様式３

論　文　内　容　の　要　旨

氏　　名	（　　坂井　健人　　）
論文題名	Degeneration of hyperbolic surfaces via the harmonic map parametrization of Teichmüller space （タイヒミュラー空間の調和写像パラメータ付けによる双曲曲面の退化）

論文内容の要旨

Teichmüller空間とは、曲面上の双曲構造のアイソトピー類によって形成される空間である。Teichmüller空間に関する研究では、様々なパラメータ付け（Teichmüllerパラメータ付け、Fenchel-Nielsen座標、地震パラメータ付け、Fricke座標など）が知られており、それぞれがTeichmüller空間の異なる幾何的性質を反映している。本論文では、調和写像を用いて得られるTeichmüller空間のパラメータ付け（これを調和写像パラメータ付けと呼ぶ）に注目する。リーマン面から双曲曲面に向かう調和写像は、定義域側のリーマン面上のHopf微分と呼ばれる正則2次微分を定める。この対応を利用して、WolfとHitchinは独立に調和写像パラメータ付けを発見した。正則2次微分のなすベクトル空間は球面コンパクト化されるため、調和写像パラメータ付けを通じてTeichmüller空間をコンパクト化することができる。このコンパクト化を調和写像コンパクト化と呼ぶ。1989年、Wolfは、調和写像コンパクト化がThurstonコンパクト化と一致することを示した。Thurstonコンパクト化は、Thurstonが導入したTeichmüller空間のコンパクト化であり、双曲曲面を単純閉曲線の空間上の長さ関数として実現し、各点収束の極限を考えることで得られる。加えて、Thurstonは、測度付き葉層構造の射影類がコンパクト化の境界に対応していることを示している。

当初、調和写像パラメータ付けは閉曲面のTeichmüller空間に対して与えられていたが、後にLohkampによってカスプつきの双曲曲面に対して一般化された。さらに、Gupta、Sagman、Allegrettiによって、閉測地境界やクラウン状の境界を持つ双曲曲面に対しても一般化されている。この場合、穴あきリーマン面から対応する双曲曲面へ向かう調和写像を考える。閉曲面におけるThurstonコンパクト化と調和写像コンパクト化の一致定理を踏まえれば、カスプつき双曲曲面や境界つき双曲曲面に対する調和写像パラメータ付けにおいても、双曲曲面の退化を適切に記述することが期待される。

本論文では、まずカスプ付き双曲曲面の調和写像コンパクト化を考察する。この場合、パラメータ付けを与える正則2次微分は、リーマン面の穴において1次の極を持つことがある。Wolfによる閉曲面の場合の証明は、コンパクト性を利用している箇所がある。そこで、Lohkampによる正則エネルギーの評価式やMinskyによる調和写像の歪曲度の評価式を活用することで、コンパクト性に依存せず、調和写像コンパクト化とThurstonコンパクト化の一致定理を示す。

次に、境界つき双曲曲面に対する調和写像パラメータ付けを扱う。特に、正則2次微分の空間における原点から出る半直線に沿った双曲局面の退化について研究を行う。この場合、対応する正則2次微分は、リーマン面の穴において2次以上の極を持つ。また、双曲曲面の境界の構造は穴の周りに集約される。そこで、境界つき双曲曲面の境界付近の双曲構造を調べるために、極周りでの調和写像の振る舞いを考察する。
Minskyの評価式により、調和写像の歪曲度はHopf微分の零点からの距離で指数的に減衰する。すなわち、極に向かって近づく場合、対応する双曲計量はHopf微分の水平移動距離に指数的に近づく。この考察を踏まえ、次の主結果を得た：調和写像により誘導される普遍被覆上の距離関数をリスケールし、正則2次微分の半直線に沿って極限を取ると、普遍被覆上のある種の部分領域上で、方向を定める正則2次微分の垂直的測度つき葉層に付随するR-木にGromov-Hausdorff収束する。ここで、普遍被覆上のある種の部分領域とは、任意のケーリーグラフエンドの近傍の補集合を指し、例としてリーマン面の基本領域である理想多角形などが挙げられる。先行研究として、WolfはコンパクトでのGromov-Hausdorff収束を示している。本論文の主結果は、このWolfの結果の境界つき双曲曲面への拡張である。さらに、系として次を得る：調和写像パラメータ付けを通じて得られる正則2次微分の半直線に対応する境界つき双曲曲面の族は、Thurstonコンパクト化の境界に収束し、その極限は方向を定める正則2次微分の垂直的測度つき葉層構造の射影類である。

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　名	（　坂 井 健 人　）	
論文審査担当者	（職）	氏　名
	主 査　教授	鎌田　聖一
	副 査　教授	山ノ井　克俊
	副 査　教授	太田　慎一
	副 査　准教授	馬場　伸平

論文審査の結果の要旨　曲面上の Riemann 面の構造は、曲面上の複素構造であると同時に一意化定理により定曲率 Riemann 計量とも対応している。ほとんどの曲面の位相型に対して、負曲率一定計量である双曲計量を用いて一意化される。本論文は、双曲構造の変形空間とそのコンパクト化の関係を、Riemann 面から双曲曲面への調和写像により与えている。

Teichmüller 空間はリーマン面の構造の isotopy 類の変形空間、または双曲構造の isotopy 類がなす変形空間であり、Riemann 面の moduli 空間の普遍被覆である。Teichmüller 空間には幾つかの重要な距離があり、単連結な非正曲率 Riemann 多様体と類似する性質を持っている。実際に Teichmüller 空間は位相的には、開球と微分同相であり、Thurston のコンパクト化により閉円盤と同相になる。Thurston のコンパクト化は、曲面上の閉曲線での長さスペクトルの射影類により与えられ、双曲構造の退化の様子を表す位相幾何学的な情報によるコンパクト化である。

Wolf は、調和写像による Teichmüller 空間のパラメター付けが与える Teichmüller 空間のコンパクト化と Thurston コンパクト化が一致することを示した。閉曲面の場合、起点となる Riemann 面から双曲曲面への調和写像が誘導する Hopf 微分により、Teichmüller 空間と 2 次正則微分のなすベクトル空間と同一視される。Wolf は、このベクトル空間の半直線の極限と Thurston 境界の点に自然な対応を与えた。関連した極限として、Wolf は双曲曲面の普遍被覆への曲面群の基本群の作用が、適当な正規化のもと R 木への作用に収束することも示した。

Fock と Goncharov の仕事など、閉曲面の理論と並行して、カスプや王冠状の境界を持つ曲面の構造の理論が発展してきた。坂井氏は本論文で、上記の Wolf の結果をカスプや王冠状の境界付きの曲面の場合に拡張した。

閉曲面の Teichmüller 空間が、コンパクト Riemann 面上の２次正則微分と対応しているのに対し、カスプや王冠状の境界をもつ双曲曲面は、コンパクト Riemann 面上の有理型２次微分と対応している。有理型２次微分の極の位数によって、カスプや王冠の形状が定まる。調和写像の観点からは、極の近くではエネルギーが無限になっており、エネルギー有限である閉曲面の場合とは別の議論を構築した。

往々にして複雑で煩雑になる一般的な境界つき曲面に対して、明快な形で、閉曲面での Wolf の結果を拡張できたことは評価に値する。微分幾何、函数論、トポロジーからの多様な観点を融合させる研究であり、より深い研究の基礎となることが期待される。以上のような理由で、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。