob}[x(0)<R]$ である。

さらに $P_{S,x}(0)$ がほぼ1であることを考慮すれば，結局抵抗力が正規分布に従う場合には，次式によって初通過破壊確率を評価できる。

$$P_f(t_d)=1-\exp\left[-\frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x}\frac{1}{\sqrt{1+\bar{m}^2\delta_r^2}}\exp\left\{-\frac{\bar{m}^2(1-n)^2}{2(1+\bar{m}^2\delta_r^2)}\right\}t_d\right] \qquad (A\cdot 10)$$

さて，式（A．10）を $n<1$ であることを考慮して変形すれば，

$$n=1-\left[-\frac{2(1+\bar{m}^2\delta_r^2)}{\bar{m}^2}\ln\left\{-\sqrt{1+\bar{m}^2\delta_r^2}\frac{1}{t_d{}^*}\ln(1-P_f(t_d))\right\}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (A\cdot 11)$$

となる。式中，$t_d{}^*=\sigma_{\dot{x}}\,t_d/(2\pi\sigma_x)$ である。

また $\bar{x}$ を静的荷重効果と考えれば，式（A．7），式（A．8）は，それぞれ本文の式（4．11），（4．12）に対応することになる。すなわち

$$\bar{m}=\frac{\bar{R}}{\sigma_x}\longleftrightarrow\bar{m}=\frac{\bar{R}}{\sigma_{Q_1}}$$

$$n=\frac{\bar{x}}{\bar{R}} \longleftrightarrow n=\frac{Q_P+Q_1^S}{\bar{R}}$$

さらに式（4．14）すなわち

$$\frac{1}{\bar{m}n}=\frac{q_d}{1+q_S}$$

より，

$$\bar{m}=\frac{1+q_S}{q_d}\frac{1}{n}=\frac{1}{q\cdot n} \qquad (\mathrm{A}\cdot 12)$$

ここに，$q=q_d/(1+q_S)$ である。

式（A．12）を式（A．11）に代入すれば

$$n=1-\left[-2\left(\frac{1}{q^2n^2}+\delta_r^2\right)\ln\left\{-\sqrt{1+\frac{\delta_r^2}{q^2n^2}}\frac{1}{t_d*}\ln(1-P_f(t_d))\right\}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (\mathrm{A}\cdot 13)$$

となる。

したがって，抵抗力の変動係数 δ_r，無次元化した振動の継続時間 t_d*，荷重比を表すパラメーター q_S，q_d および信頼性レベルを表す $P_f(t_d)$ が与えられれば，式（A．13）を繰返し計算（本研究では2分法を用いた）によって解いて，n を求めることができる。この n を式（A．12）に代入して $\bar{m}$ を計算し，この一組の（$\bar{m}, n$）を本文の式（4．15）に代入すれば，δ_r，q_S，q_d，t_d*，$P_f(t_d)$ に対応する動的応答係数を一意的に決定することができる。

以上のように，抵抗力が正規分布に従い，かつその確率分布の経時変化が無視でき，しかも本論文でいう所の「応答過程による方法」に基づいて初通過破壊確率を評価できる場合には，比較的簡単に動的応答係数を求めることができる。しかしそうでない場合には，第3章に示したように図解的な方法によるか，もう少し複雑な繰返し計算が必要になる。

参 考 文 献

1） 土木学会編：海洋鋼構造物設計指針（案）解説，P.30, 1973 年8月．

2） 合田良実：港湾構造物の耐波設計，鹿島出版会，P.16, 1977 年．