



Title	A platform presentation for surface-links and its applications
Author(s)	安田, 順平
Citation	大阪大学, 2025, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/101903
rights	
Note	やむを得ない事由があると学位審査研究科が承認したため、全文に代えてその内容の要約を公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

論文内容の要旨

氏名 (安田 順平)

論文題名

A plat form presentation for surface-links and its applications
(曲面絡み目のプラット表示とその応用)

論文内容の要旨

曲面絡み目とは4次元空間へ滑らかに埋め込まれた2次元閉多様体である。2つの曲面絡み目が同値であるとは4次元空間の全同位によって移り合うときをいう。曲面絡み目の記述または表示する方法は曲面絡み目を研究する上で重要な観点である。本学位論文は曲面絡み目の表示手法について研究を行い、得られた結果をまとめたものである。

ブレイド状曲面は分岐被覆の構造を持った4次元球体内のコンパクト曲面であり、Rudolphによって導入されて以降、Stein構造との関連や4次元種数の評価など様々な観点から研究されている概念である。またViro, Kamadaらによりブレイド状曲面の特別な場合である2次元ブレイドが導入され、曲面絡み目との関連が与えられた。具体的には、2次元ブレイドに対して閉包を適用することにより、曲面絡み目を構成することができる。そして全ての向き付け可能な曲面絡み目は2次元ブレイドの閉包と同値であることが示された。これにより向き付け可能な曲面絡み目は2次元ブレイドを用いて表示することが可能となる。本学位論文では、ブレイド状曲面を用いた曲面絡み目の表示について3つの結果が得られた。

1つ目は曲面絡み目の新たな表示手法についてである。適切なブレイド状曲面に対してプラット閉包を導入した。これはブレイドに対するプラット閉包の高次元化に相当する。そして向き付け可能性に関わらず全ての曲面絡み目はブレイド状曲面のプラット閉包と同値であることを示した。これにより全ての曲面絡み目をブレイド状曲面を用いて表示することが可能となった。またブレイド状曲面の次数が小さい場合について、そのプラット閉包により得られる曲面絡み目が自明であることを示した。

2つ目は曲面絡み目のプラット表示とカンドル理論の関連についてである。カンドルは空でない集合とその上の二項演算の組であり、JoyceとMatveevによって独立に導入された概念である。カンドルの理論は有向曲面絡み目と相性の良い代数系である。さらに、向きの付いていない曲面絡み目に対して不变量を構成する際に有用な概念として、Kamadaは対称カンドルを導入した。特に曲面絡み目の不变量として結び目対象カンドルとよばれる対称カンドルが定義される。今回、曲面絡み目のプラット表示から結び目対称カンドルの有限表示を与えた。また対称カンドルは付随群と呼ばれる群を誘導し、結び目対称カンドルの付随群は結び目群（曲面絡み目の補空間の基本群）と同型である。これにより、与えられた結び目対称カンドルの有限表示から曲面絡み目の結び目群の有限表示が得られた。

3つ目は曲面絡み目のプラット指数についてである。曲面絡み目に対して、そのプラット表示で用いるブレイド状曲面全体の最小次数の半数値は、正整数に値を取る曲面絡み目の不变量であり、これをプラット指数という。プラット指数は絡み目の橋指数の高次元化に相当する。まず、プラット指数が1と等しい曲面絡み目は自明な2次元結び目または向き付け不可能かつ自明な曲面結び目であることを示した。さらに対称カンドルを用いることで彩色数と呼ばれる曲面絡み目の整数値不变量が定義される。今回、対称カンドルによる彩色数を用いてプラット指数の不等式評価を与えた。この不等式評価を用いることで、任意の正整数 n と g に対して、プラット指数が n と等しい種数 g の曲面絡み目を可算無限個構成した。

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏名 (安田順平)		氏名
論文審査担当者	主査	教授 鎌田 聖一
	副査	教授 後藤 竜司
	副査	教授 石田 政司
	副査	准教授 大場 貴裕

論文審査の結果の要旨

4次元ユークリッド空間に埋め込まれた閉曲面は曲面絡み目（特に連結成分が一つの場合は曲面結び目）と呼ばれ、結び目理論の主要な研究対象の一つである。本論文では曲面絡み目を表示する方法として、プラット表示という新しい手法を考案して、それに関する考察を行っている。

曲面絡み目を表示する方法として古くは、モーションピクチャー法（動画法）や3次元空間への射影図を用いた曲面絡み目図式（ダイアグラム）が使われてきた。90年代になり、向き付け可能な曲面絡み目については、2次元ブレイドの閉包を用いて表示する方法が確立され、それを利用した不变量の研究が行われてきた。また、カンドルと呼ばれる代数を用いた曲面絡み目の不变量やそれを発展させた不变量の研究も盛んに行われるようになり、対称カンドルを用いることで向き付け不可能な曲面の曲面絡み目に対してもそのような不变量を定義することが可能となってきている。

本論文の著者は2次元ブレイドの境界条件を緩めた概念であるブレイド状曲面に対して、そのプラット閉包を定義して、任意の曲面絡み目が、あるブレイド状曲面のプラット閉包に同値となることを示した。それをプラット表示と呼んでいる。この方法は向き付け不可能な曲面絡み目を含む全ての曲面絡み目に対して有効であり、従来の2次元ブレイドの閉包を用いて表示する方法が向き付け不可能な曲面絡み目に適用できなかった欠点を解消している。チャート表示という平面上のグラフを用いて2次元ブレイドの閉包である曲面絡み目を表す手法も、プラット表示の場合にも適用が可能であり、応用上も利用しやすい概念となっている。

プラット表示によりプラット指数という曲面絡み目の不变量が定義される。これは古典次元の絡み目の橋指数に対応する概念になっている。特に、指数が1の曲面絡み目は自明な2次元結び目または向き付け不可能な自明な曲面結び目であることがわかる。本論文ではプラット表示を利用することで対称カンドルを用いた曲面絡み目の不变量に関する興味深い考察が行われている。向き付け不可能な曲面絡み目にも定義される対称カンドルを用いた曲面絡み目の基本対称カンドルについて、対称カンドルとしての有限表示をプラット表示から直接に求める方法を与えている。また、有限対称カンドルによる彩色数を用いたプラット指数の不等式評価も得ており、任意の非負整数 g と m ($m > 1$) に対して、種数が g で、プラット指数が m となる曲面絡み目を無限個構成することに成功している。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。