Title	On Uniform Asymptotic Normality of Probability Distributions
Author(s)	秋本, 義久
Citation	大阪大学, 1996, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.11501/3119657
rights	
Note	

【 16 】

氏　　　　　名	秋(あき) 本(もと) 義(よし) 久(ひさ)
博士の専攻分野の名称	博　　士（理　学）
学 位 記 番 号	第　12730　号
学位授与年月日	平成 8 年10月29日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 2 項該当
学 位 論 文 名	On Uniform Asymptotic Normality of Probability Distributions （確率分布の一様漸近正規性について）
論 文 審 査 委 員	（主査） 教 授 白旗 慎吾 （副査） 教 授 稲垣 宣生　教 授 後藤 昌司

論 文 内 容 の 要 旨

池田(1963)は確率分布の漸近同等性の概念を導入し，松縄と共に多くの成果を得た。特に，その中でも一様漸近同等性は興味深い。従来の漸近分布理論はいわゆる法則収束と呼ばれる概念に基づいているが，一様漸近同等性は 2 つの確率分布の全変動距離が零に収束することにより定義される。従来の弱い概念の漸近同等性から強い概念の一様漸近同等性へ移行するための条件が明確になれば，今まで蓄積されてきた成果の利用も可能になる。また，正規近似に関して言えばこの一様近似は最も重要である。

一方，一般的な近似理論に於いて，松縄は実ガンマ関数及びディガンマ関数が絶対収束する逆階乗級数で表わされることを利用して，よく知られているスターリング公式をより精密なものにした。この松縄の与えた修正スターリング公式は，小標本理論でも通用する一様近似理論，特に近似誤差の限界を計算可能な形で評価する際に有用である。しかしながら，筆者の知る所りでは，このことの具体的な多変量分布への応用はなされていない。

本論文に於いては，次の 2 つの問題を考察する。

(1)　2 つの漸近同等性が同値となるための十分条件。

(2)　多変量分布の一様漸近正規性とその近似誤差評価。

(1)に関しては，2 つの 1 次元確率変数列の間の，弱い概念の漸近同等性とより強い概念の一様漸近同等性とが互いに同値となるための十分条件を与え，また漸近同等性を定義するために導入される 3 つの距離を数値的に評価する際に有用となる公式を与える。(2)に関しては，ウィシャート分布，ディリクレ分布を取り上げ，一様漸近正規性を証明することである。ここで，一様漸近正規性と言うのは，これらの分布とそれに対応する正規分布の漸近同等性を池田の意味で示すことである。結果は，正規分布に関するこれらの分布のカルバック-ライブラー情報量の上限を精密に評価することにより示す。

論文審査の結果の要旨

2つの確率変数列X_nとY_nの，確率分布の意味での漸近的同値性には通常法則収束（弱収束）が用いられるが，$\sup|P(X_n \in E) - P(Y_n \in E)| \to 0$，$n \to \infty$で定義される一様漸近同値性はより強い概念であり，これが示されれば統計量X_nをその分布がよく知られているY_nで近似するとき，より安心して用いることができる。ここでsupはボレル集合族の元Eでとられる。しかしながら，個別の確率分布で一様漸近同値性を示すことは，特に多変量の場合には，これまであまり成功していなかった。多くの統計量の近似分布として正規分布は最も重要である。本論文は統計解析で多用されるWishart分布とDirichlet分布の正規近似の一様漸近同値性に関する研究をまとめたものである。得られた成果を要約すると以下の通りである。

まず一様漸近同値性を示すにはKullback-Leibler情報量の収束を示せばよいことを証明し，半開区間で生成されるσ-algebraによる一様漸近同値性とボレル集合族によるそれの間の関係を調べ，ある緩い条件の下では一様漸近同値性は半開区間族で示せば十分であることを証明した。この条件は同値性を示したい場合にはほとんど成立する。

上の結果を用いてWishart分布の一様漸近正規性を証明した。p変量正規分布からの大きさNの無作為標本に基づく標本分散共分散行列の分布がWishart分布であり，多変量解析で重要な役割を果たしている。$N \to \infty$のときWishart分布が正規分布に法則収束することはよく知られているが収束が一様であることは初めて示され，また条件も$p^3/N \to 0$と緩い。一様漸近同値性におけるsupの評価にはKullback-Leibler情報量を用い，その誤差評価式も与えられ，$p^3/N \to 0$が漸近同値性のためには限界であることを示した。

次にDirichlet分布の一様漸近正規性を証明した。Dirichlet分布も多変量解析で重要な役割を果たしている。分布のパラメータを$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k+1})$とするとき条件はkに関しては固定されても発散してもよく，αに関しては$\min \alpha_i \to \infty$で与えられることを示し，近似誤差の評価式および数値評価を与えた。

以上のように，一様漸近同値性の基本的な性質を調べ，多変量解析で重要な2つの分布Wishart分布およびDirichlet分布の一様漸近正規性を証明した本論文は数理統計学の理論とその応用に寄与するものであり，博士（理学）論文として価値あるものと認定する。