The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Non-diffeomorphic relative trisections for the same 4-manifold with boundary
Author(s)	高橋, 夏野
Citation	大阪大学, 2025, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/101776
rights	
Note	やむを得ない事由があると学位審査研究科が承認したため、全文に代えてその内容の要約を公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

様式3

論　文　内　容　の　要　旨

氏　名　（　　髙橋 夏野　　）	
論文題名	Non-diffeomorphic relative trisections for the same 4-manifold with boundary （ 同一の境界付き4次元多様体に対する非微分同相な相対トライセクション ）

論文内容の要旨

多様体のトポロジーにおける重要な研究課題の一つは、多様体の分類である。特に4次元においては、微分構造の観点から多様体を分類することが困難であることが知られている。4次元多様体の微分構造を理解するためのアプローチの一つは、4次元多様体を種々の図式によって表示することである。これらの図式を構成するために、4次元多様体に対する様々な分解方法が考案されてきた。本博士論文では、近年盛んに研究されているトライセクションと呼ばれる4次元多様体の分解に焦点を当てる。

トライセクションとは、4次元多様体を3つの4次元1ハンドル体に分解することである。特に境界付き4次元多様体に対するトライセクションは相対トライセクションと呼ばれる。これらの概念は、3次元多様体に対するHeegaard分解の4次元におけるアナロジーとして、2016年にGayとKirbyによって導入された。彼らは、任意の閉4次元多様体はトライセクションの構造を許容することを証明した。さらに、4次元多様体のトライセクションを、トライセクション図式と呼ばれる曲面上の3種類の曲線族によって表す方法も確立された。

トライセクション理論の研究では、Heegaard分解における性質がトライセクションでも成立するかどうかを探ることが一つのテーマとなっている。本博士論文の内容も、この種の研究の流れに沿うものである。3次元多様体のHeegaard分解に対しては、同相と呼ばれる適切な同値の概念が定義される。Heegaard分解の分類問題の多くは、同相類を基準として研究されてきた。本博士論文では、1970年にEngmannによって示された「互いに同相でない複数個の最小種数の Heegaard 分解を許容する3次元多様体が存在する」という主張に着目する。

本博士論文では、上記の事実の4次元におけるアナロジーについて考察する。4次元多様体のトライセクションは、微分同相と呼ばれる適切な同値の概念を有する。2つのトライセクションが微分同相であることを大まかに言うと、3分割の構造を保つような4次元多様体間の微分同相写像が存在することをいう。本博士論文では、先述のHeegaard分解についての事実がトライセクションにおいても成り立つかどうかを考える。すなわち、「互いに微分同相でない複数個の最小種数のトライセクションを持つ4次元多様体は存在するか？」という問題に焦点を当てる。実は、この問題は閉4次元多様体に対しては正しいことが2021年にIslambouliによって示されている。彼はNielsen同値という概念を用いて、閉4次元多様体に対するトライセクションの微分同相類を区別した。

一方で、境界付き4次元多様体に対する同様の問題は、答えが与えられていなかった。本博士論文では、「互いに微分同相でない複数個の最小種数の相対トライセクションを許容する境界付き4次元多様体は存在する」ということを証明する。申請者の手法は、閉4次元多様体に対するトライセクションの微分同相類を区別したIslambouliの方法とは全く異なるものである。

以下では、証明のアイデアを紹介する。本博士論文では、2次元球面と2次元円盤の直積として得られる境界付き4次元多様体に対して、2つの最小種数の相対トライセクションを具体的に構成し、それらが非微分同相であることを証明する。相対トライセクションの非微分同相性を証明するために、対応する相対トライセクション図式が同値でないことを証明する。すなわち、2つの相対トライセクション図式が、相対トライセクションの微分同相類を保つ特定の操作によって移り合わないことを証明する。そのために、境界付き4次元多様体の相対トライセクション図式から、閉4次元多様体のトライセクション図式を構成するある操作を利用する。相対トライセクション図式は、境界付き曲面上の3種類の曲線族として表示される。その境界付き曲面の境界に、蓋をするように円盤を接着することによって、閉曲面上の3種類の曲線族を得ることができる。相対トライセクション図式が所定の条件を満たすとき、先述の操作によって得られた図式は、閉4次元多様体のトライセクション図式の定義を満たすことを示す。さらに、操作を施す前の2つの相対トライセクション図式が同値であれば、操作後のトライセクション図式も同値であることを証明する。この性質を用いて、操作後のトライセクション図式が表す閉4次元多様体の微分同相類を比較することにより、元の相対トライセクション図式を区別することに成功した。

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　名　（　髙橋　夏野　）		
論文審査担当者	（職）	氏　名
	主 査　准教授	安井　弘一
	副 査　教授	中村　誠
	副 査　教授	杉山　由恵
	副 査　准教授	大場　貴裕（大阪大学大学院理学研究科）

論文審査の結果の要旨

髙橋夏野氏は本論文において 4 次元多様体のトライセクションについて研究した。トライセクションとは、 3 つの同じ 4 次元 1 ハンドル体をある種の貼り合わせ写像で互いに接着することで得られる、 4 次元多様体の分解のことである。特に得られる 4 次元多様体が境界付きの場合は相対トライセクションという。トライセクションは 3 次元多様体の Heegaard 分解の類似の概念であり、2016 年の Gay と Kirby の論文で導入された。全ての 4 次元多様体はトライセクションとして実現できるため、トライセクションを通じて 4 次元多様体の性質を研究できる。古典的な概念である Heegaard 分解は 3 次元トポロジーの研究において重要な役割を果たしているため、トライセクションも 4 次元トポロジーにおいて注目を集めており、近年活発に研究されている。

2 つのトライセクションに対し、それらが定める 4 次元多様体の間の微分同相写像であって、一方の各 1 ハンドル体を他方の各 1 ハンドル体に写すようなものが存在するとき、その 2 つのトライセクションは微分同相であるという。各 4 次元多様体が許容するトライセクションの微分同相類とトライセクションの種数との関係は興味深い問題である。Islambouli は 2021 年の論文で、閉 4 次元多様体であって、 2 つの互いに微分同相でない最小種数のトライセクションを許容するものが存在することを示した。そこで問題となるのが境界付き 4 次元多様体の場合であるが、対応する結果は知られていなかった。

本論文では、境界付き 4 次元多様体であって、2 つの互いに微分同相でない最小種数の相対トライセクションを許容するものが存在することを示した。本論文で与えた 4 次元多様体は 2 次元球面と 2 次元円板の直積であり、位相的に非常に単純な 4 次元多様体ですら最小種数の相対トライセクションの一意性が成立しないことも示している。証明において相対トライセクションの微分同相類の区別は、相対トライセクションから閉 4 次元多様体を構成し、その閉 4 次元多様体の微分同相類の違いに帰着するという、独自の方法で行っている。前述の Islambouli の証明では基本群が非自明であることを本質的に用いているが、本論文の方法は基本群への制約が全くないため他の様々な 4 次元多様体に対しても適用可能であり、さらに興味深い例の発見につながることも期待される。

以上のように本論文は 4 次元多様体のトライセクションの研究に新しい知見を与えるものであり、 4 次元トポロジーの発展に大きく寄与している。よって、博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。