



Title	Extensions of the cosymplectic reduction theorem
Author(s)	米原, 修平
Citation	大阪大学, 2025, 博士論文
Version Type	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/101904">https://doi.org/10.18910/101904</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

## 論文内容の要旨

氏 名 ( 米原 修平 )

## 論文題名

Extensions of the cosymplectic reduction theorem  
(余シンプレクティック簡約定理の拡張)

## 論文内容の要旨

本論文の出発点となる先行研究は、Marsden-Weinstein-Meyerによる簡約定理と呼ばれている1973年の結果である。これは、シンプレクティック多様体上にLie群作用があり、運動量写像と呼ばれる写像が与えられている（このような作用をHamilton作用と呼ぶ）とき、運動量写像のファイバーをLie群作用で割った商多様体にシンプレクティック構造が遺伝するというものだ。この定理の拡張、あるいは類似にあたる定理が様々な状況に対して示されている。以下ではそれらを簡約定理と総称する。

シンプレクティック多様体の奇数次元アナロジーにあたる概念（の1つ）に余シンプレクティック多様体と呼ばれるものがある。Albertによって余シンプレクティック多様体上のLie群作用（Hamilton作用）についての簡約定理が得られた。本論文の目的は、このAlbertの定理を次の2つの状況に対して拡張することである。

## (1) 多様体が余シンプレクティック構造と整合的なRiemann計量を持つ場合

HitchinらはKahler多様体やHyperKahler多様体といった、Riemann計量と整合的なシンプレクティック構造をもつ多様体に対する簡約定理を証明した。本論文では、これらの奇数次元アナロジーにあたる結果、すなわち、余Kahler多様体と3-余シンプレクティック多様体と呼ばれるクラスに対する簡約定理を示した。さらに、余Kahler多様体および3-余シンプレクティック多様体の簡約と、Kahler多様体およびHyperKahler多様体の簡約との関係を調べた。具体的には、余Kahler簡約と3-余シンプレクティック簡約が、「cylinder構成」と呼ばれる操作でそれぞれKahler簡約およびHyperKahler簡約と関連づけられることを示した。また、余Kahler簡約とKahler簡約が「mapping torus構成」と呼ばれる操作と可換になることも示すことができた。

本論文で示した余Kahler簡約定理は、力学系の視点から次のように解釈することができる：一般に余シンプレクティック多様体のReebベクトル場のフローによる時間発展を考えると、Hamiltonianが時間依存する力学系のモデルが与えられる。さらに、余Kahler多様体のReebベクトル場のフローは測地線となることが知られている。よって、本論文の結果は、時間依存する力学系の自由度を、フローが測地線であるという性質を保ったまま落とせるということを示している。

## (2) Lie重群による作用の場合

Lie重群とは、滑らかな構造をもつ重群で、Lie群を一般化した概念である。Lie重群による多様体への作用も定義でき、三上-Weinsteinによってシンプレクティック多様体上のLie重群作用についての簡約定理が示されている。本論文では、Lagrange-Legendre部分多様体と呼ばれる余シンプレクティック多様体の部分多様体のクラスを導入することで、余シンプレクティック多様体上の適切なLie重群作用の概念を定義した。さらに、その状況下で三上-Weinsteinによる簡約定理の奇数次元アナロジー、そしてAlbertによる簡約定理の一般化にあたる定理を示した。その証明では、余シンプレクティック構造から定まる余次元1のシンプレクティック葉層構造についての考察が重要な役割を果たしている。

さらに、本論文で余シンプレクティック多様体上の適切なLie重群作用を定義したことで、余シンプレクティック多様体のある種のLie重群（余シンプレクティック重群）の上の加群と考えることができる。これを用いて両側加群を定義することで、余シンプレクティック重群の間の森田同値性を定式化できた。本論文の最後では、この森田同値性と、既に定義されているシンプレクティック重群の間の森田同値性との関係について考察する。

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏 名 ( 米 原 修 平 )			
論文審査担当者	(職)		氏 名
	主 査	教授	後藤竜司
	副 査	教授	石田政司
	副 査	教授	鎌田聖一
	副 査	教授	太田慎一
<p>論文審査の結果の要旨</p> <p>シンプレクティック多様体において、よく知られた Marsden-Weinstein 簡約定理は、多様体上のケーラー構造、超ケーラー構造の場合に拡張され、現在も盛んに研究されている。特に、Hitchin らによる超ケーラー構造の場合の簡約定理は非自明な超ケーラー多様体を豊富に与え、注目を集めた。また、奇数次元の多様体上では、接触構造、佐々木構造、3-佐々木構造に関する簡約定理が示されている。</p> <p>一方、奇数次元多様体には、接触構造とは違う幾何構造として余シンプレクティック構造が存在する。米原修平氏はこの余シンプレクティック構造に着目し、Albert の余シンプレクティック構造に関する簡約定理をリーマン計量がある場合に拡張し、余ケーラー構造そして 3-余シンプレクティック構造の場合に簡約定理を確立した。更に、余シンプレクティック多様体のコーンをとることで偶数次元化し、シンプレクティック多様体の簡約定理との対応関係を示した。</p> <p>Marsden-Weinstein 簡約定理は Mikami-Weinstein により、リー重群の作用の場合に拡張されているが、米原氏は余シンプレクティック多様体の場合に Mikami-Weinstein の簡約定理を発展させた。この過程で米原氏は余シンプレクティック・リー重群の作用、ラグランジアン・ルジャンドリアン部分多様体など新たな概念を導入していることは注目に値する。米原氏の学位論文「Extensions of the cosymplectic reduction theorem」はこれらの内容を体系的にまとめたものである。本研究はこれまで比較の見落とされていた奇数次元の余シンプレクティック多様体とその上の幾何構造に新たな視点を与えている。更に余シンプレクティック・リー重群に関する氏の結果はシンプレクティック・リー重群における森田同値の概念を余シンプレクティック多様体の場合に拡張しており、今後新たな発展が期待される。また、これらの研究成果の一部は下記の論文として出版されている。</p> <p>S. Yonehara, Reduction of coKähler and 3-cosymplectic manifolds, Journal of Geometry and Symmetry in Physics, 68: 59-80, 2024.</p> <p>よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。</p>			