



Title	A cork and a stabilization of a simply-connected closed 4-manifold with the second Betti number 9
Author(s)	若禎, 洋平
Citation	大阪大学, 2025, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/101774
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

論文内容の要旨

氏名 (若 楨 洋 平)

論文題名

A cork and a stabilization of a simply-connected closed 4-manifold with the second Betti number 9
 (第2ベッチ数9の単連結閉4次元多様体のコルクと安定化)

論文内容の要旨

第2ベッチ数が小さいエキゾチックな単連結閉4次元多様体は、4次元トポロジーにおける中心的な研究対象の1つである。2つの多様体が互いに同相だが微分同相ではないとき、それらは互いにエキゾチックであるという。エキゾチックな単連結閉4次元多様体の存在は1985年にDonaldsonによって初めて示され、1988年にFriedman-Morganによって第2ベッチ数が10以上のエキゾチックな単連結閉4次元多様体が豊富に存在すると示された。その後多くの数学者によって、より第2ベッチ数が小さいエキゾチックな単連結閉4次元多様体の構成が進められ、現在では第2ベッチ数が3のエキゾチックな単連結閉4次元多様体が構成されるに至った。具体例の構成が進んだ一方、第2ベッチ数が小さくなる程に構成方法が複雑化したため、その性質を研究することが容易でないものが多い。そのため、第2ベッチ数が小さいエキゾチックな単連結閉4次元多様体については、未だ多くの課題が残されている状況である。

本学位論文では、第2ベッチ数が9の標準的単連結閉4次元多様体に対して、その微分構造を変えるコルクの初めての具体例を発見する。コルクとは、可縮なコンパクト4次元多様体と、その境界上のある条件を満たす対合写像の組を意味する。互いにエキゾチックな2つの単連結閉4次元多様体は、4次元多様体に埋め込まれたコルクの切り貼り操作で移り合うことから、エキゾチックな単連結閉4次元多様体の研究においてコルクは重要な役割を果たす。自然な疑問として「標準的単連結閉4次元多様体はどのようなコルクの切り貼りによってエキゾチックな多様体になるのだろうか？」という問いが考えられる。その重要性からコルクの研究は数多く存在する一方、第2ベッチ数が9以下の標準的単連結閉4次元多様体をエキゾチックな多様体に変えるコルクの例はこれまで一切知られていなかった。上述のコルクの具体例を発見する手順は以下のようである。まず、2010年の安井氏によるKirby図式を用いた第2ベッチ数が9のエキゾチックな単連結閉4次元多様体 R の構成を、省略されていた2ハンドル達の情報をすべて保持しつつ、かつ部分的改変を施して実行する。これにより、エキゾチックな単連結閉4次元多様体 R の完全なKirby図式を得ることができ、さらに複雑な図式の変形を経ることでコルクの埋め込みを発見することが可能となる。コルクの切り貼りは可逆な操作であるため、Kirby図式内でコルクの切り貼りを実行して得られる多様体が、第2ベッチ数が9の標準的単連結閉4次元多様体であることを示すことで主張が従う。

上述の結果の応用として、エキゾチックな単連結閉4次元多様体 R が1回の安定化により標準的単連結閉4次元多様体と微分同相になることを示す。ここで安定化とは、4次元多様体と $S^2 \times S^2$ との連結和を取る操作を意味する。1964年にWallによって任意の2つのエキゾチックな単連結閉4次元多様体は十分大きい回数の安定化によって微分同相になるという事実が示された。1回の安定化で微分同相になるエキゾチックな単連結閉4次元多様体は豊富に発見されており、かつ2回以上の安定化を必要とする例は未だ発見されていない。そのため「任意のエキゾチックな単連結閉4次元多様体は1回の安定化で標準的単連結閉4次元多様体と微分同相になるだろうか？」という問いが考えられており、盛んに研究が行われている。現状、上述の R は1回の安定化により標準的単連結閉4次元多様体と微分同相になるようなエキゾチックな単連結閉4次元多様体で、明示的なKirby図式が知られているものとして最小の第2ベッチ数を持つ例となる。

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏 名 (若 槇 洋 平)			
	(職)	氏 名	
論文審査担当者	主 査	准教授	安井 弘一
	副 査	教授	中村 誠
	副 査	教授	杉山 由恵
	副 査	准教授	大場 貴裕 (大阪大学大学院理学研究科)

論文審査の結果の要旨

若槇洋平氏は本論文において第 2 ベッチ数の小さい 4 次元多様体の微分構造をコルクの観点から研究した。可縮な 4 次元多様体とその境界の対合写像に対し、その写像が内部の同相写像に拡張するが微分同相写像には拡張しないとき、その可縮な 4 次元多様体 (と対合写像の組) をコルクという。単連結閉 4 次元多様体の任意のエキゾチック対 (すなわち同相だが微分同相ではない対) に対し、一方の多様体の中にコルクが必ず存在し、そのコルクツイストによって他方の 4 次元多様体を得られることが 1990 年代後半に証明された。そのためコルクは 4 次元多様体のエキゾチック微分構造と密接な関わりを持つ重要な研究対象であり、低次元トポロジーの様々な観点から活発に研究されている。

現在ではコルクの具体例は豊富に構成されているが、与えられたエキゾチック対に対し、その対を関係づけるコルクの具体例の構成法は未だに得られていない。また、一般に 4 次元多様体は第 2 ベッチ数が小さいほど変形の自由度が低く、そのエキゾチック微分構造を生み出すコルクの発見が難しくなる。そのため特に第 2 ベッチ数が小さく標準的な (すなわち、複素射影平面とその逆向きたちの連結和に分解できる) 単連結閉 4 次元多様体に対して、それらのエキゾチック微分構造を与えるコルクを構成することは興味深い問題である。Akbulut は 2012 年の論文で、第 2 ベッチ数が 10 の標準的な単連結閉 4 次元多様体に対し、そのエキゾチック微分構造を生み出すコルクを与えたが、第 2 ベッチ数がより小さい例はその後にも発見されていなかった。

本論文では第 2 ベッチ数が 9 の標準的な単連結閉 4 次元多様体に対し、そのエキゾチック微分構造を生み出すコルクの具体例を初めて与えた。これは既存の例の中で第 2 ベッチ数が最小のものに対するコルクである。さらに応用として、そのエキゾチック微分構造が 1 回の安定化で標準的な単連結閉 4 次元多様体と微分同相になることを示している。これは安定化に関する有名問題に対する新しい肯定的な例であり、第 2 ベッチ数が小さい貴重な例となっている。証明では、Akbulut とは全く異なる方法でコルクを構成している。Akbulut は第 2 ベッチ数が 10 の有理曲面に結び目手術を施して得られる 4 次元多様体を利用して上述のコルクを与えたが、本論文では安井が 2010 年の論文で構成した、第 2 ベッチ数が 15 の有理曲面に有理ブローダウンを施して得られる 4 次元多様体を利用している。標準的な 4 次元多様体に対するコルクの構成にはハンドル体図式 (Kirby 図式) の膨大な変形が必要となることが一般的だが、本論文では安井の 4 次元多様体の構成法を活かすことで、図式の局所的な変形による鮮やかな方法でコルクを構成している。この巧みな構成法はさらに興味深い例の発見につながることも期待される。

以上のように本論文は 4 次元多様体の微分構造の研究に新しい知見を与えるものであり、4 次元トポロジーの発展に大きく寄与している。よって、博士 (理学) の学位論文として十分価値あるものと認める。