様式３

論　文　内　容　の　要　旨

氏　名　（　芝田　康将　）	
論文題名	Advection-Diffusion System: Singular Structures based on ε-Regularity Theorem, Spatio-Temporal Pointwise Decay, and Infinite Speed of Propagation via Unique Continuation (移流拡散方程式の研究：ε正則性定理に基づく特異構造、時空間減衰解、一意接続定理による無限伝播性)

論文内容の要旨

本論文は以下の3つのテーマで構成されている．

■On Well-Posedness and Spatio-Temporal Pointwise Decay Property of Mild Solutions for Drift-Diffusion Equation.

★放物-楕円型の一般次元 Drift-Diffusion 方程式系を研究対象とし，時空間の各点において，同方程式系の解が無限遠方で減衰することを示した．同時に，その減衰率が最適であることを証明した．従来の研究では，主に“$L^p(\mathbb{R}^d)$ 空間における時間減衰”が議論されてきたが，本研究では時空間における各点減衰に着目し，「非線形項を含む場合でも，線形項のもつ最適減衰率と同じ減衰率を解が有すること」を示した点に特徴がある．更に，時空間重み付き$L^\infty(\mathbb{R}^d)$ 空間において初期値が小さいという仮定のもと，時間大域的適切性を確立した．詳細には，Banach 空間における陰関数定理を用いて，時間大域的な解の存在と一意性，及び初期値への連続依存性を証明した．加えて，時間無限大での解の漸近系が線形解と一致することを示した．

■Infinite Speed of Propagation and Unique Continuation for Solutions of the Keller-Segel Systems via Carleman Estimates.

★放物-放物型，及び放物-楕円型の両型をした一般次元 Keller-Segel 系を研究対象とし，Carleman 評価を用いて一意接続性定理を確立 した．具体的には，「ある時刻 T で解が恒等的に 0 となる開集合が存在するならば，$\mathbb{R}^n \times (0, T)$ において解は恒等的に 0 となる」という一意接続性定理を証明した．更に，同定理の応用として，「初期値のサポートがコンパクトであったとしても，解のサポートは瞬時に全空間に伝播する」という“解の無限伝播性” を証明した．

■Existence of axis-symmetric blow-up solution with multiple peak aggregations for the 2-D Keller-Segel systems coupled bipolar source and sink flow.

★放物-楕円型の二次元 Keller-Segel 系を研究対象とし，“軸対称な初期値をもつ同方程式系の解の特異性構造を解明”した．具体的には「初期値の $L^1(\mathbb{R}^2)$-norm が 16π を超え，かつ初期凝集点が互いに臨界距離を上回る場合，特異点が複数点で出現し，かつ軸上に軸対称性をもって発現する」という幾何的構造を明らかにした．同研究成果は“特異点数が単一に限られるか否か”という長い間の未解決問題に答えを与えたものである．

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　　名　（　芝田　康将　）		
論文審査担当者	（職）	氏　　名
	主 査　教授	杉山　由恵
	副 査　教授	小薗　英雄（早稲田大学, 理工学術院）
	副 査　教授	降籏　大介
	副 査　教授	中村　誠
	副 査　准教授	三浦　正成（大和大学, 理工学部）

論文審査の結果の要旨

芝田康将氏は本論文において、非線形拡散方程式系に現れる解の減衰構造、一意接続性、および特異構造に関する理論的研究を行った。本論文は、非線形放物型方程式系として代表的な Drift-Diffusion 方程式および Keller-Segel 系を対象とし、以下に記載する三つの主たる成果により構成されている。

第一に、放物-楕円型の一般次元 Drift-Diffusion 方程式系に対して、解が時空間の各点において無限遠方で減衰すること、およびその減衰率が最適であることを示した。従来の研究では主に関数空間 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 上での時間減衰が議論されてきたが、本研究では空間と時間の各点での減衰に着目し、非線形項を含む場合でも、線形項と同様の最適な減衰率が保たれることを証明した点に独自性がある。更に、時空間において重みを付けた$L^\infty(\mathbb{R}^d\times(0,\infty))$ノルム空間上で初期値が小さいという仮定のもと、時間大域的に適切性（解の存在、一意性、初期値への連続依存性）をバナッハ空間における陰関数定理を用いて確立した。また、時間無限における解の漸近形が、線形解と一致することも示している。

第二に、放物-放物型および放物-楕円型の Drift-Diffusion 方程式系に対して、Carleman評価を用いた一意接続性定理の確立を行った。すなわち、ある時刻において解が恒等的にゼロとなる空間開集合が存在すれば、それ以前の全ての時間においても解が恒等的にゼロとなることを示した。更に、同定理の応用として、初期値のサポートがコンパクトであったとしても、解のサポートが瞬時に全空間へ広がる「無限伝播性」も証明した。これにより、Drift-Diffusion 方程式系が持つ強い拡散的性質が明らかにされた。

第三に、二次元 Keller-Segel 系に対して、複数のピークを持つ軸対称な特異解の存在を示した。特に、初期値の積分値（$L^1(\mathbb{R}^d)$ノルム）が臨界値である 16π を超え、かつ初期に存在する凝集点の間の距離が一定の臨界距離より十分に大きい場合に、複数の特異点が軸上に軸対称な形で現れるという幾何的構造が形成されることを明らかにした。この結果は、「特異点の数は常に 1 つに限られるのか」という長年の未解決問題に対する重要な答えを与えるものであり、特異構造の理解に新たな視座を与えている。

以上のように、本論文は非線形拡散系に対して、減衰挙動、伝播構造、特異性形成という多面的な観点から深い理論的成果を挙げており、偏微分方程式の解析における重要な進展を与えている。

よって、博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。