OUKA
Osaka University Knowledge Archive

Title	円管内脈動流れの流動形態と摩擦損失に関する研究
Author(s)	井口, 学
Citation	大阪大学, 1981, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/1034
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

円管内脈動流れの流動形態と摩擦損失に関する研究

1981年 6月

井 口 学

目　次

第1章　緒　論　1

1·1　はじめに　1
1·2　各　論　3
1·2·1　層流の場合の壁面せん断応力の表示式と流動形態、(第2章)　3
1·2·2　層流の場合の摩擦損失(第3章)　3
1·2·3　乱流の場合の流動形態、(第4章)　4
1·2·4　乱流の場合の摩擦損失(第5章)　4
1·2·5　乱流の場合の壁面せん断応力の表示式(第6章)　5
1·3　記　号　6

第2章　層流の場合の壁面せん断応力の表示式と流動形態、　9

2·1　緒　言　9
2·2　壁面せん断応力τ_wに対する種々の表示、　9
2·2·1　解析的表示、　9
2·2·2　等価粘性抵抗表示　11
2·2·3　擬定常表示、　13
2·2·4　重み関数表示(Zielkeの表示)　13
2·2·5　修正等価粘性抵抗表示　14
2·3　基礎的関係式と解析法　16
2·3·1　基礎的関係式　16
2·3·2　流動形態を規定する特性数　16
2·4　τ_wに対する各表示から計算される特性数　18
2·4·1　解析的表示　18
2·4·2　等価粘性抵抗表示　19
2·4·3　擬定常表示　19
2·4·4　重み関数表示(Zielkeの表示)　19

2·4·5 修正等価粘性抵抗表示 20
2·5 各表示の検討 20
2·6 流動形態 22
2·7 結 言 24

第3章 層流の場合の摩擦損失 25

3·1 緒 言 25
3·2 非圧縮性流体における瞬間管摩擦係数 $\lambda_{u(t)}$, 時間平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta}$ および自乗平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta,rm}$ 25
3·2·1 管摩擦係数の定義 25
3·2·2 瞬間管摩擦係数 $\lambda_{u(t)}$ 27
3·2·3 自乗平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta,rm}$ と時間平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta}$ 31
3·3 管摩擦係数と粘性逸散との関係 34
3·4 結 言 37

第4章 乱流の場合の流動形態 39

4·1 緒 言 39
4·2 基礎的関係式 39
4·2·1 擬定常領域における特性数の表示式 39
4·2·2 うず動粘性係数に関する4層モデルを用いて計算される管横断面平均速度 u_m と壁面せん断応力 τ_w 43
4·3 実験装置および測定方法 45
4·4 実験結果および考察 47
4·4·1 時間平均レイノルズ数が一定の場合 48
4·4·2 流動形態の系統的表示 51
4·4·3 流動形態に及ぼす高調波成分の影響 57
4·5 結 言 60

第5章　乱流の場合の摩擦損失　62

5·1　緒　言　62
5·2　管摩擦係数の推定法　62
5·2·1　圧力勾配 $\Delta p/\ell$，壁面せん断応力 τ_w の推定　62
5·2·2　瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$　66
5·2·3　時間平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta}$　69
5·3　実験結果との比較　71
5·3·1　瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$　71
5·3·2　時間平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta}$　75
5·4　管軸方向速度成分 $\bar{u}$ の横断面分布と，瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$ の加速域，減速域における様相との関係　78
5·5　擬定常領域，中間領域および慣性領域の境界に関する考察　81
5·5·1　擬定常領域と中間領域との境界 $(\omega'/R_{e\,ta}^{3/4})_f$　81
5·5·2　中間領域と慣性領域との境界 $(\omega'/R_{e\,ta}^{3/4})_t$　81
5·5·3　三つの領域に関する従来の研究との比較　83
5·6　結　言　85

第6章　乱流の場合の壁面せん断応力の表示式　87

6·1　緒　言　87
6·2　壁面せん断応力 τ_w に対する新表示法　88
6·3　管摩擦係数の推定値と測定値との比較　95
6·3·1　瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$　95
6·3·2　時間平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta}$　99
6·4　結　言　101

第7章　結　論　103

7·1　一般的事項　103
7·2　層流脈動流れの場合　104

7·2·1 三領域の境界 104
7·2·2 壁面せん断応力の新表示式 104
7·2·3 流動形態を規定する特性数に基づいて評価した壁面せん断応力の近似式の得失 105
7·2·4 管摩擦係数の定義 106
7·2·5 瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$ 106
7·2·6 時間平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta}$, 自乗平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta,rm}$ 107
7·2·7 摩擦損失と粘性逸散との関係 108
7·3 乱流脈動流れの場合 108
7·3·1 乱流脈動流れの定義と基礎事項 108
7·3·2 流動形態を規定する特性数 109
7·3·3 三領域の境界 110
7·3·4 摩擦損失を規定する三つのパラメータ ω', Re_{ta}, A_1 111
7·3·5 瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$ 111
7·3·6 時間平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta}$ 111
7·3·7 壁面せん断応力の新表示式 112

謝辞 114

文献 115

第1章　緒　論

1・1　はじめに

近年各種工業プラントの大型化に伴い，管路網は大規模かつ複雑となる傾向があり，同時に種々のポンプ，圧縮機などが多数配備されて，これらの起動，停止の際の管路網の過渡特性はもとより，プラントの定常運転時にもこれらの機械に固有な，あるいはこれらによって誘起される非定常流れがプラントの性能，安全性に及ぼす影響に大きな関心がもたれるようになった．

さて，管路網設計上，最も重要な要因は圧力損失と流量との関係であるが，その定常特性はもとより非定常特性を正しく評価することが必要である．流体が定常状態で流れている場合の各種管路網構成要素の圧力損失と流量との関係は十分知悉されており，たくさんの資料が用意されている．[1] ところが管路網の非定常特性の評価に必要な，非定常流れにおける各種管路網構成要素の圧力損失と流量との関係については，流れが層流である場合には理論的な扱いが比較的容易なこともあって円形管[2]~[5]，長方形管[6]~[8]をはじめとする単純な断面形状の管路[9]~[15]，オリフィスなどの絞り[16]~[18]について解析が行われ，実験的にも検証されつつあるが；乱流の場合の研究は理論，実験の両面において乏しく，その関係はほとんどわかっていない．[19]

工業用管路網において一般的かつ基本的な非定常流れは，定常流れに交番流が重ね合わされた，いわゆる脈動流れである．これは例えば，往復動圧縮機あるいは往復動ポンプを含む配管系，内燃機関の吸排気管内，渦巻ポンプのディフューザ内の流れに普通にみられるほかに，弁の自励振動，管路の共振などによってもごく一般に観察され，たいていの場合乱流である．[20] このような脈動流れの圧力損失と流量との関係の予測は通常擬定常状態の仮定のもとに行われるのが現状である．周波数が低い場合，この仮定は妥当であるが，周波数が高くなると成立しなくなる．

以上のことを全監み，本研究では非定常流れの中で最も基本的で重要な脈動流れに着目し，管路網の主構成要素である円管の圧力損失と流量との関係が周波数，時間平均レイノルズ数に対してどのような関係にあるかを解明することによって，管路網設計上の基礎資料を提供することを目的とする．

円管内脈動流れの圧力損失は運動方程式を管横断面平均して得られる運動量の式から明らかなように，摩擦損失に依拠する損失と流体の加速・減速に費やされる損失との和として表わされる．後者は容易に評価できるので，結局，圧力損失を求めるには摩擦損失を明らかにしなければならない．なお，脈動流れの場合，摩擦損失としては時々刻々の値と一周期にわたって平均した値が問題となる．

層流脈動流れの摩擦損失は油圧管路の動特性を把握するための必要性から理論的にかなり詳しく研究されて，実験的検討も加えられつつある[21]が，瞬間の値に関してはまだ不満な点が残る．一方，乱流脈動流れの摩擦損失については最近活発に研究されるようになったが[22)~(25)]，その詳細についてはほとんど分っておらず，従来報告されている結果には互いに相反する点もみうけられる．このように乱流の場合の摩擦損失が判然としない理由としては，理論的取扱いが困難なことのほかに，非定常流れに対する計測機器の応答性の悪いことが挙げられる．これは電磁流量計において特に顕著である．しかも脈動周波数，正確には無次元角周波数が高くなれば運動量の式において圧力損失（圧力項）は流体の加速・減速に費やされる損失（慣性項）とほぼつり合い，摩擦損失（粘性項）の割合は相対的に非常に小さくなるため，定常流れの場合に通常用いられる方法，すなわち圧力差と速度を測定することによって間接的に摩擦損失を求める方法では必然的に誤差が大きくなる．以上の事項に対して従来の研究者はあまり留意しなかったために，得られた結果も信頼性に欠けるものになったと考える．

本研究では摩擦損失を管摩擦係数によって評価するが，摩擦損失を実験的に求めるに際して従来と同じ測定法を採用しながらも，計器の応答性を高めるために工夫をこらすとともに，上記必然的に現われる誤差を除くため新しい手法を考案した．これをまず層流脈動流れに適用して妥当性を検証しつつ摩擦損失と脈動周波数との関係を明らかにし，つづいて乱流脈動流れに適用した．

すなわち，脈動流れの圧力項，慣性項，粘性項の三項と脈動周波数および時間平均レイノルズ数との関係を定量化するために四つの特性数を導入し，これらを周波数，あるいは周波数と時間平均レイノルズ数との組合せに対してプロットした図（これを流動形態図と呼ぶ）を作製すれば，これから特性

数の値を読み取ることによって摩擦損失が推定できるだけでなく，摩擦損失と周波数，時間平均レイノルズ数との関係を明確に示すことができる．また，この推定値を測定値と比較するとき，両者間に良好な一致がみられ，摩擦損失したがってまた圧力損失を推定値によって満足できる程度に評価できた．また流動形態図からの特性数の読み取りが困難な領域に対しては摩擦損失の表示式を提案した．

1・2　各論

1・2・1　層流の場合の壁面せん断応力の表示式と流動形態（第2章）

円管内定常流れにおいては圧力項は粘性項とつり合うが，脈動流れの場合圧力項は慣性項と粘性項の和として表わされる．すなわち脈動流れの流動形態はこれら三つの項の量的関係において規定されることになる．慣性項が無視できるほど小さくて圧力項と粘性項がほぼつり合う流れの状態は擬定常状態として古くから知られている[26]．一方圧力項と慣性項がつり合うようになれば流れは近似的に非粘性流れとして取り扱える．ところがこれら三項の量的関係に着目して脈動流れの流動形態を論じた報告はない．

本章では　まず上記三項の量的関係したがってまた流動形態を規定する四つの特性数を定義し，草間[2]，Uchida[4]によって導かれた圧力－速度に関する層流理論に基づいて層流脈動流れの流動形態を三つの領域，すなわち擬定常領域，中間領域　および慣性領域に分類し，それらの境界を定めた．つぎに，これらの特性数に基づいて従来報告されている壁面せん断応力τ_wの近似式の得失を論じ，あわせてτ_wを管横断面平均速度U_mの関数として新たに導びくとともに，その近似式も提案した．

1・2・2　層流の場合の摩擦損失（第3章）

本章では，圧力勾配あるいは管横断面平均速度が与えられたとき，層流脈動流れの摩擦損失が周波数とどのような関係にあるかを管摩擦係数の評価によって検討した．

定常流れにおいて管摩擦係数は圧力損失と流量を関係づける係数として定義されている．[27]　また摩擦損失は圧力損失に直接的に関係づけられ

るために，管摩擦係数は摩擦損失と流量を関係づける係数でもある．ところが脈動流れにおいては圧力項は慣性項と粘性項の和として表わされるが，慣性項は損失ではなく保存される量である．したがって脈動流れの管摩擦係数は定常流れの場合とは異なった観点から定義する必要がある．

ここでは 従来の報告も参考にして，仕事率の関係から瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$，時間平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta}$，自乗平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta,rm}$ の三つを定義し，これらと周波数との関係を調べた．とくに瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$ については 加速域，減速域において，それが擬定常管摩擦係数 $\lambda_{g,\ell}$ と異なる程度を詳しく調べ，管摩擦係数と粘性逸散との関係についても言及した．

1・2・3 乱流の場合の流動形態（第4章）

層流脈動流れの流動形態を規定するために導入した四つの特性数が乱流の場合にどのような値をとるかを実験的に調べた．すなわち，乱流脈動流れを規定する三つのパラメータ（無次元角周波数 ω'，時間平均レイノルズ数 Re_{ta}，速度振幅比 A_i）のうち，まず時間平均レイノルズ数をほぼ 5.7×10^4 に設定し，ω' と A_i を広範囲に変化させた実験を行い，これら二つのパラメータが特性数に及ぼす影響を探った．つぎに Re_{ta} を広範囲に変化させて特性数の値を求めた．この結果，速度振幅比 A_i は特性数にほとんど影響を及ぼさず，特性数は 乱流擬定常流れの解析から導かれる $\omega'/Re_{ta}^{3/4}$ の関数として表わされることがわかった．さらにこれら四つの特性数を図に描いて流動形態図を作製し，擬定常領域，中間領域および慣性領域の三つの領域の境界を定め，摩擦損失を推定するための基礎資料を作製した．

1・2・4 乱流の場合の摩擦損失（第5章）

前章で実験的に求めた流動形態図を利用して瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$ と時間平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta}$ の推定を行い，この結果を実験結果と比較してその妥当性を検証するとともに，これらの管摩擦係数と周波数，時間平均レイノルズ数，速度振幅比 との関係を明らかにした．瞬間管摩擦係数については各瞬間の速度分布との関連性についても言及した．さらに，前章で

定めた擬定常領域，中間領域および慣性領域の境界の妥当性について従来報告されている境界値とも比較しつつ詳しく検討した．

1・2・5　乱流の場合の壁面せん断応力の表示式（第6章）

前章に示した圧力と速度を測定して摩擦損失を実測しようとする方法では周波数が高くなるに従って，この際必要となる壁面せん断応力を求める計算過程において不可避的に誤差が大きくなるために，τ_wを，したがってまた摩擦損失を正確に求めることが困難となる．また前章の推定法を用いて摩擦損失を評価する場合にも特性数の読み取り誤差が大きくなり，周波数の高いところ（慣性領域）では摩擦損失の評価は事実上不可能となる．

そこで本章では，今までに報告された理論的ならびに実験的事実に検討を加えることによって，慣性領域における摩擦損失が層流の様相を示すようになることを指摘し，τ_wに対し二つの新しい表示式を導びいた．これらを用いて計算した特性数および管摩擦係数の値を擬定常領域，中間領域における測定値と比較することによって，まずこれらの領域での妥当性を検討した後，慣性領域における有効性を論じた．

1・3　記　号

本論文で用いたおもな記号はつぎのとおりである．

A_1 ： 速度振幅比 $= |U_{m,os,1}|/U_{m,ta}$

B_1, B_2 ： 式(5-23), (5-24)で示される係数

C ： 式(3-5)で定義される係数

C_f ： 式(2-15)で定義される係数

C_{fe} ： 等価粘性抵抗係数

C_{ta} ： 式(3-13)で定義される係数

D ： 管直径

f ： 脈動流れの周波数

$I_0(z), I_1(z)$ ： 零次および一次の第1種変形ベッセル関数

$K_0(z), K_1(z)$ ： 零次および一次の第2種変形ベッセル関数

K_1 ： 式(4-26)で定義される係数

k ： 式(2-17)で定義される係数

k_j, m_j ： 表4-1に示した定数

l ： 試験管路部の長さ

$M_0(\sqrt{\omega}), M_1(\sqrt{\omega}), M_2(\sqrt{\omega}), \theta_0(\sqrt{\omega}), \theta_1(\sqrt{\omega}), \theta_2(\sqrt{\omega})$ ： 零次，一次および二次の第1種ベッセル関数 $J_0(i^{3/2}\sqrt{\omega}), J_1(i^{3/2}\sqrt{\omega}), J_2(i^{3/2}\sqrt{\omega})$ の絶対値および位相角

p ： 圧力

R ： 管半径

Re ： 瞬間レイノルズ数 $\equiv u_m D/\nu$

Re_{ta} ： 時間平均レイノルズ数 $\equiv u_{m,ta} D/\nu$

R^* $\equiv u^* R/\nu$

r ： 半径方向座標

r_1, r_2, r_3 ： 図4-2で定義される半径方向位置

S_t ： ストロハル数 $\equiv fD/u_{m,ta}$

s ： ラプラス演算子

T ： 周期 $= 2\pi/\omega$

t ： 時間

U ： 式(4-24)で示される量

u ： 軸方向速度成分

u_m ： 管横断面平均速度

W ： 重み関数

x ： 管軸方向座標

y^* ： 無次元壁面距離 $\equiv u^* y/\nu$

$z_j(r)$ ： 式(4-22)で定義される変数

Δp ： 圧力差

$\Delta p/\ell$ ： 圧力勾配

ε ： うず動粘性係数

$\xi_1 \equiv \lambda_{u,ta} / \lambda_{s,t}$

$\eta_1(\sqrt{\omega'})$, $\xi_1(\sqrt{\omega'})$ ： 式(2-9),(2-10)あるいは式(2-25),(2-26)で定義される係数

λ_p ： Schultz-Grunow の定義した時間平均管摩擦係数

λ_g ： 擬定常管摩擦係数

λ_s ： 定常流管摩擦係数

$\lambda_u(t)$ ： 瞬間管摩擦係数

$\lambda_{u,ta}$ ： 時間平均管摩擦係数

$\lambda_{u,ta,rm}$ ： 自乗平均管摩擦係数

μ ： 粘性係数

ν ： 動粘性係数

$\nu_{z,j}$ ： 総括うず動粘性係数 $\equiv \varepsilon + \nu$

ρ_o ： 密度

σ_1 ： 修正係数

τ ： 無次元時間 $\equiv t\nu/R^2$

τ_w ： 壁面せん断応力

$\Phi_{t,n}$, $\Phi_{z,n}$, $\alpha_{t,n}$, $\alpha_{z,n}$ ： 流動形態を規定する特性数

ω ： 脈動流れの角周波数 $= 2\pi f$

ω' ： 無次元角周波数 $\equiv R^2\omega/\nu$

$\omega'_e = 115.6\,\omega'/R_{e\,ta}^{3/4}$

ω'_g ： 擬定常領域と中間領域との境界を示す無次元角周波数

ω'_t ： 中間領域と慣性領域との境界を示す無次元角周波数

添字ほか

j ： ν_Σ のモデルにおける第 j 層の量

l ： 層流状態

n ： n 次の高調波成分

os ： 脈動流れの変動成分または振動流れにおける量

pl ： 脈動流れにおける量

q ： 擬定常状態

rm, rms ： root mean square

t ： 慣性領域における量または乱流状態

ta ： 時間平均値

1 ： 基本波

^ ： ラプラス変換した量

— ： 短時間平均した量（ここで短時間とは，乱れに基づく変動成分は消えるが，脈動にもとづく変動成分は残る程度の時間間隔をいう）

第2章　層流の場合の壁面せん断応力の表示式と流動形態

2・1　緒　言

非圧縮性流体の円管内層流非定常流れの壁面せん断応力 τ_w に対して擬定常表示（定常摩擦則による表示），等価粘性抵抗表示[28][29]，重み関数表示[30]（Zielke の表示）などがある．しかしながらこれらの表示を脈動流れに適用した場合に層流理論解から導かれる解析的表示に比べてどの程度の相違があるかを定量的に示した報告は見当たらない．また，その解析的表示にしても実用上使用しにくい形となっている．

本章では非圧縮性層流脈動流れに対して，まず運動量の式を基にして脈動流れの流動形態を規定する四つの特性数 $\Xi_{t,n}$，$\Xi_{z,n}$，$\alpha_{t,n}$，$\alpha_{z,n}$ を導入することにより，τ_w の各表示の得失を解析的表示と比較しつつ明らかにするとともに，従来の解析的表示よりも使い易いと考えられる加速度 du_m/dt を考慮した表示式を新たに提案し，さらにこの表示式に対する近似式を導びいた．つぎに層流脈動流れの流動形態を周波数に関して擬定常領域，中間領域および慣性領域の三つに分類することが妥当であることを示し，これらの境界を，上記特性数を用いて定めることを提案した．

2・2　壁面せん断応力 τ_w に対する種々の表示

2・2・1　解析的表示

非圧縮性流体の円管内層流脈動流れの基礎式として

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\\ \frac{\partial p}{\partial r}&=0\end{aligned}\right\}\qquad\cdots(2\text{-}1)$$

を用いる．上式において，圧力勾配 $-\partial p/\partial x$ を次式

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\Delta p}{l}=\frac{\Delta p_{ta}}{l}+\frac{|\Delta p_{os,1}|}{l}\cos\omega t\qquad\cdots(2\text{-}2)$$

で表わし，境界条件 $r=0$ で u：有限，$r=R$ で $u=0$ を適用すれば

$$u=\frac{1}{4\mu}\frac{\Delta p_{ta}}{l}(R^2-r^2)+\frac{1}{\rho_0\omega}\frac{|\Delta p_{os,1}|}{l}\left\{\sin\omega t-\frac{M_0(r\sqrt{\omega/\nu})}{M_0(\sqrt{\omega'})}\sin\left[\omega t+\theta_0(r\sqrt{\omega/\nu})-\theta_0(\sqrt{\omega'})\right]\right\} \quad \cdots(2-3)$$

となり,[2][4] これより管横断面平均速度 u_m, 壁面せん断応力 τ_w はそれぞれ次式

$$u_m=\int_0^R 2\pi r u dr\Big/(\pi R^2)=u_{m,ta}+u_{m,os,1}$$
$$=\frac{R^2}{8\mu}\frac{\Delta p_{ta}}{l}+\frac{R^2}{\mu}\frac{1}{\omega'}\frac{|\Delta p_{os,1}|}{l}\frac{M_2(\sqrt{\omega'})}{M_0(\sqrt{\omega'})}\cos\left[\omega t+\theta_2(\sqrt{\omega'})-\theta_0(\sqrt{\omega'})-3\pi/2\right] \quad \cdots(2-4)$$
$$\tau_w=-\mu(\partial u/\partial r)_{r=R}=\tau_{w,ta}+\tau_{w,os,1}$$
$$=\frac{R}{2}\frac{\Delta p_{ta}}{l}+\frac{R}{\sqrt{\omega'}}\frac{|\Delta p_{os,1}|}{l}\frac{M_1(\sqrt{\omega'})}{M_0(\sqrt{\omega'})}\cos\left[\omega t+\theta_1(\sqrt{\omega'})-\theta_0(\sqrt{\omega'})-3\pi/4\right] \quad \cdots(2-5)$$

のように導かれる. 式(2-4), (2-5)は後に出て来る表示式との関係上解析的表示と呼ぶことにするが, いまこれらの式において $\omega'\to 0$ のとき

$$[\theta_2(\sqrt{\omega'})-\theta_0(\sqrt{\omega'})]\to 3\pi/2,\quad [\theta_1(\sqrt{\omega'})-\theta_0(\sqrt{\omega'})]\to 3\pi/4$$
$$M_2(\sqrt{\omega'})/[\omega' M_0(\sqrt{\omega'})]\to 1/8,\quad M_1(\sqrt{\omega'})/[\sqrt{\omega'} M_0(\sqrt{\omega'})]\to 1/2$$

となる[3][1] ことから $u_{m,os,1}$, $\tau_{w,os,1}$ はともに $\Delta p_{os,1}/l$ と同位相で変動し, かつ変動圧力勾配をそのまま定常流れの関係式の中の圧力勾配に置き換えて得られる絶対値を持つことが分る. したがってこの場合, 流れは擬定常的となる.

また $\omega'\to\infty$ のときには

$$[\theta_2(\sqrt{\omega'})-\theta_0(\sqrt{\omega'})]\to\pi,\quad [\theta_1(\sqrt{\omega'})-\theta_0(\sqrt{\omega'})]\to\pi/2$$

となることから, $\Delta p_{os,1}/l$ に対して $u_{m,os,1}$ の位相はほぼ $\pi/2$, $\tau_{w,os,1}$ のそれはほぼ $\pi/4$ 遅れることが分る.

式(2-5)が τ_w の解析的表示であるが, 後の議論のために, $\tau_{w,os,1}$ と $u_{m,os,1}$ との関係を求めておこう. 式(2-1)をラプラス変換して得られるベッセル型の微分方程式を解いて $\hat{u}(s)$ を $-\partial\hat{p}(s)/\partial x$ を含む形で求め, この $\hat{u}(s)$ から導かれる $\hat{\tau}_w(s)$ と $\hat{u}_m(s)$ との変動成分をとって, これら二つの関係を求めれば次式が得られる.[3][0]

$$\hat{\tau}_{w,os,1}(s)=\frac{\rho_0 Rs}{\dfrac{-(i\sqrt{s/\nu}R)J_2(i\sqrt{s/\nu}R)}{J_1(i\sqrt{s/\nu}R)}}\hat{u}_{m,os,1}(s) \qquad \cdots(2\text{-}6)$$

ここで $S=i\omega$ とおいて周波数領域に直せば

$$\begin{aligned}\tau_{w,os,1}(i\omega)e^{i\omega t}&=\frac{\rho_0 Ri\omega}{\dfrac{-(i\sqrt{i\omega/\nu}R)J_2(i\sqrt{i\omega/\nu}R)}{J_1(i\sqrt{i\omega/\nu}R)}}u_{m,os,1}(i\omega)e^{i\omega t}\\&=\frac{\rho_0 R\omega}{\sqrt{\omega'}}\frac{M_1(\sqrt{\omega'})}{M_2(\sqrt{\omega'})}e^{i[\theta_1(\sqrt{\omega'})-\theta_2(\sqrt{\omega'})+3\pi/4]}u_{m,os,1}(i\omega)e^{i\omega t}\\&=\frac{\mu}{R}\sqrt{\omega'}\frac{M_1(\sqrt{\omega'})}{M_2(\sqrt{\omega'})}\Big[\cos\{\theta_1(\sqrt{\omega'})-\theta_2(\sqrt{\omega'})+3\pi/4\}u_{m,os,1}(i\omega)e^{i\omega t}\\&+\frac{\sin\{\theta_1(\sqrt{\omega'})-\theta_2(\sqrt{\omega'})+3\pi/4\}}{\omega}\frac{d}{dt}\{u_{m,os,1}(i\omega)e^{i\omega t}\}\Big] \qquad \cdots(2\text{-}7)\end{aligned}$$

となる．$\tau_{w,os,1}(i\omega)e^{i\omega t}$ および $u_{m,os,1}(i\omega)e^{i\omega t}$ の実部をそれぞれ $\tau_{w,os,1}$，$u_{m,os,1}$ とすれば式(2-7)から

$$\tau_{w,os,1}=\frac{4\mu}{R}\left\{\eta_1(\sqrt{\omega'})u_{m,os,1}+\frac{\xi_1(\sqrt{\omega'})}{\omega}\frac{du_{m,os,1}}{dt}\right\} \qquad \cdots(2\text{-}8)$$

$$\eta_1(\sqrt{\omega'})=\frac{\sqrt{\omega'}}{4}\frac{M_1(\sqrt{\omega'})}{M_2(\sqrt{\omega'})}\cos[\theta_1(\sqrt{\omega'})-\theta_2(\sqrt{\omega'})+3\pi/4] \qquad \cdots(2\text{-}9)$$

$$\xi_1(\sqrt{\omega'})=\frac{\sqrt{\omega'}}{4}\frac{M_1(\sqrt{\omega'})}{M_2(\sqrt{\omega'})}\sin[\theta_1(\sqrt{\omega'})-\theta_2(\sqrt{\omega'})+3\pi/4] \qquad \cdots(2\text{-}10)$$

を得る．これがここで新しく提案した τ_w の表示式であり，以下これも解析的表示と呼ぶ．なお式(2-8)の $u_{m,os,1}$ に式(2-4)で示される値を代入すれば，式(2-5)で表わされる $\tau_{w,os,1}$ が容易に求まる．

2・2・2 等価粘性抵抗表示

式(2-1)を管横断面平均し，変動成分のみのつり合いを考えた式

$$\rho_0\frac{\partial u_{m,os,1}}{\partial t}+\frac{\partial p_{os,1}}{\partial x}+\frac{4}{D}\tau_{w,os,1}=0 \qquad \cdots(2\text{-}11)$$

において

$$4\tau_{w,os,1}/D=\rho_0 c_{fe}u_{m,os,1} \qquad \cdots(2\text{-}12)$$

とおいたとき，C_{fe} を等価粘性抵抗係数と呼んでいる．いまこの係数のラプラス領域における値は式(2-6)から容易に計算されるので，$S=i\omega$ とおいて周波数領域に直せば

$$c_{fe}(i\omega)=\frac{2\omega}{\sqrt{\omega'}}\frac{M_1(\sqrt{\omega'})}{M_2(\sqrt{\omega'})}e^{i[\theta_1(\sqrt{\omega'})-\theta_2(\sqrt{\omega'})+3\pi/4]} \qquad \cdots(2-13)$$

が得られる．簡単な計算では上式の実部だけとって次式

$$c_{fe}=\frac{2\omega}{\sqrt{\omega'}}\frac{M_1(\sqrt{\omega'})}{M_2(\sqrt{\omega'})}\cos[\theta_1(\sqrt{\omega'})-\theta_2(\sqrt{\omega'})+3\pi/4] \qquad \cdots(2-14)$$

を用いる．[29] 式(2-12)の関係を定常流れの場合に適用したとき得られる C_{fe} の値を C_f とおけば

$$c_f=8\nu/R^2 \qquad \cdots(2-15)$$

となるので C_{fe} を C_f との比で表わすと

$$\frac{c_{fe}}{c_f}=\frac{\sqrt{\omega'}}{4}\frac{M_1(\sqrt{\omega'})}{M_2(\sqrt{\omega'})}\cos[\theta_1(\sqrt{\omega'})-\theta_2(\sqrt{\omega'})+3\pi/4] \qquad \cdots(2-16)$$

となる．これは式(2-9)の $\eta_1(\sqrt{\omega'})$ と全く同じ量となる．

ところで山口ら[28]はつぎのような近似式

$$\left.\begin{aligned}\frac{c_{fe}}{c_f}&=\frac{\omega'}{8}k\sqrt{k^2+2} && \sqrt{\omega'}\geqq 3.817\\ &=1 && \sqrt{\omega'}\leqq 3.817\end{aligned}\right\} \qquad \cdots(2-17)$$

ここで $k=\sqrt{\omega'}/[\omega'-\sqrt{2\omega'}+1]$

を導びいている．式(2-17)は式(2-16)を高周波数領域と低周波数領域で近似したものに相当している．式(2-12)，(2-15)より

$$\tau_{w,os,1}=\frac{4\mu}{R}u_{m,os,1}\frac{c_{fe}}{c_f} \qquad \cdots (2\text{-}18)$$

と表わせる．これが等価粘性抵抗表示であるが，式(2-18)と式(2-16)をあわせ考えることにより，等価粘性抵抗表示は解析的表示式(2-8)の加速度に比例する項を無視したものにほかならないことが分る．

2・2・3　擬定常表示

全周波数領域で擬定常状態が成立すると仮定すれば次式が得られる．

$$\tau_{w,os,1}=\frac{4\mu}{R}u_{m,os,1} \qquad \cdots (2\text{-}19)$$

これを擬定常表示と呼ぶが，この式と式(2-8)を見比べることにより擬定常表示は解析的表示において $\eta_1(\sqrt{\omega})=1$，$\xi_1(\sqrt{\omega})=0$ とおいたものに等しいことが分る．

2・2・4　重み関数表示（Zielke の表示）

Zielke[30] は $\hat{\tau}_w(s)$ と $\hat{u}_m(s)$ の関係式の代わりに $\hat{\tau}_w(s)$ と $d\hat{u}_m(s)/dt$ との関係を導びき，これを時間領域に逆変換してつぎの関係式

$$\tau_{w,os,1}=\frac{4\mu}{R}u_{m,os,1}+\frac{2\mu}{R}\int_0^t\frac{\partial u_{m,os,1}}{\partial t}(t')W(t-t')dt' \qquad \cdots (2\text{-}20)$$

$$\left.\begin{aligned}&W(\tau)=\sum_{i=1}^{5}e^{-a_i^2\tau}\\&a_1=5.135\,62,\ a_2=8.417\,24,\ a_3=11.619\,84\\&a_4=14.795\,95,\ a_5=17.959\,82\\&\qquad\qquad \tau\geqq 0.02\end{aligned}\right\} \qquad \cdots (2\text{-}21)$$

$$\left.\begin{aligned}&W(\tau)=0.282\,095\tau^{-1/2}-1.250\,000+1.057\,855\tau^{1/2}\\&\quad+0.937\,500\tau+0.396\,696\tau^{3/2}-0.351\,563\tau^{2}\\&\qquad\qquad \tau\leqq 0.02\end{aligned}\right\} \qquad \cdots (2\text{-}22)$$

$$\tau=\nu t/R^2 \qquad \cdots (2\text{-}23)$$

を求めた．なお式(2-21)の a_i $(i=1,2,\cdots,5)$ は J_2 の i 番目の零点であり，文献(30)の表1に20番目までの値が小数点以下5けたまで示さ

れている．Zielke は上記 a_i の値について小数点以下4けたまでとって計算した a_i^2 の値を掲載しているが，ここでは，そのまま a_i^2 としておく．
式(2-20)～(2-22)をラプラス変換し，$S = i\omega$ とおいて周波数領域で表示すれば

$$\tau_{w,os,1}=\frac{4\mu}{R}\left\{\eta_1(\sqrt{\omega'})u_{m,os,1}+\frac{\xi_1(\sqrt{\omega'})}{\omega}\frac{du_{m,os,1}}{dt}\right\} \quad \cdots(2\text{-}24)$$

$$\left.\begin{aligned}\eta_1(\sqrt{\omega'})&=1+\frac{\omega'^2}{2}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{a_i^4+\omega'^2},\quad \xi_1(\sqrt{\omega'})=\frac{\omega'}{2}\sum_{i=1}^{5}\frac{a_i^2}{a_i^4+\omega'^2}\\ &\sqrt{\omega'}\leqq 3.817\end{aligned}\right\} \quad \cdots(2\text{-}25)$$

$$\left.\begin{aligned}\eta_1(\sqrt{\omega'})&=\frac{\sqrt{\omega'}}{4\sqrt{2}}+\frac{3}{8}+\frac{15}{32\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{\omega'}}-\frac{135}{512\sqrt{2}}\frac{1}{\omega'^{3/2}}+\frac{45}{128}\frac{1}{\omega'^2}\\ \xi_1(\sqrt{\omega'})&=\frac{\sqrt{\omega'}}{4\sqrt{2}}-\frac{15}{32\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{\omega'}}-\frac{15}{32\omega'}-\frac{135}{512\sqrt{2}}\frac{1}{\omega'^{3/2}}\\ &\sqrt{\omega'}\geqq 3.817\end{aligned}\right\} \quad \cdots(2\text{-}26)$$

となる．これを重み関数表示と呼ぶ．

これら二つの近似式(2-25)，(2-26)の適用範囲の境界を $\sqrt{\omega}=3.817$ としたのはつぎの理由による．Zielke[30] の導びいた式(2-21)，(2-22)の二つの重み関数の適用範囲の境界にあたる $\tau = 0.02$ の値は，周波数領域では $\sqrt{\omega} \fallingdotseq 7$ となる．ここで式(2-25)，(2-26)の $\eta_1(\sqrt{\omega})$ の値を図2-1に，$\xi_1(\sqrt{\omega})$ の値を図2-2に示す．$\sqrt{\omega} \fallingdotseq 7$ において式(2-25)，式(2-26)の $\eta_1(\sqrt{\omega})$ は比較的うまくつながっているが $\xi_1(\sqrt{\omega})$ のほうはまったく離れている．ところが式(2-26)の $\xi_1(\sqrt{\omega})$ と解析解から導かれる $\xi_1(\sqrt{\omega})$ とは式(2-17)で示したように山口らの求めた値 $\sqrt{\omega}=3.817$ において比較的よくつながっているので，この接続点に着目して適用範囲の境界をこのように定めた．

2・2・5 修正等価粘性抵抗表示

佐藤ら[32]と同じように式(2-9)，(2-10)の $\eta_1(\sqrt{\omega})$，$\xi_1(\sqrt{\omega})$ を近似するもう一つの方法であるが，この方法でも $1 \leqq \sqrt{\omega} \leqq 3$ の範囲で近似の精度があまりよくないことが知られており，また近似式も繁雑になるため，できるかぎり簡単な表示を試みた．

等価粘性抵抗係数を用いた表示に加速度の項を考慮して，$\tau_{w,os,1}$ を

次式

$$\tau_{w,os,1}=\frac{4\mu}{R}u_{m,os,1}\frac{c_{fe}}{c_f}+\frac{A}{1+B}\frac{du_{m,os,1}}{dt} \qquad \cdots(2\text{-}27)$$

で表わす．A，Bは任意定数であって，つぎの仮定

(1) ω' が小さい場合，$\bar{\tau}_{t,1}$ は解析的表示の $\bar{\tau}_{t,1}$ の近似式 $\bar{\tau}_{t,1}=1/\sqrt{2+(8/\omega')^2}$ に一致する．

(2) $\omega'\to\infty$ のとき，$\alpha_{z,1}$ は $\pi/4$ に漸近する．

を用いて決定すれば $A=0.4142\rho_0 R/2$，$B=0.4142(\omega'/8)\times c_f/c_{fe}$ となる．したがって式(2-27)は次式となる．

$$\tau_{w,os,1}=\frac{4\mu}{R}u_{m,os,1}\frac{c_{fe}}{c_f}+\frac{1}{2.4142+(\omega'/8)(c_f/c_{fe})}\frac{\rho_0 R}{2}\frac{du_{m,os,1}}{dt} \qquad \cdots(2\text{-}28)$$

これを修正等価粘性抵抗表示と呼ぶ．c_{fe}/c_f の値としては式(2-16)のほうが精度がよいので以下の計算においてはこれを用いるが，図2-1から明らかなように，式(2-17)は式(2-16)とそう大きな相違はないので実用上は簡単な式(2-17)を用いても十分な精度が得られる．

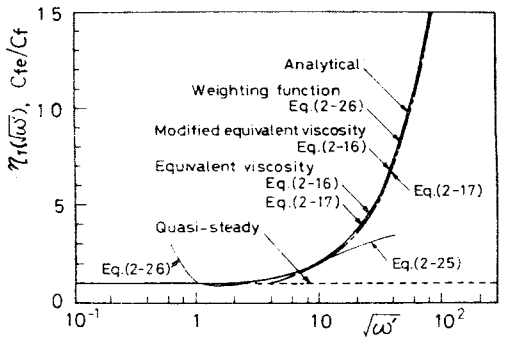


図2-1 τ_w に対する各表示から計算される $\bar{\tau}_{t,1}(\sqrt{\omega'})$，$c_{fe}/c_f$ の値

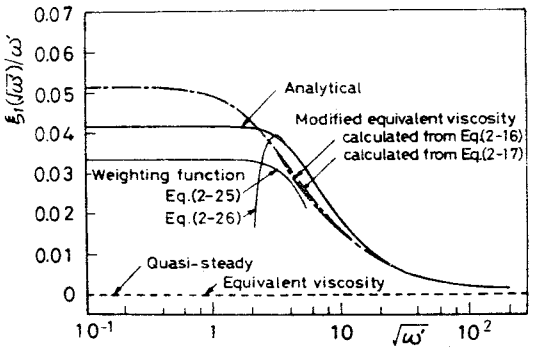


図2-2 τ_w に対する各表示から計算される $\xi_1(\sqrt{\omega'})/\omega'$ の値

2・3　基礎的関係式と解析法

2・3・1　基礎的関係式

式(2-1)を管横断面平均し，軸方向に $x=0$ から ℓ まで積分すればつぎのような運動量の式が得られる．

$$\rho_0 \frac{du_m}{dt} + \frac{4}{D}\tau_w = \frac{\Delta p}{l} \qquad \cdots (2\text{-}29)$$

（慣性項）（粘性項）（圧力項）

流れが乱流である場合にも，運動量の式は式(2-29)とまったく同じ形となる．

定常流れの場合には上式の最初の項は消えるので圧力項と粘性項とがつり合うが，非圧縮性流体の非定常流れの場合には，圧力項，慣性項，粘性項の三つの項がつり合っていることになる．したがって，今後脈動流れを解析するに際して，この式(2-29)を基礎式に選び3個の各項がそれぞれ相互にどのような量的関係を保ちつつ変化してゆくかを考究してゆくことにする．

2・3・2　流動形態を規定する特性数

圧力勾配 $\Delta p/\ell$，管横断面平均速度 u_m は一般には複雑な変化をするので，まずこれらはフーリエ展開しておく．1周期あたり12個の測定値を用いてフーリエ展開を行ったとき，ここで用いた実験装置に対しては基本波のみで精度よく表わせることを確かめてある（第4章参照）が，一般の場合を考えて，ここでは三次の高調波成分まで考慮し，$\Delta p/\ell$，u_m，τ_w をそれぞれつぎの形

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{\Delta p_{ta}}{l} + \sum_{n=1}^{3} \frac{|\Delta p_{os,n}|}{l} \cos\{n\omega t + \angle(\Delta p_{os,n}/l)\} \qquad \cdots (2\text{-}30)$$

$$u_m = u_{m,ta} + \sum_{n=1}^{3} |u_{m,os,n}| \cos(n\omega t + \angle u_{m,os,n}) \qquad \cdots (2\text{-}31)$$

$$\tau_w = \tau_{w,ta} + \sum_{n=1}^{3} |\tau_{w,os,n}| \cos(n\omega t + \angle \tau_{w,os,n}) \qquad \cdots (2\text{-}32)$$

に表わしておく．ここで添字 ta と os はそれぞれ時間平均値および変動成分を表わす．なお参考までに，基本波（$n=1$）のみを採用したとき，$\Delta p/l$，τ_w，u_m がどのように変化するかを模式的に図2-3に示した．

式(2-30)～(2-32)を式(2-29)に代入すれば，時間平均値と変動成分に関してそれぞれつぎのような二つのつり合いの式が得られる．

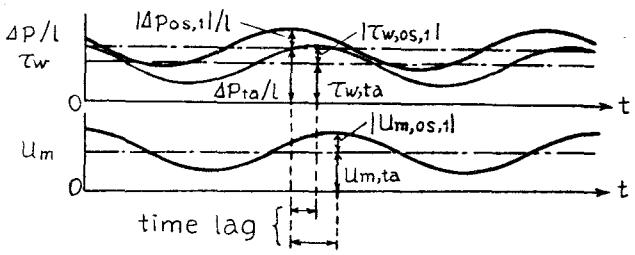


図2-3　$\Delta p/l$，τ_w，u_m の一周にわたる変化の模式図

$$\Delta p_{ta}/l = 4\tau_{w,ta}/D \qquad \cdots(2\text{-}33)$$

$$-\rho_0 n\omega|u_{m,os,n}|\sin(n\omega t+\angle u_{m,os,n})+(4|\tau_{w,os,n}|/D)\cos(n\omega t+\angle\tau_{w,os,n})$$
$$=(|\Delta p_{os,n}|/l)\cos\{n\omega t+(\angle\Delta p_{os,n}/l)\} \qquad (n=1,2,3) \qquad \cdots(2\text{-}34)$$

さきにも述べたように，運動量の式(2-29)の各項が周波数に関してどのように変化するかを定量的に決定したいわけであるが，その際何か適切な特性数を利用して系統的に整理されるならば便利である．しかし現在のところ，そのようなものは知られていない．そこで流動形態を規定する特性数として，変動成分に関するつり合いを表わす式(2-34)を基礎にして，つぎの四つの量を定義した．

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{t,n} &= \rho_0 n\omega|u_{m,os,n}|/(|\Delta p_{os,n}|/l)\\
\Phi_{z,n} &= (4|\tau_{w,os,n}|/D)/(|\Delta p_{os,n}|/l)\\
\alpha_{t,n} &= \angle(\Delta p_{os,n}/l)-\angle u_{m,os,n}\\
\alpha_{z,n} &= \angle(\Delta p_{os,n}/l)-\angle\tau_{w,os,n}
\end{aligned}\right\} \qquad \cdots(2\text{-}35)$$

$\Phi_{t,n}$ は n 次の高調波に対する，慣性項絶対値と圧力項のそれとの割合，$\Phi_{z,n}$ は粘性項の絶対値と圧力項のそれとの割合，$\alpha_{t,n}$ は圧力勾配の位相と管横断面平均速度のそれとの差，$\alpha_{z,n}$ は圧力勾配の位相と壁面せん断応力のそれとの差を表わす．

2・4　τ_w に対する各表示から計算される特性数

2・4・1　解析的表示

式(2-2)，(2-4)，(2-5)を用いれば式(2-35)から各特性数は容易に計算できて次式のようになる．

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{t,1}&=M_2(\sqrt{\omega'})/M_0(\sqrt{\omega'})\\
\Phi_{z,1}&=(2/\sqrt{\omega'})\ M_1(\sqrt{\omega'})/M_0(\sqrt{\omega'})\\
\alpha_{t,1}&=\theta_0(\sqrt{\omega'})-\theta_2(\sqrt{\omega'})+3\pi/2\\
\alpha_{z,1}&=\theta_0(\sqrt{\omega'})-\theta_1(\sqrt{\omega'})+3\pi/4
\end{aligned}\right\}\quad\cdots(2\text{-}36)$$

ここで $\omega'\to 0$ のとき $\Phi_{t,1}$，$\alpha_{t,1}$，$\alpha_{z,1}\to 0$，$\Phi_{z,1}\to 1$ となり，$\omega'\to\infty$ のとき $\Phi_{t,1}\to 1$，$\Phi_{z,1}\to 0$，$\alpha_{t,1}\to\pi/2$，$\alpha_{z,1}\to\pi/4$ となる．なお $\sqrt{\omega'}\leqq 2$ に対して誤差5%以内で

$$\Phi_{t,1}=1/\sqrt{2+(8/\omega')^2}$$
$$\Phi_{z,1}=\sqrt{(1+\omega'^2/192)/(1+\omega'^2/32)}$$

と近似できる．なお式(2-8)を用いて特性数を計算する場合には，式(2-8)の $u_{m,os,1}$ に

$$u_{m,os,1}=|u_{m,os,1}|\cos\omega t\quad\cdots(2\text{-}37)$$

を代入して $|\tau_{w,os,1}|$ と $\angle\tau_{w,os,1}$ を，またそれらとつぎの運動量の式

$$\rho_0\frac{du_{m,os,1}}{dt}+\frac{4}{D}\tau_{w,os,1}=\frac{\Delta p_{os,1}}{l}\quad\cdots(2\text{-}38)$$

を使って $|\Delta p_{os,1}|/\ell$, $\angle(\Delta p_{os,1}/\ell)$ を求め，これを式(2-35)に代入すればよい．このようにして得られた特性数の表示式は後のほうで示す重み関数表示［式(2-41)］と同じ形が得られるが，それを変形すれば式(2-36)に一致するのはいうまでもない．

2·4·2　等価粘性抵抗表示

式(2-18)，(2-37)，(2-38)および特性数の定義式(2-35)から等価粘性抵抗表示に対する特性数はつぎのように表わされる．

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{t,1}&=1/\sqrt{1+[(8/\omega')/(c_{fe}/c_f)]^2}\\ \Phi_{z,1}&=(8/\omega')(c_{fe}/c_f)\Phi_{t,1}\\ \alpha_{t,1}&=\alpha_{z,1}=\tan^{-1}[(\omega'/8)(c_f/c_{fe})]\end{aligned}\right\} \quad \cdots (2\text{-}39)$$

2·4·3　擬定常表示

式(2-19)，(2-37)，(2-38)および式(2-35)から次式が得られる．

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{t,1}&=1/\sqrt{1+(8/\omega')^2}\\ \Phi_{z,1}&=(8/\omega')\Phi_{t,1}\\ \alpha_{t,1}&=\alpha_{z,1}=\tan^{-1}(\omega'/8)\end{aligned}\right\} \quad \cdots (2\text{-}40)$$

2·4·4　重み関数表示（Zielke の表示）

式(2-24)，(2-37)，(2-38)および式(2-35)から次式が得られる．

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{t,1}&=1/\sqrt{[8\eta_1(\sqrt{\omega'})/\omega']^2+[1+8\xi_1(\sqrt{\omega'})/\omega']^2}\\ \Phi_{z,1}&=(8/\omega')\sqrt{\eta_1(\sqrt{\omega'})^2+\xi_1(\sqrt{\omega'})^2}\,\Phi_{t,1}\\ \alpha_{t,1}&=\tan^{-1}[\{1+8\xi_1(\sqrt{\omega'})/\omega'\}/\{8\eta_1(\sqrt{\omega'})/\omega'\}]\\ \alpha_{z,1}&=\alpha_{t,1}-\tan^{-1}[\xi_1(\sqrt{\omega'})/\eta_1(\sqrt{\omega'})]\end{aligned}\right\} \quad \cdots (2\text{-}41)$$

2·4·5　修正等価粘性抵抗表示

式(2－28)，(2-37)，(2-38) および式(2-35)から次式が得られる．

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{t,1} &= 1\Big/\sqrt{\left[1+\frac{1}{2.4142+(\omega'/8)(c_f/c_{fe})}\right]^2+\left[\frac{8}{\omega'}\frac{c_{fe}}{c_f}\right]^2}\\
\Phi_{z,1} &= \sqrt{\left[\frac{8}{\omega'}\frac{c_{fe}}{c_f}\right]^2+\left[\frac{1}{2.4142+(\omega'/8)(c_f/c_{fe})}\right]^2}\,\Phi_{t,1}\\
\alpha_{t,1} &= \tan^{-1}\left[\left\{1+\frac{1}{2.4142+(\omega'/8)(c_f/c_{fe})}\right\}\Big/\left\{\frac{8}{\omega'}\frac{c_{fe}}{c_f}\right\}\right]\\
\alpha_{z,1} &= \alpha_{t,1}-\tan^{-1}\left[\frac{\omega'}{8}\frac{c_f}{c_{fe}}\Big/\left\{2.4142+\frac{\omega'}{8}\frac{c_f}{c_{fe}}\right\}\right]
\end{aligned}\right\}\quad\cdots(2\text{-}42)$$

2·5　各表示の検討

各表示から計算される特性数 $\Phi_{t,1}$，$\Phi_{z,1}$，$\alpha_{t,1}$，$\alpha_{z,1}$ の値を調べることによって，それらの表示の得失を検討してみる．

特性数の値をそれぞれ図2-4 ～ 2-7 に示した．ω'の非常に小さい領域および非常に大きい領域で読み取りが困難と思われるものはそれぞれの図(b)に拡大して示してある．また修正等価粘性抵抗表示において，c_{fe}/c_f の値として式(2－16)を用いている．

図2－4 に示した $\Phi_{t,1}$ は ω'の増加とともに 0 から 1 へと変化している．したがって ω'の非常に小さな領域では慣性力を無視してよく，ω'の非常に大きな領域では圧力項と慣性項とがほぼつり合うことがわかる．さて擬定常表示，等価粘性抵抗表示とも $\sqrt{\omega'} \fallingdotseq 2$ までは解析的表示との一致は良好であるが，それ以上の ω'の値では大きな相違が現われ，慣性項を大きく見積る傾向がある．

第6項までを採用した重み関数表示は $\sqrt{\omega'}$ の値がほぼ 2 から 3.817 の間で，またここで提案した修正等価粘性抵抗表示は $\sqrt{\omega'}$ の値が 2 から 20 の間でわずかの相違がみられるほかは解析的表示との一致は良好である．

図2－5 に示した $\Phi_{z,1}$ の値は ω'の増加につれて 1 から 0 へと変化する．$\Phi_{t,1}$ に関する考察から当然のことであるが，これは ω'が非常に小さい領域では圧力項と粘性項とがほぼつり合い，ω'が非常に大きくなれば粘性項を無視してよいことを表わしている．

重み関数表示，修正等価粘性抵抗表示は解析的表示と非常によい

一致を示しているが，擬定常表示，等価粘性抵抗表示は $\sqrt{\omega'}=0.8$ あたりから相違が現われはじめ，擬定常表示は $\sqrt{\omega'}$ がほぼ 3.5 以下では解析的表示よりも粘性項を大きく見積る傾向が，3.5 以上では小さく見積る傾向がある．等価粘性抵抗表示も $\sqrt{\omega'}\fallingdotseq 6$ を境にして同様な傾向があるものの，解析的表示とそれほど相違はない．

図 2-6 の $\alpha_{t,1}$ においても重み関数表示，修正等価粘性抵抗表示と解析的表示との一致は良好である．擬定常表示と等価粘性抵抗表示においては $\sqrt{\omega'}\fallingdotseq 0.6$ から解析的表示との相違が現われ始めるが，いずれも解析的表示の漸近値 90° へ漸近している．このことは ω' が大きくなると管横断面平均速度は圧力勾配に対して位相が 90° 遅れることを示している．擬定常表示，等価粘性抵抗表示とも τ_w は U_m と同位相で変動するため，図 2-7 に示した $\alpha_{z,1}$ の値は解析的表示の漸近値 45° とは著しく異なり，ω' の増加とともに $\alpha_{t,1}$ とまったく同じ経過をたどりつつ 90° へ漸近している．なお等価粘

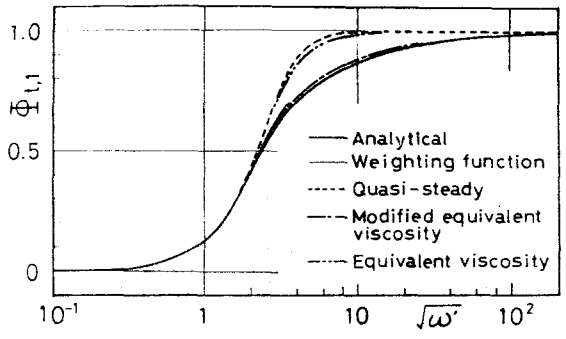
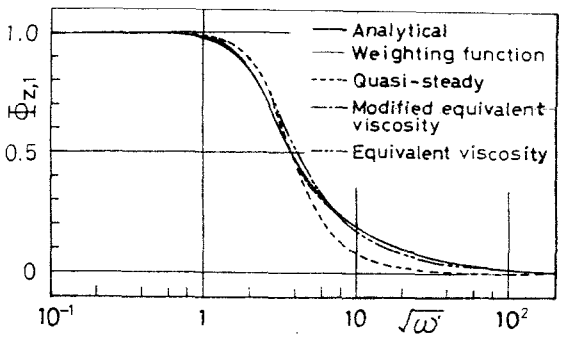
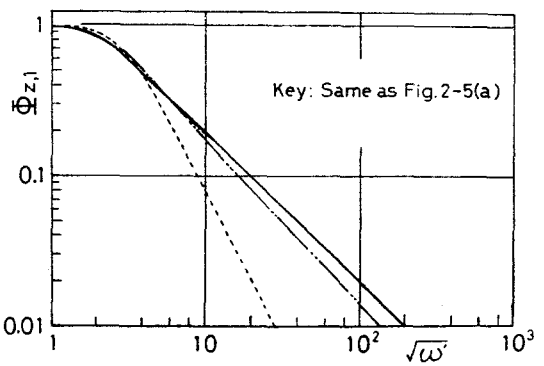


図2-4 特性数 $\Phi_{t,1}$ と無次元角周波数 ω' との関係



(a)



(b)

図2-5 特性数 $\Phi_{z,1}$ と無次元角周波数 ω' との関係

性抵抗表示において，C_{fe}/C_f の値として山口ら[28]の近似式 (2-17) を用いれば $\sqrt{\omega'} \leqq 3.817$ で擬定常表示と一致することになる．

以上の図2-4 ～ 2-7から，非常に簡単な二つの仮定から導いた修正等価粘性抵抗表示は解析的表示と良好な一致を示すこと，および各表示の得失が定量的に評価できることが明らかである．

重み関数表示において，$\eta_1(\sqrt{\omega'})$，$\xi_1(\sqrt{\omega'})$ の級数を無限項とれば解析的表示のそれらに一致することになるが，計算ははなはだ複雑になるものと考えられる．またこれら $\eta_1(\sqrt{\omega'})$，$\xi_1(\sqrt{\omega'})$ の式 (2-25)，(2-26) の境界値 $\sqrt{\omega'} = 3.817$ も，山口ら[28]の式 (2-17) を参考にして便宜的に定めたものであり，この点に関して検討の余地もあるが，本編では重み関数表示を単なる比較の対象としたため，これ以上触れない．

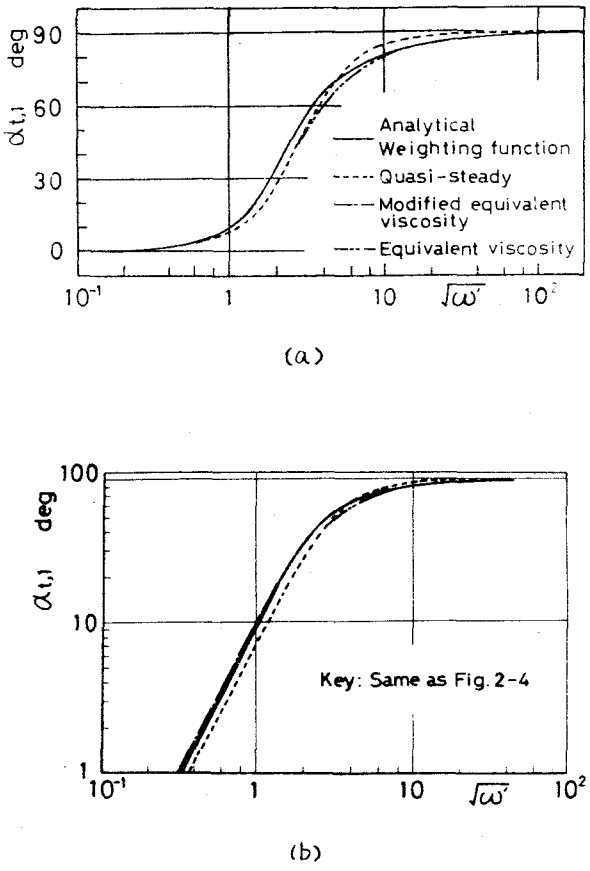


図2-6 特性数 $\alpha_{t,1}$ と無次元角周波数 ω' との関係

さて，層流脈動流れにおいて，ある決められた ω' の値に対して $\Delta p/\ell$，u_m，τ_w のいずれか一つが与えられた場合，図2-4 ～ 2-7 から特性数の値を読み取ることによって，容易に他の二つが求められることになる．この意味において 図2-4 ～ 2-7 を流動形態図と呼ぶことにする．

2・6 流動形態

流動形態図を参照すれば，層流脈動流れの流動形態は脈動周波数に

関して三つの領域，すなわち粘性項と圧力項とがほぼつり合う擬定常領域，慣性項と粘性項とが圧力項とつり合う中間領域，および慣性項と圧力項とがほぼつり合う慣性領域に分類するのが適切であることがわかる．

これら三つの領域の境界の設定基準は任意に選ぶことができるが，ここでは解析的表示において，$\overline{\alpha}_{z,1} = 0.95$ となる ω' の値 ω'_g で擬定常領域と中間領域との境界，$\overline{\alpha}_{t,1} = 0.95$ となる ω' の値 ω'_t で中間領域と慣性領域との境界を定めることにすれば，$\sqrt{\omega'_g} = 1.32$，$\sqrt{\omega'_t} = 28.0$ となる．

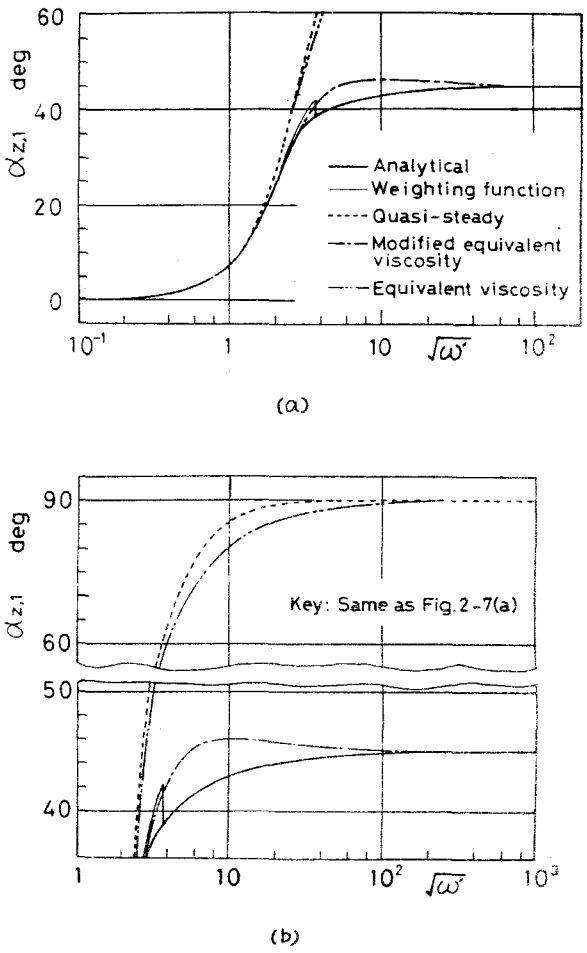


図2-7 特性数 $\alpha_{z,1}$ と無次元角周波数 ω' との関係

$\omega' = \omega'_g$ において，解析的表示と擬定常表示との誤差は $\overline{\alpha}_{z,1}$ に関して約2.5％である．また等価粘性抵抗表示において，C_{fe}/C_f の値として式(2-17)を用いる場合には $\sqrt{\omega'_g} = 3.817$ とすることに対応している．

ところで従来非常に低い周波数領域あるいは非常に高い周波数領域というような表現が用いられてきたが，これらの境界の決定にはベッセル関数の近似が誤差何％以下で成立するかというような規範を用いているため，実際の現象面との関連性において実証性に乏しい．したがってここで取扱ったように運動量のつり合いから議論を進めて，三つの周波数領域を考えるほうが実

際的であって，より妥当であると思われる．

2·7 結言

非圧縮性流体の円管内層流脈動流れの壁面せん断応力 τ_w に対して従来報告されている種々の表示について流動形態図を作製し，これを基にして各表示の得失を論じた．さらにこの考察段階において，加速度を考慮した τ_w の新しい表示を提案するとともに，この表示の近似式も導びき，その妥当性について調べた．その結果得られたおもな事柄はつぎのとおりである．

(1) 加速度を考慮した τ_w の新しい表示式 (2-8) を提案した．この式の係数 $\eta_1(\sqrt{\omega'})$，$\xi_1(\sqrt{\omega'})$ を ω' の大きな領域と小さな領域に分けて近似したものが重み関数表示および修正等価粘性抵抗表示である．またこの表示式 (2-8) において $\xi_1(\sqrt{\omega'}) = 0$ とすれば等価粘性抵抗表示に，$\eta_1(\sqrt{\omega'}) = 1$，$\xi_1(\sqrt{\omega'}) = 0$ とすれば擬定常表示に帰着する．

(2) 層流脈動流れの流動形態を系統的に表わすために特性数 $\overline{\omega}_{t,1}$，$\overline{\omega}_{z,1}$，$\alpha_{t,1}$，$\alpha_{z,1}$ を導入して擬定常領域，中間領域および慣性領域の三つの領域を考え，擬定常領域と中間領域との境界を $\sqrt{\omega'_s} = 1.32$，中間領域と慣性領域との境界を $\sqrt{\omega'_t} = 28.0$ とすることを提案した．

(3) τ_w に関する擬定常表示，等価粘性抵抗表示とも擬定常領域では解析的表示によく一致するが，慣性領域になると大きな差が現われ，それは $\alpha_{z,1}$ において特に顕著である．

(4) 重み関数表示，修正等価粘性抵抗表示とも中間領域においてわずかに解析的表示との相違がみられるが，他の二つの領域においては良好な一致を示す．

(5) ある与えられた ω' の値に対して，$\Delta p/\ell$，u_m，τ_w のいずれか一つが与えられた場合，流動形態図から特性数の値を読み取ることによって，容易に他の二つを求めることができる．

第3章　層流の場合の摩擦損失

3・1　緒言

前章では，非圧縮性流体の円管内層流脈動流れの壁面せん断応力 τ_w の近似式として発表されている擬定常表示，等価粘性抵抗表示が，すでに解かれている解析的表示と異なる程度，ならびにこれらの近似式の成立する無次元角周波数 ω' の範囲を，流動形態を規定する四つの特性数 $\overline{\alpha}_{t,1}$，$\overline{\alpha}_{z,1}$，$\alpha_{t,1}$，$\alpha_{z,1}$ を使って明らかにした．さらに従来圧力勾配との関係において解析的に求められている τ_w を，管横断面平均速度 u_m との関係で表わし（これも解析的表示と呼ぶ），この式を良好な精度で近似できる修正等価粘性抵抗表示を導いた．

本章では τ_w に対する種々の表示を用いて，圧力勾配あるいは管横断面平均速度が与えられたときの摩擦損失を，管摩擦係数の評価によって検討する．

管摩擦係数としては，時々刻々変化する瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$ と一周期にわたって平均した時間平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta}$ の二つがある．$\lambda_{u,ta}$ は従来多くの研究者により導かれ[2][33]，実験的にも検証されつつあるが[34]，$\lambda_u(t)$ に関しては加速域，減速域における様相，逆流が現われる場合の各瞬間の様相なども含めてほとんど検討されていないし[35]，粘性逆散との関係もわかっていない．そこでまず $\lambda_u(t)$ について τ_w の解析的表示を用いてこれを計算し，加速域，減速域で ω' の増加とともに擬定常値からずれていく様相と逆流が現われた場合の様相とを明らかにし，つぎに振動流れの場合も含め系統的に表わせる自乗平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta,rm}$ を新しく定義し，前同様にこの値を計算する．つづいて等価粘性抵抗表示と修正等価粘性抵抗表示を用いた場合の管摩擦係数 $\lambda_u(t)$，$\lambda_{u,ta}$ の値について計算し，上記解析的表示を用いて得られる各値と比較することにより，これらの表示の妥当性を検討する．最後に，これらの管摩擦係数と粘性逆散との関係を調べる．

3・2　非圧縮性流体における瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$，時間平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta}$ および自乗平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta,rm}$

3・2・1　管摩擦係数の定義

基礎式として運動量の式(2-29)

$$\rho_0 \frac{du_m}{dt} + \frac{4}{D}\tau_w = \frac{\Delta p}{l} \qquad \cdots(3-1)$$

を用いる．定常流れの場合には上式において圧力項 $\Delta p/l$ と粘性項 $4\tau_w/D$ とがつり合うため，差圧 ΔP を測定すれば直接的に τ_w が決定できることになる．しかしながら脈動流れにおいてはこのような関係は成立せず，慣性項 $\rho_0 du_m/dt$，粘性項および圧力項の3項でつり合いを保つ関係となるために，$\lambda_u(t)$, $\lambda_{u,ta}$ は定常流れの場合とは異なった観点から定義しなければならない．ここでは仕事率の関係からつぎのような定義式を用いた．

$$\tau_w u_m = \lambda_u(t)\frac{\rho_0}{8}|u_m|u_m^2 \qquad \cdots(3-2)$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \tau_w u_m dt = \lambda_{u,ta}\frac{\rho_0}{8}u_{m,ta}^3 \qquad \cdots(3-3)$$

式(3-2)は単位面積あたりの瞬間摩擦損失仕事率が瞬間運動エネルギ流束に比例し，式(3-3)は，単位面積あたりの時間平均摩擦損失仕事率が，u_m の時間平均値 $u_{m,ta}$ を基準とした時間平均運動エネルギ流束に比例することを表わす．

式(3-2)は逆流が現われる場合も考慮した式であり，両辺を u_m で除せば従来用いられている定義式[36)~(39)]に一致する．式(3-3)の $\lambda_{u,ta}$ は運動量の式(3-1)を用いれば Schultz-Grunow の定義した時間平均管摩擦係数 λ_p[26)] に一致する．

振動流れにおいては $u_{m,ta}=0$ となるため式(3-3)は適用できない．そこで式(3-3)を参考にして，新たに自乗平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta,rm}$ を次式で定義した．

$$\frac{1}{T}\int_0^T \tau_w u_m dt = \lambda_{u,ta,rm}\frac{\rho_0}{8}u_{rms}^3, \quad u_{rms}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u_m^2 dt}=\sqrt{u_{m,ta}^2+\frac{1}{2}|u_{m,os,1}|^2} \qquad \cdots(3-4)$$

上式の u_{rms} において $|u_{m,os,1}|$ の項を除けば式(3-4)は式(3-3)に一致する．

3·2·2　瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$

いま $\lambda_u(t)$ を擬定常管摩擦係数 $\lambda_{g,l}$ を用いて次式

$$\lambda_u(t)=C\lambda_{g,l},\quad \lambda_{g,l}=64/|R_e|,\quad |R_e|=|u_m|D/\nu \qquad \cdots(3-5)$$

のように表わすことにすれば，C は擬定常値 $\lambda_{g,l}$ からのずれを表わす係数とみなされる．

式(3-5)を $\lambda_u(t)$ の定義式に代入し，式(2-30)～(2-32)において $n=1$ の場合を考えれば，前章の式(2-35)で示した四つの特性数

$$\Phi_{t,1}=\rho_0\omega|u_{m,os,1}|/(|\Delta p_{os,1}|/l),\quad \Phi_{z,1}=(4|\tau_{w,os,1}|/D)/(|\Delta p_{os,1}|/l)$$
$$\alpha_{t,1}=\angle(\Delta p_{os,1}/l)-\angle u_{m,os,1},\quad \alpha_{z,1}=\angle(\Delta p_{os,1}/l)-\angle\tau_{w,os,1}$$

を導入することにより，係数 C はつぎのように表わすことができる．

$$C=\begin{cases}\dfrac{\Delta p_{ta}/l+(|\Delta p_{os,1}|/l)\Phi_{z,1}(\sqrt{\omega'})\cos[\omega t-\alpha_{z,1}(\sqrt{\omega'})]}{\Delta p_{ta}/l+(|\Delta p_{os,1}|/l)(8/\omega')\Phi_{t,1}(\sqrt{\omega'})\cos[\omega t-\alpha_{t,1}(\sqrt{\omega'})]} & (u_m\neq 0)\\ =0 & (u_m=0)\end{cases} \qquad \cdots(3-6)$$

いま 圧力勾配が与えられると，式(3-6)に含まれる各特性数の値は前章に示したそれぞれの表示式から計算でき，したがって C の値が求められることになる．

さらに，u_m が与えられた場合，C を求める式を示しておこう．定義式(3-2)に壁面せん断応力 τ_w の解析的表示式(2-8)～(2-10)を代入して $\lambda_u(t)$ を定め，これを式(3-5)に代入して C を求めれば

$$C=1+[\eta_1(\sqrt{\omega'})-1]\frac{u_{m,os,1}}{u_m}+\frac{\xi_1(\sqrt{\omega'})}{\omega u_m}\frac{du_{m,os,1}}{dt} \qquad \cdots(3-7)$$

が，また式(2-8)～(2-10)の代りに修正等価粘性抵抗表示式(2-28)を用いて同様の操作を行えば

$$C=1+[C_{fe}/C_f-1]\frac{u_{m,os,1}}{u_m}+\frac{\omega'/8}{2.4142+(\omega'/8)(C_f/C_{fe})}\frac{1}{\omega u_m}\frac{du_{m,os,1}}{dt} \quad \cdots(3-8)$$

が得られる．式(3-7)において等価粘性抵抗表示をとった場合には

$$C=1+[\eta_1(\sqrt{\omega'})-1]u_{m,os,1}/u_m \quad \cdots(3-9)$$

となり，擬定常表示をとった場合には

$$C=1 \quad \cdots(3-10)$$

となるが，式(3-7)～(3-10)において $u_m=0$ となる場合にはすべて $C=0$ と約束しておかなければならない．

以下 $\lambda_u(t)$ の変化を C の値で調べていくことにする．ここで $\Delta p_{ta}/\ell=0$ となる振動流れに対しては $C=C_{os}$，脈動流れに対しては $C=C_{p\ell}$ と表わすことにしよう．

式(3-6)において圧力勾配を与え，つづいて τ_w に関する修正等価粘性抵抗表示と解析的表示を使って特性数を計算すれば，式(3-6)からそれぞれの表示に対する C の値が求められる．C_{os} の一周期にわたる変化を ω' をパラメータにして示せば図3-1のようになる．

一般に無次元角周波数 ω' の値が大きくなるにつれ，u_m の位相は圧力勾配のそれに対して遅れ（その値は $\alpha_{t,1}$ で表わされる），その結果，加速域，減速域は各 ω' の値に対してずれてくる．

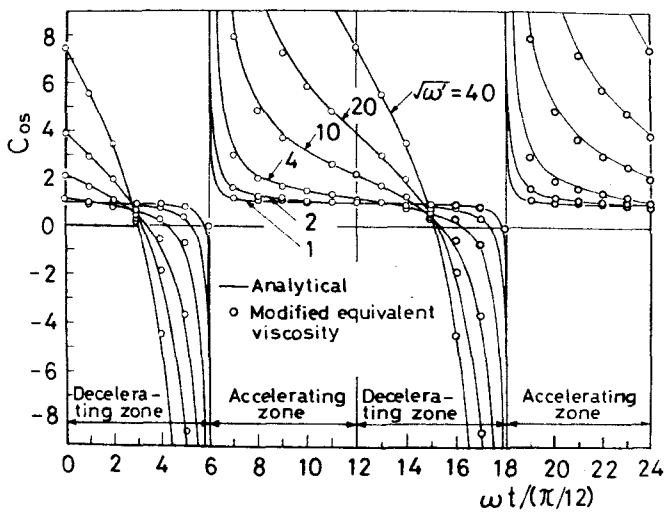


図3-1　C_{os} 値の一周期にわたる変化

これらが同じ時間帯に現われるようにするため，あらゆる周波数に対して τ_w に関する解析的表示を使って計算される $\alpha_{t,1}$ の値だけ横軸を平行移動して，$\alpha_{t,1}=0$ となるようにしてある．実線は解析的表示の場合の値であり，○印は修正等価粘性抵抗表示式(2-28)の C_{fe}/C_f の代りに $\eta_1(\sqrt{\omega'})$ とおき，これに式(2-9)を適用して求めた特性数から計算した値を示す．両者の一致は良好である．等価粘性抵抗表示では，図には示していないが，$C_{os}=\eta_1(\sqrt{\omega'})$ となり，おのおのの ω' に対して $\omega t/(\pi/12)=0$ で各曲線が縦軸と交わる値を一周期にわたり保つ．したがってこの場合には $\lambda_u(t)$ は $\lambda_{g,\ell}$ の定数倍となり，各瞬間の値を正しく表わさないことになる．なお擬定常状態が成立しているとすれば $C_{os}=1$ となる．

振動流れにおいては図3-1に示したように一周期のうちに加速域，減速域がそれぞれ2回づつ現われる．擬定常領域($\sqrt{\omega'}\leqq 1.32$)では $C_{os}\fallingdotseq 1$ となり，$\lambda_u(t)\fallingdotseq\lambda_{g,\ell}$ となるが，中間領域($1.32<\sqrt{\omega'}<28.0$)になると $\lambda_u(t)$ は加速域では常に $\lambda_{g,\ell}$ よりも大きく，減速域では $\lambda_u(t)\fallingdotseq\lambda_{g,\ell}$ となる傾向がある．

つぎに $C_{p\ell}$ を考えよう．これの一周期にわたる変化を $(|\Delta p_{os,1}|/\ell)/(\Delta p_{ta}/\ell)=5$ ととって，ω' をパラメータとして示したものが図3-2である．この場合にも図3-1の場合と同じく横軸の平行移動を行っている．$C_{p\ell}\fallingdotseq 1$ は擬定常流れを示す．$\sqrt{\omega'}=10,40$ では，この場合 $U_m>0$ で逆流は現われないが，$\lambda_u(t)$ は加速域〔$\omega t/(\pi/12)=12\sim24$〕，減速域〔$\omega t/(\pi/12)=0\sim12$〕のいずれにおいても $\lambda_u(t)\fallingdotseq\lambda_{g,\ell}$ となっており，加速域では初期の時間帯に $\lambda_u(t)<\lambda_{g,\ell}$ となり，後の大部分の時間帯で $\lambda_u(t)>\lambda_{g,\ell}$，

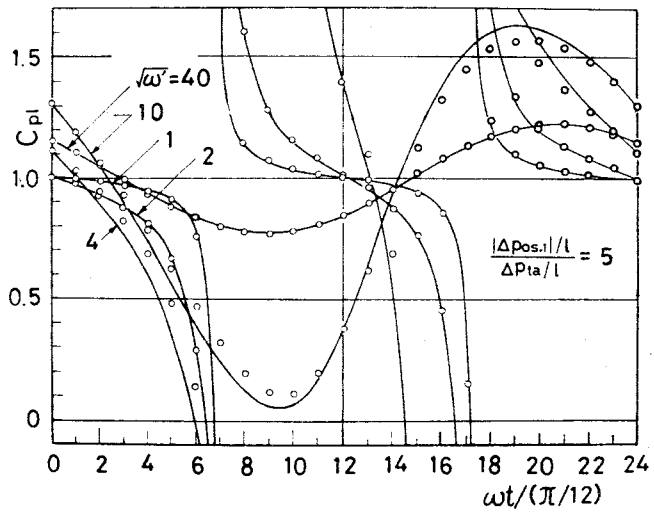


図3-2　$C_{p\ell}$ 値の一周期にわたる変化

減速域では初期の時間帯に $\lambda_u(t) > \lambda_{g,\ell}$ となり，後の大部分の時間帯で $\lambda_u(t) < \lambda_{g,\ell}$ となる傾向がうかがえる．$\sqrt{\omega'}$ が4以下の曲線は一周期のうちに一部の時間帯で $u_m < 0$ となる逆流が現われた場合の計算例である．

なお，$(|\Delta p_{os,1}|/\ell)/(\Delta p_{ta}/\ell)$ が一定で ω' を大きくした場合，$\bar{\tau}_{z,1}$，$\bar{\tau}_{t,1}/\omega'$ はいずれも0に漸近するため，式(3-6)の分母，分子の変動成分は時間平均値に比べて無視できるようになり，$C_{p\ell} \fallingdotseq 1$ となる．したがって ω' が大きくなった場合，各瞬間に擬定常状態が成立するのではなく，あくまでも見掛上擬定常の様相を示すことに注意されたい．

図3-3では $(|\Delta p_{os,1}|/\ell)/(\Delta p_{ta}/\ell)$ をパラメータにして，$\sqrt{\omega'} = 10$ における $C_{p\ell}$ の値を示した．図3-1と比較してみると $(|\Delta p_{os,1}|/\ell)/(\Delta p_{ta}/\ell)$ の値が大きくなるに従って，$C_{p\ell}$ 曲線は複雑な経過をたどりつつ，同じ ω' の値に対して計算される C_{os} 曲線に漸近してゆき，∞ において C_{os} 曲線に一致することが推定できる．図3-3の例では，図3-1の $\sqrt{\omega'} = 10$ の C_{os} 曲線に漸近する．

ところで，ある与えられた $(|\Delta p_{os,1}|/\ell)/(\Delta p_{ta}/\ell)$ に対して $u<0$ となる逆流が現われるか否かの規範は τ_w の値で決定しなければならない．すべての時刻に u_m が負の値をとらないとしても，壁近傍では逆流が現われる可能性があり，それは τ_w によって明確に示されるからである．逆流が現われる時間帯が存在しないという規範は

$\tau_{w,ta} \geqq \tau_{w,os,1}$ であり，これは式(2-5)から次式で表わされる．

$$\frac{2}{\sqrt{\omega'}}\frac{M_1(\sqrt{\omega'})}{M_0(\sqrt{\omega'})}\frac{|\Delta p_{os,1}|/l}{\Delta p_{ta}/l} \leqq 1$$

あるいは特性数の解析的表示において $\bar{\tau}_{t,1} = (2/\sqrt{\omega})M_1(\sqrt{\omega})/M_0(\sqrt{\omega})$ であることを利用すれば次式が得られる．

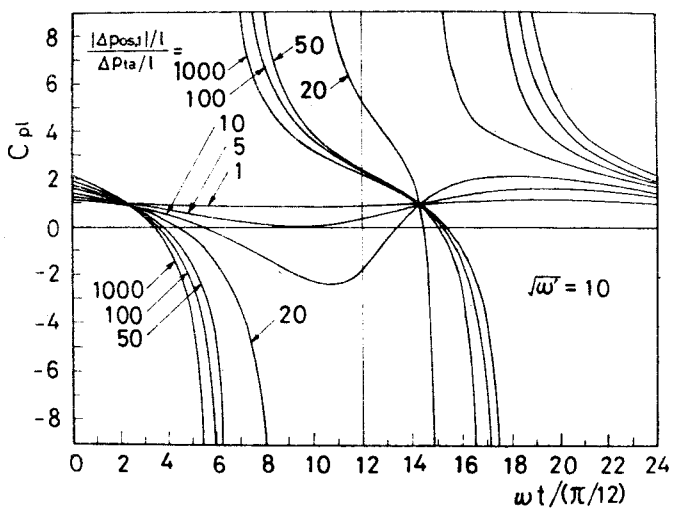


図3-3　$C_{p\ell}$ 値の一周期にわたる変化

$$\frac{|\Delta p_{os,1}|/l}{\Delta p_{ta}/l} \leqq \frac{1}{\Phi_{z,1}(\sqrt{\omega'})} \qquad \cdots(3-11)$$

この式を用いて計算した境界を図3-4に実線で示す．なお u_m が負値をとる時間帯が存在しないという規範は式(2-4)から容易に計算できてつぎのようになる．

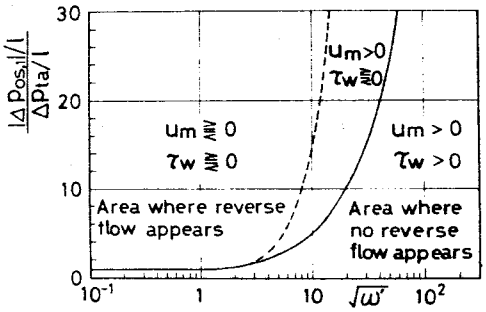


図3-4　逆流の現われる境界

$$\frac{8}{\omega'}\frac{M_2(\sqrt{\omega'})}{M_0(\sqrt{\omega'})}\frac{|\Delta p_{os,1}|/l}{\Delta p_{ta}/l} \leqq 1$$

あるいは

$$\frac{|\Delta p_{os,1}|/l}{\Delta p_{ta}/l} \leqq \frac{\omega'}{8}\frac{1}{\Phi_{t,1}(\sqrt{\omega'})} \qquad \cdots(3-12)$$

この境界は図3-4に破線で示した．当然のことながら $u_m < 0$ となる時間帯が存在する範囲内は，上記逆流の現われる時間帯が存在する範囲内に含まれる．

3・2・3　自乗平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta,rm}$ と時間平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta}$

まず $\lambda_{u,ta,rm}$ であるが，定義式(3-4)をつぎのような形

$$\lambda_{u,ta,rm} = C_{ta}\frac{64}{R_{e\mathrm{rms}}}, \quad R_{e\mathrm{rms}} = u_{\mathrm{rms}}D/\nu \qquad \cdots(3-13)$$

に整理しておく．ここで C_{ta} を振動流れおよび脈動流れに対してそれぞれ $C_{ta,os}$，$C_{ta,pl}$ と記して区別することにする．

解析的表示に対しては，式(3-4)の u_m，τ_w にそれぞれ式(2-4)，(2-5)を代入して式(3-13)と比較することにより

$$C_{ta,os}=\frac{\sqrt{\omega'}}{4}\frac{M_1(\sqrt{\omega'})}{M_2(\sqrt{\omega'})}\cos[\theta_1(\sqrt{\omega'})-\theta_2(\sqrt{\omega'})+3\pi/4] \qquad \cdots(3\text{-}14)$$

$$C_{ta,pl}=\frac{(\Delta p_{ta}/l)^2+(|\Delta p_{os,1}|/l)^2\{8/(\sqrt{\omega'})^3\}\{M_1(\sqrt{\omega'})/M_0(\sqrt{\omega'})\}\cos[\theta_1(\sqrt{\omega'})-\theta_0(\sqrt{\omega'})-\pi/4]}{(\Delta p_{ta}/l)^2+(|\Delta p_{os,1}|/l)^2\{32/\omega'^2\}\{M_2^2(\sqrt{\omega'})/M_0^2(\sqrt{\omega'})\}} \qquad \cdots(3\text{-}15)$$

が得られる．瞬間管摩擦係数に対して示したように，ここでも C_{ta} を圧力勾配を含まない形で示しておこう．τ_w には式(2-8)を用い，u_m は

$$u_m = u_{m,ta} + |u_{m,os,1}|\cos\omega t$$

で表わされると仮定する．これらを定義式(3-4)に代入して式(3-13)と比較することにより，次式のような解析的表示を得る．

$$C_{ta}=1+\frac{\eta_1(\sqrt{\omega'})-1}{2u_{rms}^2}|u_{m,os,1}|^2 \qquad \cdots(3\text{-}16)$$

上式と，定義式(3-4)と u_{rms} の表示式とから $u_{m,ta}=0$ となる振動流れにおいては $C_{ta,os}=\eta_1(\sqrt{\omega'})$ となるが，これと同じ結果が $C_{fe}/C_f=\eta_1(\sqrt{\omega'})$ とおいた等価粘性抵抗表示を用いた場合にも得られる．また C_{fe}/C_f の値として式(2-9)の $\eta_1(\sqrt{\omega'})$ の値を採用すれば，修正等価粘性抵抗表示を用いた場合も式(3-16)と同じ結果を得る．擬定常表示を用いた場合には振動流れ，脈動流れのいずれにおいても $C_{ta,os}=C_{ta,pl}=1$ となる．このことは ω' が小さくなって擬定常状態が近似的に成立するようになれば $C_{ta}\to 1$ となることを示している．すなわち $\omega'\to 0$ のとき，$\lambda_{u,ta,rm}\fallingdotseq 64/Re_{rms}$ と表わせる．

C_{ta} を 図3-5に，$(|\Delta P_{os,1}|/\ell)/(\Delta P_{ta}/\ell)$ をパラメータとして示してある．このパラメータは圧力振幅比を示すものであるが，この値が大きくなるに従って脈動流れの値は振動流れの曲線に漸近してゆき，振動流れの場合も含めて，C_{ta} で摩擦損失が系統的に表わされることが分る．なお，ω' が大きくなった場合に $C_{ta,pl}\fallingdotseq 1$ となるのは図3-2の説明で述べたことと同じ理由による．

脈動流れに対してのみ定義される $\lambda_{u,ta}$ の解析的表示は次式で与えられる[(2)(4)]．

$$\frac{\lambda_{u,ta}}{\lambda_{s,\ell}}=1+8\left[\frac{|\Delta p_{os,1}|/l}{\Delta p_{ta}/l}\right]^2\frac{1}{(\sqrt{\omega'})^3}\times\frac{M_1(\sqrt{\omega'})}{M_0(\sqrt{\omega'})}\cos\left[\theta_1(\sqrt{\omega'})-\theta_0(\sqrt{\omega'})-\pi/4\right] \quad \cdots(3-17)$$

ここで

$$\lambda_{s,\ell}=64/R_{eta},\quad R_{eta}=u_{m,ta}D/\nu$$

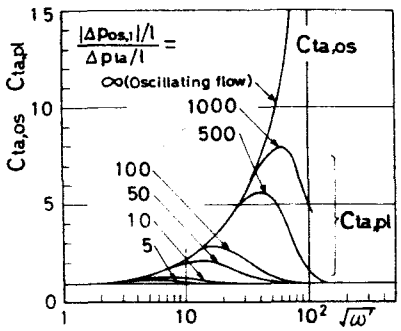


図3-5　$C_{ta,os}$ 値，$C_{ta,pl}$ 値と無次元角周波数 ω' との関係

である．この場合にも $\lambda_{u,ta}/\lambda_{s,\ell}$ を圧力勾配 $\Delta p/\ell$ の代りに u_m を用いて表示しておこう．定義式(3-3)の τ_w に式(2-8)を，u_m には

$$u_m = u_{m,ta} + |u_{m,os,1}|\cos\omega t$$

を代入して $\lambda_{u,ta}$ を求め，$\lambda_{u,ta}/\lambda_{s,\ell}$ を計算すれば次式が得られる．

$$\frac{\lambda_{u,ta}}{\lambda_{s,\ell}}=1+\frac{\eta_1(\sqrt{\omega'})}{2}\frac{|u_{m,os,1}|^2}{u_{m,ta}{}^2} \quad \cdots(3-18)$$

ここで速度振幅比 $A_1=|u_{m,os,1}|/u_{m,ta}$ を導入すれば，上式はつぎのようにも表わされる．

$$\frac{\lambda_{u,ta}}{\lambda_{s,\ell}}=1+\frac{1}{2}\eta_1(\sqrt{\omega'})A_1{}^2 \quad \cdots(3-19)$$

等価粘性抵抗表示を用いた場合にも $C_{fe}/C_f=\eta_1(\sqrt{\omega'})$ とすれば式(3-18)と同じ結果が得られる．擬定常表示では $\eta_1(\sqrt{\omega'})=1$ となることから ω' の値にかかわらず

$$\lambda_{u,ta}/\lambda_{s,\ell} = 1 + A_1^2/2$$

となる．

ところで，ここで注意しておきたいことは，u_m を与えて C_{ta}，$\lambda_{u,ta}/\lambda_{s,\ell}$ を計算する場合には，等価粘性抵抗表示を用いても式(3-16)，(3-18)が得られるので誤差は零となるが，$\Delta p/\ell$ を与えてそれらを計算する場合には，等価

粘性抵抗表示を用いると中間領域 ($1.32 < \sqrt{\omega} < 28.0$) で誤差が入ることである. なぜならば, $|\Delta p_{os,1}|/\ell$ と $|u_{m,os,1}|$ を関係づける特性数 $\overline{\alpha}_{t,1}$ の値が解析的表示のそれと異なるため(前章参照), 式(3-16), (3-18)の $|u_{m,os,1}|$ の値も異なってくるためである.

3·3 管摩擦係数と粘性逸散との関係

前章に示した非圧縮性流体の円管内層流脈動流れの基礎式(2-1)を用いることにより, 管横断面にわたる粘性逸散は一周期あたりつぎの関係式

$$\pi R^2 \int_0^T \frac{\Delta p}{l} u_m dt = 2\pi\mu \int_0^T \int_0^R \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 r dr dt \qquad \cdots (3\text{-}20)$$

で表わされる. また運動量の式(3-1)の両辺に u_m を乗じて時間 t に関して積分を行えば

$$\int_0^T \frac{\Delta p}{l} u_m dt = \int_0^T \frac{4}{D} \tau_w u_m dt \qquad \cdots (3\text{-}21)$$

となる. 式(3-20), (3-21)および $\lambda_{u,ta}$ の定義式(3-3)を比較することにより, $\lambda_{u,ta}$ は粘性逸散に直接的に関係づけられることがわかる. $\lambda_{u,ta,rm}$ に関しても式(3-20), (3-21)および(3-4)から同じことが言える.

つぎに瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$ と各瞬間の粘性逸散に関して考察しよう. 式(2-1)の両辺に u を乗じ, 管横断面にわたり積分すれば

$$\pi R^2 \frac{\Delta p}{l} u_m = 2\pi \int_0^R \frac{\partial(\rho_0 u^2/2)}{\partial t} r dr + 2\pi\mu \int_0^R \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 r dr \qquad \cdots (3\text{-}22)$$

が得られる. また運動量の式(3-1)の両辺に $\pi R^2 u_m$ を乗ずれば

$$\pi R^2 \frac{\Delta p}{l} u_m = \pi R^2 \rho_0 u_m \frac{du_m}{dt} + 2\pi R \tau_w u_m \qquad \cdots (3\text{-}23)$$

となる．式(3-22)，(3-23)の両辺を比較してみると両式の左辺は等しいが，右辺第一項に関しては

$$\int_0^R \frac{\partial(u^2/2)}{\partial t} r dr \neq \frac{R^2}{2} u_m \frac{du_m}{dt} = \frac{1}{R^2} \frac{d}{dt}\left[\int_0^R u r dr\right]^2 \qquad \cdots(3\text{-}24)$$

の関係が成立し，その結果右辺第二項も互いに異なってくるので $\tau_w u_m$ は各瞬間の粘性逸散を表わすものではないことになる．このことから式(3-2)で定義した $\lambda_u(t)$ は τ_w と u_m を関係づける係数としての意義しか持ち得ない．なお擬定常領域になると式(3-22)，(3-23)の右辺第一項は他の項に比べて無視しうるため，右辺第二項がほぼ等しくなり，$\tau_w u_m$ で各瞬間の粘性逸散を近似的に表わしうることになる．

$\tau_w u_m$ および $(\mu/R)\int_0^R (\partial u/\partial r)^2 r dr$ を以下に計算して上記の傾向を示してみよう．ただし，u_m，τ_w にはそれぞれ式(2-4)，(2-5)を代入し，軸方向速度成分 u には式(2-3)を用いる．この結果は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}
\tau_w u_m = {} & \frac{R^3}{16\mu}\left(\frac{\Delta p_{ta}}{l}\right)^2 + \frac{R^3}{8\mu}\left(\frac{\Delta p_{ta}}{l}\right)\left(\frac{|\Delta p_{os,1}|}{l}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega'}}\frac{M_1(\sqrt{\omega'})}{M_0(\sqrt{\omega'})}\cos[\omega t + \theta_1(\sqrt{\omega'}) \\
& - \theta_0(\sqrt{\omega'}) - 3\pi/4] + \frac{R^3}{2\mu}\left(\frac{\Delta p_{ta}}{l}\right)\left(\frac{|\Delta p_{os,1}|}{l}\right)\frac{1}{\omega'}\frac{M_2(\sqrt{\omega'})}{M_0(\sqrt{\omega'})}\cos[\omega t + \theta_2(\sqrt{\omega'}) \\
& - \theta_0(\sqrt{\omega'}) - 3\pi/2] + \frac{R^3}{2\mu}\left(\frac{|\Delta p_{os,1}|}{l}\right)^2 \frac{1}{\omega'\sqrt{\omega'}}\frac{M_1(\sqrt{\omega'})M_2(\sqrt{\omega'})}{M_0^2(\sqrt{\omega'})}\cos[2\omega t + \theta_2(\sqrt{\omega'}) \\
& + \theta_1(\sqrt{\omega'}) - 2\theta_0(\sqrt{\omega'}) - 9\pi/4] + \frac{R^3}{2\mu}\left(\frac{|\Delta p_{os,1}|}{l}\right)^2 \frac{1}{\omega'\sqrt{\omega'}} \\
& \times \frac{M_1(\sqrt{\omega'})M_2(\sqrt{\omega'})}{M_0^2(\sqrt{\omega'})}\cos[\theta_2(\sqrt{\omega'}) - \theta_1(\sqrt{\omega'}) - 3\pi/4] \qquad \cdots(3\text{-}25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mu}{R}\int_0^R \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 r dr = {} & \frac{R^3}{16\mu}\left(\frac{\Delta p_{ta}}{l}\right)^2 + \frac{R^3}{\mu}\left(\frac{\Delta p_{ta}}{l}\right)\left(\frac{|\Delta p_{os,1}|}{l}\right)\frac{1}{\omega'}\frac{M_2(\sqrt{\omega'})}{M_0(\sqrt{\omega'})}\cos[\omega t + \theta_2(\sqrt{\omega'}) \\
& - \theta_0(\sqrt{\omega'}) - 3\pi/2)] + \frac{R^3}{4\mu}\left(\frac{|\Delta p_{os,1}|}{l}\right)^2 \frac{1}{\omega'}\frac{1}{M_0^2(\sqrt{\omega'})}[-M_1^2(\sqrt{\omega'})\cos 2\{\omega t \\
& + \theta_1(\sqrt{\omega'}) - \theta_0(\sqrt{\omega'}) - \pi/4\} + M_0(\sqrt{\omega'})M_2(\sqrt{\omega'})\cos\{2\omega t + \theta_2(\sqrt{\omega'}) - \theta_0(\sqrt{\omega'}) - \pi/2\}] \\
& + \frac{R^3}{2\mu}\left(\frac{|\Delta p_{os,1}|}{l}\right)^2 \frac{1}{\omega'\sqrt{\omega'}}\frac{M_1(\sqrt{\omega'})M_2(\sqrt{\omega'})}{M_0^2(\sqrt{\omega'})}\cos[\theta_2(\sqrt{\omega'}) - \theta_1(\sqrt{\omega'}) - 3\pi/4] \\
& \qquad \cdots(3\text{-}26)
\end{aligned}$$

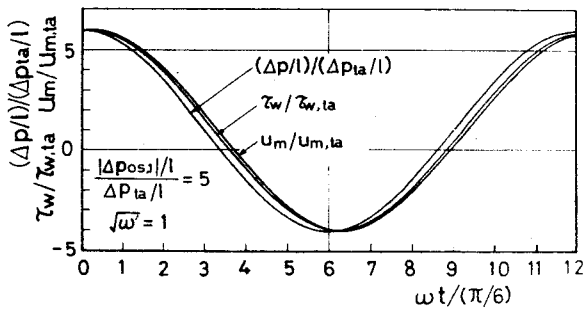
式(3-25), (3-26)において，それぞれの時間平均値が等しいことは容易にわかる．このことは $\lambda_{u,ta,rm}$ ， $\lambda_{u,ta}$ が粘性逸散の時間平均値に直接的に関係づけられることを示している．

また $\omega' \to 0$ のとき， $M_2(\sqrt{\omega})/[\omega' M_0(\sqrt{\omega})] \to 1/8$ ， $M_1(\sqrt{\omega})/[\sqrt{\omega} M_0(\sqrt{\omega})] \to 1/2$ ， $\theta_2(\sqrt{\omega}) - \theta_0(\sqrt{\omega}) \to 3\pi/2$ ， $\theta_1(\sqrt{\omega}) - \theta_0(\sqrt{\omega}) \to 3\pi/4$ となるから，式(3-25), (3-26)の右辺はいずれも

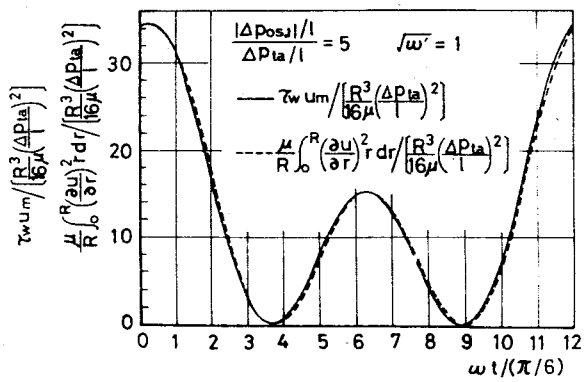
$$\frac{R^3}{16\mu}\left[\frac{\Delta p_{ta}}{l} + \frac{|\Delta p_{os,1}|}{l}\cos\omega t\right]^2 \quad \cdots (3\text{-}27)$$

と表わされ両者は一致する．したがって擬定常領域では $\tau_w u_m$ で各瞬間の粘性逸散を近似的に表わし得ることになる．上の両式をその定常成分 $[R^3/(16\mu)](\Delta p_{ta}/l)^2$ で除することにより $\tau_w u_m$ および $(\mu/R)\int_0^R (\partial u/\partial r)^2 r\,dr$ を無次元化し，それらの値を比較したものが図3-6, 3-7 である．

図(a)には $(\Delta p/l)/(\Delta p_{ta}/l)$, $u_m/u_{m,ta}$, $\tau_w/\tau_{w,ta}$ の値を示したが，図3-7の(a)においては $(\Delta p/l)/(\Delta p_{ta}/l)$ の値は図3-6の(a)のそれと同じであるため省略した．中間領域($1.32 < \sqrt{\omega} < 28.0$)に相当する $\sqrt{\omega} = 10$ では図(b)から明らかなように両者に顕著な相違がみられる．



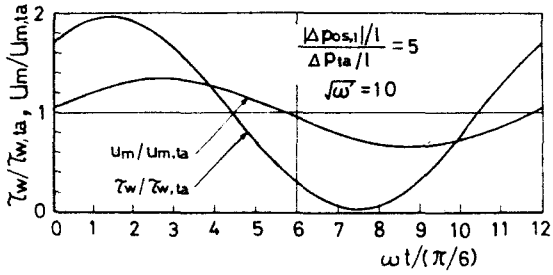
(a) $\Delta p/\ell$, τ_w, u_m 値(無次元化処理)の一周期にわたる変化



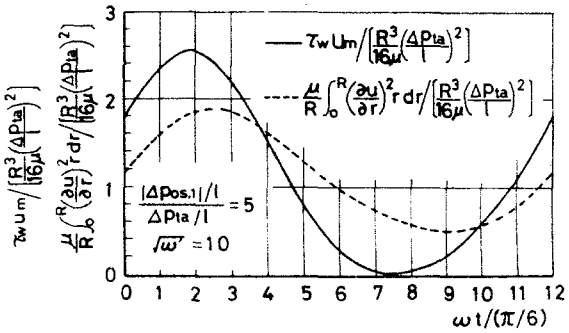
(b) 式(3-25), (3-26)右辺の値(無次元化処理)の評価

図3-6 $\tau_w u_m$ と粘性逸散との関係($\sqrt{\omega} = 1$)

図には示していないが，この相違は ω' の増加とともにより顕著になる．一方，擬定常領域に相当する $\sqrt{\omega'}=1$ では両者はほぼ一致している．



(a) $\Delta p/\ell$，τ_w，U_m 値（無次元化処理）の一周期にわたる変化



(b) 式(3-25)，(3-26)右辺の値（無次元化処理）の評価

図3－7　$\tau_w U_m$ と粘性逸散との関係（$\sqrt{\omega'}=10$）

3・4　結　言

非圧縮性流体の円管内層流脈動流れに対し，壁面せん断応力 τ_w に関する解析的表示を基にして，この近似式である等価粘性抵抗表示，擬定常表示および修正等価粘性抵抗表示から計算される管摩擦係数を比較検討しつつ振動流れの場合も包括して脈動周波数と摩擦損失との関係を系統的に調べた．その結果得られた事柄はつぎのとおりである．

(1)　振動流れの瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$ は擬定常領域（$\sqrt{\omega'}\leq 1.32$）においては $\lambda_u(t)\fallingdotseq\lambda_{g,\ell}$ となるが，ω' が大きくなって中間領域（$1.32<\sqrt{\omega'}<28.0$）から慣性領域（$\sqrt{\omega'}\geq 28.0$）になると，加速域ではつねに $\lambda_u(t)>\lambda_{g,\ell}$，減速

域では $\lambda_u(t) \fallingdotseq \lambda_{g,\ell}$ となる.

(2) 逆流が現われない脈動流れにおいては, $\lambda_u(t)$ は擬定常領域では $\lambda_u(t) \fallingdotseq \lambda_{g,\ell}$ であるが, 中間領域から慣性領域になると, 加速域では初期の時間帯で $\lambda_u(t) < \lambda_{g,\ell}$ となり, 後の大部分の時間帯では $\lambda_u(t) > \lambda_{g,\ell}$ となる. 減速域においては初期の時間帯で $\lambda_u(t) > \lambda_{g,\ell}$ となり, 後の大部分の時間帯で $\lambda_u(t) < \lambda_{g,\ell}$ となる.

(3) 逆流の現われる脈動流れの場合に対して, 図3-4によって, 逆流の現われる時間帯が存在する範囲を明示した.

(4) 振動流れにも系統的に適用できる自乗平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta,rm}$ を提案した.

(5) 時間平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta}$, 自乗平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta,rm}$ は一周期にわたる粘性逸散と直接的に関係づけられる.

(6) 瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$ については, 擬定常領域においてのみ, これを各瞬間の粘性逸散と近似的に関係づけることができる.

第4章　乱流の場合の流動形態

4・1　緒　言

第2章では，円管内層流脈動流れに対して四つの特性数 $\overline{\tau}_{t,n}$，$\overline{\tau}_{z,n}$，$\alpha_{t,n}$，$\alpha_{z,n}$ を導入して流動形態を規定した．そしてこれらの特性数は層流の場合 ω' のみの関数であり，流動形態は ω' に関して擬定常領域，中間領域および慣性領域の3領域に分けられることがわかった．

ところが乱流の場合，時間平均レイノルズ数 Re_{ta} が大きくなると，あたかも ω' が小さくなったかのような様相が，また Re_{ta} が小さくなると，ω' が大きくなったかのような様相が速度分布に現われることが報告されている[40]が，これらのことを考え合せてみると，Re_{ta} も流動形態に影響を及ぼすことが予想される．したがって3領域の境界にも Re_{ta} が関数として入るであろう．

これらの事項をふまえて本章では擬定常状態を解析することによって，ω' と Re_{ta} が $\omega'/Re_{ta}^{3/4}$ の形で流動形態に関与することを予見し，このパラメータでほかの二つの領域も系統的に表わせるのではないかと想像して，まず Re_{ta} を一定として ω'，A_1 を広範囲に変化させた実験を行い，流動形態に及ぼす ω' と A_1 の影響を探り，つぎに Re_{ta} を広範囲に変化させて検討を加えた結果，本実験範囲では，A_1 は流動形態にほとんど影響を与えないことがわかった．さらに流動形態は u_m の時間平均値 $u_{m,ta}$ に基づく定常流管摩擦係数 $\lambda_{s,t}$ が Blasius の式で表わされるような Re_{ta} の範囲では無次元数 $\omega'/Re_{ta}^{3/4}$ で，一般には $\omega'/(Re_{ta}\lambda_{s,t})$ で系統的に整理できることを明らかにした．

4・2　基礎的関係式

4・2・1　擬定常領域における特性数の表示式

層流脈動流れを参考にすれば，ω' が非常に小さい場合に乱流擬定常状態が成立することが予想され，事実このことは実験的にも確認されている．そこでこの領域において成立する関係式に着目し，Re_{ta} の影響を探ってみる．

壁面せん断応力が次式

$$\tau_w = \lambda_{s,t}\,\rho_0\,u_m^2/8 \qquad \cdots(4-1)$$

$$\lambda_{g,t} = 0.3164/Re^{1/4} \quad (Re = u_m D/\nu) \qquad \cdots(4-2)$$

で表わされると仮定する．これらの式と運動量の式(2-29)を用いて，定義式(2-35)から計算される特性数の表示（これを擬定常表示と呼ぶ）を求めてみる．管横断面平均速度 u_m の測定値はフーリエ展開近似した場合，基本波のみで精度よく表わされるので，式(2-31)において基本波($n=1$)のみをとり，簡単のために $\angle u_{m,os,1} = 0$ とおけば

$$u_m = u_{m,ta} + |u_{m,os,1}| \cos \omega t \qquad \cdots(4-3)$$

となる．式(4-3)を式(4-1)に代入すれば

$$\tau_w = \frac{\rho_0}{8}\left\{0.316\,4\left(\frac{\nu}{D}\right)^{1/4}\right\}(u_{m,ta} + |u_{m,os,1}| \cos \omega t)^{7/4} \qquad \cdots(4-4)$$

が得られる．

本実験では，どの瞬間でもつねに乱流である流れを取り扱っているため，$u_{m,ta} > |u_{m,os,1}|$，すなわち $A_1 = |u_{m,os,1}|/u_{m,ta} < 1$ となる．これを用いて式(4-4)の右辺を展開したのち整理すれば

$$\tau_w = \frac{0.316\,4}{8}\left(\frac{\nu}{D}\right)^{1/4}\rho_0 u_{m,ta}^{7/4}\left(1 + \frac{7}{4}A_1 \cos \omega t + \frac{21}{32}A_1^2 \cos^2 \omega t + \cdots\cdots\right) \qquad \cdots(4-5)$$

が；またこの式と式(4-3)とを式(2-29)に代入し，$\Delta p/l$ に関して解けば

$$\frac{\Delta p}{l} = -\rho_0 \omega |u_{m,os,1}| \sin \omega t + \frac{4}{D}\frac{0.316\,4}{8}\left(\frac{\nu}{D}\right)^{1/4}\rho_0 u_{m,ta}^{7/4}\left(1 + \frac{7}{4}A_1 \cos \omega t + \frac{21}{32}A_1^2 \cos^2 \omega t + \cdots\cdots\right) \qquad \cdots(4-6)$$

が得られる．式(4-5)，(4-6)はそれぞれ τ_w および $\Delta p/l$ の擬定常表示となる．

特性数はすべて変動成分によって定義されているので，上式から変動成分のみをとり出さねばならないが，そのためには τ_w，$\Delta p/\ell$ の時間平均値 $\tau_{w,ta}$，$\Delta p_{ta}/\ell$ をまず計算する必要がある．それぞれ式(4-5)および式(4-6)を1周期にわたって積分することにより，

$$\tau_{w,ta} = \lambda_{s,t}\,\rho_0\,U_{m,ta}^2\,\sigma_1/8 \qquad \cdots(4-7)$$

$$\Delta p_{ta}/\ell = \lambda_{s,t}\,\rho_0\,U_{m,ta}^2\,\sigma_1/(2D) \qquad \cdots(4-8)$$

が求まる．ここで

$$\lambda_{s,t} = 0.3164/Re_{ta}^{1/4} \quad (Re_{ta} = U_{m,ta}D/\nu) \qquad \cdots(4-9)$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{T}\int_0^T \{1+A_1\cos\omega t\}^{7/4}dt$$

$$= 1 + \frac{21}{64}A_1^2 + \frac{105}{16384}A_1^4 + \cdots \qquad \cdots(4-10)$$

σ_1 は誤差3%以下で

$$\sigma_1 = 1 + (21/64)A_1^2 \qquad \cdots(4-11)$$

と近似できる．式(4-7)，(4-8)から明らかなように，壁面せん断応力 τ_w および圧力勾配 $\Delta p/\ell$ の時間平均値は，これらを管横断面平均速度 U_m の時間平均値と関係づける場合，定常状態の $\lambda_{s,t}$ の代りに $\lambda_{s,t}\sigma_1$ とおけばよいことになる．したがって，この σ_1 を修正係数と呼ぶ．σ_1 の値は式(4-10)によって計算すれば図4-1のようになる．擬定常領域とはみなし得ない領域についても同じような修正係数 σ_1 を考えるとすれば，その値はいまのところ実験によらざるを得ない．

従来この $\lambda_{s,t}\sigma_1$ を乱流脈動流れの時間平均管摩擦係数とする解釈がなされている．[41] しかし $\Delta p/\ell$ は式(2-29)からも明らかであるように，粘性項のほかに慣性項が寄与している関係上，各瞬間における摩擦損失を直接的

に表わすものではない．したがって，それを単に1周期にわたって積分して得られる式(4-8)で示される $\lambda_{s,t}\sigma_1$ はこれを時間平均管摩擦係数とみなすには難点があり，むしろ $\Delta p_{ta}/\ell$ と $u_{m,ta}$ を関係づける見掛けの管摩擦係数とみなすのが妥当であろう．

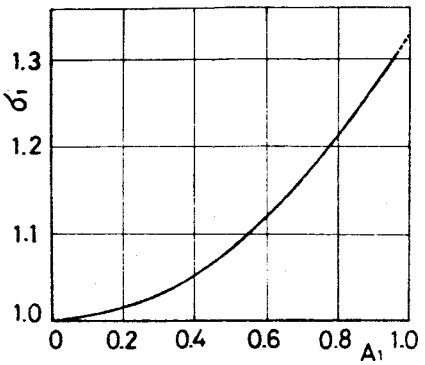


図4-1　修正係数 σ_1

式(4-5),(4-6)から，上に求めた時間平均値を差し引けば τ_w, $\Delta p/\ell$ の変動成分が求められる．なお，このようにして求めた変動成分には二次以上の高調波成分が含まれることになるが，ここでは基本波のみについて議論を進めており，しかもそれらは基本波にくらべて非常に小さいことでもあり無視することにする．

さて，式(4-5),(4-6)の小括弧内の $\cos\omega t$ の係数は $(7/4)A_1-(21/512)A_1^3+\cdots$ となるが，誤差2.3%以下で $7A_1/4$ と表わせるので，τ_w, $\Delta p/\ell$ の変動成分の絶対値および位相角は，簡単な整理を行うことにより，それぞれつぎのように表わされる．

$$|\tau_{w,os,1}|=\frac{\rho_0}{8}\lambda_{s,t}\,u_{m,ta}{}^2\frac{7}{4}A_1 \qquad \cdots(4\text{-}12)$$

$$\angle\tau_{w,os,1}=\angle u_{m,os,1}=0 \qquad \cdots(4\text{-}13)$$

$$\frac{|\Delta p_{os,1}|}{l}=\rho_0|u_{m,os,1}|\sqrt{\omega^2+[7\lambda_{s,t}\,u_{m,ta}/(8D)]^2} \qquad \cdots(4\text{-}14)$$

$$\angle\frac{\Delta p_{os,1}}{l}=\tan^{-1}\left\{\omega\Big/\left(\frac{7}{8}\lambda_{s,t}\frac{u_{m,ta}}{D}\right)\right\} \qquad \cdots(4\text{-}15)$$

以上の関係式(4-12)~(4-15)を式(2-35)に代入することにより，$\bar{\alpha}_{t,1}$, $\bar{\alpha}_{z,1}$, $\alpha_{t,1}$, $\alpha_{z,1}$ はつぎのような形となる．

$$\Phi_{t,1}=1\Big/\sqrt{1+\left(\frac{7\lambda_{s,t}}{32}\frac{R_{e\,ta}}{\omega'}\right)^2}\quad=1\Big/\sqrt{1+\left(\frac{1}{14.45}\frac{R_{e\,ta}^{3/4}}{\omega'}\right)^2}\qquad\cdots(4\text{-}16)$$

$$\Phi_{z,1}=\frac{\dfrac{7\lambda_{s,t}}{32}\dfrac{R_{e\,ta}}{\omega'}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{7\lambda_{s,t}}{32}\dfrac{R_{e\,ta}}{\omega'}\right)^2}}\quad=\frac{\dfrac{1}{14.45}\dfrac{R_{e\,ta}^{3/4}}{\omega'}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{14.45}\dfrac{R_{e\,ta}^{3/4}}{\omega'}\right)^2}}\qquad\cdots(4\text{-}17)$$

$$\alpha_{t,1}=\alpha_{z,1}=\tan^{-1}(32\omega'/7\lambda_{s,t}R_{e\,ta})$$
$$=\tan^{-1}(14.45\omega'/R_{e\,ta}^{3/4})\qquad\cdots(4\text{-}18)$$

ここで参考までに二次以上の高調波成分に対する特性数を計算してみると，次式に示す結果が得られる．

$$\Phi_{t,n}=0,\quad \Phi_{z,n}=1,\quad \alpha_{t,n}=\alpha_{z,n}=0\quad(n\geqq 2)\qquad\cdots(4\text{-}19)$$

以上要約すると，特性数に対する擬定常表示から明らかなように，$\lambda_{s,t}$, $\lambda_{s,t}$ に Blasius の式が適用できる範囲内では，流動形態図は無次元数 $\omega'/R_{e\,ta}^{3/4}$ で整理でき，一般には $\omega'/(R_{e\,ta}\lambda_{s,t})$ で整理すればよいことが推察される．なおこれらの関係式(4-16)～(4-18)は，擬定常状態において成立する τ_w を用いて導びいたものであるから，この領域以外で妥当であるかどうかの判断は，実験との比較によらなければならない．

4・2・2　うず動粘性係数に関する4層モデル[4.2]を用いて計算される管横断面平均速度 u_m と壁面せん断応力 τ_w

近江ら[4.2]は圧縮性をわずかに考慮した流体の乱流脈動流れに対する解析法を報告し，その結果が高周波数領域では測定値とよい一致を示すこと およびそれが非圧縮性流体にも適用できることを示したが，u_m と τ_w に関しては言及しなかった．ここでは後に掲載する測定値との比較のために，それらを簡単に求めておこう．

総括うず動粘性係数 ν_E に対して，表4-1 に示した4層モデルを適用すれば，図4-2 のように管内は4層に分けられる．管中心より測ったそれぞれの境界を r_1, r_2, r_3 とすれば

$$\left.\begin{array}{ll} r_1=R(1-5/R^*), & r_2=R(1-30/R^*) \\ r_3=0.825\,R & \end{array}\right\} \quad \cdots(4\text{-}20)$$

と表わされる．ここで R：管半径，$R^*=u^*R/\nu$，$u^*=\sqrt{\tau_{w,ta}/\rho_0}$：摩擦速度である．文献(42)より軸方向速度 u の変動成分 $u_{os,n}$ はラプラス領域で各層に対してつぎのように表わされる．

$$\hat{u}_{j,os,n}=\{C_jI_0(z_j)+D_jK_0(z_j)-1\}\frac{1}{\rho_0 s}\frac{\partial\hat{p}_{os,n}}{\partial x} \quad (j=1,2,3,4) \quad \cdots(4\text{-}21)$$

ここで C_j，D_j は文献(42)で示した係数，S はラプラス演算子である．また z_j は各層に対してそれぞれつぎのように表わされる．

表4-1 4層モデル

y^*	層	k_j	m_j
0			
	1	0	1
5			
	2	0.2	0
30			
	3	0.4	0
$0.175\,R^*$			
	4	0	$0.07\,R^*$
R^*			

$\nu_{\Sigma,j}/\nu_1=k_jy^*+m_j$

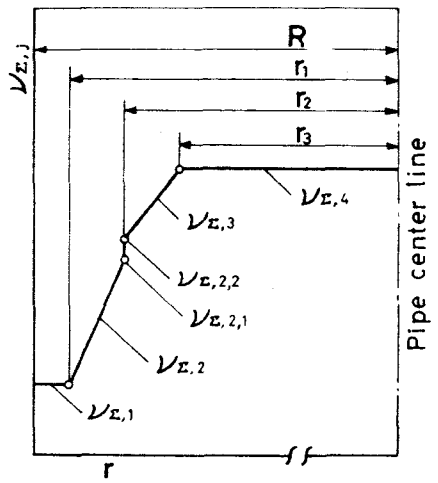


図4-2　4層モデルによる総括うず動粘性係数の概況図

$$z_1(r)=r\sqrt{\frac{s}{\nu_{\Sigma,1}}},\quad z_2(r)=\frac{2}{k_2u^*}\sqrt{s\nu_{\Sigma,2}},\quad z_3(r)=\frac{2}{k_3u^*}\sqrt{s\nu_{\Sigma,3}},\quad z_4(r)=r\sqrt{\frac{s}{\nu_{\Sigma,4}}} \quad \cdots(4\text{-}22)$$

以上の関係を用いれば，$\hat{u}_{m,os,n}$ は式(4-21)を管横断面平均することにより次式となる．

$$\hat{u}_{m,os,n}=\frac{2}{R^2}\frac{1}{\rho_0 s}\frac{\partial\hat{p}_{os,n}}{\partial x}\int_0^R r\{C_jI_0(z_j)+D_jK_0(z_j)-1\}\,dr=\frac{1}{\rho_0 s}\frac{\partial\hat{p}_{os,n}}{\partial x}\left(\frac{2}{R^2}U-1\right) \quad \cdots(4\text{-}23)$$

ここで U は

$$
\begin{aligned}
U=&r_3\sqrt{\nu_{\Sigma,4}/s}\,C_4I_1[z_4(r_3)]-r_3\sqrt{\nu_{\Sigma,4}/s}\,\{-C_3I_1[z_3(r_3)]+D_3K_1[z_3(r_3)]\}\\
&+r_2\sqrt{\nu_{\Sigma,2,2}/s}\,\{-C_3I_1[z_3(r_2)]+D_3K_1[z_3(r_2)]\}\\
&-r_2\sqrt{\nu_{\Sigma,2,1}/s}\,\{-C_2I_1[z_2(r_2)]+D_2K_1[z_2(r_2)]\}\\
&+r_1\sqrt{\nu_{\Sigma,1}/s}\,\{-C_2I_1[z_2(r_1)]+D_2K_1[z_2(r_1)]\}\\
&-r_1\sqrt{\nu_{\Sigma,1}/s}\,\{C_1I_1[z_1(r_1)]-D_1K_1[z_1(r_1)]\}\\
&+R\sqrt{\nu_{\Sigma,1}/s}\,\{C_1I_1[z_1(R)]-D_1K_1[z_1(R)]\}
\end{aligned}
\qquad \cdots(4\text{-}24)
$$

である.

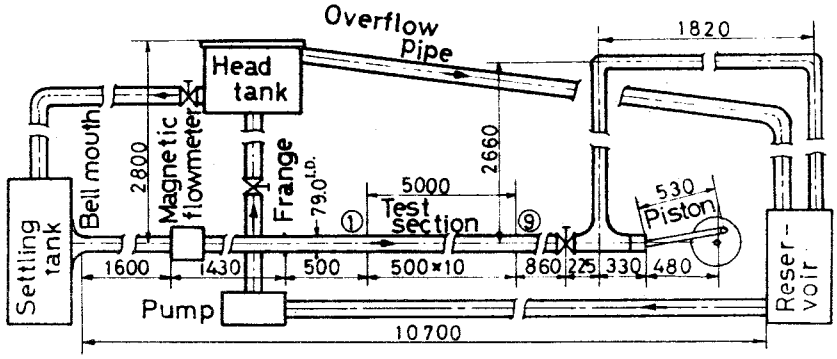
壁面せん断応力 τ_w は式(4-21)から容易に計算されて

$$
\hat{\tau}_{w,os,n}=-\rho_0\nu_{\Sigma,1}\left.\frac{\partial\hat{u}_{j,os,n}}{\partial r}\right|_{r=R}=-\sqrt{\nu_{\Sigma,1}/s}\,\frac{\partial\hat{p}_{os,n}}{\partial x}\{C_1I_1[z_1(R)]-D_1K_1[z_1(R)]\}
\qquad \cdots(4\text{-}25)
$$

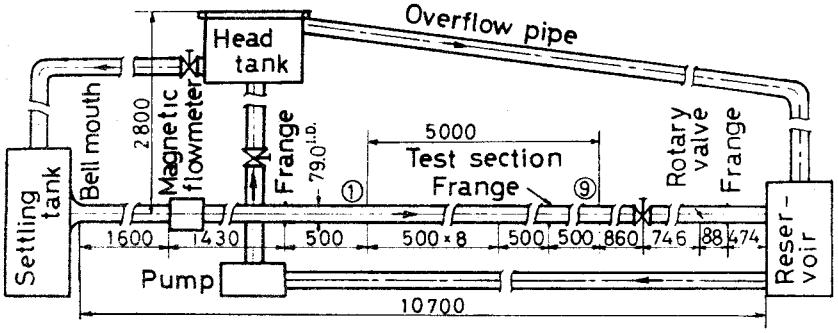
が得られる. なお圧力勾配は測定値より計算される.(42) $\hat{u}_{m,os,n}$, $\hat{\tau}_{w,os,n}$ において $S=i\omega$ (i は虚数単位) とおけば逆変換できて $u_{m,os,n}$, $\tau_{w,os,n}$ が求まるので, その実部をとれば容易に特性数 $\overline{\alpha}_{t,n}$, $\overline{\alpha}_{z,n}$, $\alpha_{t,n}$, $\alpha_{z,n}$ が計算されることになる. その結果は後の図4-6～4-9に破線で示してある.

4・3 実験装置および測定方法

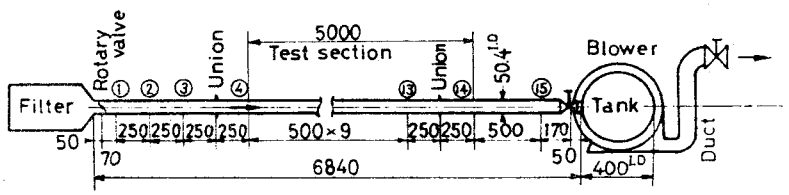
本実験で用いた実験装置の概要を図4-3に示す. (a), (b)は水の場合で, オーバーフローによって水頭差を一定値 2.8 m に保つようにしてある. 脈動は(a)に対してはピストン, (b)に対しては回転弁により発生させ, 脈動周波数は歯車モータと歯車式減速機の組合せにより, 脈動振幅はピストン行程と回転弁直径を変えて変化させた. (c)は空気の場合で, 脈動は回転弁で発生させ, 脈動周波数は歯車モータ, 歯車式減速機およびDLモータを用いて変化させた. 試験管路部は黄銅製で, 水の場合は長さ5m, 内径 79 mm, 肉厚5mm, 空気の場合は長さ5m, 内径 50.4 mm, 肉厚5mm のかたいなめらかな直管路である. 試験管路には 0.5 m の間隔で内径 1 mm の静圧孔が, また 1 m ごとに熱線風速計による速度分布測定用の穴があけてある. 入口から試験管路, または電磁流量計までの距離は, 助走区間



(a) 水の場合（ピストン）



(b) 水の場合（回転弁）



(c) 空気の場合

番号①などは測定断面の位置を表わす

図4-3 実験装置

の関係式 $x/D = 1.3 Re_{ta}^{1/4}$ から計算した値（$x/D \fallingdotseq 19.5$）よりも大きくとってあるので，流れは十分発達していることになる．

管横断面平均速度を決定するに際して，水の場合は電磁流量計とフィルムプローブを用い，空気の場合は熱線流速計を用いた．フィルムプローブでは，管半径を15分割した位置での速度を，熱線の場合は17分割した各位置での速度を求め，管横断面平均して U_m を決定した．なお工業用に製作された電磁流量計は，そのままでは高周波数領域において応答性が良好でないため，フィルムプローブとの同時計測を行いつつ，電磁流量計のコンデンサ容量を調整することにより，2.03 Hz までは十分応答することを確認した．この周波数以上の応答特性に関しては，本実験装置の構造上の制約から検定を行っていない．また圧力の測定にはひずみゲージ型差圧変換器を利用した．一方の受圧部を一つの測定断面に固定しておき，他方のそれを 0.5 m 間隔で移動させ，得られた値から最小自乗法によって圧力勾配 $\Delta p/\ell$ を決定した．

上記電磁流量計，熱線流速計および差圧変換器からの出力は，回転円板と投受光器を用いて発生させた1周期あたり12個のタイムマークとともに電磁オシログラフで同時記録した．このようにして得られた $\Delta p/\ell$ と U_m に関するデータは式(2-30)，(2-31)の形にフーリエ展開し，さらにそれらを式(2-29)に代入することによって τ_w を式(2-32)の形で決定した．

4·4　実験結果および考察

水と空気についての定常流れの実験から求めた定常流管摩擦係数 $\lambda_{s,t}$ を図4-4に示す．いずれの管路においても，Blasius の式，Kármán - Nikuradse の式に一致し，水力学的になめらかな管であることがわかる．以下の考察においては表示が簡単な Blasius の式を用いることにする．

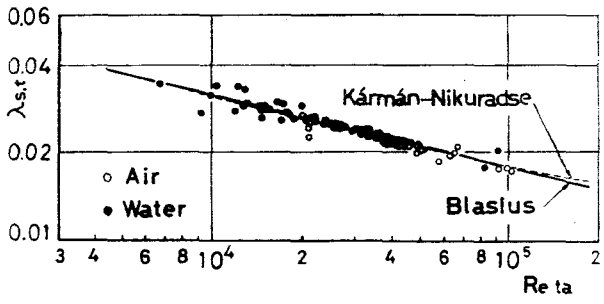


図4-4　定常流管摩擦係数 $\lambda_{s,t}$

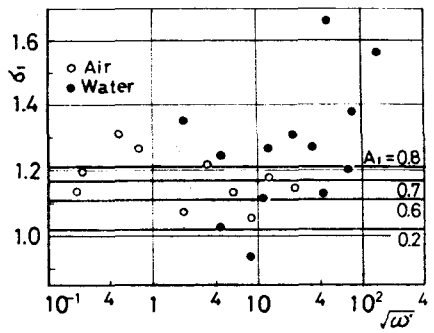
実験は第1段階として Re_{ta} をほぼ一定にして ω',

A_1 が流動形態に及ぼす影響を調べ，第二段階として Re_{ta} を広範囲に変化させる．まず Re_{ta} が一定の実験に対しては，水の場合 $Re_{ta} \fallingdotseq 5.7\times10^4$ と設定し，$A_1 = 0.2 \sim 0.8$，$f = 0.000142 \sim 2.03$ Hz ($\sqrt{\omega'} = R\sqrt{\omega/\nu} = 1.12 \sim 138$) の範囲で，また空気の場合には $Re_{ta} \fallingdotseq 5.7\times10^4$ と設定し，$A_1 \fallingdotseq 0.8$，$f = 0.000364 \sim 48.0$ Hz ($\sqrt{\omega'} = 0.300 \sim 111$) の範囲で変化させた．空気の場合，周波数が高くなると $\ell \fallingdotseq 100D$ の測定区間で非圧縮性流れとみなすことは困難となるので，その場合のデータは解析から除いた．

第二段階では，ω' の大きな領域に対しては流体として水を，脈動発生源としてピストンを用い，$Re_{ta} = (1\sim6)\times10^4$，$f = 0.140$, 0.431, 1.03, 2.03 Hz ($\sqrt{\omega'} \fallingdotseq 33.0 \sim 138$)，$A_1 = 0.05 \sim 0.9$ の範囲で変化させた．ω' の小さな領域に対しては流体として空気を用い，脈動は回転弁で発生させ，速度振幅比は弁の直径を変えて変化させた．この場合 $Re_{ta} = (1.9\pm0.2)\times10^4$, $(6.8\pm0.1)\times10^4$, $(9.6\pm0.4)\times10^4$ に設定し，$f = 0.0432 \sim 2.06$ Hz ($\sqrt{\omega'} \fallingdotseq 3.35 \sim 25.0$)，$A_1 = 0.1 \sim 0.85$ の範囲で変化させた．なお水の場合，U_m の測定には，おもにフィルムプローブを用いた．

4・4・1　時間平均レイノルズ数が一定の場合

前節で述べた方法に従って求めた $\Delta p_{ta}/\ell$ と $U_{m,ta}$ の測定値と式(4-8)とを用いて修正係数 σ_1 の値を計算し，ω' に対する関係を図示してみると図4-5のようになる．空気の場合のデータに限定すれば，$A_1 \fallingdotseq 0.8$ で速度振幅比にあまり大きな変化がみられなかったが，この場合 σ_1 は ω' に対して顕著な変化を示していない．なおデータに若干のばらつきがみられるが，これは A_1 の値を一定に保つことがむずかしく，厳密には $0.743 < A_1 < 0.834$ の範囲に散在してしまったことなどに起因している．したがって，いまのところ σ_1 は ω' に対して変化しないものとし，擬定常状態で計算される値を全周波



$Re_{ta} \fallingdotseq 5.7\times10^4$

図4-5　修正係数 σ_1

数領域にわたって採用することにしておく．水の場合のデータはA_1の値が0.2～0.8と各々異なっているため議論の対象とはならないが，参考までに記入した．

$Re_{ta} \fallingdotseq 5.7\times10^4$として$\omega'$，$A_1$を広範囲に変化させた実験から得られた$\bar{\tau}_{t,1}$，$\bar{\tau}_{z,1}$，$\alpha_{t,1}$，$\alpha_{z,1}$の値を$\omega'$に対して表わしたものが図4-6～4-9である．図中の実線はつぎのようにして定めた．まず直接測定した$\Delta p/\ell$，u_mから定まる$\bar{\tau}_{t,1}$，$\alpha_{t,1}$の測定点の中で，比較的ばらつきの少い$\alpha_{t,1}$の測定点をなめらかに結ぶ．つぎに$\bar{\tau}_{t,1}$の測定点を近似できるような適当な曲線を設定し，これら二つの曲線から読みとった$\bar{\tau}_{t,1}$，$\alpha_{t,1}$の値を用いて変動成分に関するつり合いの式と特性数に対する定義式から$\bar{\tau}_{z,1}$，$\alpha_{z,1}$の値を求める．これらの値がそれぞれの測定点を無理なく近似できるまで$\bar{\tau}_{t,1}$の調整を繰り返す．このようにして求めた$\bar{\tau}_{t,1}$の値は図4-6にみられるようにω'の大きい領域で測定点よりもわずかに下方に位置するきらいがあるが，この領域で，さらに精密な曲線を描くにはもう少しデータを集めなければならない．破線はうず動粘性係数に関する4層モデルを使用して計算したものである．

すべての測定点はA_1の値にかかわらず同一曲線上にのることから，速度振幅比A_1は$A_1<1$の場合，特性数$\bar{\tau}_{t,1}$，$\bar{\tau}_{z,1}$，$\alpha_{t,1}$，$\alpha_{z,1}$にほとんど影響を与えないことがわかる．ω'が比較的大きい領域で，データのばらつきが特に$\alpha_{z,1}$において大きいのは（図4-9参照），式(2-29)からτ_wを求める際に，τ_wがほかの項に比べて非常に小さいので正確に決定することがむづかしいためと，加速度du_m/dtを図式微分で求める誤差を避けられないためとである．

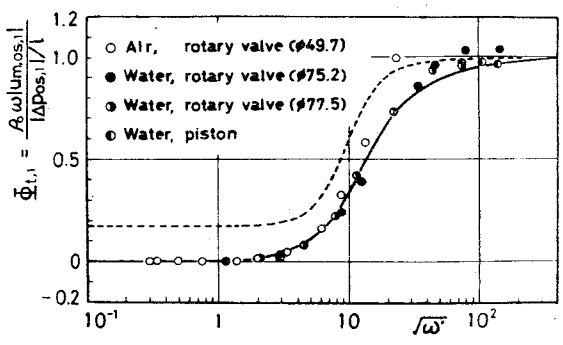


図4-6　特性数$\bar{\tau}_{t,1}$の周波数依存性

ω'が小さい領域では，$\alpha_{t,1}\fallingdotseq0°$，$\alpha_{z,1}\fallingdotseq0°$となり，$\Delta p/\ell$，$u_m$，$\tau_w$はほぼ同位相で変動し，しかも

$\Phi_{t,1} \fallingdotseq 0$, $\Phi_{z,1} \fallingdotseq 1$ となることから，粘性項と圧力項とがほぼつり合い，各瞬間に擬定常状態が成立していることがわかる．ω' が大きい領域では，圧力勾配の位相に対して $\angle u_{m,os,1}$ は約 90°，$\angle \tau_{w,os,1}$ は約 45° 近く遅れている．4層モデルを用いて計算した $\angle \tau_{w,os,1}$ は 45° を超えている．このことは喜多ら[24]の解析結果にも現われているが，このことの理由は明らかではない．またこの領域では $\Phi_{t,1} \fallingdotseq 1$，$\Phi_{z,1} \fallingdotseq 0$ となって慣性項が圧力項とほぼつり合い，変動速度は非粘性流体の挙動を示すようになって，壁のごく近傍を除き，剛体的に変動していることが予想される．

図4－10 ～ 4-13 に $n = 2, 3$ の場合の $\Phi_{t,n}$, $\Phi_{z,n}$, $\alpha_{t,n}$, $\alpha_{z,n}$ の値を示した．本実験装置では $\Delta p/l$, u_m の各測定値は基本波で精度よく表わされるので，二次，三次

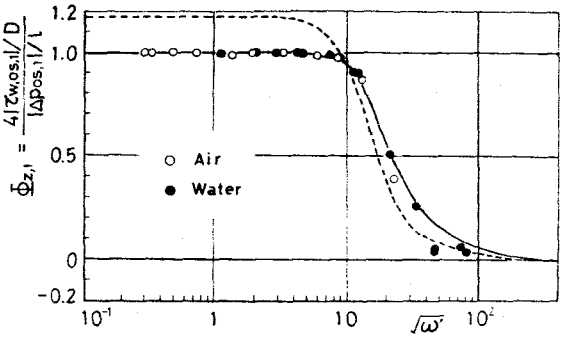


図4-7　特性数 $\Phi_{z,1}$ の周波数依存性

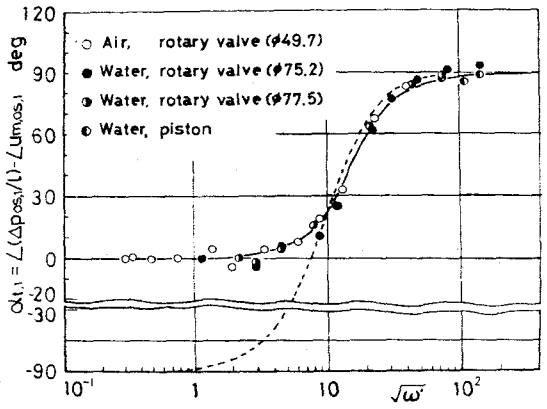


図4-8　特性数 $\alpha_{t,1}$ の周波数依存性

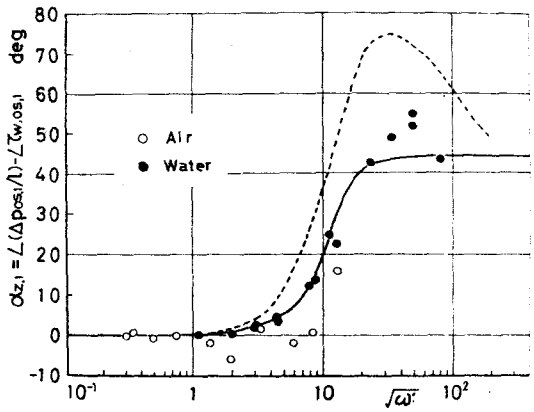


図4-9　特性数 $\alpha_{z,1}$ の周波数依存性

の高調波成分の割合は小さく，必然的に誤差は大きくなるものの，基本波に対する曲線の近傍にばらついてくる．したがって高調波成分に対しても，基本波に対して述べたのと同じことがいえる．

4・4・2 流動形態の系統的表示

上に示したようにR_{eta}が一定の場合，流動形態はω'のみによって規定され，層流の場合と同様にω'に関して三つの領域に分類できることが判明した．そこで，つぎにR_{eta}が流動形態に及ぼす影響をみてみよう．

熱線およびフィルムプローブで測定した軸方向速度成分uの短時間平均値$\bar{u}$の半径方向分布およびそのときの管横断面平均速度u_mと圧力勾配$\Delta p/\ell$を図4-14～4-16に示してある．ここで短時間とは乱れに基づく変動成分は消えるが，脈動に基づく変動成分は残る程

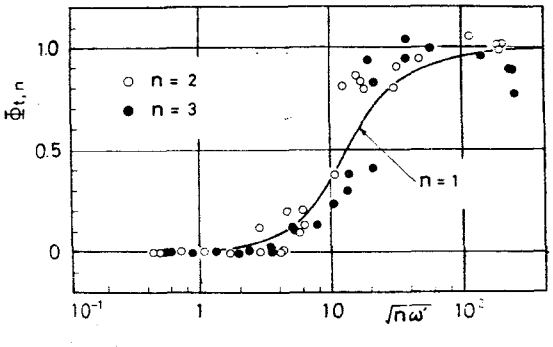


図4-10 特性数$\Phi_{t,n}$($n=2,3$)の周波数依存性

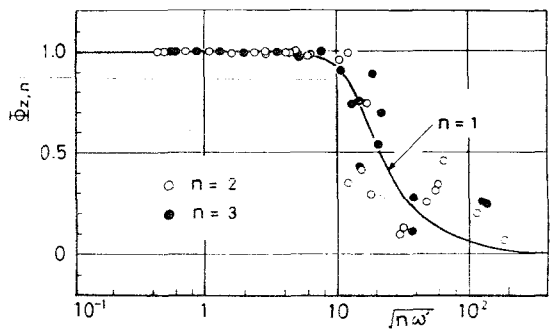


図4-11 特性数$\Phi_{z,n}$($n=2,3$)の周波数依存性

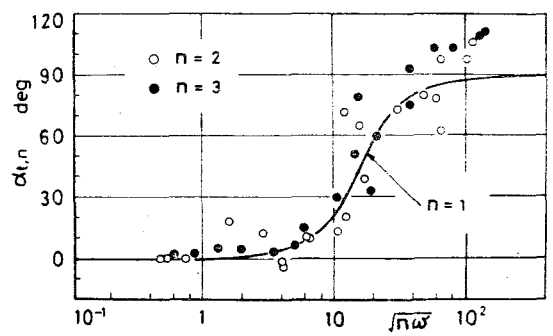


図4-12 特性数$\alpha_{t,n}$($n=2,3$)の周波数依存性

度の時間間隔をいう．

図4－14，4－15は空気の，図4－16は水の場合のデータである．いずれのデータも基本波のみを採用したフーリエ展開近似式で精度よく表わされていることがわかる．

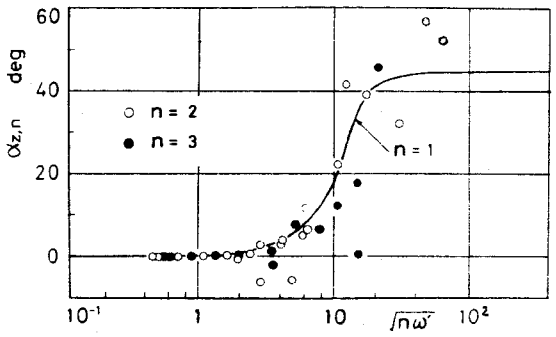
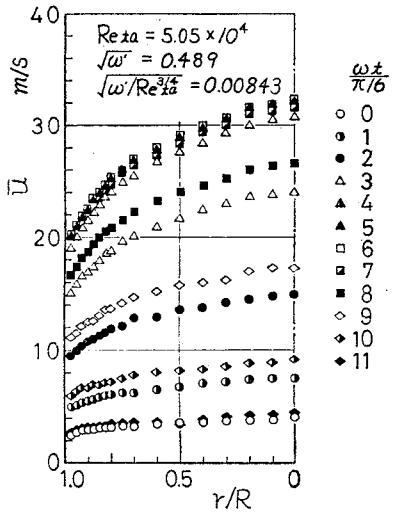
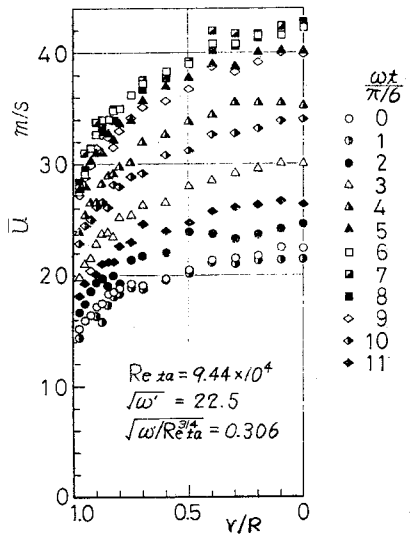


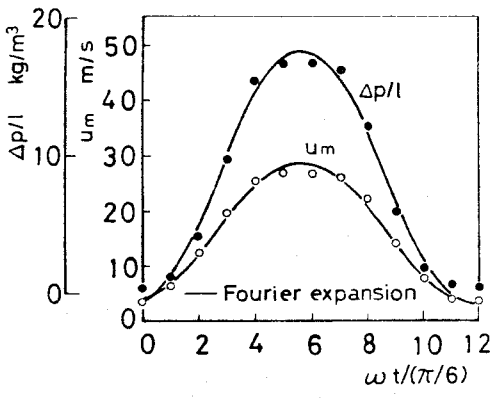
図4－13　特性数$\alpha_{z,n}$（n=2，3）の周波数依存性



(a) 管横断面上脈動速度分布

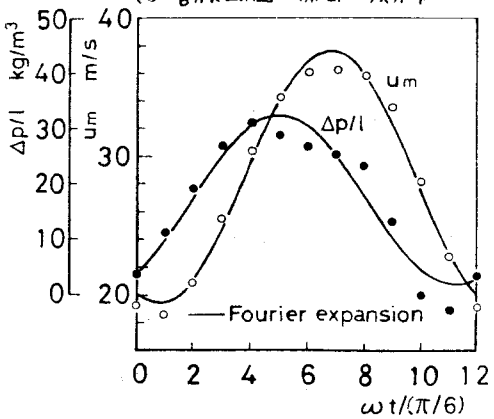


(a) 管横断面上脈動速度分布



(b) $\Delta p/\ell$，u_m の値

図4－14　擬定常領域における測定例



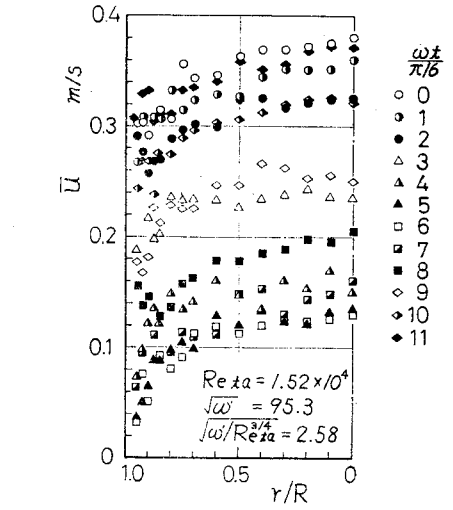
(b) $\Delta p/\ell$，u_m の値

図4－15　中間領域における測定例

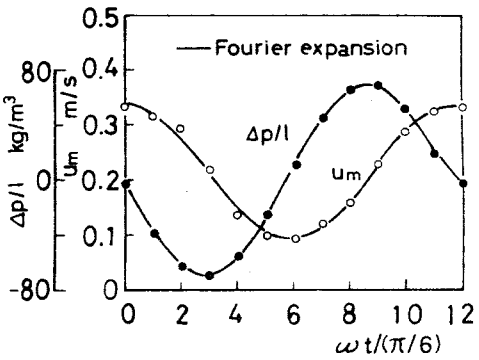
$\varepsilon_{t,1}$, $\varepsilon_{z,1}$, $\alpha_{t,1}$, $\alpha_{z,1}$ の値を ω' に対して図 4-17 ～ 4-20 に示す．図中実線は $Re_{ta} = (5.7 \pm 0.7) \times 10^4$ の実験で得たものと同じである．破線は擬定常表示式 (4-16) ～ (4-18) を使って計算した結果である．

各々のデータは ω' の小さい領域ではそれぞれの擬定常表示式のまわりにばらつき，Re_{ta} が小さくなると一点鎖線で示した層流の曲線，式 (2-36) に近づいてゆくことがわかる．

特性数 $\varepsilon_{t,1}$, $\varepsilon_{z,1}$, $\alpha_{t,1}$, $\alpha_{z,1}$ の値を無次元数 $\omega'/Re_{ta}^{3/4}$ に対して示したものが図4-21 ～ 4-24 である．なお図4-25, 4-26 には，フィルムプローブを用いて行った実験における $\varepsilon_{t,1}$, $\alpha_{t,1}$ の慣性領域近傍の値を，横軸を拡大して示したが，このような領域では，$\varepsilon_{z,1}$, $\alpha_{z,1}$ に関する測定精度が悪くなるため省略した．図中実線は図4-21, 4-23 のそれと同一である．図4-21 ～ 4-26 において，すべてのデータは同一曲線上に乗っており，乱流脈動流れの流動形態は無次元数 $\omega'/Re_{ta}^{3/4}$ で系統的に表わされることがわかる．



(a) 管横断面上脈動速度分布



(b) $\Delta p/l$, u_m の値

図 4-16 慣性領域における測定例

第 2 章で $\varepsilon_{t,1}$, $\varepsilon_{z,1}$ の値を用いて層流脈動流れの三つの領域の境界を定めることを提案したが，ここではそれらの結果をふまえ，合理的な境界値を提案する．擬定常領域と中間領域との境界を $(\omega'/Re_{ta}^{3/4})_g$，中間領域と慣性領域との境界を $(\omega'/Re_{ta}^{3/4})_t$ で表わし，$(\omega'/Re_{ta}^{3/4})_g$ の値を $\varepsilon_{z,1} = 0.95$ で定めてやれば，$\sqrt{(\omega'/Re_{ta}^{3/4})_g} = 0.145$ となる．また $(\omega'/Re_{ta}^{3/4})_t$ の

値を $\Phi_{t,1} = 0.95$ で定めてやれば $\sqrt{(\omega/Re_{ta}^{3/4})_t} = 1.50$ となる．これらは $Re_{ta} = 5.7\times10^4$ に対しては $\sqrt{\omega'_t} = 8.8$, $\sqrt{\omega'_t} = 91$ の境界値を与える．

このように三つの領域の境界を定めたので，脈動周波数と時間平均レイノルズ数がわかれば，その流れの流動形態がいずれの領域に属しているかを判定することができる．もし流動形態が擬定常領域に属しているならば，従来よく知られている，定常流れにおいて成立する $\Delta p/\ell$, U_m, τ_w の間の関係式が適用でき，慣性領域に属しているならば粘性項はほとんど無視してよいので，$\Delta p/\ell$ と U_m に関しては非粘性流体に対する関係式が近似的に適用できる．

さて 図4-23において，$\sqrt{\omega/Re_{ta}^{3/4}}$ の値が約0.5から2の間に記入してある太い実線は布部ら[43]の実験結果を示したものである．なお，彼らはほかの三つの特性数は求めていない．彼らは式(2-29)の壁面せん断応力 τ_w に擬定常表示を用い，そのために生じる影

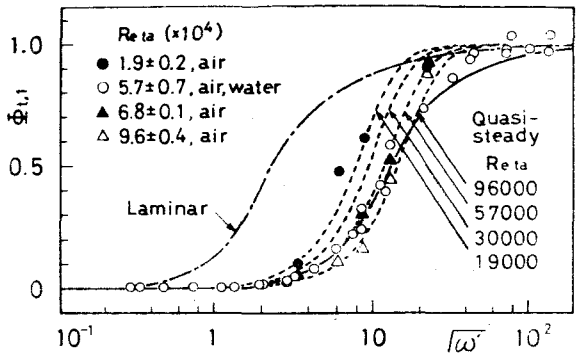


図4-17 特定数 $\Phi_{t,1}$ と無次元角周波数 ω' との関係

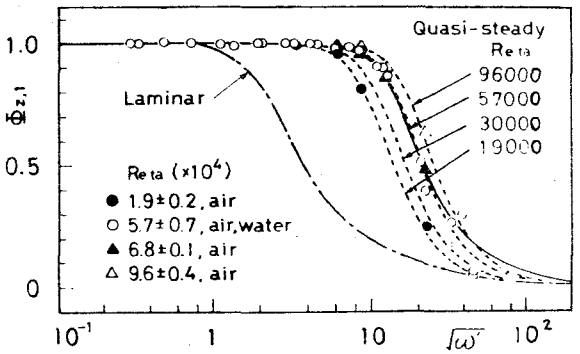


図4-18 特性数 $\Phi_{z,1}$ と無次元角周波数 ω' との関係

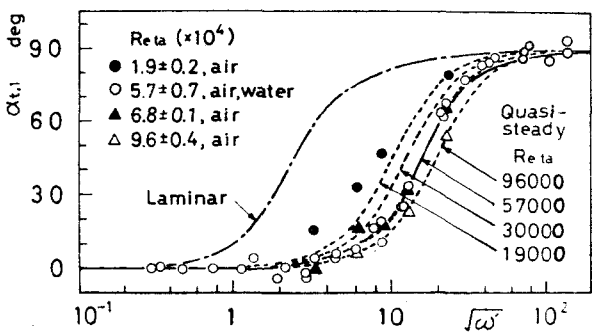


図4-19 特性数 $\alpha_{t,1}$ と無次元角周波数 ω' との関係

響を慣性項で考慮し，つぎのように表わした．

$$\frac{\Delta p}{l}=\lambda_{g,t}\frac{\rho_0}{2D}u_m^2+K_1\rho_0\frac{du_m}{dt} \quad \cdots(4\text{-}26)$$

ここで K_1 が上記の影響を含む係数であり，$\lambda_{g,t}$ に対しては Nikuradse の式

$$\lambda_{g,t}=0.0032+0.221R_e^{-0.237} \quad \cdots(4\text{-}27)$$

を用い，$\Delta p/l$，u_m の測定値から K_1 の値を定め，$\alpha_{t,1}$ をつぎの式

$$\alpha_{t,1}=\tan^{-1}\left(\frac{2\pi K_1}{0.905}\frac{S_t}{\lambda_{s,t}}\right) \quad \cdots(4\text{-}28)$$

で表わした．ここで $S_t=fD/u_{m,ta}$，$K_1=0.907$，$\lambda_{s,t}$ は式(4-27)の $\lambda_{g,t}$ を $\lambda_{s,t}$ に置き換えたものである．彼らは $Re_{ta}=7\times10^4\sim2\times10^5$ で実験を行っているが，この Re_{ta} の範囲では，Nikuradse の式は誤差約3%以内で Blasius の式により近似でき

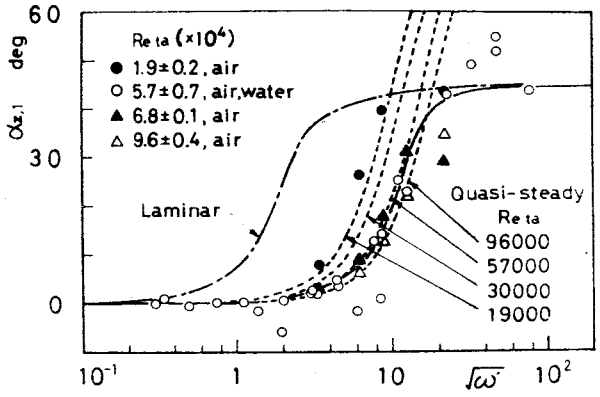


図4-20 特性数 $\alpha_{z,1}$ と無次元角周波数 ω' との関係

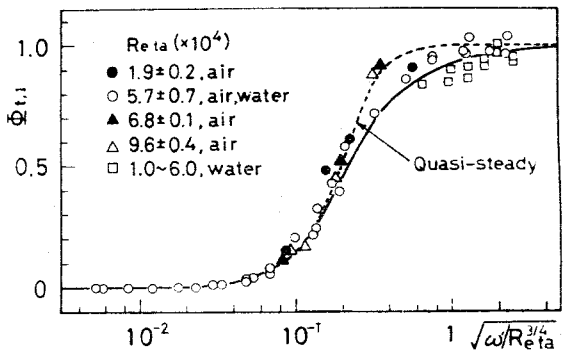


図4-21 特性数 $\Phi_{t,1}$ と ω' および Re_{ta} との関係

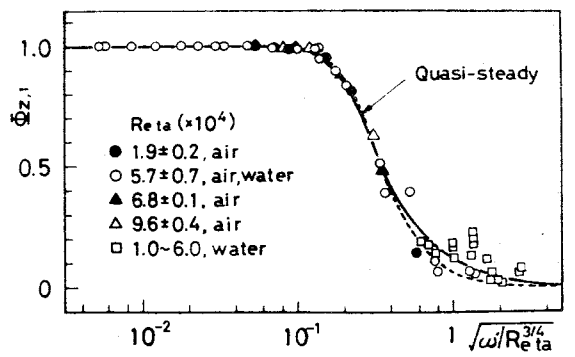


図4-22 特性数 $\Phi_{z,1}$ と ω' および Re_{ta} との関係

るので，式(4-28)を書き換えると

$$\alpha_{t,1} = \tan^{-1}(13.55\omega'/Re_{ta}^{3/4}) \quad \cdots(4-29)$$

となる．式(4-26)は $K_1 = 1$ とおけば擬定常表示に帰着するので，式(4-29)はほぼ擬定常表示の曲線，式(4-18)に一致する．また本実験結果との一致もよい．

擬定常表示と測定値との間に $\alpha_{z,1}$ では大きな相違がみられるにもかかわらず，$\bar{\alpha}_{t,1}$，$\bar{\alpha}_{z,1}$，$\alpha_{t,1}$ において比較的良好な一致がみられるのは，$\omega'/Re_{ta}^{3/4}$ のすべての領域で定常摩擦則が成立するためではなく，$\omega'/Re_{ta}^{3/4}$ が大きくなると粘性の影響が相対的に小さくなるためである．

図4-27～4-30には $n=2, 3$ の場合の $\bar{\alpha}_{t,n}$，$\bar{\alpha}_{z,n}$，$\alpha_{t,n}$，$\alpha_{z,n}$ の値を $n\omega'/Re_{ta}^{3/4}$ に対して示した．前述したように，本実験装置で測定した $\Delta p/\ell$，U_m の波形は基本波（$n=1$）で精度よく表わされるので，$n=2$,

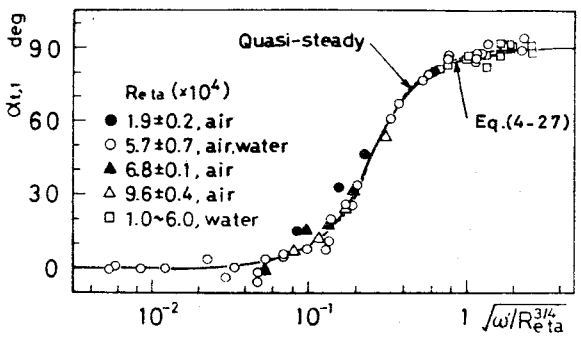


図4-23　特性数 $\alpha_{t,1}$ と ω' および Re_{ta} との関係

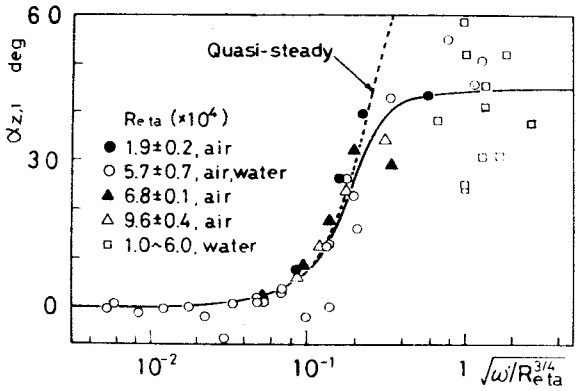


図4-24　特性数 $\alpha_{z,1}$ と ω' および Re_{ta} との関係

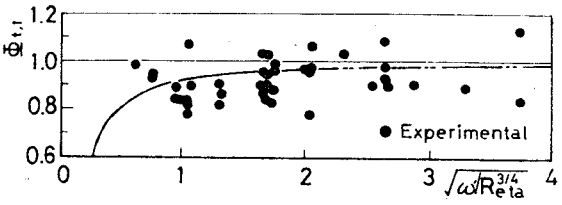


図4-25　慣性領域近傍における特性数 $\bar{\alpha}_{t,1}$ の値

3に対しては必然的に誤差は大きくなるものの，$n=1$ の場合と同じような流動形態図ができあがることがわかる．

4·4·3 流動形態に及ぼす高調波成分の影響

式(4-19)からわかるように，擬定常領域では，u_m が基本波のみで表わされる場合でも，$\Delta p/\ell$，τ_w には二次以上の高調波成分が存在することになる．そこで，u_m に高調波成分が存在する場合に，特性数の擬定常表示がどのような形で表わされるかについて考察してみよう．簡単のために u_m の二次の高調波成分までとって

$$u_m = u_{m,ta} + |u_{m,os,1}|\cos\omega t + |u_{m,os,2}|\cos 2\omega t$$

と表わし，4·2節で示した方法と同様な方法で τ_w，$\Delta p/\ell$ を計算してみると次式が得られる．

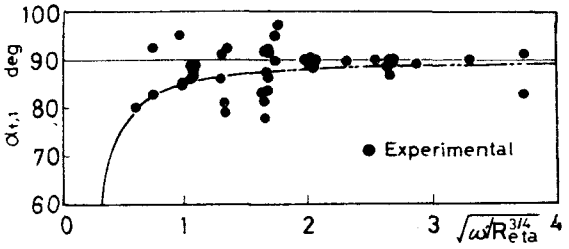


図4-26 慣性領域近傍における特性数 $\alpha_{t,1}$ の値

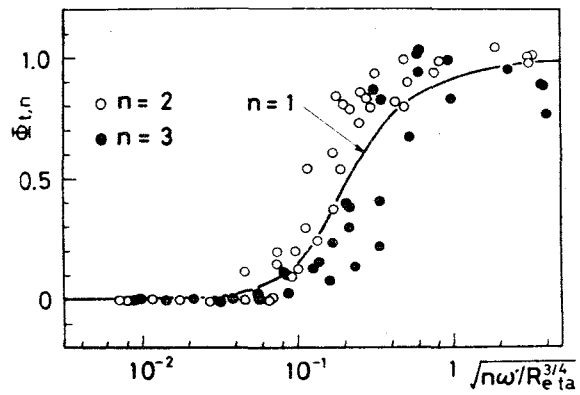


図4-27 特性数 $\Phi_{t,n}$ の値（$n=2,3$ の場合）

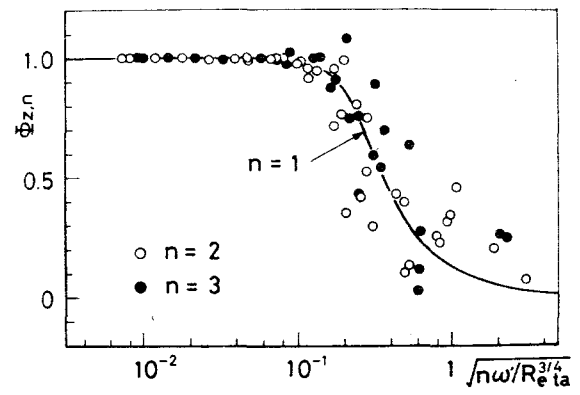


図4-28 特性数 $\Phi_{z,n}$ の値（$n=2,3$ の場合）

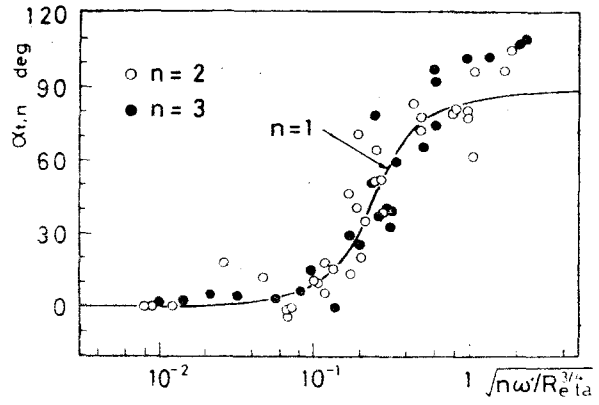


図4-29　特性数 $\alpha_{t,n}$ の値（$n=2,3$ の場合）

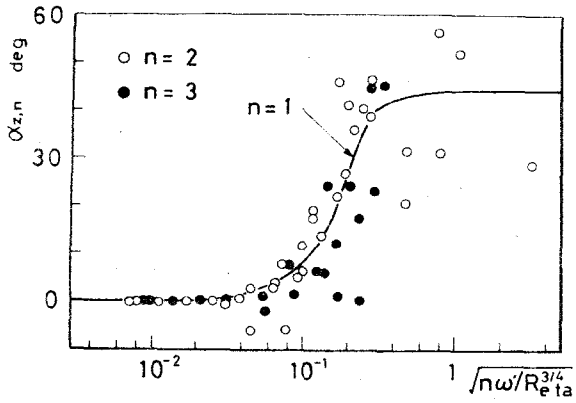


図4-30　特性数 $\alpha_{z,n}$ の値（$n=2,3$ の場合）

$$\tau_w=\frac{0.316\,4}{8}\left(\frac{\nu}{D}\right)^{1/4}\rho_0 u_{m,ta}{}^{7/4}\left[1+\frac{21}{64}A_1{}^2+\frac{21}{64}A_2{}^2-\frac{21}{512}A_1{}^2A_2+\cdots\cdots+\left(\frac{7}{4}A_1+\frac{21}{32}A_1A_2-\frac{21}{512}A_1{}^3-\frac{21}{256}A_1A_2{}^2+\cdots\cdots\right)\cos\omega t+\left(\frac{7}{4}A_2+\frac{21}{64}A_1{}^2-\frac{21}{512}A_2{}^3+\cdots\cdots\right)\cos 2\omega t+\cdots\cdots\right] \quad \cdots(4\text{-}30)$$

$$\Delta p/l=-\rho_0\omega|u_{m,os,1}|\sin\omega t-2\rho_0\omega|u_{m,os,2}|\sin 2\omega t+4\tau_w/D \quad \cdots(4\text{-}31)$$

ここで $A_2=|u_{m,os,2}|/u_{m,ta}<1$ であり，上式が収束する条件は $(A_1+A_2)<1$ である．

上式から明らかなように，擬定常表示においては u_m と τ_w，$\Delta p/\ell$ との関係は非線形であるために，u_m の基本波および二次の高調波成分が τ_w，$\Delta p/\ell$ のそれらに相互に影響を及ぼし，u_m が基本波のみで表わされる場合に成立した関係式(4-16)～(4-18)は，この場合厳密には成立しない．しかしながら本実験の場合は $A_1 \gg A_2$ であるから，基本波に対しては式(4-16)～(4-18)は精度よく成立するが，二次の高調波成分に対しては一般に式(4-30)の $\cos 2\omega t$ の係数における第二項は第一項に比べて無視できないので，特性数の表示式は基本波に対するそれとは異なったものとなる．途中の計算は省略して結果のみを記せば $\Phi_{t,2}$，$\Phi_{z,2}$，$\alpha_{t,2}$，$\alpha_{z,2}$ はそれぞれ速度振幅比 A_1，A_2 の関数となって次式で表わされる．

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{t,2} &= 1\Big/\sqrt{1+\left\{\frac{f(A_1,A_2)}{14.45}\,\frac{Re\,ta^{3/4}}{2\omega'}\right\}^2} \\
\Phi_{z,2} &= \left\{\frac{f(A_1,A_2)}{14.45}\,\frac{Re\,ta^{3/4}}{2\omega'}\right\}\Big/\sqrt{1+\left\{\frac{f(A_1,A_2)}{14.45}\,\frac{Re\,ta^{3/4}}{2\omega'}\right\}^2} \\
\alpha_{t,2} &= \alpha_{z,2} = \tan^{-1}\left\{\frac{14.45}{f(A_1,A_2)}\,\frac{2\omega'}{Re\,ta^{3/4}}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad \cdots(4-32)$$

$$f(A_1,A_2) = 1+\frac{3}{16}\frac{A_1^2}{A_2}-\frac{3}{128}A_2^2+\cdots\cdots \quad \cdots(4-33)$$

すなわち，二次の高調波成分に対する特性数は横軸に対数をとって流動形態図に描いた場合，基本波に対するそれを $f(A_1,A_2)$ 倍だけ横に移動すれば求まることになる．図4-27～4-30の擬定常領域近傍における測定値のばらつきの一因はこの事実にあることが明らかである．三次の高調波成分に対しても同様な計算を行えば $f(A_1,A_2,A_3)$ が求まることになる．

上記の議論から，二次以上の高調波成分に関して全周波数領域で，擬定常状態が成立しているならば，流動形態図において $f(A_1,A_2)>1$ であることから，測定値は全体として基本波に対するそれの右方へ偏るはずである．しかしながら測定誤差が大きいことを考慮しても顕著な偏りはみられず基本波のそれらのまわりにばらついている．このことは ω' の値が大きくなるにつれて τ_w，$\Delta p/\ell \propto u_m^{7/4}$ の非線形の関係がくずれ，n 次の高調波成分に関して線形関係が成立するようになるのではないかとも考えられるが，ここに示した測定値から判定を

下すには誤差があまりにも大きすぎる.

4·5 結言

円管内脈動流れについて脈動周波数 f, 時間平均レイノルズ数 Re_{ta}, 速度振幅比 A_1 を広範囲に変化させて圧力, 速度の測定を行ったところ, ピストンまたは回転弁によって発生させた脈動流れの圧力勾配 $\Delta p/\ell$, 管横断面平均速度 u_m は, それぞれ実測波形上で1周期あたり12個の値を採用してフーリエ展開を行ったとき, 基本波のみでこれらを精度よく表わせた. つぎに, これらを用いて運動量の式の各項の量的関係を調べる段階において, 四つの特性数を定義して脈動周波数との関係を調査し, 流動形態図を作製した. その結果得られた事柄はつぎのとおりである.

(1) 円管内乱流脈動流れの流動形態は四つの特性数 $\Xi_{t,n}$, $\Xi_{z,n}$, $\alpha_{t,n}$, $\alpha_{z,n}$ により規定することができる. これらの特性数は定常流管摩擦係数 $\lambda_{s,t}$ に Blasius の式が適用できるレイノルズ数領域においては無次元数 $\omega'/Re_{ta}^{3/4}$ の, 一般には $\omega'/(Re_{ta}\lambda_{s,t})$ の関数として表わされる.

(2) 速度振幅比 A_1 は $A_1<1$ に対して, 流動形態にはほとんど影響を与えない.

(3) 流動形態は $\omega'/Re_{ta}^{3/4}$ に関して三つの領域, すなわち粘性項と圧力項とがほぼつり合う擬定常領域, 慣性項と粘性項とが圧力項とつり合う中間領域および慣性項と圧力項とがほぼつり合う慣性領域に分けられる. 擬定常領域と中間領域との境界を示す $\omega'/Re_{ta}^{3/4}$ の値を $(\omega'/Re_{ta}^{3/4})_f$ とし, $\Xi_{z,1}=0.95$ となる値を採用すれば $\sqrt{(\omega'/Re_{ta}^{3/4})_f}=0.145$ となる. 中間領域と慣性領域との境界を $(\omega'/Re_{ta}^{3/4})_t$ とし, $\Xi_{t,1}=0.95$ となる値を採用すれば $\sqrt{(\omega'/Re_{ta}^{3/4})_t}=1.50$ となる.

(4) うず動粘性係数に対する4層モデルを用いて計算した $\Xi_{t,1}$, $\Xi_{z,1}$, $\alpha_{t,1}$ の値は, 慣性領域においてのみ比較的良好に測定値と一致する.

(5) 特性数 $\alpha_{t,1}$, $\alpha_{z,1}$, $\alpha_{t,1}$, $\alpha_{z,1}$ を ω' に対して図示すれば, Re_{ta} が小さくなるにつれ層流の曲線側へ移行する. しかしながら層流の曲線にどのように移行して重なるかは, 脈動流れにおける層流から乱流への遷移がはあくされていないため明確でない.

第5章　乱流の場合の摩擦損失

5・1　緒　言

前章において，運動量の式の各項の大きさを比較することにより，円管内乱流脈動流れの流動形態が，脈動周波数と時間平均レイノルズ数に関して三つの領域，すなわち擬定常領域，中間領域および慣性領域とに分けられることを明らかにし，それらの境界を定量的に表わすために，亜$_{t,n}$，亜$_{z,n}$，$\alpha_{t,n}$，$\alpha_{z,n}$という四つの量を導入した．本章では円管内乱流脈動流れの摩擦損失を取扱い，瞬間管摩擦係数$\lambda_{u(t)}$，時間平均管摩擦係数$\lambda_{u,ta}$について論じた．

$\lambda_{u(t)}$については，第3章で定義したものと最終的には同じものとなる式が従来示され，加速流れ，減速流れについて追求された．[36)~(39)(44)] しかし，加速域あるいは減速域における$\lambda_{u(t)}$の値は，その大きさを瞬間レイノルズ数Reと関数関係をもつ擬定常値$\lambda_{g,t}$と比較した場合，$\lambda_{g,t}$よりも大きいとするものと，小さいとするものとがあり，いずれが真実であるか判然としていない．$\lambda_{u,ta}$に関しても，Schultz-Grunow[26]，Baird ら[45]により，乱流脈動流れにおいては管横断面平均速度u_mの時間平均値$u_{m,ta}$を持つ定常流れの値$\lambda_{s,t}$よりも大きくなることが定性的に報告されている程度である．[46] ここでは第3章に示した定義式を用い，第4章に示した流動形態図を利用して，$\lambda_{u(t)}$，$\lambda_{u,ta}$の値を推定し，これらの管摩擦係数が速度振幅比$A_1 = |u_{m,os,1}|/u_{m,ta}$および無次元角周波数$\omega'$によってどのように変化するかを調べ，その結果を実験結果と比較した．

5・2　管摩擦係数の推定法

5・2・1　圧力勾配$\Delta p/l$，壁面せん断応力τ_wの推定

u_mが与えられた場合に$\Delta p/l$，τ_wを求める方法について述べる．いまu_mが$u_{m,ta}$のまわりに調和変動しているとして，これを次式で与えよう．

$$u_m = u_{m,ta} + |u_{m,os,1}| \cos(\omega t + \angle u_{m,os,1}) \qquad \cdots(5-1)$$

そうすると求める $\Delta p/\ell$, τ_w はこれらをフーリエ展開の形で与えるに際して基本波($n=1$)のみを考えることで十分な精度を期待できる．そこでこれらをつぎのように表わしておく．

$$\Delta p/\ell = \Delta p_{ta}/\ell + (|\Delta p_{os,1}|/\ell)\cos\{\omega t + \angle(\Delta p_{os,1}/\ell)\} \quad \cdots(5-2)$$

$$\tau_w = \tau_{w,ta} + |\tau_{w,os,1}|\cos(\omega t + \angle \tau_{w,os,1}) \quad \cdots(5-3)$$

さて前章で示した関係式(4-8),(4-9)および(4-11)

$$\Delta p_{ta}/\ell = \lambda_{s,t}\,\rho_0 u_{m,ta}^2\,\sigma_1/(2D) \quad \cdots(5-4)$$

$$\lambda_{s,t} = 0.3164/Re_{ta}^{1/4} \quad \cdots(5-5)$$

$$\sigma_1 = 1 + (21/64)A_1^2 \quad (A_1<1) \quad \cdots(5-6)$$

および運動量の式(2-29)を時間平均して得られる式

$$\tau_{w,ta} = (D/4)\,\Delta p_{ta}/\ell \quad \cdots(5-7)$$

を参照すれば，式(5-1)で $u_{m,ta}$ の値が，したがってまた $Re_{ta}=u_{m,ta}D/\nu$ の値が決まるので，これらを使って $\Delta p_{ta}/\ell$, $\tau_{w,ta}$ の値がまず求められる．

一方，特性数に対する定義式

$$\Phi_{t,1}=\rho_0\omega|u_{m,os,1}|/(|\Delta p_{os,1}|/l) \quad \cdots(5-8)$$

$$\Phi_{z,1}=(4/D)|\tau_{w,os,1}|/(|\Delta p_{os,1}|/l) \quad \cdots(5-9)$$

$$\alpha_{t,1}=\angle(\Delta p_{os,1}/l)-\angle u_{m,os,1} \quad \cdots(5-10)$$

$$\alpha_{z,1}=\angle(\Delta p_{os,1}/l)-\angle\tau_{w,os,1} \quad \cdots(5-11)$$

を利用して，式(5-8)，(5-9)から

$$\frac{|\Delta p_{os,1}|}{l}=\frac{\rho_0\omega|u_{m,os,1}|}{\Phi_{t,1}} \qquad \cdots(5\text{-}12)$$

$$|\tau_{w,os,1}|=\frac{D}{4}\frac{\Phi_{z,1}}{\Phi_{t,1}}\rho_0\omega|u_{m,os,1}| \qquad \cdots(5\text{-}13)$$

が，また式(5-10)，(5-11)から

$$\angle(\Delta p_{os,1}/l)=\alpha_{t,1}+\angle u_{m,os,1} \qquad \cdots(5\text{-}14)$$

$$\angle\tau_{w,os,1}=\alpha_{t,1}-\alpha_{z,1}+\angle u_{m,os,1} \qquad \cdots(5\text{-}15)$$

が得られる．式(5-12)~(5-15)において，$\Phi_{t,1}$，$\Phi_{z,1}$，$\alpha_{t,1}$，$\alpha_{z,1}$の値は前章の流動形態図から式(5-1)で定められた $\omega'=R^2\omega/\nu$ と Re_{ta} の値に対して読み取ることができるので，変動成分 $\Delta p_{os,1}/l$，$\tau_{w,os,1}$ は完全に決定できることになる．したがって，$\Delta p/l$ と τ_w を示す式(5-2)，(5-3)の値は，式(5-4)，(5-7)および式(5-12)~(5-15)の値を借りて決定することができる．

後の議論の便宜のために，$\angle u_{m,os,1}=0$ とおいて以上のことを整理すれば，つぎのような結果が得られる．すなわち式(5-1)は

$$u_m=u_{m,ta}+|u_{m,os,1}|\cos\omega t \qquad \cdots(5\text{-}16)$$

となり，式(5-2)，(5-3)はそれぞれ次式

$$\frac{\Delta p}{l}=\lambda_{s,t}\frac{\rho_0}{2D}u_{m,ta}{}^2\sigma_1+\frac{\rho_0\omega|u_{m,os,1}|}{\Phi_{t,1}}\cos(\omega t+\alpha_{t,1}) \qquad \cdots(5\text{-}17)$$

$$\tau_w=\lambda_{s,t}\frac{\rho_0}{8}u_{m,ta}{}^2\sigma_1+\frac{D}{4}\frac{\Phi_{z,1}}{\Phi_{t,1}}\rho_0\omega|u_{m,os,1}|\cos(\omega t+\alpha_{t,1}-\alpha_{z,1}) \qquad \cdots(5\text{-}18)$$

のように変形される．これらの式(5-17)，(5-18)を後で管摩擦係数の推定

に用いる．

前章で，擬定常領域と中間領域との境界を示す $\omega'/Re_{ta}^{3/4}$ の値を $(\omega'/Re_{ta}^{3/4})_g$ とし，$\sqrt{(\omega'/Re_{ta}^{3/4})_g}=0.145$，中間領域と慣性領域とのそれを $(\omega'/Re_{ta}^{3/4})_t$ で表わし，$\sqrt{(\omega'/Re_{ta}^{3/4})_t}=1.50$ と定めたが，慣性領域においては，圧力項は慣性項とほぼつり合うことから慣性項が調和変動すれば，圧力項も近似的に調和変動する．そのような場合には τ_w も調和変動するとみなすことができ，式(5-17)，(5-18)は十分な精度を持つといえよう．しかし擬定常領域においては，圧力項は粘性項とほぼつり合い，$\Delta p/l$，τ_w は $u_m^{7/4}$ に比例する．すなわち u_m が式(5-16)の形で変動するとき

$$\frac{\Delta p}{l}=\lambda_{q,t}\frac{\rho_0}{2D}u_m^2=\lambda_{s,t}\frac{\rho_0}{2D}u_{m,ta}^2\left\{\sigma_1+\left(\frac{7}{4}A_1-\frac{21}{512}A_1^3+\cdots\right)\cos\omega t+\left(\frac{21}{64}A_1^2+\cdots\right)\cos 2\omega t-\left(\frac{7}{512}A_1^3+\cdots\right)\cos 3\omega t+\cdots\right\} \quad \cdots(5\text{-}19)$$

$$\tau_w=\frac{D}{4}\frac{\Delta p}{l},\quad \lambda_{q,t}=0.3164/R_e^{1/4},\quad R_e=u_mD/\nu \quad \cdots(5\text{-}20)$$

となり，近似式(5-17)，(5-18)の値は式(5-19)，(5-20)のそれと比較した場合，A_1 の増加とともに誤差が大きくなる．したがって擬定常領域では式(5-17)，(5-18)の代りに式(5-19)，(5-20)を用いるほうがよい．
また，この擬定常領域では $\Delta p/l\propto\tau_w\propto u_m^{7/4}$ の関係が成立するが，この領域から $\Delta p/l\propto du_m/dt$ の関係の成立する慣性領域へと移行する間に中間領域が存在する．このことを考慮して式(5-17)，(5-18)を修正し，ω' が小さくなるとき擬定常の関係式(5-19)，(5-20)に漸近するようにした．その結果はつぎのとおりである．

$$\frac{\Delta p}{l}=\lambda_{s,t}\frac{\rho_0}{2D}u_{m,ta}^2\sigma_1+\frac{\rho_0\omega|u_{m,os,1}|}{\Phi_{t,1}}\left[\cos(\omega t+\alpha_{t,1})+B_1\cos(2\omega t+\alpha_{t,1})-B_2\cos(3\omega t+\alpha_{t,1})\right] \quad \cdots(5\text{-}21)$$

$$\tau_w=\frac{\lambda_{s,t}}{8}\rho_0u_{m,ta}^2\sigma_1+\frac{D}{4}\frac{\Phi_{z,1}}{\Phi_{t,1}}\rho_0\omega|u_{m,os,1}|\left[\cos(\omega t+\alpha_{t,1}-\alpha_{z,1})+B_1\cos(2\omega t+\alpha_{t,1}-\alpha_{z,1})-B_2\cos(3\omega t+\alpha_{t,1}-\alpha_{z,1})\right] \quad \cdots(5\text{-}22)$$

ここで

$$B_1=\frac{(21/64)A_1^2}{\{(7/4)A_1-(21/512)A_1^3\}} \qquad \cdots(5-23)$$

$$B_2=\frac{(7/512)A_1^3}{\{(7/4)A_1-(21/512)A_1^3\}} \qquad \cdots(5-24)$$

である.

なお 式(5-21),(5-22)において 二次,三次の高調波成分の位相をすべて基本波のそれに等しいとしたのは, $\alpha_{t,n}$, $\alpha_{z,n}$ の値は $\alpha_{t,1}$, $\alpha_{z,1}$ の値にほぼ等しいことを前章で確認しているためである。ここで σ_1 は ω' に関して変化しないと前に仮定したが, B_1, B_2 についても同様の仮定をした.

5・2・2 瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$

流体として 20℃, 760 mmHg の空気を例にとり, $D=0.0504\ m$, $A_1=0.4$, $Re_{ta}=57000$ とおき, 前章で示した特性数の値を用いて式(5-18)から計算した τ_w を一点鎖線で, 式(5-22)から計算したそれを実線で図5-1 に示す. 横軸は 1 周期を 24 等分した各瞬間を表わしており, $\omega t/(\pi/12)=0\sim12$ は減速域, 12~24 は 加速域を示している. この程度の速度振幅比では, 式(5-18)と(5-22)は比較的精度よく一致している. ω' が大きくなると, τ_w は u_m よりも位相が進み, 振幅は大きくなって, 負の値をとることがある. τ_w の負の値は, u_m と同一方向を向いていることを表わしている.

図5-2 には, 式(5-18)あるいは(5-22)と式(5-16)とを式(3-2)に代入して計算される $\lambda_u(t)$ が各瞬間にどのように変化するかを示した. 式(5-18)を用いた $\lambda_u(t)$ は ω' の小さなところ($\sqrt{\omega'}=4$, 10)で誤差が大きくなっている. 式(5-22)

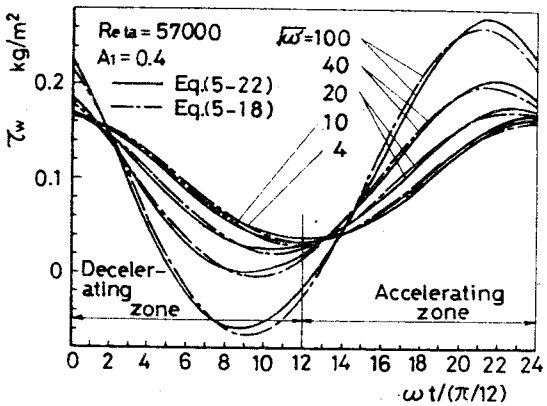


図5-1 壁面せん断応力 τ_w

を用いた $\lambda_u(t)$ は $\sqrt{\omega'}=4$ でほぼ $\lambda_{g,t}$ に一致し，減速域では $\lambda_u(t)<\lambda_{g,t}$，加速域では $\lambda_u(t)>\lambda_{g,t}$ の傾向がみられる．式(5-18),(5-22)のいずれを用いても ω' が大きくなるにつれ，τ_w が $\tau_{w,g}$ よりも位相が進むのに反して，減速域において $\lambda_u(t)<\lambda_{g,t}$ となる領域は加速域側へ移行し，時間的にずれてゆく．すなわち減速域，加速域のいずれにおいても，$\lambda_u(t)\gtrless\lambda_{g,t}$ となる瞬間が存在し，減速域では加速から減速に移る時間帯で $\lambda_u(t)>\lambda_{g,t}$，加速域では減速から加速に移る時間帯で $\lambda_u(t)<\lambda_{g,t}$ となる傾向がある．

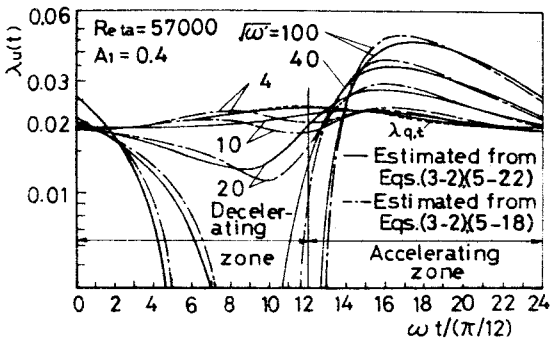


図5-2　瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$

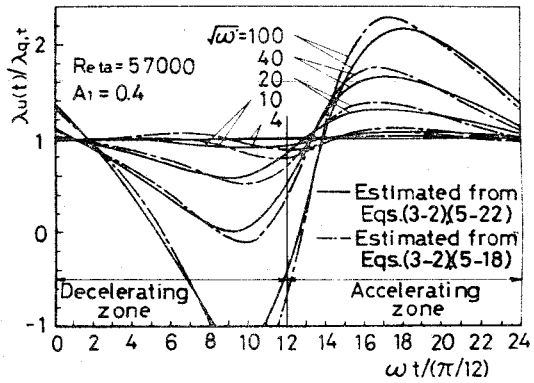


図5-3　瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$ と擬定常管摩擦係数 $\lambda_{g,t}$ との比

これを明確にするために，縦軸に $\lambda_u(t)/\lambda_{g,t}$ をとってみると図5-3のようになる．減速域で現われる $\lambda_u(t)/\lambda_{g,t}$ の最小値，加速域で現われる最大値を示す瞬間は，ω' が大きくなると時間的に遅れてゆくことがわかる．また，加速域の初期で $\lambda_u(t)<\lambda_{g,t}$，減速域の初期で $\lambda_u(t)>\lambda_{g,t}$ となる時間帯は ω' が大きくなるにつれて，図5-3から，それぞれ $\omega t/(\pi/12)=12\sim15$，$0\sim3$ となることが予想されるが，いまのところ明確な判断は下せない．

以上述べたように，基本波のみを採用した式(5-18)は A_1 が小さい場合には ω' に関するすべての領域で近似的に成立するものであるが，A_1 の値が大

きい場合，ω'の値が擬定常領域に近づくにつれて必然的に誤差は大きくなってくる．このような場合には式(5-22)を採用すれば精度はよくなる．ここでω'の値が慣性領域へ近づいた場合に，A_1のある一定値に対して式(5-18)，(5-22)の間にどの程度の相違があるかを評価してみよう．式(5-22)は，基本波のみを採用した式(5-18)に対して三次の高調波成分まで考慮してこれに付け加えた形となっている．式(5-22)においては $B_1 \gg B_2$ となるので，実質上B_1の値が，高調波成分が基本波に対して占める割合を示しているとみてよい．そこでこのB_1の値によって両者の相違を判定すれば，$A_1 \leqq 0.25$ では5%以内，$A_1 = 0.8$ では15%となる．これらの相違が$\lambda_u(t)/\lambda_{g,t}$にどのように現われるかを示したものが図5-4である．

つぎに，流動形態が顕著に変化する中間領域に相当するω'の値を用いて，$\sqrt{\omega'} = 20$とおき，$A_1 = 0.4$とし，Re_{ta}をパラメータとして，$\lambda_u(t)/\lambda_{g,t}$を推定すれば図5-5のようになる．$Re_{ta}$の値としては，$Re_{ta} = 15000$, 30000, 60000, 120000を用いたが，これらは$\sqrt{\omega'/Re_{ta}^{3/4}}$に換算すると$\sqrt{\omega'/Re_{ta}^{3/4}} = 0.249 \sim 0.543$に相当し，中間領域($0.145 < \sqrt{\omega'/Re_{ta}^{3/4}} < 1.50$)に入っていることがわかる．また$Re_{ta}$が大きくなると，$\lambda_u(t)/\lambda_{g,t} = 1$となる擬定常状態へと近づいてゆくこともわかる．このような中間領域における$\lambda_u(t)$の値は，前述したように，加速域においては初期の時間帯

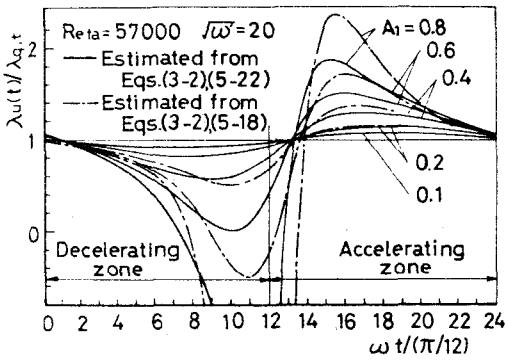


図5-4　瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$ と擬定常管摩擦係数 $\lambda_{g,t}$ との比

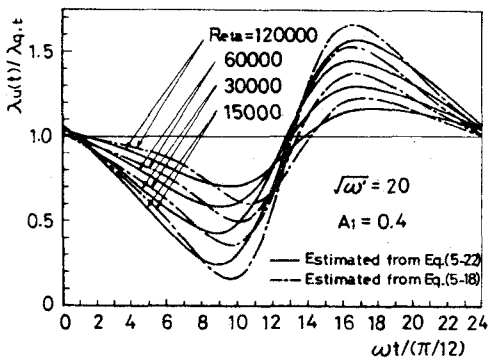


図5-5　$\lambda_u(t)/\lambda_{g,t}$ の時間平均レイノルズ数依存性

($\lambda_{u(t)} < \lambda_{g,t}$) を除き，大部分の時間帯で $\lambda_{u(t)} > \lambda_{g,t}$ ，減速域においては初期の時間帯($\lambda_{u(t)} > \lambda_{g,t}$) を除き，大部分の時間帯で $\lambda_{u(t)} < \lambda_{g,t}$ となっている．

5・2・3　時間平均管摩擦係数　$\lambda_{u,ta}$

まず　擬定常領域における $\lambda_{u,ta}$ を計算する．擬定常領域において成立する関係式　$\tau_w = \lambda_{g,t} \rho_0 u_m^2 / 8$　および式(5-16)を式(3-3)に代入して変形し，簡単のために $\lambda_{u,ta} / \lambda_{s,t} = \zeta_1$ とおいて整理すれば次式が得られる．

$$\zeta_1 = \frac{\lambda_{u,ta}}{\lambda_{s,t}} = \frac{1}{T}\int_0^T (1 + A_1 \cos \omega t)^{11/4} dt$$
$$= 1 + \frac{77}{64} A_1^2 - \frac{231}{16\,384} A_1^4 + \cdots \qquad \cdots (5\text{-}25)$$

上式は誤差 1.2％以内で

$$\zeta_1 = 1 + \frac{77}{64} A_1^2 \qquad \cdots (5\text{-}26)$$

とおけるので，以下擬定常領域においてはこの表示を採用する．

つぎに　すべての周波数領域における ζ_1 を推定してみよう．式(3-3)に τ_w の式(5-18)あるいは(5-22)を代入して計算するが，いずれの式を用いても三角関数の直交性から　$\int_0^T \tau_w u_m \, dt/T$　の値は等しくなるので，次式が得られる．

$$\zeta_1 = \sigma_1 + \frac{\Phi_{z,1}}{\Phi_{t,1}} \frac{4\omega'}{\lambda_{st} R_{e\,ta}} A_1^2 \cos(\alpha_{t,1} - \alpha_{z,1}) \qquad \cdots (5\text{-}27)$$

また運動量の式(2-29)から得られる関係式

$$\int_0^T \tau_w u_m dt/T = (D/4) \int_0^T (\Delta p/l) u_m dt/T \qquad \cdots (5\text{-}28)$$

の $\Delta P/\ell$ に式(5-17)あるいは式(5-21)を代入して，上と同様の計算を行えば ζ_1 はつぎのようにも表わされる．

$$\zeta_1=\sigma_1+\frac{4\omega'}{\Phi_{t,1}}\frac{A_1^2}{\lambda_{s,t}Re_{ta}}\cos\alpha_{t,1} \qquad \cdots(5\text{-}29)$$

$\omega'\to 0$ のとき，式(5-27)は

$$\zeta_1=\sigma_1+\frac{7}{8}A_1^2=1+\frac{77}{64}A_1^2 \qquad \cdots(5\text{-}30)$$

となり，擬定常領域で求めた式(5-26)に一致する．式(5-27)は式(5-6)を用いることにより次式

$$\zeta_1=1+\left[\frac{21}{64}+\frac{\Phi_{z,1}}{\Phi_{t,1}}\frac{4\omega'}{\lambda_{s,t}Re_{ta}}\cos(\alpha_{t,1}-\alpha_{z,1})\right]A_1^2 \qquad (5\text{-}31)$$

のように表わせる．

特性数 $\Phi_{t,1}$，$\Phi_{z,1}$，$\alpha_{t,1}$，$\alpha_{z,1}$ の値を前章で示した流動形態図から読み取り，上式(5-31)を用いて計算した ζ_1 の値を推定値と呼ぶことにする．振幅比 A_1 をパラメータとして計算した ζ_1 の推定値を図5-6に示す．$\omega'/Re_{ta}^{3/4}$ が大きくなると ζ_1 は徐々に増加する．なお $\sqrt{\omega'/Re_{ta}^{3/4}}$ の値が約2以上になると流動形態図からの読み取り誤差が大きくなって，正確

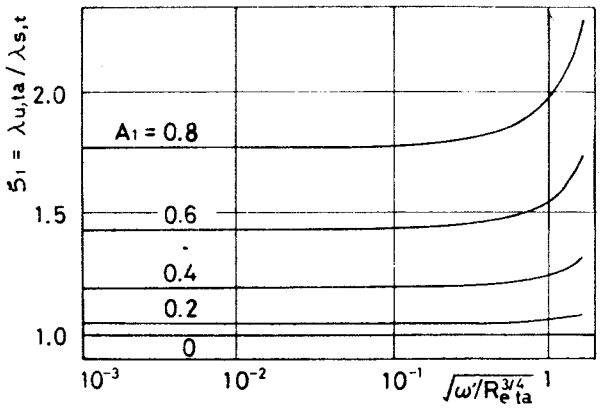


図5-6　時間平均管摩擦係数と定常流管摩擦係数との比 $\lambda_{u,ta}/\lambda_{s,t}$ の推定値

な値は推定できない.

5・3　実験結果との比較

実験については前章とまったく同一であり，データ処理にあたっては前章の実験で得られた測定値を利用した.

5・3・1　瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$

圧力差 Δp の測定値の1周期あたり12個の値と，u_m の測定波形を図式微分して求めた加速度 du_m/dt の1周期あたり12個の値とを運動量の式(2-29)に代入し，それぞれの瞬間での壁面せん断応力 τ_w を求め，u_m の値とともに式(3-2)を用いて $\lambda_u(t)$ を求めた．これを測定値と呼ぶことにする．また圧力勾配 $\Delta p/\ell$ の1周期あたり12個の測定値および u_m の1周期あたり12個の測定値をすべてフーリエ展開近似し，u_m のフーリエ展開近似式を微分して加速度 du_m/dt を求め，これらを式(2-29)に代入して τ_w を，さらに以上の諸式を式(3-2)に代入して $\lambda_u(t)$ を示す式を決定し，これによって数値計算した値をフーリエ展開近似値と呼ぶことにする.

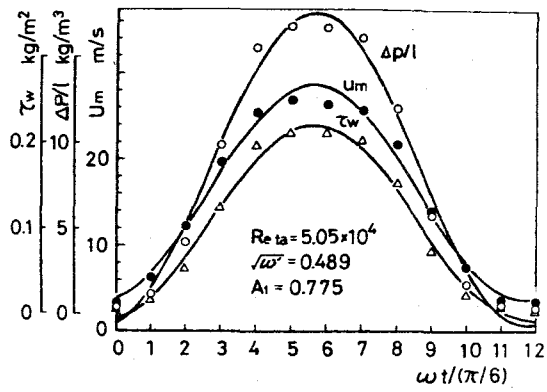
本実験では，脈動に基づく $\Delta p/\ell$，u_m，τ_w の変動成分が，できるだけ正弦波に近づくよう留意した．そこで，以下 $\Delta p/\ell$，u_m，τ_w のフーリエ展開近似値としては基本波のみを採用し，これを $Re_{ta} \fallingdotseq 5.7\times10^4$ の場合の $\Delta p/\ell$，u_m，τ_w の測定値と比較して，高調波成分が十分小さいことを確かめ，つぎに基本波のみを採用した $\lambda_u(t)$ のフーリエ展開近似値について，その測定値および推定値と比較してみる．この結果を図5-7～5-12に示す．図中推定値を表わす一点鎖線および実線はそれぞれ式(5-18)，(5-22)を用いて計算したものである.

図5-7は $\sqrt{\omega'} = 0.489$ ($\sqrt{\omega'/Re_{ta}^{3/4}} = 0.00843$)，すなわち擬定常領域における u_m，$\Delta p/\ell$，τ_w の値を，横軸に1周期を12等分した各瞬間をとって示したものである．以下 u_m を基準にして，これと比較して論ずることにする．基本波のみをとった u_m のフーリエ展開近似値は，速度の大きい部分を除けば測定値を精度よく表わしている．ω' がこのように非常に小さい場合には $\Delta p/\ell$，τ_w は u_m と同位相で変動していることがわかる.

図5-8(a)に示した $\lambda_u(t)$ の測定値は，各瞬間のレイノルズ数 $Re = u_m D/\nu$ から決まる擬定常値 $\lambda_{q,t}$ に等しく，擬定常状態を明確に示している.

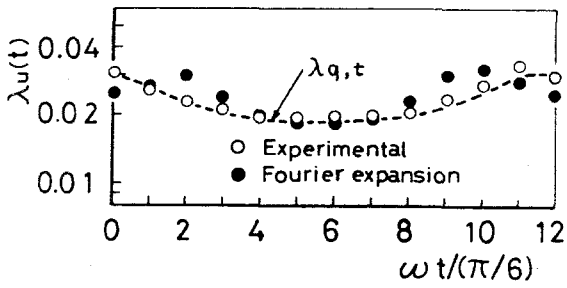
この領域では $\Delta p/\ell \propto \tau_w \propto u_m^{7/4}$ の関係があるため，基本波のみを用いたフーリエ展開近似値は，$A_1 = 0.775$ となるような大きな速度振幅比では，かなりの誤差が現われる．図5－8(b)に擬定常領域の中で中間領域よりのデータ（$\sqrt{\omega'/Re_{ta}^{3/4}} = 0.0698$）を示したが，$\lambda_u(t)$ は擬定常的に変化している．

図5－9は，$\sqrt{\omega'/Re_{ta}^{3/4}} = 0.206$ で，中間領域の中でも擬定常領域よりの値をとる場合のデータを示したものである．u_m の位相に対して，$\Delta p/\ell$ の位相はわずかに進んでいるが，τ_w はほぼ同位相で変動している．図5－10(a)において式(5-18)，(5-22)を用いて計算した推定値は，A_1 が大きいために減速後期から加速初期にかけて負の値をとり，測定値との誤差が大きくなっているが，加速域の大部分で $\lambda_u(t) > \lambda_{q,t}$，減速域の大部分で $\lambda_u(t) < \lambda_{q,t}$ となる傾向がわずかにみられる．図5－10(b)にほぼ同じ ω' の値を持つ水の場合のデータを示した．擬定常値

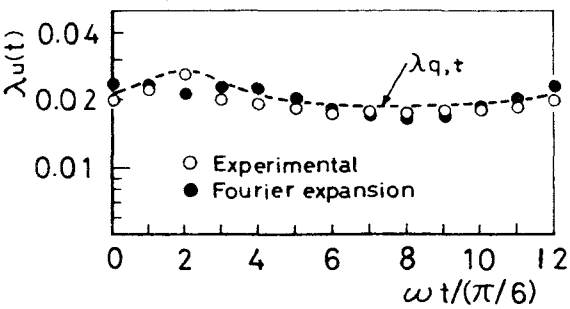


——：フーリエ展開近似式（$n = 1$）

図5-7　擬定常領域における $\Delta p/\ell$, u_m, τ_w の値



(a) 空気の場合（$Re_{ta} = 5.05 \times 10^4$, $\sqrt{\omega'} = 0.489$, $A_1 = 0.775$）

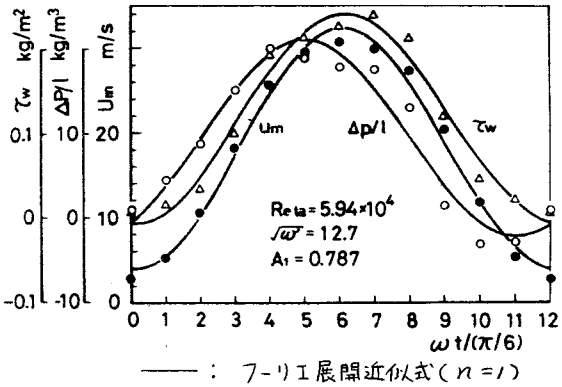


(b) 水の場合（$Re_{ta} = 5.84 \times 10^4$, $\sqrt{\omega'} = 4.28$, $A_1 = 0.756$）

図5-8　擬定常領域における瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$

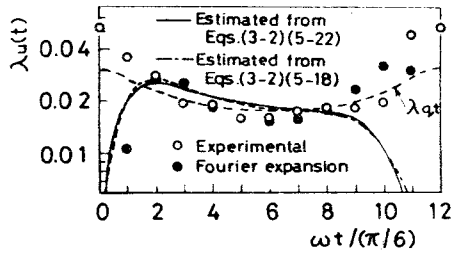
$\lambda_{g,t}$ よりは全体としてわずかに大きな値をとっているものの加速，減速域における上記の傾向がほぼうかがえる．

図5-11には，中間領域の中で，慣性領域に近いところのデータを示してある．$\Delta p/l$ は u_m より位相が90°近く，τ_w は45°近く進んでいることがわかる．u_m, $\Delta p/l$ のフーリエ展開近似値は測定値を精度よく表わしているが，τ_w には大きなばらつきがみられる．流動形態図をみると，この ω' に対しては慣性項絶対値が圧力項絶対値の約88%となっており，ほぼ圧力項と慣性項とがつりあっているといえる．このため，u_m, $\Delta p/l$ の測定値を用いて式(2-29)から τ_w を求める場合，τ_w が非常に大きな数値間の差として与えられること，および図式微分により du_m/dt を求める際の誤差が大きく影響することなどから，その値のばらつきが大きくなり，図5-12(a)に示した $\lambda_u(t)$ もばらつきが大きくなる．前節で述べた加速，減速のいずれの領域でも

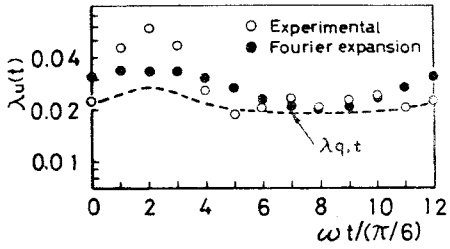


——：フーリエ展開近似式（$n=1$）

図5-9　擬定常領域と中間領域の境界近傍における $\Delta p/l$, u_m, τ_w の値



(a) 空気の場合（$Re_{ta} = 5.94\times10^4$, $\sqrt{\omega'} = 12.7$, $A_1 = 0.787$）

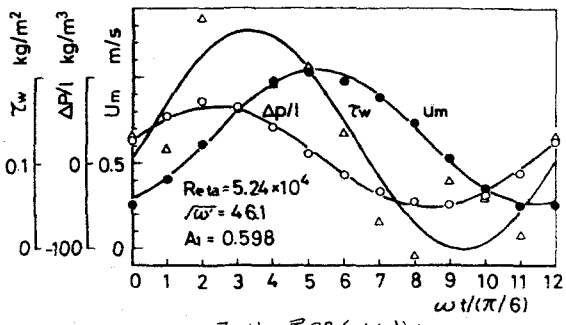


(b) 水の場合（$Re_{ta} = 6.06\times10^4$, $\sqrt{\omega'} = 11.0$, $A_1 = 0.531$）

図5-10　擬定常領域と中間領域の境界近傍における瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$

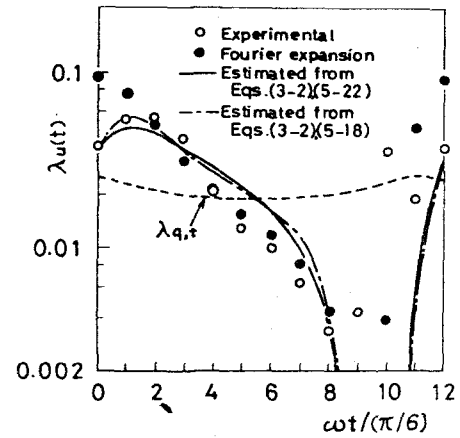
$\lambda_u(t)$ ≒ $\lambda_{g,t}$ となる傾向が，ω' がさらに大きくなった図5-12(b)からも明らかである．また測定値と推定値との一致は良好である．しかしながら，式(5-18)，(5-22)のいずれが測定値を精度よく表わしているかの判断をこれらの図から下すことは困難である．この理由は上記の τ_w を求める際の誤差が慣性領域へ近づくにつれて大きくなることから明らかであり，この意味で慣性領域におけるデータは信頼性に欠けるものとして除いた．

図5-13，5-14に，中間領域に相当する U_m ならびに $\Delta p/l$ の測定値と，これらを用いて式(2-29)から計算した τ_w の値および式(3-2)から求めた $\lambda_u(t)$ の値を $\sqrt{\omega'} = 22$ の付近で Re_{ta} が大きく変わった場合について示した．図5-13では，U_m はほぼ基本波で近似できるが，$\Delta p/l$，τ_w はいくぶんずれている．しかしながら $\lambda_u(t)$ に着目すれば，測定値は基本波のみを用いたフーリエ展開近似値で比較

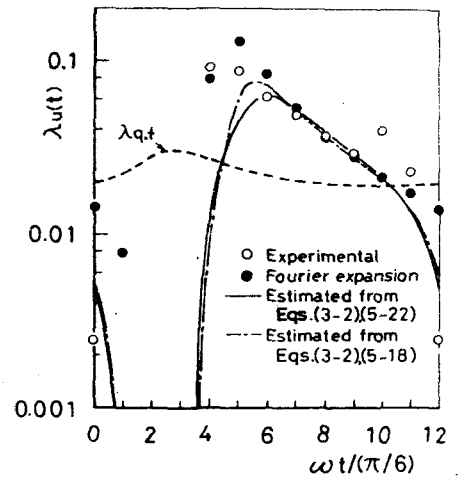


—— ：フーリエ展開近似式 ($n=1$)

図5-11　中間領域における $\Delta p/l$，U_m，τ_w の値



(a) 水の場合 ($Re_{ta} = 5.24\times10^4$, $\sqrt{\omega'} = 46.1$, $A_1 = 0.598$)



(b) 水の場合 ($Re_{ta} = 5.30\times10^4$, $\sqrt{\omega'} = 72.8$, $A_1 = 0.675$)

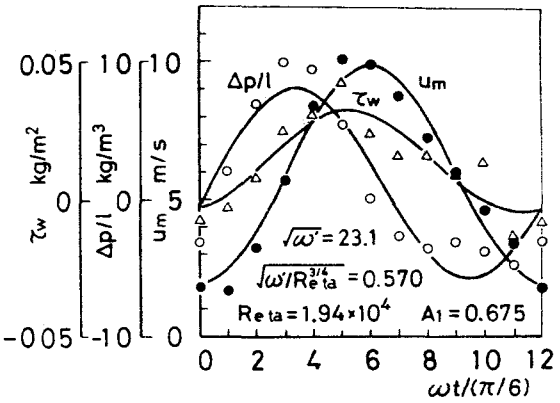
図5-12　中間領域における瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$

的精度よく表わされ，また推定値でも精度よく表わされることがわかる．また加速域，減速域に関して前述した $\lambda_u(t)$ と $\lambda_{g,t}$ との大小関係の傾向が顕著に現われている．

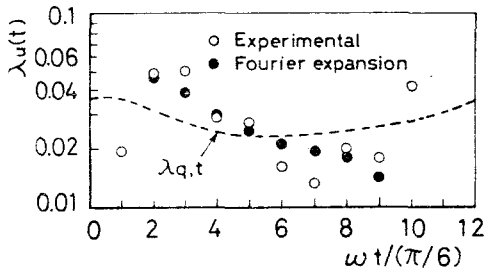
図 5-14 は，R_{eta} の値が図 5-13 に示したそれの約5倍になった場合の測定値を示している．u_m，$\Delta p/\ell$，τ_w は基本波でよく近似され，$\lambda_u(t)$ に関しては，上記傾向がこの場合にも顕著に現われている．

5・3・2 時間平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta}$

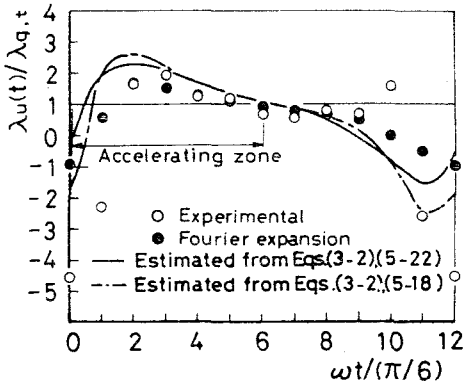
$\Delta p/\ell$ の測定値と u_m の測定値のそれぞれ1周期あたり12個の値を採用して式(2-29)より τ_w を求め，$\tau_w u_m$ を計算し，図式積分で $\int_0^T \tau_w u_m dt/T$ を求める．この値を用いて計算した $\lambda_{u,ta}$ を測定値と呼ぶことにする．また u_m および τ_w のフーリエ展開近似式を求め，基本波のみをとって次式



(a) $\Delta p/\ell$，u_m，τ_w の値（実線は基本波のみを採用したフーリエ展開近似式である）



(b) 瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$



(c) $\lambda_u(t)/\lambda_{g,t}$ の値

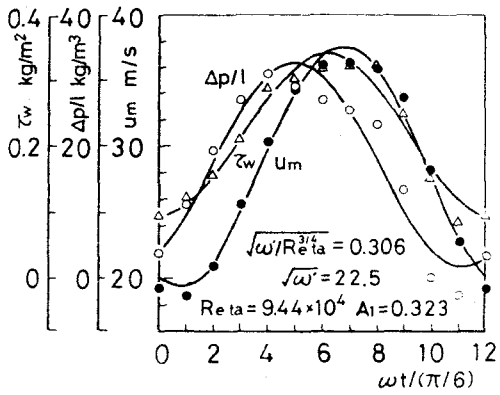
図 5-13 中間領域における瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$

$$\int_0^T \tau_w U_m dt / T = \tau_{w,ta} U_{m,ta} + (1/2)|\tau_{w,os,1}||U_{m,os,1}| \times \cos(\angle\tau_{w,os,1} - \angle U_{m,os,1}) \quad \cdots (5\text{-}32)$$

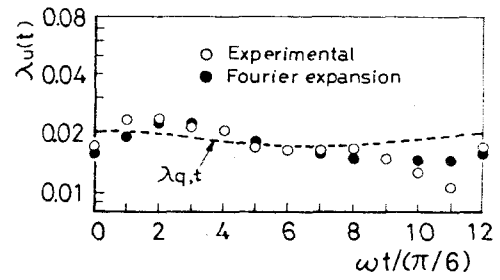
から計算した値を式(3-3)に代入して求めた $\lambda_{u,ta}$ をフーリエ展開近似値と呼ぶことにする.

図5-15は ζ_1 の値を $Re_{ta} \fallingdotseq 5.7\times10^4$ の場合について, ω' に対して示してある. 測定値およびフーリエ展開近似値は, $A_1 \fallingdotseq 0.8$ に統一して行った空気の場合の実験について示した. 実線は前節で示した方法を用いて, A_1 をパラメータとして求めた推定値である. 測定値のばらつきが大きいのは, 厳密には $0.743 < A_1 < 0.834$ であることなどに起因している. しかしながら測定値はフーリエ展開近似値および推定値とよく一致している.

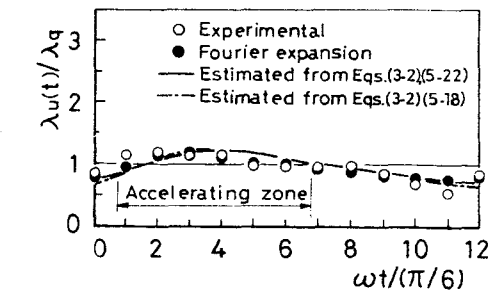
ところで, 空気の場合には $A_1 \fallingdotseq 0.8$ であるため, A_1 の影響を消去でき, ζ_1 に及ぼす無次元角周波数 ω' の影響のみを直接的に示すこ



(a) $\Delta p/l$, U_m, τ_w の値(実線は基本波のみを採用したフーリエ展開近似式である)



(b) 瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$



(c) $\lambda_u(t)/\lambda_{q,t}$ の値

図5-14 中間領域における瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$

とができるが，水の場合には $A_1 = 0.2 \sim 0.8$ の範囲にわたっているため，ε_1 と ω' との関係を明白に示せない．したがって，式(5-31)の右辺第二項に着目し，ε_1 の測定値から σ_1 の測定値を引いたものを A_1^2 で除した値と

$$12.64 \frac{\overline{w}_{z,1}}{\overline{w}_{t,1}} \frac{\omega'}{Re_{ta}^{3/4}} \cos(\alpha_{t,1} - \alpha_{z,1})$$

の値とを $Re_{ta} \fallingdotseq 5.7 \times 10^4$ の場合に対して比較してみた．その結果を図5-16に示す．ω' が大きくなると測定値には多小のばらつきがあるものの両者の一致は良好である．また図5-15，5-16から ε_1 は ω'，A_1 の増加につれて増加することが明らかである．

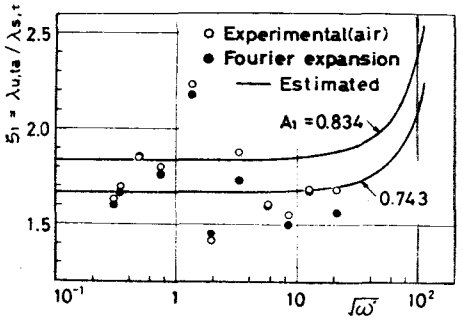


図5-15 時間平均管摩擦係数
（空気の場合，$Re_{ta} \fallingdotseq 5.7 \times 10^4$）

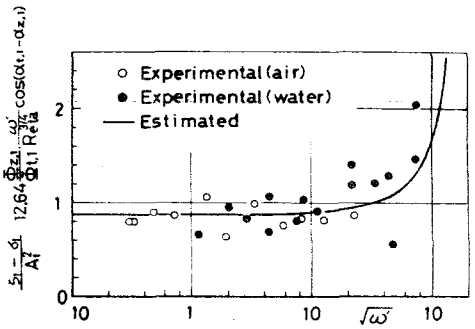


図5-16 $\frac{\varepsilon_1 - \sigma_1}{A_1^2}$，$12.64 \frac{\overline{w}_{z,1}}{\overline{w}_{t,1}} \frac{\omega'}{Re_{ta}^{3/4}} \cos(\alpha_{t,1} - \alpha_{z,1})$ の値
（$Re_{ta} \fallingdotseq 5.7 \times 10^4$）

本実験で得られた ε_1 のすべての測定値を推定値と比較して図5-17に示した．多少のばらつきがあるものの，測定値は推定値で精度よく表わされている．すなわち時間平均レイノルズ数 Re_{ta}，無次元角周波数 ω' ならびに速度振幅比 A_1 がわかれば1周期にわたる摩擦損失は容易に求まることになる．

Baird ら[45]は $Re_{ta} = (1 \sim 2) \times 10^5$，$\sqrt{\omega} = 44 \sim 57$ という狭い範囲の測定から求めた時間平均摩擦損失が，τ_w に擬定常表示を用いた計算結果と一致することを確かめ，上記の範囲までは擬定常状態が成立する

ことを報告している、いま上記 Re_{ta} と ω' の値を組合せて，$\sqrt{\omega'/Re_{ta}^{3/4}}$ の最大値を計算してみると約 0.6 となる．したがって，ここでの解釈に従えば，少なくとも $\sqrt{\omega'/Re_{ta}^{3/4}} \leqq 0.6$ では擬定常状態が成立することになるが，これは図5-17からみて本実験結果ともほぼ一致している．

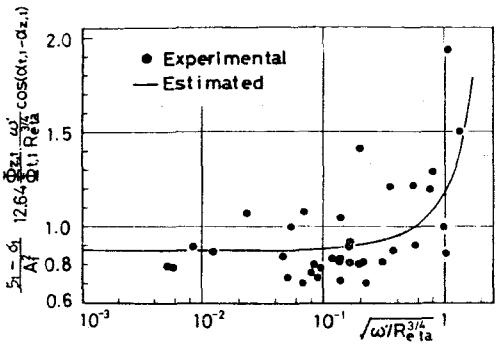
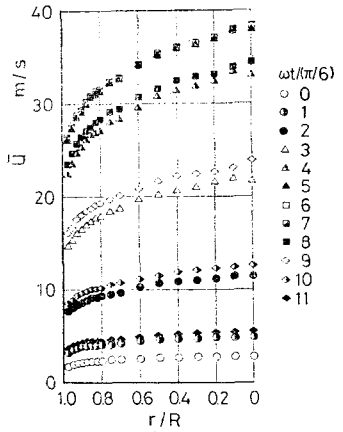


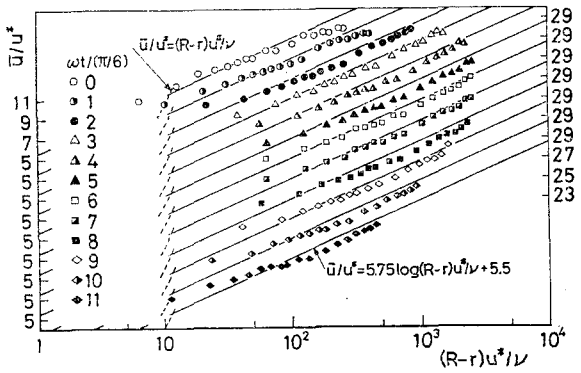
図5-17 $\frac{\tau_1-\sigma_1}{A_1^2}$，$12.64\frac{\overline{uz,1}}{\overline{ut,1}}\frac{\omega'}{Re_{ta}^{3/4}}\cos(\alpha_{t,1}-\alpha_{z,1})$ の値

5・4 管軸方向速度成分 $\bar{u}$ の横断面分布と，瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$ の加速域，減速域における様相との関係

図5-18 ～ 5-20 に $\bar{u}$ の分布および対数速度分布を示す．

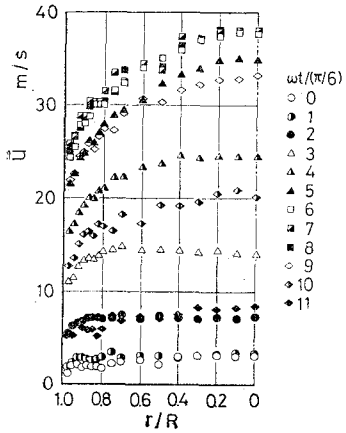


（a） 管横断面上脈動速度分布

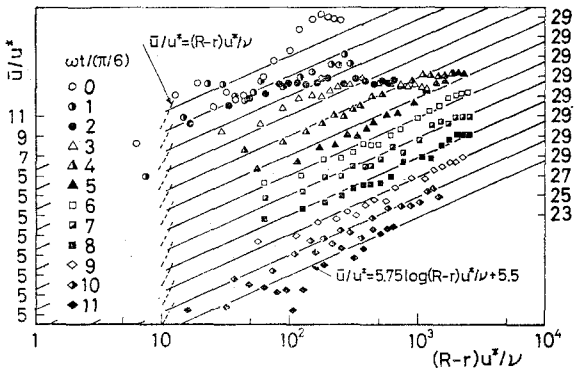


（b） 対数速度分布

図5-18 擬定常領域における測定例（$\sqrt{\omega'/R_{eta}{}^{3/4}}=0.012\,0$，$f=0.002\,17$ Hz）

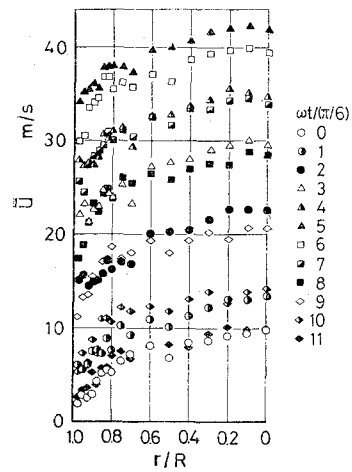


（a） 管横断面上脈動速度分布

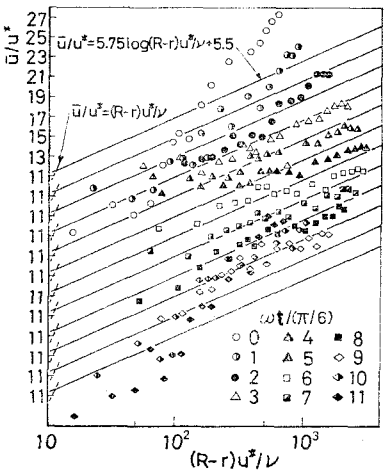


（b） 対数速度分布

図5-19　中間領域における測定例（$\sqrt{\omega'/R_{eta}^{3/4}}=0.359$, $f=2.079$ Hz）



（a） 管横断面上脈動速度分布



（b） 対数速度分布

図5-20　慣性領域における測定例（$\sqrt{\omega'/R_{eta}^{3/4}}=1.71$, $f=48.0$ Hz）

また加速域，減速域を明らかにするために u_m の1周期にわたる変化をまとめて図5-21に示した．各測定例の加速域はほぼ $\omega t/(\pi/6)=0\sim6$，減速域は $6\sim12$ となる．いずれも空気の場合のデータである．各々のデータにおいて，Re_{ta}，A_1 をほぼ一定にし，周波数を大きく変えてあるが，これらはそれぞれ擬定常領域，中間領域および慣性領域に対応している．

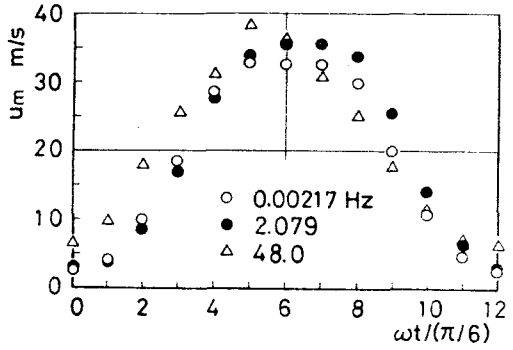


図5-21　管横断面平均速度 u_m

図5-18～5-20において，摩擦速度 u^* はすべて各瞬間の u_m から関係式 $u^*=u_m\sqrt{\lambda_{g,t}/8}$ を用いて計算したものであり，τ_w の測定値から決定した値ではないことに注意されたい．図5-18に示すように，0.00217Hzの測定値は対数速度分布に非常によく適合し，擬定常状態が成立していることをはっきりと示している．

図5-19の2.079 Hzになると測定値の分布は，$\omega t/(\pi/6)\fallingdotseq0\sim6$ の加速域では直線で示される擬定常分布よりもフラット（ここでフラットとは，各瞬間の測定値を直線でなめらかに結んだとき，その勾配が図に示した値5.75よりも小さな場合をフラットな分布，大きな場合をシャープな分布と呼ぶことにする．）になり，$\omega t/(\pi/6)\fallingdotseq6\sim12$ の減速域ではシャープになる傾向が現われ始めており，図5-20の48.0 Hzになると，この傾向はより顕著になって，位相遅れを伴うことがわかる．すなわち加速域においては，初期の時間帯でシャープな分布をしているが，それが急激にフラットな分布に変わっている．また減速域では，初期の時間帯でフラットであるが，急激にシャープな分布に変わる．

ところで，測定値を整理するに際して u^* の値として擬定常状態で成立する関係式 $u^*=u_m\sqrt{\lambda_{g,t}/8}$ から計算される値を用いているために，これらの図から各瞬間の τ_w を定量的に求めることはできない．しかしながら各瞬間の τ_w と擬定常値 $\tau_{w,g,t}$ との大小関係を定性的に判断することは可能で

である．すなわち直線で示される擬定常対数速度分布よりもフラットになることは，壁面せん断応力 τ_w の値が擬定常壁面せん断応力 $\tau_{w,g,t}$ よりも大きくなることを，またシャープになることは小さくなることを意味している．このことと，定義式から導かれる関係 $\tau_w/\tau_{w,g,t} = \lambda_u(t)/\lambda_{g,t}$ とをあわせて考えることにより，加速域においては初期の時間帯には $\lambda_u(t) < \lambda_{g,t}$ であるが，後の大部分の時間帯では $\lambda_u(t) > \lambda_{g,t}$ となり，減速域では，初期の時間帯で $\lambda_u(t) > \lambda_{g,t}$，後の大部分の時間帯では $\lambda_u(t) < \lambda_{g,t}$ となることが定性的に導かれる．このことは前節で導びいた結論とも一致する．

5·5 擬定常領域，中間領域および慣性領域の境界に関する考察

5·5·1 擬定常領域と中間領域との境界 $(\omega'/Re_{ta}^{3/4})_g$

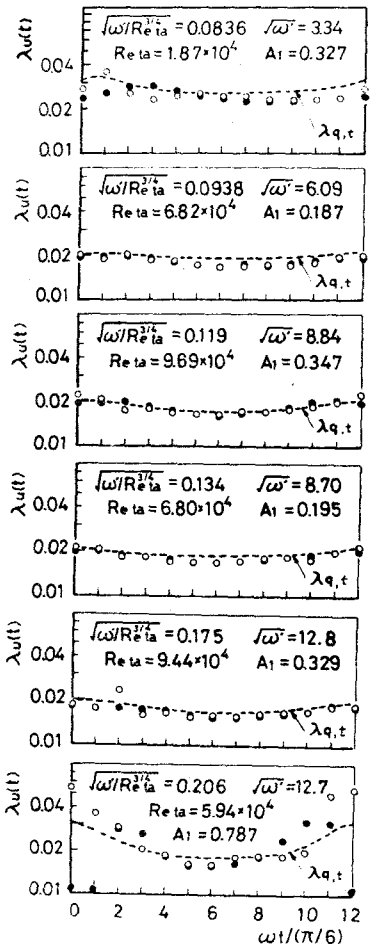
前章で擬定常領域と中間領域との境界を $\overline{z}_{z,1} = 0.95$ となる $\omega'/Re_{ta}^{3/4}$ の値 $\sqrt{(\omega'/Re_{ta}^{3/4})_g} = 0.145$ で表わすことを提案した．ここでは，この境界値が妥当であるかどうかを，$\lambda_u(t)$ が $\lambda_{g,t}$ でどの程度忠実に近似できるかを規範にして調べてみよう．$\sqrt{\omega'/Re_{ta}^{3/4}}$ の値が，上記境界値の近傍にくるような $\lambda_u(t)$ の測定値を図5-22に示す．各々のデータの A_1 の値は異なっていること，および A_1 の値が非常に小さくなると ω'，Re_{ta} の影響が顕著に現われなくなることに注意しなければならないが，図5-22からわかるように，広範囲の A_1 に対して $\sqrt{\omega'/Re_{ta}^{3/4}} = 0.145$ の近傍までほぼ擬定常状態が成立しているといえる．したがって $\overline{z}_{z,1} = 0.95$ となる $\sqrt{\omega'/Re_{ta}^{3/4}}$ の値 0.145 を採用するのが妥当であるということになる．

5·5·2 中間領域と慣性領域との境界 $(\omega'/Re_{ta}^{3/4})_t$

慣性領域では，圧力項と慣性項とがほぼつり合うため，式(2-29)から，変動成分についてのつり合い関係は次式で近似される．

$$(\Delta p/\ell) - (\Delta p_{ta}/\ell) \fallingdotseq \rho_0 \, du_m/dt \qquad \cdots(5\text{-}33)$$

この関係を，第4章で定めた境界値 $\sqrt{(\omega'/Re_{ta}^{3/4})_t} = 1.50$ 以上のデータが満足するかどうかを調べてみる．



○：測定値　　●：フーリエ展開値

図5-22　擬定常領域と中間領域との境界近傍における瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$

式(5-33)を $\rho_0 u_m^2/(2D)$ で除することによって無次元化しておく．縦軸に $2D(\Delta p/\ell - \Delta p_{ta}/\ell)/(\rho_0 u_m^2)$，横軸に $2D(du_m/dt)/u_m^2$ をとって測定値をプロットすれば図5-23のようになり，$\sqrt{\omega'/R_e^{3/4}_{ta}} = 1.85$ 以上のデータの勾配はほぼ1を示し，式(5-33)の関係の成立を立証している．したがって，$\overline{\gamma}_{t,1} = 0.95$ となるときの $\sqrt{\omega'/R_e^{3/4}_{ta}}$ の値1.50をもって中間領域と慣性領域の境界を定めることで妥当性が成立することになる．

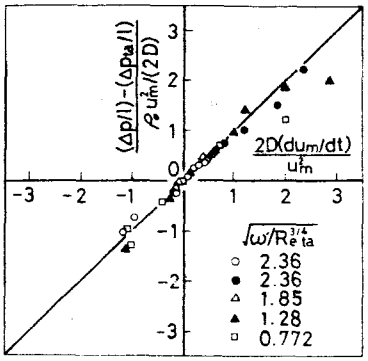


図5-23　中間領域と慣性領域との境界近傍における圧力項と慣性項との関係

5・5・3　三つの領域に関する従来の研究との比較

Brown ら[47]は定常実験で求められている乱流構造に関するデータを用いて，ω' に関して，擬定常状態が成立する非常に低い周波数領域，中間周波数領域 および 乱流構造が時間的に変化しない非常に高い周波数領域の3領域に分類し，それぞれの境界を

$$\omega_g' = 0.014\, Re_{ta}^{0.54} \qquad \cdots(5-34)$$

$$\omega_t' = 0.00025\, Re_{ta}^{1.6} \qquad \cdots(5-35)$$

で表わした．Funk ら[48]は single boundary layer model を適用して attenuation factor の議論から

$$\omega_g' = 0.00105\, Re_{ta}^{1.5} \qquad \cdots(5-36)$$

を求めた．また Baird ら[45]は Brown ら[47]の結果も参照して

$$\omega_g' = 0.025\, Re_{ta} \qquad \cdots(5-37)$$

とすることを提案した．また近江ら[49]はうず動粘性係数が擬定常的に変化するとした u^* 変化モデルを用いて脈動速度分布を計算し，脈動速度分布と擬定常速度分布との絶対誤差が1%以内，両者の位相差を5°以内とする規範を用いて ω_g' を Re_{ta} の関数として求めた．

本実験から求めた $\sqrt{(\omega'/Re_{ta}^{3/4})_g}$, $\sqrt{(\omega'/Re_{ta}^{3/4})_t}$ の値を ω_g', ω_t' の形に書き直せば，それぞれ

$$\omega_g' = 0.0210\, Re_{ta}^{3/4} \quad (\overline{\omega}_{z,1} = 0.95) \qquad \cdots(5-38)$$

$$\omega_t' = 2.25\, Re_{ta}^{3/4} \quad (\overline{\omega}_{t,1} = 0.95) \qquad \cdots(5-39)$$

となる．なお式(5-38),(5-39)は $\lambda_{s,t}$ に Blasius の式が適用できることを前提としている関係上，$Re_{ta} \leqq 10^5$ で成立する式であるが，これをさらに広い領域まで拡張すれば，式(5-38),(5-39)はそれぞれ

$$\omega_g' = 0.0665\, Re_{ta} \lambda_{s,t} \qquad \cdots(5-40)$$

$$\omega_t' = 7.11\, Re_{ta} \lambda_{s,t} \qquad \cdots(5-41)$$

と表わされる．ここで $\lambda_{s,t}$ は

$$1/\sqrt{\lambda_{s,t}} = 2.0 \log_{10}(Re_{ta}\sqrt{\lambda_{s,t}}) - 0.8$$

を用いて計算するものとする．

以上の諸式を図示すれば図5-24のようになる．Brown ら[47]が定めた二つの境界と，ここで定めた境界とはある程度類似している．しかしながら Funk ら[48]，Baird ら[45]の定めた ω_g' は，実は中間領域

と慣性領域との境界を表わしており，したがって ω'_t に相当するものといえる．

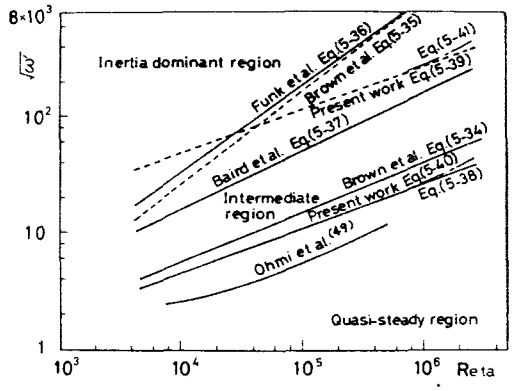


図5-24　擬定常領域，中間領域および慣性領域の各境界

5·6　結　言

本章で得られた主な結果はつぎのとおりである．

(1) 瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$，時間平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta}$ は無次元数 $\omega'/Re_{ta}^{3/4}$ の関数として系統的に表わされる．

(2) $\lambda_u(t)$，$\lambda_{u,ta}$ の推定値は測定値を精度よく表わせる．

(3) $\lambda_u(t)$ は擬定常領域では擬定常管摩擦係数 $\lambda_{g,t}$ にほぼ一致し，中間領域になると加速域では $\lambda_u(t) > \lambda_{g,t}$，減速域では $\lambda_u(t) < \lambda_{g,t}$ となる傾向が現われ始め，慣性領域へ近づくにつれて，加速域では初期の時間帯で $\lambda_u(t) < \lambda_{g,t}$，後の時間帯で $\lambda_u(t) > \lambda_{g,t}$ となる．減速域では初期の時間帯に $\lambda_u(t) > \lambda_{g,t}$ となり，後の時間帯で $\lambda_u(t) < \lambda_{g,t}$ となる．

(4) $\lambda_{u,ta}$ は，U_m の時間平均値 $U_{m,ta}$ を持つ定常流れの管摩擦係数 $\lambda_{s,t}$ よりも常に大きく，$\omega'/Re_{ta}^{3/4}$ の増加につれて増加する．

(5) 擬定常領域と中間領域との境界は $\sqrt{(\omega'/Re_{ta}^{3/4})_g} = 0.145$，中間領域と慣性領域との境界は $\sqrt{(\omega'/Re_{ta}^{3/4})_t} = 1.50$ と定めるのが妥当であることを確認した．

第6章　乱流の場合の壁面せん断応力の表示式

6・1　緒言

第4章では四つの特性数 $\beta_{t,1}$, $\beta_{z,1}$, $\alpha_{t,1}$, $\alpha_{z,1}$ を導入して非圧縮性流体の円管内乱流脈動流れの流動形態を規定し，脈動周波数と時間平均レイノルズ数との組合せに関して三つの領域を考えることが合理的であることを示し，それらの領域の境界を $\beta_{t,1}$, $\beta_{z,1}$ の値を指定することによって決定した．つぎに第5章では流動形態図から特性数の値を読み取ることにより，それぞれの領域における管摩擦係数の推定を行い，摩擦損失を系統的に評価する方法を示した．さらに推定値を測定値と比較して検討した結果，擬定常領域と中間領域では両者が比較的よく一致することが確かめられたが，慣性領域ではもう一つ不満足なところがあることがわかった．ここで，擬定常領域と中間領域，中間領域と慣性領域の境界はそれぞれ $\sqrt{\omega'/Re_{ta}^{3/4}}$ の値にして 0.145 および 1.50 である．

円管内乱流脈動流れの摩擦損失に関しては，本研究が系統的に取り扱った最初のものであると考えるが，従来の研究者の測定を含めて，ここで採用した圧力と速度を測定して摩擦損失を間接的に求める方法では，周波数が高くなるに従って，この際必要となる壁面せん断応力 τ_w を求める計算過程において不可避的に誤差が大きくなるために，τ_w を，したがってまた損失を正確に求めることが困難になる．また逆に第5章で示した τ_w の表示式を使ってこの値を推定しようとする場合には，流動形態図から特性数の値を読み取ることが必要となるが，その際にも慣性領域で誤差が大きくなり，速度と圧力勾配との関係は精度よく得られるものの，τ_w に対する評価は $\sqrt{\omega'/Re_{ta}^{3/4}}$ の値が 1.7 以上で事実上不可能となる．したがって前章で提案した τ_w の表示の妥当性も慣性領域では十分検証されたとはいえない．

本章では，今までに報告された理論的ならびに実験的事実に検討を加えることによって，慣性領域における摩擦損失が層流の様相を示すようになることを指摘し，壁面せん断応力 τ_w も慣性領域で層流の表示に漸近もしくは類似な値をとり，擬定常領域においては擬定常表示に一致してくるであろうと予想することによって，τ_w に対し二つの新しい表示式を導びいた．さらに，これらを用いて計算した特性数および管摩擦係

数の値を擬定常領域，中間領域における測定値と比較することによって，まずこれらの領域での妥当性を検討した後，慣性領域における有効性について考察を行った．

6·2 壁面せん断応力 τ_w に対する新表示法

ここでは円管内乱流脈動流れの流動形態および摩擦損失に関して従来報告されている事項を総合的に判断することにより，τ_w の新しい表示式を導びくことにする．

慣性力が支配的となる慣性領域になれば，粘性力の影響は全般的にみて小さくなるが，管壁近傍のごく限られた薄い層内ではかえって大きな役割を果すと考えられる．これがいわゆる annular effect[50)~(52)] となって現われるわけであるが，従来発表されている総括うず動粘性係数 ν_E に対するいずれのモデル[24)(42)(47)]でも，$\nu_E = \nu$ となる粘性底層を設けている．しかしこの底層は脈動流れにおいて直接実験的に確かめられているわけではない．ただ乱流振動流れにおいて，減速域に粘性底層の存在することが沢本ら[53)]により確認されている程度である．周波数の増加とともに薄くなった動的境界層では，うず粘性よりも分子粘性によって規定される割合が大きくなるが，このことは慣性領域における摩擦損失の形態に層流の様相が現われるのではないかという期待を抱かせる．

現在のところ慣性領域における乱流脈動流れに関する唯一の実験とみられる Brown ら[47)(54)] の attenuation factor の測定値をみれば，それらが周波数の高いところで完全に層流の理論解に乗ってくることが示されており，この期待が現実化していることがうなづける．また Funk ら[48)]は，管内流体のコア部に対して plug flow を，壁近傍に対しては層流境界層を仮定した簡単なモデルによってこの現象を満足ゆく程度に説明しているが，これも上の期待を裏づける材料となる．ただし，これらの理論，実験とも微小変動で行われているために，これらが速度振幅比が大きい場合に適用できるかどうかは明確でない．

図 6-1 ~ 6-4 に，流動形態を規定する特性数をとり，第4章で求めた測定値を○印で示し，従来の理論解析結果を細い実線 No. 2，3 で描いて両者を比較して示した．横軸に $\sqrt{\omega'}$ をとって（$\sqrt{\omega'/R_e^{3/4}t_a}$ あるいは $\sqrt{\omega_e}$

をとることもある）特性数 $\overline{\tau}_{t,1}$, $\overline{\tau}_{z,1}$, $\alpha_{t,1}$, $\alpha_{z,1}$ の値を示した図を流動形態図と呼ぶ．注目すべきは図6-4において，十分明確には示していないが，$\alpha_{z,1}$ が $\nu_E = \nu + \varepsilon$ にどのようなモデルを適用しても層流の場合の極限値45°に漸近していくことである．すなわち，ε を擬定常的に変化させたモデル（喜多らの[24]モデルは純粋に擬定常的でないが，それに相当する），あるいは ε を一定とした近江ら[42]のモデルのいずれを用いても，周波数が高くなれば，流動形態図は同じような様相を示しつつ層流のそれに漸近することになる．この事実は，慣性領域においては前記動的境界層が周波数の増加とともに薄くなることによって，ε よりも ν の影響が支配的になること，したがって摩擦損失もまた層流の様相に近づいていくということに対して有力な根拠を与えているといえよう．

以上の考察に基づいて，乱流脈動流れの壁面せん断応力 τ_w に対し，周波数が

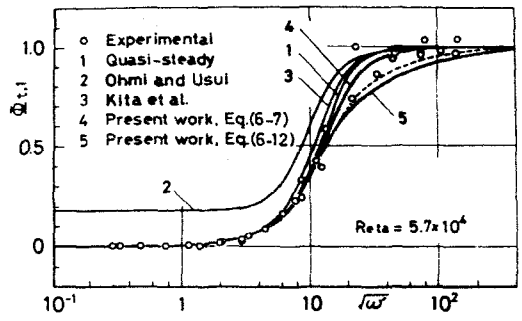


図6-1　特性数 $\overline{\tau}_{t,1}$ 値に対する従来の解析結果と本計算結果との比較

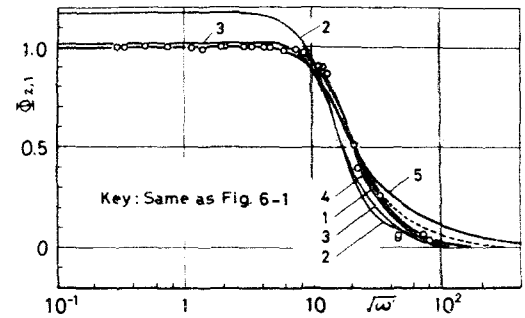


図6-2　特性数 $\overline{\tau}_{z,1}$ 値に対する従来の解析結果と本計算結果との比較

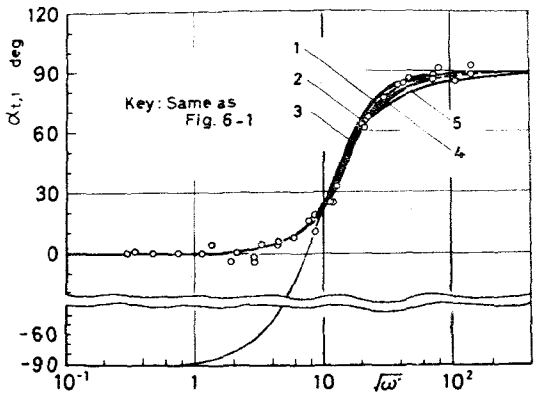


図6-3　特性数 $\alpha_{t,1}$ 値に対する従来の解析結果と本計算結果との比較

高くなれば層流の表示に，低くなればよく知られた乱流擬定常表示に漸近するような表示式をつぎのようにして導びいた．

管横断面平均速度 u_m が式(4-3)に示したつぎのような変動

$$u_m = u_{m,ta} + |u_{m,os,1}| \cos \omega t \qquad \cdots (6-1)$$

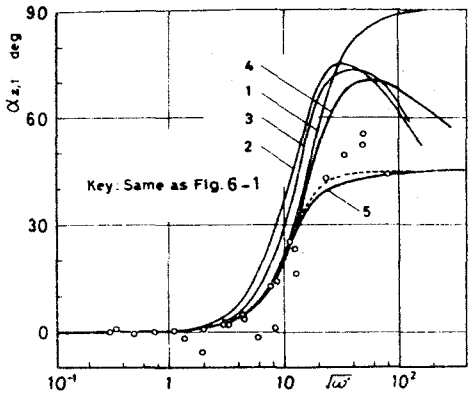


図 6-4　特性数 $\alpha_{g,l}$ 値に対する従来の解析結果と本計算結果との比較

をするとき，層流脈動流れの壁面せん断応力 τ_w は，時間平均値 $4\mu u_{m,ta}/R$ と振動成分を表わす式(2-8)を加え合わせることによって次式で表わされる．

$$\tau_w = \frac{4\mu}{R} u_{m,ta} + \frac{4\mu}{R}\left\{\eta_1(\sqrt{\omega'})u_{m,os,1} + \frac{\xi_1(\sqrt{\omega'})}{\omega}\frac{du_{m,os,1}}{dt}\right\} \qquad \cdots (6-2a)$$

$$= \frac{4\mu}{R} u_m + \frac{4\mu}{R}\left[\{\eta_1(\sqrt{\omega'})-1\}u_{m,os,1} + \frac{\xi_1(\sqrt{\omega'})}{\omega}\frac{du_{m,os,1}}{dt}\right] \qquad \cdots (6-2b)$$

$$= \lambda_{q,l}\frac{\rho_0}{8}u_m^2 + \frac{4\mu}{R}\left[\{\eta_1(\sqrt{\omega'})-1\}(u_m - u_{m,ta}) + \frac{\xi_1(\sqrt{\omega'})}{\omega}\frac{du_m}{dt}\right] \qquad \cdots (6-2c)$$

ここで $\lambda_{g,l}$ は層流擬定常管摩擦係数であり，次式で表わされる．

$$\lambda_{q,l} = 64/R_e, \qquad R_e = u_m D/\nu \qquad \cdots (6-3)$$

また係数 $\eta_1(\sqrt{\omega'})$，$\xi_1(\sqrt{\omega'})$ は式(2-9)，(2-10)で示したように

$$\left.\begin{aligned}\eta_1(\sqrt{\omega'}) &= \frac{\sqrt{\omega'}}{4}\frac{M_1(\sqrt{\omega'})}{M_2(\sqrt{\omega'})}\cos[\theta_1(\sqrt{\omega'}) - \theta_2(\sqrt{\omega'}) + 3\pi/4] \\ \xi_1(\sqrt{\omega'}) &= \frac{\sqrt{\omega'}}{4}\frac{M_1(\sqrt{\omega'})}{M_2(\sqrt{\omega'})}\sin[\theta_1(\sqrt{\omega'}) - \theta_2(\sqrt{\omega'}) + 3\pi/4]\end{aligned}\right\} \qquad \cdots (6-4)$$

であり，添字 ta，os はそれぞれ時間平均値および変動成分を，添字 1 は基本波を表わす．ここで上式(6-2)に修正を加えてこれを乱流の場合に応用しようとする．まず考えられるのは，式(6-2c)の右辺第一項の $\lambda_{q,l}$ を乱流の擬定常値

$$\lambda_{q,t}=0.316\,4/R_e^{1/4} \qquad \cdots(6-5)$$

で置き換え，第二項の係数 $4\mu/R$ はそのままにしておくことである．その結果は次式で与えられる．

$$\tau_w=\lambda_{q,t}\frac{\rho_0}{8}u_m^2+\frac{4\mu}{R}\left[\{\eta_1(\sqrt{\omega'})-1\}(u_m-u_{m,ta})+\frac{\xi_1(\sqrt{\omega'})}{\omega}\frac{du_m}{dt}\right] \qquad \cdots(6-6)$$

上式において $\omega'\to 0$ のとき $\eta_1(\sqrt{\omega'})\to 1$，$\xi_1(\sqrt{\omega'})\to 0$ となることから τ_w は乱流の擬定常表示に漸近する．また $\omega'\to\infty$ のとき $\eta_1(\sqrt{\omega'})\to\infty$，$\xi_1(\sqrt{\omega'})\to\infty$ となって，式(6-6)の右辺第二項大括弧内の量の占める割合は非常に大きくなり，第一項の効果はうすくなって層流の表示に漸近する．このことは，周波数が高くなった場合の擬定常値からのずれは層流のそれと全く同じであると考えたことに対応している．τ_w が式(6-6)で示される変化をするとき，流動形態を規定する特性数は次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{t,1}&=1\Big/\sqrt{\left[\frac{8}{\omega_e'}+\frac{8}{\omega'}\{\eta_1(\sqrt{\omega'})-1\}\right]^2+\left[1+\frac{8}{\omega'}\xi_1(\sqrt{\omega'})\right]^2}\\
\Phi_{z,1}&=\Phi_{t,1}\sqrt{\left[\frac{8}{\omega_e'}+\frac{8}{\omega'}\{\eta_1(\sqrt{\omega'})-1\}\right]^2+\left[\frac{8}{\omega'}\xi_1(\sqrt{\omega'})\right]^2}\\
\alpha_{t,1}&=\tan^{-1}\left[\left\{1+\frac{8}{\omega'}\xi_1(\sqrt{\omega'})\right\}\Big/\left\{\frac{8}{\omega_e'}+\frac{8}{\omega'}\{\eta_1(\sqrt{\omega'})-1\}\right\}\right]\\
\alpha_{z,1}&=\alpha_{t,1}-\tan^{-1}\left[\frac{8}{\omega'}\xi_1(\sqrt{\omega'})\Big/\left\{\frac{8}{\omega_e'}+\frac{8}{\omega'}\{\eta_1(\sqrt{\omega'})-1\}\right\}\right]
\end{aligned}\right\} \qquad \cdots(6-7)$$

ここで

$$\omega'=R^2\omega/\nu,\qquad \omega_e'=115.6\omega'/R_{eta}^{3/4} \qquad \cdots(6-8)$$

である．この特性数の値は図6-1～6-4にNo.4の太い実線で描いてあるが，期待どおり，喜多ら[24]の曲線に類似な様相を示し，しかも測定値との一致は彼らの求めた曲線よりも良好である．また，彼等の解析は微小変動の場合（$A_1<0.3$）にしか適用されないのに対して，これは $A_1<1.0$ に対して有効である．しかしながらこの表示式（6-6）でも測定値とはいくぶん異なっているので，もう一つ別に表示式を導びくことにしよう．

τ_w の擬定常表示式 $\tau_w=\lambda_{s,t}\rho_0 u_m^2/8$ に式(6-1)および Blasius の式（6-5）を代入し，$u_{m,os,1}/u_{m,ta}<1$ の条件のもとに展開を行えば

$$\tau_w=\lambda_{s,t}\frac{\rho_0}{8}u_{m,ta}{}^2\left\{1+\frac{7}{4}\frac{u_{m,os,1}}{u_{m,ta}}+\frac{1}{2}\frac{7}{4}\left(\frac{7}{4}-1\right)\left(\frac{u_{m,os,1}}{u_{m,ta}}\right)^2+\cdots\right\} \qquad \cdots(6\text{-}9)$$

$$\lambda_{s,t}=0.3164/R_{eta}{}^{1/4},\quad R_{eta}=u_{m,ta}D/\nu \qquad \cdots(6\text{-}10)$$

が得られる．ここで右辺中括弧内に着目して，第二項の $u_{m,os,1}$ のところだけを式（6-2a）の右辺中括弧内の式で置き換える．ただし後の便宜のために $\gamma_1(\sqrt{\omega'})$，$\xi_1(\sqrt{\omega'})$ における ω' の代りに式(6-8)の ω_e' で置き換える．この ω' を ω_e' で置き換える根拠は，層流の特性数に対する擬定常表示において，ω' を ω_e' で置き換えれば乱流の特性数に対する擬定常表示が得られることに基づいている[55]．以上の操作を行えば，τ_w は次式のように表わされる．

$$\tau_w=\lambda_{q,t}\frac{\rho_0}{8}u_m{}^2+\frac{7}{4}\lambda_{s,t}\frac{\rho_0}{8}u_{m,ta}\left[\{\gamma_1(\sqrt{\omega_e'})-1\}(u_m-u_{m,ta})+\frac{\xi_1(\sqrt{\omega_e'})}{\omega}\frac{du_m}{dt}\right] \qquad \cdots(6\text{-}11)$$

上式は，$\omega'\to 0$（$\omega_e'\to 0$）のときに乱流の擬定常表示に漸近するが，$\omega'\to\infty$ のときには層流の表示と類似な様相を示すことになる．

式(6-11)は全く直観的に定めたものである．しかしながら以下に示すように，この式を使って推定した管摩擦係数の値は本実験で求めた測定値を比較的精度よく表わすことになる．また式(6-11)から計算される流動形態を規定する特性数の値も，その測定値と良い一致を示すことから式(6-11)は決して無意味な仮定ではない．式(6-11)を用いて特性数を計算すれば次式が得

られる.

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_{t,1}=1\Big/\sqrt{\left[\frac{8}{\omega_e'}\eta_1(\sqrt{\omega_e'})\right]^2+\left[1+\frac{8}{\omega_e'}\xi_1(\sqrt{\omega_e'})\right]^2}=\frac{M_2(\sqrt{\omega_e'})}{M_0(\sqrt{\omega_e'})}\\
&\Phi_{z,1}=\Phi_{t,1}\frac{8}{\omega_e'}\sqrt{\eta_1^2(\sqrt{\omega_e'})+\xi_1^2(\sqrt{\omega_e'})}=\frac{2}{\sqrt{\omega_e'}}\frac{M_1(\sqrt{\omega_e'})}{M_0(\sqrt{\omega_e'})}\\
&\alpha_{t,1}=\tan^{-1}\left[\left\{1+\frac{8}{\omega_e'}\xi_1(\sqrt{\omega_e'})\right\}\Big/\left\{\frac{8}{\omega_e'}\eta_1(\sqrt{\omega_e'})\right\}\right]=\theta_0(\sqrt{\omega_e'})-\theta_2(\sqrt{\omega_e'})+3\pi/2\\
&\alpha_{z,1}=\alpha_{t,1}-\tan^{-1}\left[\xi_1(\sqrt{\omega_e'})/\eta_1(\sqrt{\omega_e'})\right]=\theta_0(\sqrt{\omega_e'})-\theta_1(\sqrt{\omega_e'})+3\pi/4
\end{aligned}\right\}\cdots(6\text{-}12)$$

上式で示される各々の特性数に対する表示式の形は第2章に示した層流における表示式と全く同じであって，変数が ω' から ω_e' となっているだけである．したがって τ_w が式(6-11)で表わされる場合には，横軸に $\sqrt{\omega'}$ をとった乱流の流動形態図は層流のそれを横軸の方向に $\sqrt{Re_{ta}^{3/4}/115.6}$ 倍した位置まで平行移動すればよいことになる．図6-1～6-4には，$Re_{ta}=57000$ とおいて式(6-12)を計算した結果をNo.5の太い実線で描き加えてある．

また 図6-5～6-8には横軸に $\sqrt{\omega_e'}$ をとって同じ結果を太い実線で示した．同図中の細い実線は第4章で示した τ_w に対する擬定常表示から計算したものであり，破線は同じく第4章に示した方法に従って，図中の測定値を滑らかに結んだものである．図6-5～6-8のいずれにおいても太い実線と測定値との一致は良好である．図6-8の $\alpha_{z,1}$ については，測定値のばらつきが大きいが，いまのところやむを得ない．

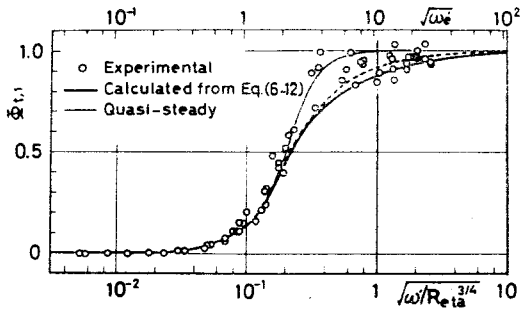


図6-5 τ_w の表示式(6-11)を用いて計算した場合の特性数 $\alpha_{t,1}$ の値

以上の図6-1～6-8を通して見ることにより，次のことがわかる．式(6-6)は τ_w を測定値よりも小

さく，式(6-11)は大きく見積る傾向があるといえる．しかしながら式(6-6),(6-11)のいずれを用いても，流動形態図から判断するかぎり，従来の理論解よりも精度よく測定値を表示できるようである．式(6-6),(6-11)のいずれがより妥当であるかに関しては，これらの式から推定される管摩擦係数を測定値と比較することによって次節で詳しく考察する．

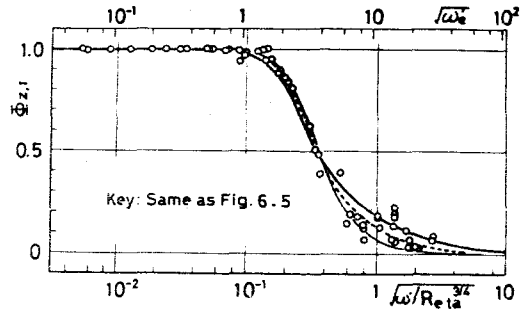


図 6-6　τ_w の表示式(6-11)を用いて計算した場合の特性数 $\Phi_{z,1}$ の値

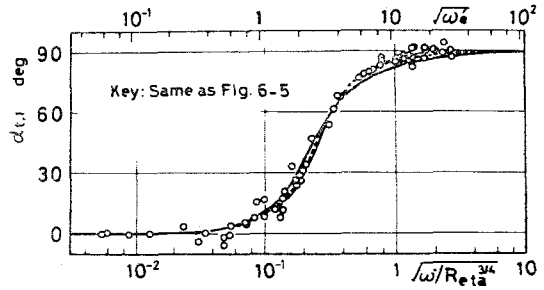


図6-7　τ_w の表示式(6-11)を用いて計算した場合の特性数 $\alpha_{t,1}$ の値

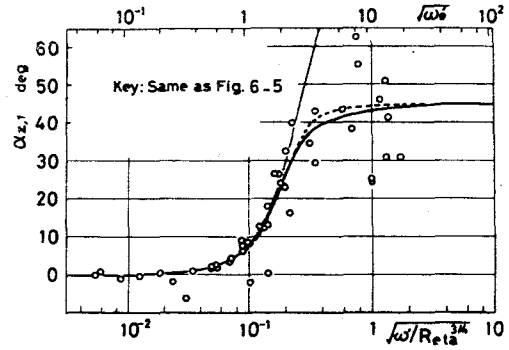


図6-8　τ_w の表示式(6-11)を用いて計算した場合の特性数 $\alpha_{z,1}$ の値

6·3　管摩擦係数の推定値と測定値との比較

6·3·1　瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$

$\lambda_u(t)$ の 定義式(3-2)の絶対値記号を取去った式

$$\tau_w u_m = \lambda_u(t)\rho_0 u_m^3/8 \qquad \cdots(6-13)$$

の u_m に式(6-1)を，τ_w には式(6-6)を代入して $\lambda_u(t)$ を求め，擬定常管摩擦係数 $\lambda_{q,t}$ との比で表わせば次式

$$\frac{\lambda_u(t)}{\lambda_{q,t}} = 1+\frac{\lambda_{q,l}}{\lambda_{q,t}}\left[\{\eta_1(\sqrt{\omega'})-1\}\left(1-\frac{u_{m,ta}}{u_m}\right)+\frac{\tilde{\xi}_1(\sqrt{\omega'})}{\omega u_m}\frac{du_m}{dt}\right] \qquad \cdots(6-14)$$

が，また式(6-6)の代りに式(6-11)を用いれば次式

$$\frac{\lambda_u(t)}{\lambda_{q,t}} = 1+\frac{7}{4}\left(\frac{\lambda_{q,t}}{\lambda_{s,t}}\right)^3\left[\{\eta_1(\sqrt{\omega_e'})-1\}\left(1-\frac{u_{m,ta}}{u_m}\right)+\frac{\tilde{\xi}_1(\sqrt{\omega_e'})}{\omega u_m}\frac{du_m}{dt}\right] \qquad \cdots(6-15)$$

が得られる．また第5章では $\lambda_u(t)/\lambda_{q,t}$ の推定式として次の二式を提案している．

$$\frac{\lambda_u(t)}{\lambda_{q,t}} = \left[\sigma_1+25.28\frac{\Phi_{z,1}(\sqrt{\omega_e'})}{\Phi_{t,1}(\sqrt{\omega_e'})}\frac{\omega'}{R_{eta}^{3/4}}A_1\cos\{\omega t+\alpha_{t,1}(\sqrt{\omega_e'})-\alpha_{z,1}(\sqrt{\omega_e'})\}\right]\Big/(1+A_1\cos\omega t)^{7/4} \qquad \cdots(6-16)$$

$$\frac{\lambda_u(t)}{\lambda_{q,t}} = \left[\sigma_1+25.28\frac{\Phi_{z,1}(\sqrt{\omega_e'})}{\Phi_{t,1}(\sqrt{\omega_e'})}\frac{\omega'}{R_{eta}^{3/4}}A_1\left[\cos\{\omega t+\alpha_{t,1}(\sqrt{\omega_e'})-\alpha_{z,1}(\sqrt{\omega_e'})\}+B_1\cos\{2\omega t+\alpha_{t,1}(\sqrt{\omega_e'})-\alpha_{z,1}(\sqrt{\omega_e'})\}-B_2\cos\{3\omega t+\alpha_{t,1}(\sqrt{\omega_e'})-\alpha_{z,1}(\sqrt{\omega_e'})\}\right]\right]\Big/(1+A_1\cos\omega t)^{7/4} \qquad \cdots(6-17)$$

$$\sigma_1=1+\frac{21}{64}A_1^2,\quad A_1=\frac{|u_{m,os,1}|}{u_{m,ta}},\quad B_1=\frac{21A_1^2}{64}\Big/\left(\frac{7}{4}A_1-\frac{21}{512}A_1^3\right),\quad B_2=\frac{7A_1^3}{512}\Big/\left(\frac{7}{4}A_1-\frac{21}{512}A_1^3\right) \qquad \cdots(6-18)$$

式(6-16)はτ_wに基本波のみを採用して求めた式であり，擬定常領域および速度振幅比A_1が大きくなった場合には精度が悪くなる．式(6-17)はω'が小さくなったとき，擬定常領域で成立する関係式$\tau_w=\lambda_{g,t}\rho_0 u_m^2/8$に接続するように$\tau_w$を修正して求めたものである．これらの式(6-16),(6-17)でも，それぞれの適用条件を満足するように利用すれば，管摩擦係数の測定値を精度よく表わせることを既に第5章で報告しているが，敢えて言えば式(6-16)には上記の欠点があり，式(6-17)は繁雑である．以下に式(6-14),(6-15)ならびに式(6-16),(6-17)から計算される値（これらを推定値と呼ぶ）を測定値と比較してみることにより，式(6-14),(6-15)の妥当性を実証する．ただし，式(6-14),(6-15)において$u_{m,ta}$，u_m，du_m/dtの値にはそれぞれの測定値を代入する．式(6-16),(6-17)の中の特性数の値は流動形態図6-5～6-8の破線から読み取ることにし，同式のA_1には，u_mの測定値をフーリエ展開して得られる値を採用する．

なお式(6-14),(6-15)の$u_{m,ta}$，u_m，du_m/dtに対しても，フーリエ展開近似して基本波のみを用いて得られる値を代入するのが式(6-16),(6-17)と比較する場合好都合であるが，式(6-14),(6-15)は$u_{m,ta}$，u_m，du_m/dtに関して，それぞれの測定値を直接利用できる形となっているため（実際には，この方がはるかに手軽であろう），あえて測定値を用いた．もちろん，これらに関するフーリエ展開近似値を用いて計算した結果は，それらに対して測定値を用いた場合とほとんど差がみられないことを確認してある．

本章ではu_mが既知であるとして$\lambda_u(t)/\lambda_{g,t}$を推定したが，$\Delta p/l$から$u_m$を求める一貫した方法を第4章に示しているので，$\Delta p/l$がわかれば容易に$\lambda_u(t)/\lambda_{g,t}$の値を推定できる．

図6-9～6-14の(a)で$\lambda_u(t)$の，(b)では$\lambda_u(t)/\lambda_{g,t}$の推定値と測定値との比較を示した．図(a)の破線はu_mの測定値を用いて式(6-5)から計算した$\lambda_{g,t}$の値を，図(b)中の破線は$\lambda_u(t)/\lambda_{g,t}=1$を示している．$\omega_e'=115.6\,\omega'/Re_{ta}^{3/4}$の値が大きくなるにつれて$\lambda_u(t)$が$\lambda_{g,t}$の曲線からずれていく様相がよくわかる．加速域は図6-10～6-14の(a)の中で破線で示した，図6-9(a)のみは実線で示した$\lambda_{g,t}$の値が減少している区間，減速域は増加している区間に対応している．

式(6-14), (6-15)から計算される推定値のいずれも第5章で示した変化の様相,すなわち $\lambda_u(t)$ は擬定常領域においては $\lambda_{g,t}$ にほぼ等しく,中間領域になると加速域においては $\lambda_u(t) < \lambda_{g,t}$ となる初期の時間帯を除いて大部分の時間帯で $\lambda_u(t) > \lambda_{g,t}$, 減速域においては $\lambda_u(t) > \lambda_{g,t}$ となる初期の時間帯を除く大部分の時間帯で $\lambda_u(t) < \lambda_{g,t}$ となることを明らかに示している.

緒言で触れたように, 本実験に用いた測定法では周波数の増加とともに τ_w を求める際の誤差が不可避的に大きくなっていく. したがって, これらの図から式(6-14)～(6-17)の優劣はつけがたいが, 式(6-14)は $\lambda_u(t)$ を小さめに, 式(6-15)は大きめに見積る傾向がある. また, どちらかと言えば, 式(6-15)のほうが式(6-14)よりも測定値を精度よく表わしているようであり, 式(6-16), (6-17)はともに測定値ともほぼ一致している.

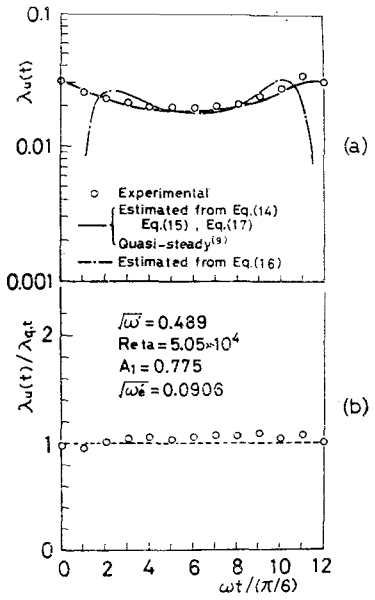


図6-9 瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$ の推定値と測定値との比較

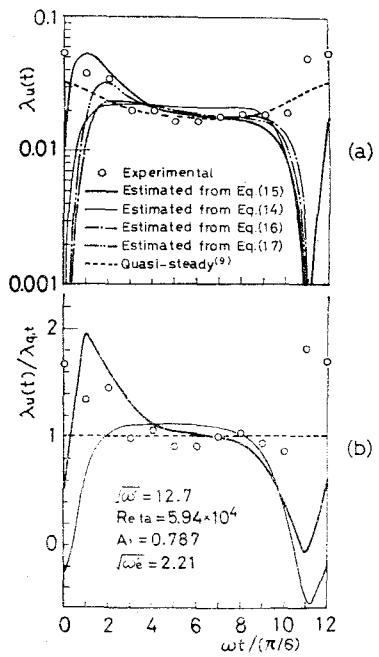


図6-10 瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$ の推定値と測定値との比較

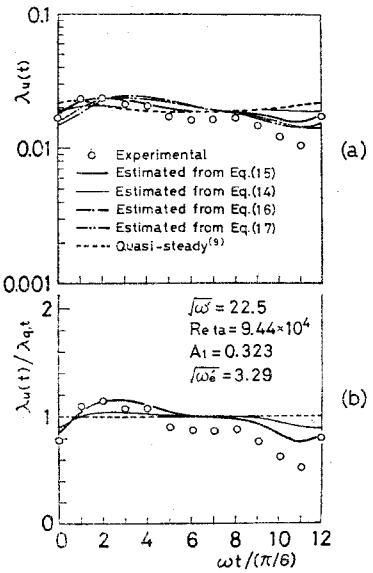


図6-11 瞬間管摩擦係数$\lambda_u(t)$の推定値と測定値との比較

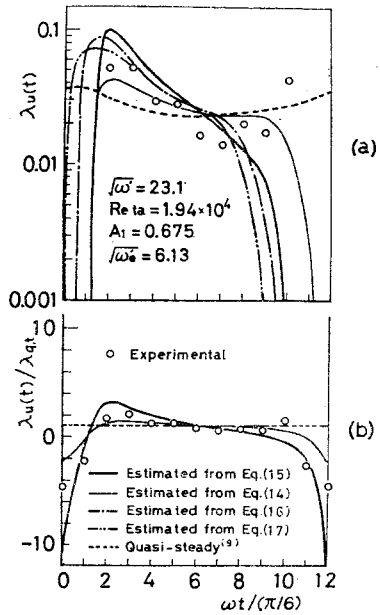


図6-12 瞬間管摩擦係数$\lambda_u(t)$の推定値と測定値との比較

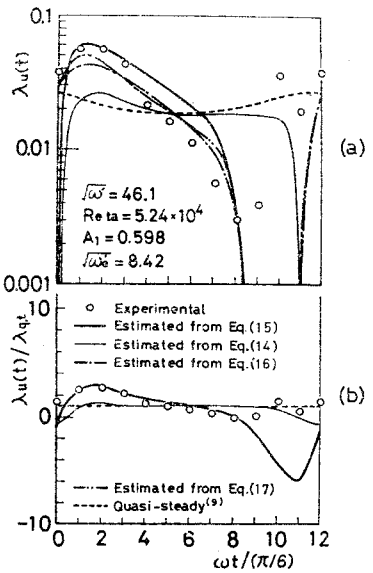


図6-13 瞬間管摩擦係数$\lambda_u(t)$の推定値と測定値との比較

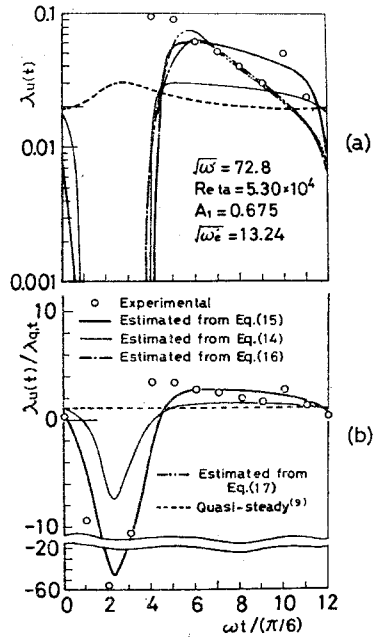


図6-14 瞬間管摩擦係数$\lambda_u(t)$の推定値と測定値との比較

6・3・2 時間平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta}$

$\lambda_{u,ta}$ の 定義式(3-3)

$$\int_0^T \tau_w u_m dt/T=\lambda_{u,ta}\rho_0 u_{m,ta}^3/8 \qquad \cdots(6-19)$$

における u_m に式(6-1)を，τ_w に式(6-6)を代入して $\lambda_{u,ta}$ を求め，$\lambda_{s,t}$ との比で表わしたものを ζ_1 とおけば次式

$$\zeta_1=\frac{\lambda_{u,ta}}{\lambda_{s,t}}=\left(1+\frac{77}{64}A_1^2-\frac{231}{16\,384}A_1^4+\cdots\right)+101.1\frac{\eta_1(\sqrt{\omega'})-1}{R_{eta}^{3/4}}A_1^2 \qquad \cdots(6-20)$$

が，また τ_w の式(6-6)の代りに式(6-11)を用いれば次式

$$\zeta_1=\left(1+\frac{77}{64}A_1^2-\frac{231}{16\,384}A_1^4+\cdots\right)+\frac{7}{8}\{\eta_1(\sqrt{\omega_e'})-1\}A_1^2 \qquad \cdots(6-21)$$

が得られる．これらの式の右辺小括弧内の量は近似的に $1+77A_1^2/64$ と表わせるので，式(6-18)の修正係数 σ_1 を用いて書き直せばそれぞれ

$$\zeta_1=\sigma_1+\left[\frac{56}{64}+101.1\frac{\eta_1(\sqrt{\omega'})-1}{R_{eta}^{3/4}}\right]A_1^2 \qquad \cdots(6-22)$$

$$\zeta_1=\sigma_1+\left[\frac{56}{64}+\frac{7}{8}\{\eta_1(\sqrt{\omega_e'})-1\}\right]A_1^2 \qquad \cdots(6-23)$$

となる．上式において $\omega'\to 0$，$\omega_e'\to 0$ のとき $\eta_1(\sqrt{\omega'})\to 1$，$\eta_1(\sqrt{\omega_e'})\to 1$ となるので，いずれの式もともに

$$\zeta_1=1+77A_1^2/64 \qquad \cdots(6-24)$$

となって，さきに求めた擬定常領域における関係式に一致し，矛盾は起らない．式(6-16)，(6-17) はそれぞれ異なった τ_w の式から導かれたものであるが，そのいずれを用いても，それらから計算される ζ_1 の表示式は同一となり，次式で与えられる．

$$\zeta_1=\sigma_1+12.64\frac{\Phi_{z,1}(\sqrt{\omega_e'})}{\Phi_{t,1}(\sqrt{\omega_e'})}\frac{\omega'}{R_{eta}{}^{3/4}}\times\cos\{\alpha_{t,1}(\sqrt{\omega_e'})-\alpha_{z,1}(\sqrt{\omega_e'})\}A_1{}^2 \qquad \cdots(6\text{-}25)$$

式(6-22)，(6-23)，(6-25) から計算される ζ_1 の値をすべて推定値と呼ぶ．それぞれの右辺第二項 A_1^2 の係数の値は $(\zeta_1-\sigma_1)/A_1^2$ の値に相当するが，これを図示すれば図6-15のようになる．

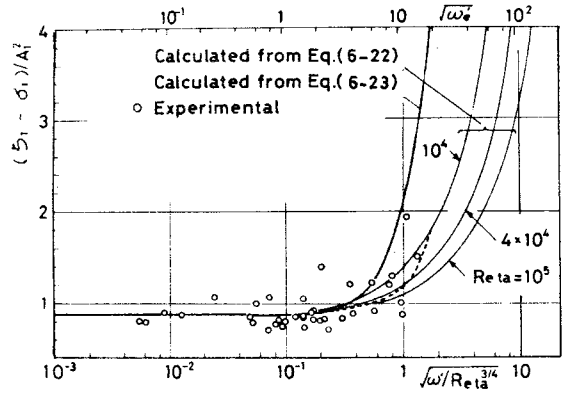


図6-15　τ_w に関する各表示式(6-6)と(6-11)から推定した時間平均管摩擦係数の様相

破線は，特性数の値を図6-5～6-8の破線から読み取って式(6-25)を用いて計算したものである．この図においても式(6-23)から推定される値は測定値よりも少し大きめに見積る傾向があるが，式(6-22)から推定される値は破線とほぼ等しい値を示している．測定値のばらつきを考えればこの図からいずれの推定値が妥当であるかの判断は下せないが，真の値は式(6-22)

と式(6-23)の中間の複雑な様相を示すようである．この詳しい検証は τ_w の直接測定にまたねばならない．しかしながら実線で示される推定値は $\sqrt{\omega'/R_{e\,ta}^{3/4}} > 1.7$ における $\lambda_{u,ta}$ を評価する上での指針を与えるものといえよう．

6·4 結 言

円管内乱流脈動流れの流動形態は，無次元角周波数 ω' の増加につれて層流と類似な様相に近づくという現象に注目して，τ_w に対して二つの新しい近似式を提案した．ω' が小さくなれば，いずれもよく知られた擬定常表示に漸近するように定め，ω' が大きくなった場合に，一つは層流の表示と全く同じ形をとるようにしたもので，式(6-6)がそれであり，もう一つは層流の表示に類似な形をとるようにしたもので式(6-11)がそれである．これらを実験結果と比較検討した結果得られたおもな事柄はつぎのとおりである．

(1) τ_w に対する二つの近似式(6-6),(6-11)を用いて，流動形態を規定する特性数 $\overline{\omega}_{t,1}$，$\overline{\omega}_{z,1}$，$\alpha_{t,1}$，$\alpha_{z,1}$ をそれぞれについて計算し，これらを流動形態図に描いてみたところ，いずれの近似式も，従来報告されている理論解析結果よりも良好に測定値と一致する．

(2) 式(6-11)を用いて計算した特性数の値は，横軸に $\sqrt{\omega'}$ をとった流動形態図において層流のそれを横軸の方向に $\sqrt{R_{e\,ta}^{3/4}/115.6}$ 倍した位置まで平行移動することにより求められる．

(3) 式(6-6)は τ_w を測定値よりも小さく見積る傾向が，式(6-11)は大きく見積る傾向があり，実際の τ_w は式(6-6),(6-11)で表わされる値の中間的な値をとり，複雑な様相を示すようである．

(4) 式(6-6),(6-11)のいずれがより妥当であるかを，これらの式から計算される $\lambda_u(t)$ の推定値と擬定常領域および中間領域における測定

値との比較で判断すれば式(6-11)のほうがよさそうであるが，$\lambda_{u,ta}$ の測定値との比較からはどちらとも言えない．

(5) 壁面せん断応力 τ_w の近似式(6-6)，(6-11)を使えば，慣性領域における摩擦損失の概略が推定できる．

第7章　結　論

各種管路網構成要素のうちで最も基本的かつ重要な円形断面管路に着目し，非圧縮性脈動流れの層流，乱流の各場合に対して，摩擦損失したがってまた圧力損失が流量とどのような関係にあるかを層流の場合に対しては理論的に，乱流の場合に対しては実験的に考究して，解明を試みた．

脈動流れにおいて，圧力損失（圧力項）は摩擦損失（粘性項）と流体の加速・減速に費やされる成分（慣性項）の和として表わされるので，これらの量的相互関係を明確にして流動形態を規定するために四つの特性数を導入した．そして，これらの特性数の値を層流の場合には理論的に，乱流の場合には実験的に決定した．つぎに，脈動流れを周波数に関して三つの領域，すなわち圧力項と粘性項とがほぼつり合う擬定常領域，圧力項，粘性項，慣性項の3項がつり合いを保つ中間領域，および圧力項と慣性項とがほぼつり合う慣性領域に分類し，これらの各領域において摩擦損失が脈動周波数，時間平均レイノルズ数，速度振幅比に対して示す変化の様相を，上記特性数を用いて明らかにする方法を提示した．以下，層流と乱流のそれぞれの場合に対して具体的に記述する．

7·1　一般的事項

脈動流れ，一般には非定常流れの圧力損失 $\Delta p/\ell$ に関しては次式

$$\rho_0 \frac{du_m}{dt} + \frac{4}{D}\tau_w = \frac{\Delta p}{l} \qquad \cdots(2\text{-}29)$$

（慣性項）（粘性項）（圧力項）

のような関係が成立し，$\Delta p/\ell$，τ_w，u_m の時間的変化を模式的に示せば図2-3のようになる．ここで，上記3項相互の量的関係が脈動周波

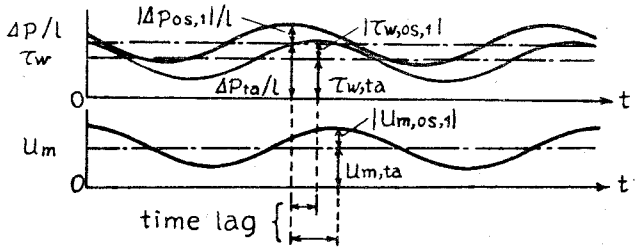


図2-3　$\Delta p/\ell$，τ_w，u_m の一周期にわたる変化の模式図

数の増加とともにどのように変化するかを明示するために次に示す四つの特性数を導入した.

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{t,n}&=\rho_0 n\omega|u_{m,os,n}|/(|\Delta p_{os,n}|/l)\\ \Phi_{z,n}&=(4|\tau_{w,os,n}|/D)/(|\Delta p_{os,n}|/l)\\ \alpha_{t,n}&=\angle(\Delta p_{os,n}/l)-\angle u_{m,os,n}\\ \alpha_{z,n}&=\angle(\Delta p_{os,n}/l)-\angle\tau_{w,os,n}\end{aligned}\right\}\quad\cdots(2\text{-}35)$$

これらの特性数を脈動周波数に対して図示したものを，ここでは流動形態図と呼ぶことにするが，ある脈動周波数に対して $\Delta p/l$, u_m , τ_w のいずれか一つが与えられた場合，これらの図から特性数の値を読み取ることによって他の二つを容易に求めることができる．またこれらの図を参照することによって，脈動流れの流動形態は，脈動周波数，厳密には無次元角周波数 ω' に関して擬定常領域，中間領域，慣性領域の3領域に分類でき，これらの境界を示す無次元角周波数 ω' の値をそれぞれ ω'_g , ω'_t とする．

7・2 層流脈動流れの場合

7・2・1 三領域の境界

壁面せん断応力 τ_w に解析的表示式(2-8)～(2-10)を用いて計算した特性数において，$\Phi_{z,1}=0.95$, $\Phi_{t,1}=0.95$ となる ω' の値をそれぞれ ω'_g , ω'_t の値と定めることにすれば $\sqrt{\omega'_g}=1.32$, $\sqrt{\omega'_t}=28.0$ となる．

7・2・2 壁面せん断応力の新表示式

従来，圧力勾配が与えられたときの壁面せん断応力の表示式(これを解析的表示式と呼ぶ)は与えられているが，流量が与えられた場合には近似式しか報告されていない．これらの近似式としては擬定常表示，等価粘性抵抗表示，重み関数表示(これらは著者の名付けた名称であるが)が挙げられる．そこで新しく管横断面平均速度 $u_{m,os,1}$ の関数として示される $\tau_{w,os,1}$ の解析的表示式

$$\tau_w=-\frac{4\mu}{R}u_{m,ta}+\frac{4\mu}{R}\left\{\eta_1(\sqrt{\omega'})u_{m,os,1}+\frac{\xi_1(\sqrt{\omega'})}{\omega}\frac{du_{m,os,1}}{dt}\right\} \quad \cdots(2-8)$$

$$\eta_1(\sqrt{\omega'})=\frac{\sqrt{\omega'}}{4}\frac{M_1(\sqrt{\omega'})}{M_2(\sqrt{\omega'})}\cos[\theta_1(\sqrt{\omega'})-\theta_2(\sqrt{\omega'})+3\pi/4] \quad \cdots(2-9)$$

$$\xi_1(\sqrt{\omega'})=\frac{\sqrt{\omega'}}{4}\frac{M_1(\sqrt{\omega'})}{M_2(\sqrt{\omega'})}\sin[\theta_1(\sqrt{\omega'})-\theta_2(\sqrt{\omega'})+3\pi/4] \quad \cdots(2-10)$$

を導びいた．係数 $\eta_1(\sqrt{\omega'})$, $\xi_1(\sqrt{\omega'})$ を ω' の小さい領域（$\sqrt{\omega'}\leqq 3.817$）と大きい領域（$\sqrt{\omega'}\geqq 3.817$）に分けて近似したものが重み関数表示式(2-24)であり，あるいはここで提案した修正等価粘性抵抗表示式

$$\tau_w=-\frac{4\mu}{R}u_{m,ta}+\frac{4\mu}{R}\left[\frac{C_{fe}}{C_f}u_{m,os,1}+\frac{\omega'/8}{2.4142+(\omega'/8)(C_f/C_{fe})}\frac{1}{\omega}\frac{du_{m,os,1}}{dt}\right] \quad \cdots(2-28)$$

である．ここで C_{fe}/C_f の値は式(2-16)もしくは式(2-17)を用いて計算される．

また 式(2-8)において $\xi_1(\sqrt{\omega'})=0$ とすれば等価粘性抵抗表示式(2-18)に，$\eta_1(\sqrt{\omega'})=1$, $\xi_1(\sqrt{\omega'})=0$ とすれば擬定常表示式(2-19)に帰着する．

7・2・3 流動形態を規定する特性数に基づいて評価した壁面せん断応力の近似式の得失

7・2・2 に示した壁面せん断応力の近似式が解析的表示に比べてどの程度相違しているかは，これらの近似式から計算される特性数を流動形態図に描いて解析的表示の特性数と比較すれば容易に判明する．すなわち，τ_w に関する擬定常表示，等価粘性抵抗表示とも擬定常領域では解析的表示によく一致するが，慣性領域になると大きな差が現われる．重み関数表示，修正等価粘性抵抗表示とも中間領域においてわずかに解析的表示との相違がみられるが，他の二つの領域においては良好な一致を示す．

7・2・4　管摩擦係数の定義

擬定常領域，中間領域および慣性領域において摩擦損失が各瞬間に，また一周期にわたって平均したときに，どのような値をとるかという事項は管路系設計にあたって極めて重要である．ここでは管摩擦係数の値によって，それらの評価を試みた．

定常流れの場合には圧力項が粘性項とつり合うために，差圧Δpを測定すれば直接的にτ_wが決定できることになる．しかしながら脈動流れにおいてはこのような関係は成立せず，圧力項，慣性項および粘性項の三項でつり合いを保つ関係となるために，定常流れの場合とは異なった観点から定義しなければならない．本論文では仕事率の関係から瞬間管摩擦係数$\lambda_u(t)$と時間平均管摩擦係数$\lambda_{u,ta}$の二つを次式のように定義した．

$$\tau_w U_m = \lambda_u(t)\, \rho_o |U_m| U_m^2/8 \qquad \cdots(3\text{-}2)$$

$$\int_o^T \tau_w U_m dt/T = \lambda_{u,ta}\, \rho_o U_{m,ta}^3/8 \qquad \cdots(3\text{-}3)$$

なお，時間平均レイノルズ数が零の脈動流れを特に区別して振動流れと呼ぶことにするが，この場合に$\lambda_{u,ta}$は適用できないため，これを修正した自乗平均管摩擦係数$\lambda_{u,ta,rm}$を次式のように提案して振動流れにも適用できるようにした．

$$\left.\begin{aligned} &\int_o^T \tau_w U_m dt/T = \lambda_{u,ta,rm}\, \rho_o U_{rms}^3/8 \\ &U_{rms} = \left\{\int_o^T U_m^2 dt/T\right\}^{1/2} = \left\{U_{m,ta}^2 + |U_{m,os,1}|^2/2\right\}^{1/2} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots(3\text{-}4)$$

7・2・5　瞬間管摩擦係数　$\lambda_u(t)$

瞬間管摩擦係数$\lambda_u(t)$は振動流れのとき，擬定常領域($\sqrt{\omega'} \leqq 1.32$)においては$\lambda_u(t) \fallingdotseq \lambda_{g,l}$となる．ここで$\lambda_{g,l}$は層流擬定常管摩擦係数で$\lambda_{g,l} = 64/R_e$と表わされる．$\omega'$が大きくなって中間領域($1.32 < \sqrt{\omega'} < 28.0$)から慣性領域($\sqrt{\omega'} \geqq 28.0$)になると加速域では

つねに $\lambda_u(t) > \lambda_{g,\ell}$ ，減速域では $\lambda_u(t) \geqq \lambda_{g,\ell}$ となる．

脈動流れにおいて逆流が現われる時間帯が存在する範囲を図3-4によって明示したが，逆流の現われない場合の $\lambda_u(t)$ は擬定常領域では $\lambda_u(t) \fallingdotseq \lambda_{g,\ell}$ である．中間領域から慣性領域になると，加速域では初期の時間帯で $\lambda_u(t) < \lambda_{g,\ell}$ となり，後の大部分の時間帯では $\lambda_u(t) > \lambda_{g,\ell}$ となる．減速域においては初期の時間帯で $\lambda_u(t) > \lambda_{g,\ell}$ となり，後の大部分の時間帯で $\lambda_u(t) < \lambda_{g,\ell}$ となる．逆流が現われるときの $\lambda_u(t)$ は，逆流の現われない脈動流れの $\lambda_u(t)$ と振動流れにおける $\lambda_u(t)$ の中間的な位置を占める複雑な変化の様相を示す．

7・2・6 時間平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta}$ ，自乗平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta,rm}$

時間平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta}$ はこれを定常流管摩擦係数 $\lambda_{s,\ell}$ との比で表わせば次式となる．

$$\frac{\lambda_{u,ta}}{\lambda_{s,\ell}} = 1+8\left[\frac{|\Delta p_{os,1}|/l}{\Delta p_{ta}/l}\right]^2 \frac{1}{(\sqrt{\omega'})^3} \times \frac{M_1(\sqrt{\omega'})}{M_0(\sqrt{\omega'})}\cos[\theta_1(\sqrt{\omega'})-\theta_0(\sqrt{\omega'})-\pi/4] \quad \cdots(3-17)$$

あるいは

$$\frac{\lambda_{u,ta}}{\lambda_{s,\ell}} = 1+\frac{\eta_1(\sqrt{\omega'})}{2}\frac{|u_{m,os,1}|^2}{u_{m,ta}{}^2} \quad (\lambda_{s,\ell} = 64/Re_{ta},\ Re_{ta} = U_{m,ta}D/\nu) \quad \cdots(3-18)$$

また自乗平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta,rm}$ と $64/Re_{rms}$ との比を C_{ta} で表わせば

$$C_{ta,os} = \frac{\sqrt{\omega'}}{4}\frac{M_1(\sqrt{\omega'})}{M_2(\sqrt{\omega'})}\cos[\theta_1(\sqrt{\omega'})-\theta_2(\sqrt{\omega'})+3\pi/4] \quad \cdots(3-14)$$

$$C_{ta,pl} = \frac{(\Delta p_{ta}/l)^2+(|\Delta p_{os,1}|/l)^2\{8/(\sqrt{\omega'})^3\}\{M_1(\sqrt{\omega'})/M_0(\sqrt{\omega'})\}\cos[\theta_1(\sqrt{\omega'})-\theta_0(\sqrt{\omega'})-\pi/4]}{(\Delta p_{ta}/l)^2+(|\Delta p_{os,1}|/l)^2\{32/\omega'^2\}\{M_2^2(\sqrt{\omega'})/M_0^2(\sqrt{\omega'})\}} \quad \cdots(3-15)$$

あるいは

$$C_{ta}=1+\frac{\eta_1(\sqrt{\omega'})-1}{2u_{rms}^2}|u_{m,os,1}|^2 \qquad \cdots(3\text{-}16)$$

となる.

7・2・7 摩擦損失と粘性逸散との関係

定常流れの管摩擦係数は圧力損失と流量との関係を与える係数であるだけでなく，粘性によるエネルギ逸散とも直接的に関係している．そこで脈動流れにおいて，$\lambda_u(t)$，$\lambda_{u,ta}$，$\lambda_{u,ta,rm}$ などと粘性逸散との関係を調べたところ，式(3-20),(3-21)から

$$\int_0^T \tau_w u_m \, dt/T = (\mu/RT)\int_0^T\int_0^R (\partial u/\partial r)^2 r\, dr\, dt$$

となることから，この関係式と管摩擦係数の定義式を見比べることによって，時間平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta}$，自乗平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta,rm}$ は1周期にわたる粘性逸散に直接的に関係づけられることがわかった．ところが，$\tau_w u_m$ は $(\mu/R)\int_0^R(\partial u/\partial r)^2 r\, dr$ に厳密には一致せず，擬定常領域においてのみ両者はほぼ一致する．したがって瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$ については擬定常領域においてのみ，これを各瞬間の粘性逸散と近似的に関係づけることができる．

7・3 乱流脈動流れの場合

7・3・1 乱流脈動流れの定義と基礎事項

層流から乱流への遷移に関しては Gilbrech-Combs[56], Yellin,[57] Sarpkaya[58] などの研究がみられる[34][59][60]が，脈動流れの臨界レイノルズ数はまだ判然としていない．本論文では速度波形に一周期にわたって高周波の乱れが現われ，しかも最小レイノルズ数が約5000以上の脈動流れを乱流脈動流れと定めた．

層流の場合の圧力，速度，壁面せん断応力の関係は理論的に求められており，その妥当性は数多くの実験的事実によって裏付けられている．第2，3章ではこの解析解を用いて層流脈動流れの流動形態と摩擦損失について考察を加えた．乱流の場合には，それらを理論的に評価することは現在のところ困難で，したがって実験データに基づいて評価することにした．

7・3・2　流動形態を規定する特性数

乱流脈動流れの流動形態は，無次元角周波数 ω'，時間平均レイノルズ数 Re_{ta}，速度振幅比 A_1 の三つのパラメータによって規定されるであろうと考えた．そこで，まず Re_{ta} を約 5.7×10^4 に設定して，ω' と A_1 が流動形態に及ぼす影響を調べてみたところ，速度振幅比 A_1 は $A_1<1$ に対して流動形態にほとんど影響を与えないことがわかった．

また流動形態は層流の場合と同様に ω' に関して三つの領域，すなわち擬定常領域，中間領域および慣性領域に分けられる．これら3領域の境界を特性数 $\overline{\omega}_{z,1}$，$\overline{\omega}_{t,1}$ の値に基づいて，層流の場合と同じ規範で定めると $Re_{ta}\fallingdotseq5.7\times10^4$ においては $\sqrt{\omega_z'}=8.8$，$\sqrt{\omega_t'}=91$ となった．

乱流脈動流れを理論的に研究した報告もいくつかみられるが[23)~25)42)]，その中でうず動粘性係数に4層モデルを適用した解析法[42)]に基づいて計算した特性数の値は慣性領域では本測定値と良好に一致した[49)]．

つぎに Re_{ta} の影響について述べる．まず流れが擬定常状態にあるとき，Re_{ta} が特性数にどのような形で影響を及ぼすかについて調べた．擬定常状態の成立を仮定すれば，壁面せん断応力 τ_w は次式

$$\tau_w=\lambda_{g,t}\rho_0 u_m^2/8 \qquad \cdots(4-1)$$

$$\lambda_{g,t}=0.3164/Re^{1/4} \quad (Re=u_mD/\mu) \qquad \cdots(4-2)$$

によって表わされる．この式の u_m に

$$u_m=u_{m,ta}+|u_{m,os,1}|\cos\omega t \qquad \cdots(4-3)$$

を代入して $|\tau_{w,os,1}|, \angle\tau_{w,os,1}$ を求め，つぎに式(4-1)～(4-3)を運動量の式(2-29)に代入して $|\Delta p_{os,1}|/\ell$ ，$\angle(\Delta p_{os,1}/\ell)$ を求めて，これらの量を特性数の定義式(2-35)に代入して整理すればつぎの結果が得られる．

$$\Phi_{t,1} = 1\Big/\sqrt{1+\left(\frac{7\lambda_{s,t}}{32}\frac{Re_{ta}}{\omega'}\right)^2} = 1\Big/\sqrt{1+\left(\frac{1}{14.45}\frac{Re_{ta}^{3/4}}{\omega'}\right)^2} \qquad \cdots(4\text{-}16)$$

$$\Phi_{z,1} = \frac{7\lambda_{s,t}}{32}\frac{Re_{ta}}{\omega'}\Big/\sqrt{1+\left(\frac{7\lambda_{s,t}}{32}\frac{Re_{ta}}{\omega'}\right)^2} = \frac{1}{14.45}\frac{Re_{ta}^{3/4}}{\omega'}\Phi_{t,1} \qquad \cdots(4\text{-}17)$$

$$\alpha_{t,1} = \alpha_{z,1} = \tan^{-1}(32\omega'/7\lambda_{s,t}Re_{ta}) = \tan^{-1}(14.45\omega'/Re_{ta}^{3/4}) \qquad \cdots(4\text{-}18)$$

すなわち，Re_{ta} は $\omega'/Re_{ta}^{3/4}$ ，一般には $\omega'/(Re_{ta}\lambda_{s,t})$ の形で特性数に関与することが明らかになった．そこで広範囲の Re_{ta} に対して行ったすべての実験結果を $\omega'/Re_{ta}^{3/4}$ に対してプロットし，流動形態図を作製したところ，中間領域と慣性領域においてもこのパラメータ $\omega'/Re_{ta}^{3/4}$ で精度よく整理できることがわかった．なお定常流管摩擦係数 $\lambda_{s,t}$ に Blasius の式が適用できないレイノルズ数領域においては，$\omega'/Re_{ta}^{3/4}$ の代りに $\omega'/(Re_{ta}\lambda_{s,t})$ に対して測定値を整理すればよく，$\lambda_{s,t}$ には例えば Prandtl-kármán の式を用いるとよい．

7・3・3　三領域の境界

無次元数 $\omega'/Re_{ta}^{3/4}$ に基づき擬定常領域，中間領域，慣性領域の境界を決定した．すなわち擬定常領域と中間領域との境界を示す $\omega'/Re_{ta}^{3/4}$ の値を $(\omega'/Re_{ta}^{3/4})_\beta$ とし，$\Phi_{z,1} = 0.95$ となる値を採用すれば $\sqrt{(\omega'/Re_{ta}^{3/4})_\beta} = 0.145$ となる．中間領域と慣性領域との境界を $(\omega'/Re_{ta}^{3/4})_t$ とし，$\Phi_{t,1} = 0.95$ となる値を採用すれば $\sqrt{(\omega'/Re_{ta}^{3/4})_t} = 1.50$ となる．

また特性数を，横軸に ω' をとって図示すれば，Re_{ta} が小さくなるにつれて層流の曲線側へ移行する．しかしながら層流の曲線にどのように移行して重なるかは脈動流れにおける層流から乱流への遷移が把握されていないため，明確でない．

7・3・4 摩擦損失を規定する三つのパラメータ ω', Re_{ta}, A_1

以上のように摩擦損失の推定に必要な四つの特性数の値を実験的に評価できた。そこで摩擦損失，具体的には瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$ と時間平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta}$ が ω', Re_{ta}, A_1 の変化に対してどのような様相を示すかを調べた結果，特性数を用いて推定した $\lambda_u(t)$, $\lambda_{u,ta}$ の値は測定値と良好に一致することが分った。

7・3・5 瞬間管摩擦係数 $\lambda_u(t)$

$\lambda_u(t)$ は 逆流の現われない層流脈動流れの $\lambda_u(t)$ と類似な変化の様相を示した。すなわち $\lambda_u(t)$ は擬定常領域では乱流擬定常管摩擦係数 $\lambda_{g,t}$ ($=0.3164/Re^{1/4}$) にほぼ一致し，中間領域になると加速域では $\lambda_u(t) > \lambda_{g,t}$, 減速域では $\lambda_u(t) < \lambda_{g,t}$ となる傾向が現われ始め，慣性領域へ近づくにつれて加速域では初期の時間帯で $\lambda_u(t) < \lambda_{g,t}$，後の時間帯で $\lambda_u(t) > \lambda_{g,t}$ となる。減速域では初期の時間帯に $\lambda_u(t) > \lambda_{g,t}$ となり，後の時間帯で $\lambda_u(t) < \lambda_{g,t}$ となる。

7・3・6 時間平均管摩擦係数 $\lambda_{u,ta}$

$\lambda_{u,ta}$ と 定常流管摩擦係数 $\lambda_{s,t}$ ($=0.3164/Re_{ta}^{1/4}$) との比で表わしたものを ζ_1 とすれば，ζ_1 は次式で与えられる。

$$\zeta_1 = \sigma_1 + 12.64\frac{\phi_{z,1}}{\phi_{t,1}}\frac{\omega'}{Re_{ta}^{3/4}}A_1^2\cos(\alpha_{t,1}-\alpha_{z,1}) \quad \cdots(5\text{-}27)$$

ここで $\sigma_1 = 1 + 21A_1^2/64$ は修正係数である。上式の右辺第二項の四つの特性数の値を流動形態図から読み取ることによって $\lambda_{u,ta}$ の値が推定できる。また式(5-27)の右辺第二項の値は常に正であるから $\lambda_{u,ta}$ は u_m の時間平均値 $u_{m,ta}$ に等しい管横断面平均速度を持つ定常流れの管摩擦係数 $\lambda_{s,t}$ よりも常に大きく，図5-6に示したように $\omega'/Re_{ta}^{3/4}$ の増加につれて増加することが容易に理解できる。なお擬定常領域においては $\zeta_1 = 1 + 77A_1^2/64$ となる。

7・3・7　壁面せん断応力の新表示式

特性数の値を実験的に決定して流動形態図を描き，これを基にして摩擦損失を推定する方法では，慣性領域において特性数 $\overline{\alpha}_{z,1}$, $\alpha_{z,1}$ の値が，測定上の困難によって明確に定められないため，この領域における推定値は誤差が大きくなり，$\sqrt{\omega'/Re^{3/4}_{ta}} \gtrsim 1.7$ では事実上，推定は困難となる．そこで，この慣性領域における摩擦損失を評価するために，従来の理論的ならびに実験的事実に検討を加えた．その結果，慣性領域における摩擦損失が層流の様相を示すようになることを指摘し，τ_w に対して以下に示すような新しい二つの表示式を提案した．

τ_w が，ω' の非常に小さいときには乱流擬定常表示に，ω' が非常に大きいときには層流脈動流れの表示式に漸近するように定めたものが次式

$$\tau_w=\lambda_{q,t}\frac{\rho_0}{8}u_m^2+\frac{4\mu}{R}\left[\{\eta_1(\sqrt{\omega'})-1\}(u_m-u_{m,ta})+\frac{\xi_1(\sqrt{\omega'})}{\omega}\frac{du_m}{dt}\right] \qquad \cdots(6\text{-}6)$$

であり，特性数を流動形態図上において平行移動させたとき層流の特性数に重なるように定めたものが

$$\tau_w=\lambda_{q,t}\frac{\rho_0}{8}u_m^2+\frac{7}{4}\lambda_{s,t}\frac{\rho_0}{8}u_{m,ta}\left[\{\eta_1(\sqrt{\omega_e'})-1\}(u_m-u_{m,ta})+\frac{\xi_1(\sqrt{\omega_e'})}{\omega}\frac{du_m}{dt}\right] \qquad \cdots(6\text{-}11)$$

である．ここで

$$\lambda_{q,t}=0.3164/Re^{1/4}\ ,\quad \lambda_{s,t}=0.3164/Re^{1/4}_{ta}\ ,\quad \omega_e'=115.6\,\omega'/Re^{3/4}_{ta}$$

である．

これら二つの表示式から計算される流動形態を規定する四つの特性数，管摩擦係数のいずれの値も従来の理論から計算される値よりも良好に測定値と一致し，慣性領域における適用についての妥当性を示唆している．したがって乱流壁面せん断応力の第一番目の表示式(6-6)を用いた場合の

$\lambda_u(t)$ と $\lambda_{u,ta}$ はそれぞれ次式

$$\frac{\lambda_u(t)}{\lambda_{q,t}}=1+\frac{\lambda_{q,l}}{\lambda_{q,t}}\left[\{\eta_1(\sqrt{\omega'})-1\}\left(1-\frac{u_{m,ta}}{u_m}\right)+\frac{\tilde{\xi}_1(\sqrt{\omega'})}{\omega u_m}\frac{du_m}{dt}\right] \quad \cdots (6\text{-}14)$$

$$\zeta_1=\frac{\lambda_{u,ta}}{\lambda_{s,t}}=\left(1+\frac{77}{64}A_1{}^2-\frac{231}{16\,384}A_1{}^4+\cdots\right)$$
$$+101.1\frac{\eta_1(\sqrt{\omega'})-1}{R_{eta}{}^{3/4}}A_1{}^2 \quad \cdots (6\text{-}20)$$

で，式(6-11)を用いれば

$$\frac{\lambda_u(t)}{\lambda_{q,t}}=1+\frac{7}{4}\left(\frac{\lambda_{q,t}}{\lambda_{s,t}}\right)^3\left[\{\eta_1(\sqrt{\omega_e'})-1\}\left(1-\frac{u_{m,ta}}{u_m}\right)+\frac{\tilde{\xi}_1(\sqrt{\omega_e'})}{\omega u_m}\frac{du_m}{dt}\right] \quad \cdots (6\text{-}15)$$

$$\zeta_1=\left(1+\frac{77}{64}A_1{}^2-\frac{231}{16\,384}A_1{}^4+\cdots\right)$$
$$+\frac{7}{8}\{\eta_1(\sqrt{\omega_e'})-1\}A_1{}^2 \quad \cdots (6\text{-}21)$$

によって擬定常領域，中間領域および慣性領域のすべての領域における摩擦損失が推定できることになる．

謝　辞

本研究は，大阪大学工学部冶金工学教室において行われたものである．
その間，近江宗一教授からは，終始懇切丁寧な御指導を賜わりました．
また，元阿南工業高等専門学校校長，大阪大学名誉教授　美馬源次郎先生にはあたたかい御支援と御激励を賜わりました．さらに，大阪大学工学部教授福迫達一先生，村田暹先生，森川敬信先生には有益な御討論と御助言を賜わりました．　ここに謹しんで諸先生に深甚の謝意を表します．

また研究の推行に際しては，研究室の諸氏からは多大の御援助をいただきました．あわせて厚く謝意を表します．

文　献

(1) 日本機械学会編，管路・ダクトの流体抵抗便覧，(昭54).

(2) 草間，機論，18-66(昭27)，27.

(3) 草間，機論，18-66(昭27)，97.

(4) Uchida, S., ZAMP, 7 (1956), 403.

(5) Womersley, J. R., J. Physiol., 127 (1955), 553.

(6) 草間・元木，機誌，47-330 (昭19)，430.

(7) 草間，機論，17-56 (昭26)，57.

(8) Fan, C. and Chao, B.-T., ZAMP, 16-3 (1965), 351.

(9) 日本機械学会編，非定常流の流速・流量の測定に関する調査研究分科会報告書，(昭49).

(10) 近江，機習，367 (昭47-9)，27.

(11) 棚橋，基礎流体工学入門，(昭51)，コロナ社.

(12) 岡，レオロジー，(昭51)，裳華房.

(13) 沢本，東京工業大学土木工学科研究報告，20 (1976-11)，17.

(14) 梶内，化学工学，44-3 (昭55)，175.

(15) Biery, J. C., AIChE J., 15-4 (1969-7), 631.

(16) 山口，ターボ機械，7-2 (昭54-2)，95.

(17) 村上，機械の研究，31-8 (1979-8)，905.

(18) Young, D. F., Trans. ASME, Ser. K, 101-3 (1979-8), 157.

(19) 近江，油圧と空気圧，10-7 (昭54)，387.

(20) ストリータ・ワイリー，竹中監訳，流体過渡現象，(昭48)，日本工業新聞社.

(21) 竹中・浦田，油力学，(昭43)，養賢堂.

(22) Emsmann, S., Mitt. Inst. f. Wasserbau und Wasser-Wirtschaft, Techn. Universität Berlin, Nr. 79, Berlin (1973).

(23) Vasiliev, O. F. and Kvon, V. I., Symposium, International Union of Theoretical and Applied Mechanics, Recent Research on Unsteady Boundary Layers, Vol. 2 (1971), 2028.

(24) 喜多・ほか2名，機論，45-397, B (昭54-9)，1243.

(25) Kirmse, R. E., Trans. ASME, Ser. I, 101-4 (1979-12), 436.

(26) Schultz-Grunow, F., Forsch. Geb. Ing.-wes., 11-4 (1940-7/8), 170.
(27) Schlichting, H., Boundary Layer Theory, (1968), McGraw Hill.
(28) 山口・市川, 豊田工専研紀, 4 (昭46), 1.
(29) Jayasinghe, D. A. P., ほか2名, Int. J. Mech. Sci., 16 (1974), 819.
(30) Zielke, W., Trans. ASME, Ser. D, 90-1 (1968-3), 109.
(31) McLachlan, N. W., Bessel Functions For Engineers, (1961), Oxford University Press.
(32) 佐藤・市川, 機論, 39-324 (昭48-8), 2446.
(33) Pechau., W., Tech. Mitt. Krupp. Forsch.-Ber., 22-2 (1964), 48.
(34) 角田・ほか2名, 機講論, 関西支部 (昭52-6), 53.
(35) Phillips, E. M. and Chiang, S. H., Int. J. Engng. Sci., 11 (1973), 579.
(36) 草間・ほか2名, 機講論 (第768回), (昭42-5), 151.
(37) 吹田・ほか2名, 茨城大学工学部研究集報, 24 (昭51-12), 57.
(38) 深野・ほか3名, 機講論, No. 730-16 (昭48-10), 153.
(39) 広瀬・関, 機講論 (中国四国・九州支部), (昭43-11), 81.
(40) 近江・ほか3名, 機論, 41-349 (昭50-9), 2632.
(41) Sicardi, S., ほか2名, Ing. Chim. Ital., 11-9 (1975-9), 127.
(42) 近江・雉井, 機論, 41-347 (昭50-7), 2030.
(43) 布部・ほか2名, 機講論, No. 764-9 (昭51-6), 45.
(44) Daily, J. W., ほか2名, Trans. ASME, 78-5 (1956-7), 1071.
(45) Baird, M. H. I., ほか2名, Canad. J. Chem. Engng., 49-4 (1971-4), 220.
(46) 葦埜・大塚, 機講論, No. 737-3 (昭48-11), 13.
(47) Brown, F. T., ほか2名, Trans. ASME, Ser. D, 91-4 (1969-12), 678.
(48) Funk, J. E. and Wood, D. J., Trans. ASME, Ser. I, 96-4 (1974-12), 365.
(49) 近江・ほか2名, 機論, 43-375 (昭52-11), 4109.
(50) Richardson, E. G., Proc. Phys. Soc., 40 (1928), 206.
(51) Richardson, E. G. and Tyler, E., Proc. Phys. Soc., 42-231 (1929-12), 1.
(52) Sexl, T., Z. Phys., 61-6/7 (1930-5), 349.

(53) 沢本・日野, 日本土木学会論文報告集, 258(昭52-2), 45.

(54) Margolis, D. L. and Brown, F. T., Trans. ASME, Ser. I., 98-1 (1976-3), 70.

(55) 近江・井口, 機講論, 783-3(昭53-3), 67.

(56) Gilbrech, D. A. and Combs, G. D., Proc. 1st Southeastern Conf. Theo. Appl. Mech., (1962), 292.

(57) Yellin, E. L., Circulation Res., 19 (1966-10), 791.

(58) Sarpkaya, T., Trans. ASME, Ser. D, 88-3 (1966-9), 589.

(59) Hershey, D. and Im, C. S., AIChE J., 14-5 (1968-9), 807.

(60) 近江・ほか2名, 機講論, No. 800-17 (昭55-10), 244.