Title	Geometric analysis on weighted Riemannian manifolds of Ricci curvature bounded from below
Author(s)	藤谷, 恭明
Citation	大阪大学, 2025, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/101902
rights	
Note	

様式３

論　文　内　容　の　要　旨

氏　　名　（　　　　　藤谷恭明　　　　　　　）	
論文題名	Geometric analysis on weighted Riemannian manifolds of Ricci curvature bounded from below (重み付きリーマン多様体上のリッチ曲率の下限のもとでの幾何解析)

論文内容の要旨

Ricci曲率の下限のもとでのRiemann多様体上の幾何解析は主に1900年代後半に進められた。特に、Laplacian比較定理やBishop-Gromov型の体積比較定理などが得られた。そして、Yauは調和関数の勾配評価を用いて、Euclid空間上の調和関数のLiouville型定理をRiemann多様体に拡張した。その後、Saloff-Costeにより、勾配評価ではなく、Neumann-Poincaré不等式やSobolev不等式を用いてYauのLiouville型定理を得る手法が提案された。一方で、YauのLiouville型定理の後、多様体上の各種のLiouville型定理が得られている。特に、Chengにより劣線形増大度をもつ調和関数についてのLiouville型定理が得られ、また、Li-Schoenにより平均値不等式を用いてL^p-関数についてのLiouville型定理が得られた。なお、勾配評価は調和関数についてのみだけでなく、熱方程式についてもLi-Yau型勾配評価が知られている。さらに、熱方程式の亜種である多孔媒質方程式についても、Aronson-Bénilan型勾配評価が知られている。

Riemann多様体と一般の測度の組みは重み付きRiemann多様体といい、測度距離空間の研究と関連し、盛んに研究が進んでいる。重み付きRiemann多様体において、有効次元と呼ばれるパラメータ$N\in(-\infty,1]\cup[n,\infty]$を用いて、Ricci曲率の一般化である重み付きRicci曲率(以下、N-Ricci曲率と呼ぶ)が定式化されている。$N\in[n,\infty]$において、N-Ricci曲率がK以上である場合には、重み付きRiemann多様体は、Ricci曲率がK以上で、次元がN以下のRiemann多様体と同様の性質を有することが知られている。特に、$N=\infty$においては、Munteanu-WangによりBochner不等式と平均値不等式を用いて、劣線形増大度をもつ調和関数についてのLiouville型定理が得られた。なお、平均値不等式はLaplacian比較定理やBishop-Gromov体積比較定理を用いて得られる。

一方で、$N\in(-\infty,1]$の場合におけるN-Ricci曲率の下限は、$N=\infty$の場合におけるN-Ricci曲率の下限と比べて、より弱い仮定になり、定数の下限のもとではLaplacian比較定理やBiship-Gromov型の比較定理が得られていない。一方で、変数の曲率の下限のもとでは$N=1$の場合においてWylie-Yeroshkinにより、それらの比較定理が得られた。その後、変数の曲率の下限はKuwae-Liによって$N\in(-\infty,1]$の範囲にまで拡張され、さらにLu-Minguzzi-Ohtaにより、$N\in(-\infty,1]\cup[n,\infty]$へのさらなる一般化が行われた。Lu-Minguzzi-OhtaはNに加えて、ある範囲に含まれるパラメータεを用いた曲率の下限を導入した。これを以下ではε付きN-Ricci曲率の下限と呼ぶ。本論文においては、ε付きN-Ricci曲率の下限のもとでの幾何解析の発展をまとめることを主な目的とする。

第一章においては上述の経緯を含む、N-Ricci曲率の下限のもとでの幾何解析の発展の経緯についてまとめ、第二章においてはε付きN-Ricci曲率の下限のもとでのLaplacian比較定理、Bishop-Gromov型定理などの比較幾何学的な結果や、$N\in[n,\infty]$の場合におけるN-Ricci曲率の下限のもとでの調和関数、多孔媒質方程式の勾配評価について諸定理を述べる。第三章においてはε付きN-Ricci曲率の下限のもとでの調和関数の解析について述べる。特に、Li-Schoen型のPoincaré不等式、Neumann-Sobolev不等式、そして平均値不等式などを解説する。それらを用いて、L^p-Liouville型定理、Muteanu-Wang型の劣線形増大度をもつ調和関数についてのLiouville型定理、そして調和関数についての勾配評価を得る。そして、第四章においてはε付きN-Ricci曲率の下限のもとで多孔媒質方程式についてのAronson-Bénilan型の勾配評価を導出する。

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　　名	（　藤谷　恭明　）	
	（職）	氏　　名
論文審査担当者	主 査　　教授	太田　慎一
	副 査　　教授	石田　政司
	副 査　　教授	後藤　竜司
	副 査　　准教授	松本　佳彦

論文審査の結果の要旨

リッチ曲率が下に有界なリーマン多様体の性質の研究は、リッチ流やリーマン多様体の極限空間の研究と密接に関わり、リーマン幾何学における重要な研究課題の一つである。リッチ曲率の特徴として、2 点間の遠近を測る距離構造に加えて、体積を測る測度の振る舞いが本質的である点が挙げられる。また、リーマン多様体に自然に備わっている体積測度だけではなく、それを変形して得られる重みつきの測度及び対応する重みつきリッチ曲率の研究が、1970 年代から行われていた。近年、重みつきリーマン多様体の研究は、リッチソリトンや最適輸送理論を用いて定式化される曲率次元条件（微分構造を用いずに定式化される、リッチ曲率の下限と次元の上限の組み合わせに対応する性質）などとの関わりにより注目を受け、活発に行われている。

重みつきリッチ曲率は実変数 N を持ち、これを N リッチ曲率と呼ぶ。N は曲率次元条件においては次元の上限と解釈され、そのため N が多様体の次元以上の実数、または無限大の場合が主に研究されてきた。一方、凸幾何学や偏微分方程式における関連研究では N を負の実数とする状況も扱われている。そして近年、N が負や 1 以下の場合の N リッチ曲率に関する比較幾何・幾何解析の研究（N リッチ曲率がある定数や関数以上である状況で成り立つ幾何的・解析的な性質の研究）が進んできている。

N が負や 1 以下の場合、N リッチ曲率が定数以上という条件は N が多様体の次元以上の場合よりも弱い仮定となり、直径や体積増大度に関する比較幾何の技法を適用することができなくなる。例えば、N リッチ曲率が正定数以上であっても、直径は有界とは限らない（N が多様体の次元以上の場合は有界となる）。しかし、定数ではなく、重みを与える関数を用いた下限を考えることで、それらの比較幾何の技法が適用できることを Wylie-Yeroshkin (2016) が見出した。その後、N に加えて適切な範囲の実変数 ε を導入することで、定数の下限と Wylie-Yeroshkin の関数による下限を統合する枠組を Lu-Minguzzi-Ohta (2022) が与えた。

藤谷氏は、これらの新しい枠組を効果的に使い、また幾何解析において開発されてきた様々な手法を適切に適用することで、従来よりも弱い仮定の下で調和関数に関する Liouville 型定理や多孔媒質方程式に対する Aronson-Benilan 型勾配評価などの成果を得た。具体的には、N が 1 以下の N リッチ曲率が Lu-Minguzzi-Ohta の意味である負値関数以上である場合、非負かつ p 乗可積分な劣調和関数は恒等的に 0 であるという Liouville 型定理を示した（p は任意の正の実数）。ここで、劣調和関数は重みつきラプラシアンを作用させると 0 以上になる関数である。また、N が -2/(m-1) 未満の N リッチ曲率が非負という仮定の下で、m-多孔媒質方程式の解に対する Aronson-Benilan 型勾配評価を得た。ここで m は 1 より大きい実数であるが、m-多孔媒質方程式は m=1 のときは熱方程式となり、その勾配評価は Li-Yau による古典的な結果である。熱方程式の勾配評価は N が負の状況では知られておらず、藤谷氏の結果において m を 1 に近づけると -2/(m-1) が負の無限大に発散することは、熱方程式の解析には実際に異なる種類の勾配評価が必要なことを示唆し、興味深い。

上記の藤谷氏の研究は既に国際誌に出版され、重みつきリーマン多様体の比較幾何・幾何解析の可能性を更に広げるものとして、高く評価されている。よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。