



Title	Comprehensive study of Higgs bundles, Harmonic bundles, and Non-Abelian Hodge Correspondence
Author(s)	大野, 高志
Citation	大阪大学, 2025, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/103236
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

論文内容の要旨

氏 名 (大 野 高 志)

論文題名

Comprehensive study of Higgs bundles, Harmonic bundles, and Non-Abelian Hodge Correspondence
(ヒッグス束, 調和束, 非可換ホッジ対応の総合的研究)

論文内容の要旨

コンパクト・ケーラー多様体上の非可換ホッジ対応とは、多重安定なヒッグス束でチャーン類が消えているものの、調和束（平坦束で調和計量と呼ばれる計量を持つもの）、基本群の半単純表現の間の一対一対応である。この対応の驚くべき点としては、ヒッグス束は代数幾何及び複素幾何学的対象であり、調和束は微分幾何学的対象であり、基本群の表現とはトポロジカル的な対象であることである。ヒッグス束、調和束、基本群の表現は多くの数学の分野に現れることから、非可換ホッジ理論に関する研究は盛んである。本論文では、ヒッグス束、調和束に焦点をあて、いくつかの問題を研究した。

本論文の第一章では、コンパクト・ケーラー多様体と多重安定ヒッグス束でチャーン類が消えている組みの同時変形問題を研究した。同時変形問題とは、多様体とヒッグス束の複素構造の変形を同時に変形させる問題である。筆者は非可換ホッジ対応を用いて、上記の仮定の下での同時変形問題は、多様体の変形、ヒッグス束の変形を別々に考えることと同値であると示した。これにより、組みのモジュライ空間の局所的描像が複素構造のモジュライ、ヒッグス束のモジュライの直積になることがわかる。

第二章では、コンパクト・ケーラー多様体上の二つのチャーン類が消えている多重安定ヒッグス束とその間の射の同時変形問題を研究した。多重安定ヒッグス束の間の射は適切な行列によりパラメトライズされる。したがって多重安定ヒッグス束を固定した時の射の変形は自明である。通常変形問題は、次数付きリー代数で微分を持つものにより決定される。チャーン類が消えている多重安定ヒッグス束の変形を決定する次数付きリー代数は、非可換ホッジ対応により、形式的と呼ばれる性質を持つ。これらの観察から、上記の同時変形問題を決定する次数付きリー代数がなんらかの性質を持つことが期待できる。第二章では、実際にこの次数付きリー代数が形式的であることを非可換ホッジ対応を用いて示した。

第三章では、三次元佐々木多様体上に基本・ヒッチン方程式と呼ばれる方程式を定義し、そのモジュライ空間を構成した。さらに、その空間がハイパー・ケーラー計量を持つことを示した。この研究は、佐々木多様体上の非可換ホッジ対応に由来する。コンパクト・ケーラー多様体は実偶数次元の多様体である。佐々木多様体は、ケーラー多様体の奇数次元のアナログである。リーマン面（一次元ケーラー多様体）上のヒッグス束と調和束を結ぶものがヒッチン方程式である。三次元佐々木多様体はリーマン面の三次元アナログである。したがって、基本ヒッチン方程式はヒッチン方程式の三次元アナログである。

非可換ホッジ対応とはヒッグス束、調和束が特異点を持つ場合にも拡張されている。第四章では、特異点を持つ調和束がシンプレクティック組と呼ばれる対称性を持つときの構造を研究した。これを用いて特異点を持つ非可換ホッジ対応の精密化を行なった。

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏 名 (大野 高志)			
論文審査担当者	(職)		氏 名
	主 査	教授	後藤竜司
	副 査	教授	石田政司
	副 査	教授	山ノ井克俊
	副 査	教授	糟谷久矢
<p>論文審査の結果の要旨</p> <p>大野高志氏は、研究テーマ「ヒッグス束と非可換ホッジ対応」に関して、精力的かつ着実に研究を展開している。複素多様体上のベクトル束を E とし、$\text{End}(E)$ に値を取る正則な一次微分形式 Φ (ヒッグス場) が条件 $\Phi \wedge \Phi = 0$ をみたすとき、E と Φ の組み (E, Φ) をヒッグス束という。非可換ホッジ対応 (Non-Abelian Hodge correspondence) とは、トポロジカルな対象である平坦ベクトル束と複素幾何の対象であるヒッグス束とを、リーマン幾何的な調和計量を媒介として結びつける、深遠で非自明な理論である。この理論は、Donaldson-Uhlenbeck-Yau による小林-Hitchin 対応を基盤としつつ、1990 年代に Corlette、Hitchin、Simpson らの業績によって、コンパクトケーラー多様体上において体系的に確立された。非可換ホッジ対応は、リーマン面の一意化定理やタイヒミュラー空間の理論といった古典的主题を含むのみならず、ミラー対称性や幾何学的ラングランズ対応など、現代数学の最前線に位置する理論とも深く連関する壮大かつ包括的な理論体系である。</p> <p>大野高志氏は、複素多様体とヒッグス束の同時変形理論の枠組みを構築し、微分次数付きリー代数 (Differential Graded Lie algebra, DGLA) を用いてその変形空間の構造解析を行っている。コンパクトケーラー多様体と多重安定ヒッグス束の組に対する倉西空間が、局所的に複素多様体の倉西空間とヒッグス束の倉西空間の直積として記述できることを明らかにした。また、3 次元佐々木多様体上において、Basic-Hitchin 方程式の解のモジュライ空間に超ケーラー構造を構成するなど、多様な幾何構造の統一的理解に向けて、独創的かつ高度な成果を挙げている。これらの成果は、以下のように国際的に評価の高い学術誌に掲載されている：</p> <p>・ Ono, Takashi, Differential geometric approach to the deformation of a pair of complex manifolds and Higgs bundles, Pacific J. Math. 330 (2024), no. 2, 283-316.</p> <p>・ Ono, Takashi, Structure of the Kuranishi spaces of pairs of Kähler manifolds and polystable Higgs bundles, Bull. Lond. Math. Soc. 56 (2024), no. 12, 3581-3600.</p> <p>これらの研究を基礎とした大野氏の学位論文</p> <p>Comprehensive Study of Higgs Bundles, Harmonic Bundles, and Non-Abelian Hodge Correspondence (Higgs 束・調和束・非可換 Hodge 対応の総合的研究) は、現代幾何学の核心的課題に対する深い洞察と高い技術的完成度を兼ね備えた、水準の高い研究成果である。よって、本論文は博士 (理学) の学位論文として十分価値あるものと認める。</p>			