OUKA
Osaka University Knowledge Archive

Title	非弾性薄板の大ひずみ大変形問題の解析法に関する研究
Author(s)	仲町, 英治
Citation	大阪大学, 1979, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/1051
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

非弾性薄板の大ひずみ大変形問題の解析法に関する研究

昭和５４年５月

仲　町　英　治

目　　次

緒　論

第１章　膜体の増分理論

１－１　緒　言 …… 10

１－２　膜体の運動 …… 12

１－３　ひずみ …… 17

１－４　法線ベクトル，面積，体積の増分 …… 21

１－５　合応力，合表面力，合慣性力 …… 22

１－６　運動方程式と仮想仕事の原理 …… 25

１－７　結　言 …… 27

第２章　構成関係式

２－１　緒　言 …… 28

２－２　弾塑性体の構成関係式 …… 29

２－３　弾塑性クリープおよび超塑性体の構成関係式 …… 34

２－４　弾／粘塑性体の構成関係式 …… 37

２－５　結　言 …… 40

第３章　有限要素法による膜体の運動方程式とその解法

３－１　緒　言 …… 42

３－２　弾塑性膜体の非軸対称変形の場合 …… 43

３－２－１　変位関数および基本ベクトル …… 43

３－２－２　Kirchhoff の応力増分と表面力の増分 …… 50

３－２－３　増分形の運動方程式の定式化 …… 50

３－２－４　膜体の運動方程式の組立て …… 53

3－3　弾塑性膜体の軸対称変形の場合 …… 56
3－3－1　クリストツフエル記号 …… 56
3－3－2　増分形の運動方程式の定式化 …… 59
3－4　弾塑性クリープおよび超塑性膜体の軸対称変形の場合 …… 63
3－5　弾／粘塑性膜体の軸対称変形の場合 …… 64
3－6　運動方程式の解法 …… 65
3－6－1　動的問題 …… 65
3－6－2　静的および準静的問題 …… 67
3－7　結　言 …… 67
第4章　薄板の静的大変形解析（1）
（弾塑性体の場合）
4－1　緒　言 …… 70
4－2　薄肉円板の液圧バルジ変形 …… 71
4－2－1　軟鋼円板の液圧バルジ変形 …… 72
4－2－2　アルミニウム円板の液圧バルジ変形(1) …… 74
——— 井関らの解析結果との比較 ———
4－2－3　アルミニウム円板の液圧バルジ変形(2) …… 76
——— 実験結果との比較 ———
4－3　非軸対称薄板の液圧バルジ変形 …… 79
4－3－1　分割数と解の精度 …… 80
4－3－2　正方形板の液圧バルジ変形 …… 82
4－3－3　長方形板の液圧バルジ変形 …… 86
4－3－4　だ円板の液圧バルジ変形 …… 88
4－4　結　言 …… 91

第５章　薄板の静的大変形解析（２）
（弾/粘塑性体および超塑性体の場合）
５－１　緒　言 …… 94
５－２　弾／粘塑性薄肉円板の液圧バルジ変形 …… 96
５－３　超塑性薄肉円板の液圧バルジ変形 …… 103
５－３－１　m値と成形性 …… 103
５－３－２　液圧負荷速度と成形性 …… 108
５－４　結　言 …… 111
第６章　衝撃圧力を受ける円板の動的応答解析
６－１　緒　言 …… 114
６－２　動的応答に対する立上り時間および圧力の大きさの影響 …… 116
６－３　粘性パラメータγの相違による応答の検討 …… 123
６－４　結　言 …… 126
第７章　液圧バルジ変形の実験的解析
７－１　緒　言 …… 128
７－２　モアレトポグラフイ法 …… 129
７－２－１　原　理 …… 130
７－２－２　実験装置 …… 132
７－２－３　モアレじま …… 136
７－２－４　たわみ形状 …… 136
７－３　円板の応力，ひずみ解析 …… 139
７－４　非軸対称薄板のひずみ解析 …… 143
７－５　結　言 …… 145

結　　論 …… 146
謝　　辞 …… 151
文　　献 …… 152
関係発表論文 …… 157

主 要 記 号

本論文に用いる主要な記号は、つぎのとおりである。*

A_e , A_N ：有限要素の面積，内そう関数の面積分

$A_{33}^{\alpha\beta}$ ：平面応力状態の板厚方向ひずみに関係する係数

a ：計量テンソル $a_{\alpha\beta}$ の行列式，実験における円板の半径

$\mathbf{a}_k$, $\mathbf{a}^k$ ：面埋込み座標系の基本ベクトル，反変ベクトル

a_{mn} , a^{mn} ：面埋込み座標系の計量テンソル，反変テンソル

B^{mnst} ：弾性体の材料構成関係式の係数

$b_{\alpha\beta}$, b_{β}^{α} ：面の第2基本形（曲率テンソル）

C_0 , C , $\overline{C}$ ：初期状態，任意の変形後の状態，さらに増分変形した後の状態

C^{mnst} ：亜弾性体の材料構成関係式の係数

C_{ijkl} ：超塑性（クリープ）体の材料構成関係式の係数

D^{mnst} ：弾塑性体の材料構成関係式の係数
（Jaumann の応力増分と Green のひずみ増分との関係）

dA , $d\overline{A}$ ：C , $\overline{C}$ 状態での微小面積素

ds_0, ds , $d\overline{s}$ ：C_0, C , $\overline{C}$ 状態での微小線素

---

* 記号に、" $_0$ ", " $\overline{\ }$ " の添字が付けられた場合は、それぞれ初期（C_0）および増分変形後（$\overline{C}$）状態での量を表すこととする。また、ラテン文字指標の範囲は 1，2，3 、ギリシヤ文字の指標の範囲は 1，2 とする。さらに、添字 " Δ " は、増分を示す。

$d\gamma_{mn}$, $d\gamma_{mn}^{(e)}$, $d\gamma_{mn}^{(p)}$, $d\gamma_{mn}^{(s)}$, $d\gamma_{mn}^{(vp)}$ ：埋込み座標表示の全ひずみ，弾性ひずみ

塑性ひずみ，超塑性（クリープ）ひずみ，粘塑性ひずみのそれぞれの増分

$d\tau$, $d\bar{\tau}$ ： C ， $\bar{C}$ 状態での微小体積素

E ： 縦弾性係数

E^{mnst} ： 弾塑性体の材料構成関係式の係数
（ Oldroyd の応力増分と Green のひずみ増分との関係）

$\mathbf{e}_k$, $\mathbf{e}^k$ ： 直交デカルト座標系の基本ベクトル

（円板の場合： $\mathbf{e}_1$ は半径（ r ）， $\mathbf{e}_2$ は周（ θ ）， $\mathbf{e}_3$ は対称軸（ z ）方向）

（非軸対称板の場合： $\mathbf{e}_1$ はX軸，$\mathbf{e}_2$ はY軸，$\mathbf{e}_3$ はZ軸方向）

$\mathbf{F}'$, $\mathbf{F}$, F^k ：物体力，合物体力ベクトルおよび物体力の反変成分

$\mathbf{f}$, f^m ：加速度ベクトルとその反変成分

f ：Mises の塑性ポテンシャル

$\mathbf{G}_k$ ：埋込み座標系の基本ベクトル

G^{km} ： 埋込み座標系の反変計量テンソル

H ： 平均曲率

h_0 , h ： C_0 ， C 状態での板厚

h_k ： 面埋込み座標の物理成分（計量）

K, K', m, n ： 超塑性，定常クリープ材料定数

K_g ： ガウス曲率

K_{sN}^{rM} , $K_{s\,N\,(\sigma)}^{r\,M}$, $K_{s\,N\,(G)}^{r\,M}$ ：剛性，初期応力，第2初期応力マトリクス*

M ： 膜肉厚中央面

m^{M}_{N} , $\underset{(I)}{m^{M}_{N}}$ ：質量，質量修正マトリクス

$\mathbf{N}_{\alpha}$ ：合応力ベクトル

$\mathbf{n}$, n_k ：単位法線ベクトルとその共変成分

$n^{\alpha\beta}$, $\Delta n^{\alpha\beta}$ ：合応力とその増分

P_0 , P , $\overline{P}$ ： C_0 , C , $\overline{C}$ 状態での物体点

$P^{\alpha\beta}_{\delta\nu}$ ：粘塑性材料の係数

ΔP^{k}_{N} ：荷重マトリクス

p , Δp ： C 状態での圧力とその増分

$\underset{(S)}{R^{rM}_{sN}}$ ：荷重修正マトリクス

$\mathbf{r}$ ：位置ベクトル

r ：半径方向（ $\mathbf{e}_1$ ）座標

r_N , r^N ：節点 N の半径方向距離

S^{t}_{N} , $\underset{(m)}{S^{t}_{N}}$ ：超塑性，超塑性修正マトリクス

s^{mn} , Δs^{mn} ： Kirchhoff 応力テンソルとその増分

$\mathbf{T}'$, $\mathbf{T}$, T^k ：表面力，合表面力ベクトル、および表面力の反変成分

$\mathbf{t}$ ：応力ベクトル

Δt ：増分時間

$\mathbf{u}$, $\Delta\mathbf{u}$ ：変位，変位増分ベクトル

u^k , u_k ：変位ベクトルの反変，共変成分

＊ 添字 N , M は、有限要素の節点を表し、その範囲は、三角形要素では 1,2,3 円輪板要素では 1,2 である。

Δu^k , Δu_k :変位増分ベクトルの反変，共変成分

Δu^k_N , Δu^N_k :節点 N の変位増分の反変，共変成分

(v^k_N , v^N_k , f^k_N , f^N_k も同様に節点での値である。)

V_{mnrt} : 粘塑性材料の構成関係式の係数

$\mathbf{v}$: 速度ベクトル

v^k , v_k : 速度ベクトルの反変，共変成分

v_{mn} : 面埋込み座標表示の変形速度テンソル

X , Y , Z : $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 方向座標

x^m : 空間固定の直交デカルト座標

Y^t_N , $Y^t_{N(m)}$: 粘塑性，粘塑性修正マトリクス

Zmax : 中心のたわみ

$,_\alpha$ $,_3$: θ^α , θ^3 に関する偏微分

$\lfloor_\alpha$, $\sqcup_\alpha$: $\underset{0}{a}_\alpha$, a_α 基準の共変微分

$|_3$, $''_3$: $\underset{0}{a}_3$, a_3 基準の共変微分

α_N , α^N , $\beta_{N\alpha}$, β^N_α : Lagrange の内そう関数の係数

β : NewmanK の β 法における β 値

$\overline{\Gamma}^r_{st}$: 面埋込み座標系のクリストツフエル記号

${}^N\Gamma_{22m}$, ${}_N\Pi^m_{22}$:円輪板要素の直交埋込み座標の周方向共変微分に関する係数

γ_{mn} , $\Delta\gamma_{mn}$:面埋込み座標表示の Green のひずみ，ひずみ増分テンソル

γ :粘性パラメータ

δ^m_n :クロネツカーのデルタ

$\bar{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon}^{(p)}$, $\bar{\varepsilon}^{(s)}$, $\bar{\varepsilon}^{(vp)}$ ： 相当ひずみ，相当塑性ひずみ，相当超塑性（クリープ）ひずみ，相当粘塑性ひずみ

ε_r , ε_θ , ε_t ：半径，周，板厚方向対数ひずみ

ε_X , ε_Y ：X軸，Y軸方向の対数ひずみ

ε_{tc} ：中心の板厚方向対数ひずみ

$\Delta\eta$ ：流れ法則の比例定数

$\overline{\Theta}^m_n$, $\overline{\Omega}^m_n$ ：面埋込み座標と固定の直交デカルト座標との座標変換係数

θ^k ：面埋込み座標

θ^α_N ：節点 N の θ^α 座標

λ ：無次元板厚（$= h/h_0$ ），弾性体の構成関係式においてのみLame の定数

${}^N\Lambda_{33\alpha}$ ${}_N\Xi^\alpha_{33}$ ： a_3 基準の共変微分の係数

μ ：弾性体の構成関係式におけるLame の定数

ν ：ポアソン比

ρ , $\bar{\rho}$ ： C ,$\bar{C}$状態における密度

σ_r , σ_θ ：半径，周方向応力（物理成分）

σ_X , σ_Y ：X軸，Y軸方向応力（物理成分）

σ_y ：降伏応力

$\bar{\sigma}$,$\sqrt{J_2}$ ：相当応力，応力の第2不変量

$\overset{\nabla}{\sigma}{}^{mn}$ ：Jaumann の応力変化率（直交デカルト座標系）

τ^{mn} , $\Delta\tau^{mn}$ ：真応力（ Cauchy 応力）テンソルとその増分

${}_J\Delta\tau^{mn}$ ：Jaumann の応力増分（埋込み座標）

τ'^{mn} ： 偏差応力テンソル

ψ_N , ψ^N ： Lagrange の内そう関数

${}^N\Phi_{s\,t}^{r}$, ${}_N\Psi_{s\,t}^{r}$ ： 反変，共変成分の C 状態での共変微分に関する係数

緒　　論

本論文の目的は、薄板の大ひずみ大変形解析を行う方法を確立し、工学上重要と思われる、各種形状の薄板の静的および動的非弾性変形を研究することにある。板材の大変形解析は、塑性加工を初めとして、構造強度解析，材料試験法などの諸分野において、基礎的な重要な課題である。

現在に至るまで、技術はより過酷な条件に対応すべく進歩して来たが、塑性加工の分野においても、成形製品の特性、加工精度、加工法の経済性に対する厳しい要求に答えるべく、新しい材料、新しい加工技術の導入が活発に行われている。従来から、加工法の改良は、主として実験を主体とした研究によつて行われて来ているが、最近では、非弾性有限変形理論の飛躍的な発展と、電子計算機による数値計算技法の進歩を背景とする数値解析が重要な役割を演ずることが予想され、その発展が強く要請されている。

たとえば、超塑性材料を取上げると、この材料は、くびれなしで数百パーセントの伸びが得られ、良好な成形性を示すが、その変形機構の材料科学的および力学的な研究は始まつて日が浅い。[(1)～(8)] 将来、その利用範囲が広まつていくためには、成形過程中に生じる材料の流れ（ひずみ速度）などが解明されることが必要である。

また、衝撃エネルギを用いた板材成形は、難加工材の成形に適し、大寸法多種小量生産に有利な加工法であることから、その利用が広まるものと思われる。しかしながら、この加工過程は、圧力波形、荷重のかかり方、材料のひずみ速度依存性など、きわめて多様な条件に支配されるので、現在までに非常に多くの実験データが積み上

げられているにもかかわらず、加工時に生じる高速変形挙動の解明は十分になされていない。[9]～[14] 加工条件を単純化した理論解析がこの問題を解きほぐす糸口になると考えられ、そのような研究が待たれる。[15]～[19]

いつぽう、薄板構造物の応力解析は、構造設計の分野において基礎的な役割を占めている。とくに、電子計算機と数値計算技法の発展に裏付けされた数値解析手法が、安全性、信頼性を要求される各種圧力容器、航空機、海中構造物、原子炉容器などの設計に広く用いられるようになつて来た。ところが、超高温、超高圧あるいは衝撃負荷などの過酷な環境下での使用が要求されているような構造物の場合、破壊に至るような大ひずみ大変形を解析することが強く要請されるようになつて来た。このような問題は、後述するような複雑な非線形問題となるために、従来用いられて来た解析的手法は有効ではなく、数値計算が有力になると思われるが、本格的な取組みは始まつて日が浅い。

さて、薄板の大ひずみ大変形を解析する際に直面する問題点を整理すると、つぎのようになる。

（1） 変形、ひずみ、および平衡条件を記述する運動学的および力学的関係式の定式化。[20]～[26]

（2） 材料の構成関係式の定式化。[27]～[31]

（3） かく、もしくは膜体近似の導入。[32],[33]

（4） 解析手法の組立て。[34]～[36]

物体の運動学的、力学的関係式を定式化する基礎としての有限変形理論は、１９５０年代に非線形弾性論として開花し、その後、数

学、材料科学などの隣接諸分野の発達と相まつて、非線形連続体力学として発展した。[20)〜(26)]

本論文で扱う問題の場合、材料の構成関係式の形から、また支配方程式が複雑な非線形偏微分方程式となることから、その解法として、荷重もしくは時間の微小増分間に生じる変形を求める、いわゆる増分法によるのが最も適当であると考えられる。有限変形理論にもとづく増分理論が、微小変形理論と根本的に異なるところは、変形過程のどの状態を基準として定式化するかを明確にしなければならない点である。物体の運動を記述するには、よく知られているように、物体点を追跡していくLagrange の方法と、空間に固定された座標系に関する場としてとらえるEuler[37)〜(39)]の方法の2種がある。前者は、さらに一つの基準状態に関して、固定した座標系を用いる方法と[40)〜(46)]物体中に固定され（埋込まれ）物体の変形とともに、その座標曲線が変形していく埋込み座標系[47)〜(54)]を用いる方法の2種に分けられる。増分理論では、現在と現在から増分時間経過した時点との間で、ひずみ、応力などの状態量とその増分によつて変形挙動が記述されるのであるが、その際、Euler法を用いると定式化は容易であるが、物体点のひずみ（応力）の履歴を追跡するのが難しくなり、基準状態を固定するLagrange 法では、導入されるテンソル量がすべて基準状態に引き直された、いわゆる公称値となり、真の値との関係式に物体の全変形が含まれるため支配方程式が複雑になる欠点を生じる。埋込み座標系を用いる定式化では、このような欠点はなくなるかわりに、座標系が時間とともにゆがむため、その時間変化率が支配方程式中に含まれて来る。

しかし、このゆがみは、そのままひずみを意味しており、数値解

析により計算処理を行う場合には、このことは障害とはならない。

以上のように、基準とする状態、および座標系の選択に関連して3種類の定式化が考えられるが、それらは相互変換可能であり、最近の数値解析においては、問題および解析手法の種類に応じて使い分けられているのが現状である。

材料の特性を表す構成関係式は、式の形の客観性、材料に固有な対称性など、物理的および数学的要請を満たすものでなければならないが、解析に用いることができるためには、できる限り簡単な形であることが望ましい。

また、それはより多くの実験結果を説明し得るものでなければならないが、弾性、非弾性をとおして、現在、この観点から見て十分満足できる式は知られていない。弾塑性体に対して、実際問題の解析に適用することができるものとしては、塑性ポテンシャルを導入して、流れ法則によつて塑性ひずみ増分を与える式を基礎とする方法がある。これは、R. Hill[55]の研究に始まるもので、従来の微小ひずみ理論によつて広く用いられているLevy-Mises型の式を有限ひずみの場合に拡張したものに相当している。[56][57] 本論文においては、これに弾性ひずみを加え、客観性を考慮してJaumannの応力増分とGreenのひずみ増分との線形関係として表現する。

最近、これらの扱いは便宜的なものであつて、複雑多様な塑性体の大ひずみ域での特徴をとらえられない可能性があるとし、数理力学（rational mechanics）的な理論展開とそれにもとづく再検討が行われているが、数値解析に応用できるような具体的な式の形を導出するに至つていない。

ところで、動的な変形過程においては、材料のひずみ速度依存の

性質が顕著になることが多くの研究者によつて報告されている。[9],[15],[16] これを構成関係式の中でいかに表すかについては、様々な提案がなされているが、現在のところ、L. E. Malvern[58] やP. Perzyna[59] らの、非弾性ひずみ速度が弾塑性体として達し得る応力と生じている応力との差——過剰応力(excess stress)——に比例するとした弾／粘塑性理論が数値解析に利用できる数少ないものの一つと思われる。

いつぽう、クリープ現象のような準静的変形過程における、ひずみ速度依存性を有する材料の構成関係式についても、従来、設計と関連させた実験によつて多くのデータが得られている。現在のところ、このような結果を踏まえて、解析に用いることができるのは、クリープ理論にもとづくものと、[29] 上述のPerzyna形の構成関係式であると考えられる。[59]～[63]

いずれにせよ、現在までの静的、準静的、および動的な材料の変形挙動を特性づける構成関係式は、実際の現象との対比によつて、ケースバイケースで処理せざるをえないのが現状であつて、普遍的な理論の完成は、数理力学的展開を軸とする今後の研究に待たれる。

つぎに、板厚が十分に薄いと考えられる平板もしくはかく体においては、板厚方向のひずみや応力の分布はそれ程急激なものではない。従つて、たとえば、板厚中央面上でひずみ、あるいは応力をテイラー展開して、有限項で打切り、中央面上の値とその勾配で代表させることができる。これは、かくあるいは膜体近似といわれるもので、厳密には3次元理論で扱われるべき対象を2次元化することにより、種々の取扱いを容易にするために用いられる近似法である。

工学的によく用いられるものとしては、(I)要素は、曲げと横せん

断に対する剛性がないとする膜体近似による膜理論、(Ⅱ)断面の平面保持と面法線の法線保持の仮定、すなわちKirchhoff-Love の仮説を考慮する曲げ理論、(Ⅲ) Kirchhoff-Love の仮説を導入しない曲げ理論がある。[32),(33),(46)]

ところで、板厚が物体の他の形状寸法に比較して十分に小さい場合、また変形が局所に集中することがないと予想される場合、(Ⅰ)および(Ⅱ)の取扱いで十分良い結果が得られることは、従来から良く知られている。[(40)~(44)] さらに、本論文で対象としている薄板の非弾性大ひずみ大変形の場合、膜力(面内力)が荷重の大部分を支持し、曲げモーメントの役割はそれ程大きくないと考えられる。事実、現在まで多くの研究者により行われた軸対称薄板の張出し変形の解析などにおいて、実験との対比により曲げモーメントを考慮しない理論の有効性が確認されている。[(40)] 曲げ変形を考慮すると支配方程式はきわめて複雑となるので膜理論によるものに比べて、解析の手数が急増するだけでなく、数値計算上の精度が悪くなることが予想されるので、ここで扱う問題においては、(Ⅱ)の扱いをする利点はあまりないと考えられる。

最後に、解析の手法に関して、ハードウエアとしての電子計算機の発達に支えられて、各種の数値解析手法が飛躍的に発展して来ている。その結果、極度に問題を理想化して解析的に扱うよりも、より実際に近い条件下の解を得ることができる手法を用いるようになつて来た。

本論文で扱う幾何学的および材料的非線形問題の解析においては、解析的な扱いは殆んど不可能に近く、もつぱら数値解析手法に頼らざるをえない。数値解析手法として広く用いられているのは、微分

方程式の境界値、初期値問題を直接離散化して数値解析する差分法[40]と、変分原理[36]より直接離散化方程式を得て解析する有限要素法[34],[35]である。

有限要素法は、問題の記述がマトリクスあるいはテンソル表記法によることができ、計算機のプログラムに適していること、任意の形状に対して境界条件の導入が簡単であること、一般に場の問題をはじめ偏微分方程式の解析に対して応用できるというきわめて広い適用性を持つことなどのために、その発展は目ざましく、非線形連続体の分野での数値解析においては最も有力な手法と考えられている。

本論文は、以上に示した要点を踏まえて、第1章では、膜体の厳密な有限要素関係式を定式化するために必要な面埋込み座標表示の運動学的諸量および仮想仕事の原理の式を導出する。

第2章では、膜体の解析に用いることができる材料構成関係式を導出する。弾塑性体に対しては、R.Hill の提案したものに対応するものを、弾／粘塑性体に対しては、P.Perzyna の示したものを、超塑性（弾塑性クリープ）体に対しては、F.K.G.Odqvist[29]の示したNorton 法則を多軸状態へ拡張したものをそれぞれ基礎とする。

第3章では、第1章および第2章で得た関係式を用いて、静的、準静的、および動的な薄板の大ひずみ大変形解析のための増分形の有限要素関係式を導出する。

第4章ないし第6章では、第3章で定式化した有限要素法を用いて、実際の各種形状薄板の液圧バルジ変形を解析し、従来から得られている結果および実験解析結果との比較により、弾塑性、超塑性、

弾／粘塑性それぞれの有限要素解析法の有効性を検討する。

第７章では、解析結果の検討と材料定数を決定するための実験手法を示し、さらにその手法を用いて実験の解析を行つた結果について述べる。薄板の大ひずみ大変形時のひずみ、応力を非接触的に解析する手法として、最近、形状測定法として注目を集めているモアレトポグラフイ法[64)〜(66)]と格子法を併用した新しい方法を提案する。

結論においては、以上に得た結果の総括を行う。

第１章　膜体の増分理論

１－１　緒　　言

板厚が他の寸法に比べて十分に小さい薄板の大ひずみ大変形問題では、従来、膜理論を用いた解析が多く行われている。[43),(44)] このような問題は、素材の変形が大きいこと、しかも生じるひずみもまた大きいために、支配方程式は複雑な非線形方程式となる。そこでは、時間もしくはそれに代わる変数の微小増分間の変化量を求め、それを積分していく、いわゆる増分法による解析がもつとも適当と考えられる。このための基礎方程式を定式化するにあたつては基準状態を明確にして、増分量の加算性（広くは、増分量の積分の方法）について十分に検討しておく必要がある。[21] 例えば、単軸変形状態や変形に伴つて応力やひずみの主軸が回転しない場合に用いられる対数ひずみ、真応力およびそれらの増分といつた量をそのまま一般的な変形の解析の際に持ち込むことはできない。

一般に、物体の運動学的および力学的関係式を定式化する方法に、物体表示法（Lagrange 表示法）および空間表示法（Euler 表示法）がある。本論文で扱う問題では、材料の構成関係式がひずみ履歴に大きく依存する。したがつて、解析にあたつては、すべての物体点のひずみ履歴を追跡していくことが必要となるが、このためには、物体表示法（Lagrange 表示法）を用いるのが便利である。この意味から、ここでは、物体座標系の一種である面埋込み座標による定式化を行う。この座標系は、複雑な曲線座標系となり、しかもその計量テンソルは変形に伴つて刻々変化していくので、解析的手法を用いる場合には、特別な場合を除いて使用が困難であるが、有限要

素法のような数値的解法を用いる場合には、計算上の困難はなく、また座標系の計量テンソルがそのままひずみテンソルと関係づけられるという利点もある。いっぽう、この座標系によるつり合い式の定式化は、変形状態を基準として行うことになるため、導入されるテンソル量が明確な意味を持ち、式の表現が簡潔になる。

本章では、A. E. Green ら[20]のテンソル表記法を用いて、面埋込み座標での増分形の有限要素式の定式化に必要な膜体の運動学的および力学的諸関係式を導出する。

1－2節においては、膜体の運動を記述するために必要な面埋込み座標系における各種ベクトル、テンソル量およびそれらの増分量を示す。

1－3節においては、面埋込み座標系のひずみおよびその増分について述べ、従来の空間座標表示のひずみ増分との相違を示す。

1－4節においては、増分変形前の面埋込み座標系を基準にした膜体の中央面上の法線ベクトル、および面積、体積とそれらの増分を求める。

1－5節においては、増分変形前後の合応力、合表面力、および合慣性力を増分変形前の面埋込み座標系を基準にして示す。

1－6節においては、1－5節で得た諸量を用いて増分形の運動方程式を求め、さらに仮想速度を乗じることで仮想仕事の原理の式を導出する。これは、第3章の有限要素関係式の定式化の基礎式となる。

なお、本章で展開する理論は、瀬口、[47]北川[48]～[54]らによる一般増分理論を、A. E. Green と W. Zerna[20]の膜理論で書き改めたものである。

1－2　膜体の運動

本論文では、無ひずみ無応力状態にある平板が大ひずみ大変形を受ける問題を解析する。この状態を基準状態 C_0 と名付け、その時の時刻を $t = 0$ とする。

膜体内の物体点の位置を示すために、肉厚中央面（以下、中央面と呼ぶ）にそつて θ^1、θ^2 軸を、中央面に垂直方向に θ^3 軸を設定し、座標値（ θ^1, θ^2, θ^3 ）を定める。この座標系は、膜体に固定されたものとする。ただし、$t = 0$ において、ある一つの空間固定の座標系（ x^1, x^2, x^3 ）と一致していると考える。

この膜体が運動し、任意の時刻 $t = t$ において状態Cに移るとき、（ θ^1, θ^2, θ^3 ）で表される物体点の固定座標系に対する座標値 x^k はつぎのように表される。

$$x^k = x^k(\theta^1, \theta^2, \theta^3, t) \qquad \{K = 1,2,3\} \qquad (1\text{-}1)$$

式（１－１）が膜体の運動を表すためには 連続体としての条件よりつぎの関係が成立しなければならない。

$$\det \left| \partial x^k / \partial \theta^j \right| > 0 \qquad (1\text{-}2)$$
$$(k, j = 1, 2, 3)$$

本論文で扱う問題は、すべて式（１－２）が成立するものに限る。

C_0 において、x^k 座標曲線と一致していた θ^k ＝一定である座標曲線は、膜体の運動とともに変化する面埋込み座標系を形成する。膜体の大ひずみ大変形を取扱う場合、この面埋込み座標系は運動の記述が簡単であるために、A. E. Green & W. Zerna[20] や P. M. Naghdi[32),(33)] らによつて広く用いられており、本論文においても、これにならい、一貫して膜体の運動の記述に対して面埋込み座標系を用いる。

図１－１に示すように、任意の変形状態における中央面Ｍを考えると、Ｍ上の任意の点Ｐへの位置ベクトル $\mathbf{r}$ は、θ^1 ,θ^2の関数で表されつぎのようになる。

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2) \qquad (1\text{-}3)$$

点Ｐでの中央面にそう基本ベクトル $\mathbf{a}_\alpha$は、つぎのようにして求められる。

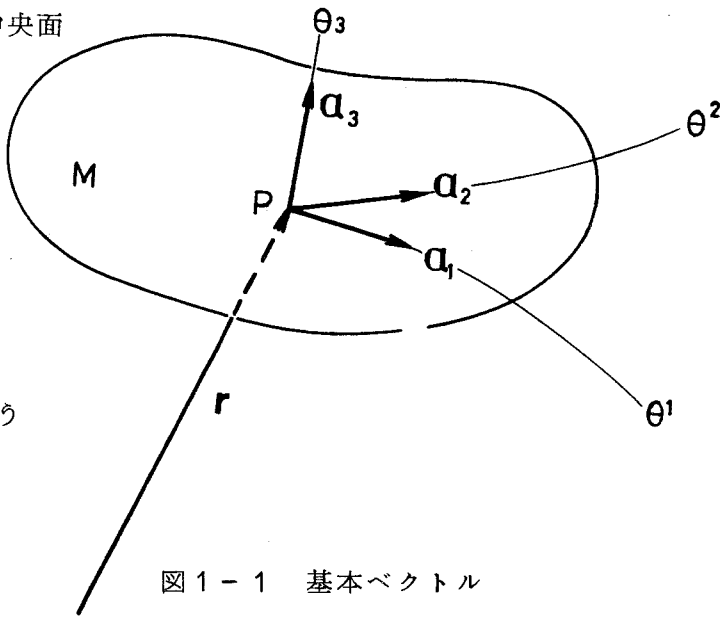


図１－１　基本ベクトル

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r}(\theta^\beta)_{,\alpha} \qquad (1\text{-}4)$$

$(\alpha,\beta = 1, 2)$

上式および以下では、ギリシヤ文字の指標の範囲は、１，２，ラテン文字のそれは１，２，３とし、それぞれの範囲内で総和規約を使用するものとする。
つぎに、点Ｐでの中央面への単位法線ベクトルを $\mathbf{a}_3$とすると、$\mathbf{a}_\alpha$ と $\mathbf{a}_3$にはそれぞれつぎの関係が成立する。

$$\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_\alpha = 0 \quad , \quad \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 1 \quad , \quad \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha} = 0 \qquad (1\text{-}5)$$

なお、$\mathbf{a}_3$方向への曲面Ｍからの距離は、θ^3 $(-\frac{1}{2}h_0 \leqq \theta^3 \leqq \frac{1}{2}h_0$, h_0：板厚）で表される。

以上に示した基本ベクトル $\mathbf{a}_m$によつて膜体の運動を記述する。図１－２のように、初期基準状態 C_0 から、任意の変形が加わつた後の状態をＣ，さらにそれに微小変形が加わつた後の状態を $\bar{C}$とする。C_0 , Ｃ, $\bar{C}$ において、その基本ベクトルを $\mathbf{a}_{0m}$, $\mathbf{a}_m$, $\bar{\mathbf{a}}_m$で表す。 C_0からＣへ膜体が変形するとき、物体点Ｐの変位ベクトル $\mathbf{u}$ は、 C_0での基本ベクトル $\mathbf{a}_{0m}$で成分表示するとつぎのようになる。

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= u^\alpha(\theta^\beta)\,\mathbf{a}_{0\alpha} + u^3(\theta^\beta)\,\mathbf{a}_{03} \\ &= u_\alpha(\theta^\beta)\,\mathbf{a}_0^\alpha + u_3(\theta^\beta)\,\mathbf{a}_0^3\end{aligned} \qquad (1\text{-}6)$$

また、C から $\bar{C}$ への点P の変位増分ベクトル $\Delta\mathbf{u}$ をCでの基本ベクトル $\mathbf{a}_i$ で成分表示するとつぎのようになる。

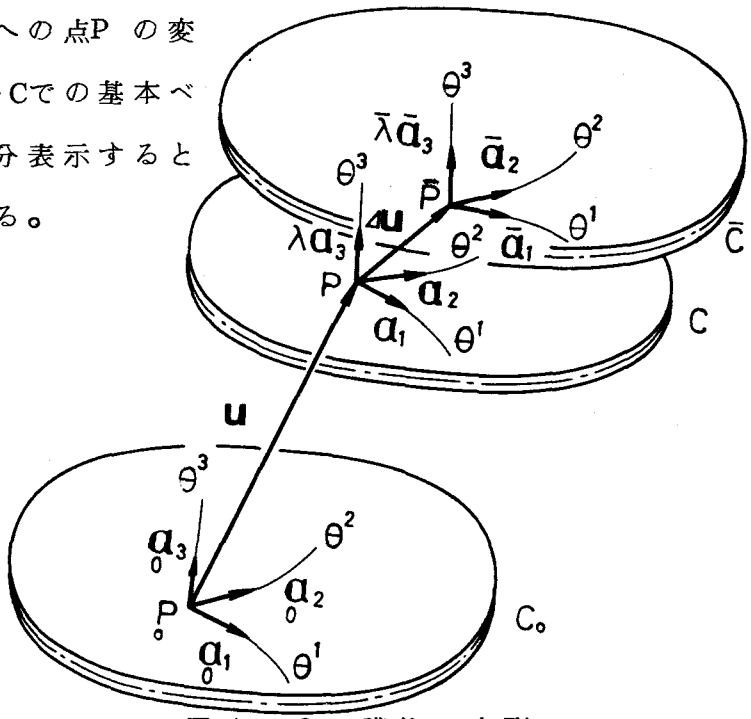


図 1 − 2　膜体の変形

$$\Delta\mathbf{u}=\Delta u^{\alpha}(\theta^{\beta})\,\mathbf{a}_{\alpha}+\Delta u^{3}(\theta^{\beta})\lambda\,\mathbf{a}_{3}$$
$$=\Delta u_{\alpha}(\theta^{\beta})\,\mathbf{a}^{\alpha}+\Delta u_{3}(\theta^{\beta})\mathbf{a}^{3}/\lambda \qquad (1\text{-}7)$$

式（1−6）、（1−7）において、$\mathbf{a}_{0}^{\alpha}$，$\mathbf{a}^{\alpha}$ は基本ベクトル $\mathbf{a}_{0\alpha}$，$\mathbf{a}_{\alpha}$ の反変ベクトルで、

（δ_{β}^{α} ：クロネツカーのデルタ）$\mathbf{a}_{0}^{\alpha}\cdot\mathbf{a}_{0\beta}=\delta_{\beta}^{\alpha}$，$\mathbf{a}^{\alpha}\cdot\mathbf{a}_{\beta}=\delta_{\beta}^{\alpha}$

の関係があり、$\mathbf{a}_{0}^{3}$ は $\mathbf{a}_{03}$，$\mathbf{a}^{3}$ は $\mathbf{a}_{3}$ とそれぞれ等しい。λ は無次元板厚で、C_0 および C 状態での板厚を h_0 および hとすると、つぎのように表される。

$$\lambda = h / h_0 \qquad (1\text{-}8)$$

式（1−6），（1−7）を用いて、C および $\bar{C}$ 状態での基本ベクトル $\mathbf{a}_m$，$\bar{\mathbf{a}}_m$ を求めるとつぎのようになる。なお、以下において添字〝$_0$〟，〝$\bar{\ }$〟，は、C_0，$\bar{C}$ 状態での量を表すものとする。

$$\mathbf{a}_{\alpha}=(\delta_{\alpha}^{\beta}+u^{\beta}|_{\alpha})\,\mathbf{a}_{0\beta}+u^{3}|_{\alpha}\,\mathbf{a}_{03}$$
$$\mathbf{a}_{3}=\left[(1+u^{3}|_{3})\,\mathbf{a}_{03}+u^{\alpha}|_{3}\,\mathbf{a}_{0\alpha}\right]/\lambda \qquad (1\text{-}9)_1$$

$$\bar{\mathbf{a}}_\alpha = \left(\delta^\beta_\alpha + \Delta u^\beta{}_{,,\alpha} \right) \mathbf{a}_\beta + \Delta u^3{}_{,,\alpha}\, \lambda\, \mathbf{a}_3$$

$$\bar{\mathbf{a}}_3 = \left[(1 + \Delta u^3{}_{,,3})\lambda\, \mathbf{a}_3 + \Delta u^\alpha{}_{,,3}\, \mathbf{a}_\alpha \right] / \bar{\lambda} \qquad (1\text{-}9)_2$$

$$\begin{cases} u^\beta{}_{|\alpha} = u^\beta{}_{\perp\alpha} - b^\beta_{0\alpha}\, u^3 \\ u^3{}_{|\alpha} = u^3{}_{,\alpha} + b_{0\alpha\beta} u^\beta \\ \Delta u^\beta{}_{,,\alpha} = \Delta u^\beta{}_{\perp\!\perp\alpha} - b^\beta_\alpha\, \Delta u^3 \lambda \\ \Delta u^3{}_{,,\alpha} = \Delta u^3{}_{,\alpha} + b_{\alpha\beta} \Delta u^\beta / \lambda \end{cases} \qquad (1\text{-}10)$$

ここで、"$\perp_\alpha$"，"$\perp\!\!\perp_\alpha$"は、$\mathbf{a}_{0\alpha}$，$\mathbf{a}_\alpha$ 基準の共変微分を表し、"$|_3$"，"$,,_3$"は、$\mathbf{a}_{03}$，$\mathbf{a}_3$ 基準の共変微分を表す。$b_{\alpha\beta}$ は面の第2基本形（曲率テンソル）であり、つぎに示すように2階の対称テンソルである。なお、初期状態 C_0 において、中央面は平面であるために $b_{0\alpha\beta}$，$b^\beta_{0\alpha}$ は零である。

$$b_{\alpha\beta} = -\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} = -\mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha} = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta} = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{\beta,\alpha}$$

$$\mathbf{a}_{3,\alpha} = -b^\beta_\alpha\, \mathbf{a}_\beta \ , \quad b^\alpha_\beta = a^{\alpha\upsilon} b_{\upsilon\beta} = a_{\beta\upsilon} b^{\alpha\upsilon} \ , \quad b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} \qquad (1\text{-}11)_1$$

平均曲率Hとガウス曲率 K_g はつぎのように定義される。

$$H = b^\alpha_\alpha / 2.$$

$$K_g = \det |b_{\alpha\beta}| / a = b^1_1\, b^2_2 - b^1_2\, b^2_1$$

$$a = \det |a_{\alpha\beta}| \qquad (1\text{-}11)_2$$

Cから $\bar{C}$状態への変位増分が無限小であるとすると、つぎの関係が成立する。

$$\bar{\mathbf{a}}^\alpha = \left(\delta^\alpha_\beta - \Delta u^\alpha{}_{,,\beta} \right) \mathbf{a}^\beta - \Delta u^\alpha{}_{,,3} \mathbf{a}^3 / \lambda$$

$$\bar{\mathbf{a}}^3 = \bar{\mathbf{a}}_3 \qquad (1\text{-}12)$$

C，$\bar{C}$ 状態における面埋込み座標の計量テンソル $a_{\alpha\beta}$，$\bar{a}_{\alpha\beta}$，$\bar{a}^{\alpha\beta}$ の間には、式（1－9），（1－12）よりつぎの関係が成立する。

$$a_{\alpha\beta} = a_{0\alpha\beta} + u_{\alpha}|_{\beta} + u_{\beta}|_{\alpha} + u^{j}|_{\beta} u_{j}|_{\alpha}$$

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + \Delta u_{\alpha}{}''_{\beta} + \Delta u_{\beta}{}''_{\alpha} + \Delta u^{j}{}''_{\beta} \Delta u_{j}{}''_{\alpha}$$

$$\cong a_{\alpha\beta} + \Delta u_{\alpha}{}''_{\beta} + \Delta u_{\beta}{}''_{\alpha}$$

$$\bar{a}^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta} - a^{\lambda\alpha}\, \Delta u^{\beta}{}''_{\lambda} - a^{\beta\upsilon}\, \Delta u^{\alpha}{}''_{\upsilon} + a^{\lambda\upsilon}\, \Delta u^{\alpha}{}''_{\upsilon} \Delta u^{\beta}{}''_{\lambda}$$

$$\cong a^{\alpha\beta} - a^{\lambda\alpha}\, \Delta u^{\beta}{}''_{\lambda} - a^{\beta\upsilon}\, \Delta u^{\alpha}{}''_{\upsilon} \qquad (1\text{-}13)$$

つぎに、無次元板厚 λ、$\bar{\lambda}$ を変位成分表示するとつぎのようになる。

$$\lambda^2 = (1 + \Delta\lambda_0)^2 = 1 + 2\Delta\lambda_0 + \Delta\lambda_0^2$$

$$= 1 + 2u_3|_3 + u^k|_3 u_k|_3$$

$$\bar{\lambda}^2 = (\lambda + \Delta\lambda)^2 = \lambda^2 + 2\lambda\Delta\lambda$$

$$= \lambda^2 + 2\Delta u^3{}''_3 \lambda^2 + \Delta u^k{}''_3 \Delta u_k{}''_3 \cong \lambda^2 + 2\Delta u_3{}''_3 \qquad (1\text{-}14)$$

ただし、上式では、変位増分を微小量として取扱うのと同様に、$\Delta\lambda$ を微小量と考え2乗の項を無視している。

C状態での面埋込み座標におけるクリストツフエル記号はつぎのようになる。

$$\bar{\Gamma}_{\beta\upsilon\alpha} = (a_{\alpha\beta,\upsilon} + a_{\alpha\upsilon,\beta} - a_{\beta\upsilon,\alpha})/2$$

$$\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\upsilon} = a^{\alpha\lambda}\bar{\Gamma}_{\beta\upsilon\lambda} = \mathbf{a}^{\alpha}\cdot\mathbf{a}_{\upsilon,\beta} = \mathbf{a}^{\alpha}\cdot\mathbf{a}_{\beta,\upsilon} = -\mathbf{a}_{\upsilon}\cdot\mathbf{a}^{\alpha}{}_{,\beta}$$

$$\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\beta 3} = \mathbf{a}^{\alpha}\cdot\mathbf{a}_{3,\beta} = -\mathbf{a}_{3}\cdot\mathbf{a}^{\alpha}{}_{,\beta} = -b^{\alpha}_{\beta}$$

$$\bar{\Gamma}^{3}_{\alpha\beta} = \mathbf{a}^{3}\cdot\mathbf{a}_{\alpha,\beta} = -\mathbf{a}_{\beta}\cdot\mathbf{a}^{3}{}_{,\alpha} = b_{\alpha\beta}$$

$$\bar{\Gamma}^{3}_{\alpha 3} = \mathbf{a}^{3}\cdot\mathbf{a}_{3,\alpha} = 0\ ,\ \bar{\Gamma}^{3}_{33} = \bar{\Gamma}^{\alpha}_{33} = 0 \qquad (1\text{-}15)$$

式（１－１５）により、基本ベクトルの微分はつぎのように表される。

$$\mathbf{a}_{n,\alpha} = \bar{\Gamma}^{m}_{n\alpha}\mathbf{a}_{m} \qquad (1\text{-}16)$$

１－３　ひずみ

図１－２に示す初期状態 C_0，変形後の状態 C および増分変形後の状態 $\bar{C}$ における膜体の点 P_0，P および $\bar{P}$ 付近の中央面にそう微小線素を ds_0，ds，$d\bar{s}$ とすると、それぞれの線素の２乗はつぎのように表される。[20),(21)]

$$\begin{aligned} ds_0^2 &= a_{0\alpha\beta}\, d\theta^{\alpha}\, d\theta^{\beta} \\ ds^2 &= a_{\alpha\beta}\, d\theta^{\alpha}\, d\theta^{\beta} \\ d\bar{s}^2 &= \bar{a}_{\alpha\beta}\, d\theta^{\alpha}\, d\theta^{\beta} \end{aligned} \qquad (1\text{-}17)$$

着目している物体点付近の変形の測度として、線素の２乗差を用いるとつぎのように表される。

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\,\gamma_{\alpha\beta} d\theta^{\alpha}\, d\theta^{\beta} \qquad (1\text{-}18)$$

ここで、$\gamma_{\alpha\beta}$ は面埋込み座標のひずみテンソルで、式（１－17）よりつぎのように表される。

$$\gamma_{\alpha\beta} = (a_{\alpha\beta} - a_{0\alpha\beta})/2 \qquad (1\text{-}19)$$

さらに、中央面に垂直な方向のひずみテンソル、つまり板厚方向のひずみテンソル γ_{33} は、同様にしてつぎのように表される。

$$\gamma_{33} = (\lambda^2 - 1)/2 = \Delta\lambda_0 + \Delta\lambda_0^2/2 \qquad (1\text{-}20)_1$$

膜体の変形では、$\mathbf{a}_3$ 方向はつねに中央面に垂直であるから、つぎの関係が成立する。

$$\gamma_{3\alpha} = \gamma_{\alpha 3} = 0 \qquad (1\text{-}20)_2$$

同様に、微小増分変形前後で、線素の2乗差をとることによりひずみ増分テンソル $\Delta\gamma_{\alpha\beta}$, $\Delta\gamma_{33}$ を求めるとつぎのようになる。

$$d\bar{s}^2 - ds^2 = 2\,\Delta\gamma_{\alpha\beta} d\theta^\alpha\, d\theta^\beta$$

$$\Delta\gamma_{\alpha\beta} = (\bar{a}_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta})/2$$
$$\Delta\gamma_{33} = (\bar{\lambda}^2 - \lambda^2)/2 \cong \lambda\Delta\lambda$$
$$\Delta\gamma_{3\alpha} = \Delta\gamma_{\alpha 3} = 0 \qquad (1\text{-}21)$$

式（1－13），（1－14）より、ひずみテンソルおよびその増分は、変位成分およびその増分によつてつぎのように表される。

$$\gamma_{\alpha\beta} = (u_\alpha|_\beta + u_\beta|_\alpha + u_m|_\alpha u^m|_\beta)/2$$
$$\gamma_{33} = u_3|_3 + (u_m|_3 u^m|_3)/2$$
$$\Delta\gamma_{\alpha\beta} = (\Delta u_{\alpha''\beta} + \Delta u_{\beta''\alpha})/2$$
$$\Delta\gamma_{33} = \Delta u_{3''3} \qquad (1\text{-}22)$$

ところで、$\mathbf{v}$ を物体点Pでの速度ベクトルとすると、つぎのように成分表示される。

$$\mathbf{v} = v_\alpha \mathbf{a}^\alpha + v_3/\lambda\ \mathbf{a}_3$$
$$= v^\alpha \mathbf{a}_\alpha + v^3\ \lambda\ \mathbf{a}_3 \qquad (1\text{-}23)$$

つぎに、変形速度テンソル v_{mn} を求めると、つぎのようになる。

$$v_{\alpha\beta} = (v_{\alpha''\beta} + v_{\beta''\alpha})/2$$
$$v_{33} = v_{3''3} \quad , \quad v_{3\alpha} = v_{\alpha 3} = 0 \qquad (1\text{-}24)$$

上式に、微小時間間隔 Δt をかけると、増分ひずみ $\Delta\gamma_{mn}$ が得られる。これは、第２章で述べる構成関係式の中で重要な役割をする。

ひずみテンソル γ_{mn} は、式（１－１８），（１－２１）から明らかなように加算的な量であつて,ひずみ増分テンソル $\Delta\gamma_{mn}$ の総和として表すことができる。[21],[47]～[54]これは、埋込み座標の長所の一つである。これに対して、つぎのひずみ増分テンソル Δe_{mn} に対応する量を各変形段階ごとに加え合わせ、

$$\tilde{e}_{mn} = \Sigma\Delta e_{mn} = \Sigma \Delta\gamma_{rs} \frac{\partial\theta^r}{\partial\bar{x}^m}\frac{\partial\theta^s}{\partial\bar{x}^n} \qquad (1\text{-}25)$$

全ひずみと定義して、大ひずみ問題を増分理論によつて解析している例[44]もあるが、一般的に言つて、ひずみの主軸が回転する場合については、時々刻々変化する空間座標で定義されたひずみ増分の和は物理的意味を持たない。ただ、伸びひずみのみが存在する場合、たとえば、円板のバルジ試験のような軸対称変形の特別な場合に対しては、[40]～[43]式（１－２５）により得られた $\tilde{e}_{mn}$ は対数ひずみとなり、物理的意味を持つことがつぎのように示される。

簡単な例として、図１－３に示す薄肉円板の微小要素の変形を取り上げ、Green のひずみテンソル $\gamma_{(kk)}$, 対数ひずみ $\varepsilon_{(kk)}$ ，およびそれぞれの増分を示す。

なお、添字 (kk) は、総和をとらないことを表すものとする。

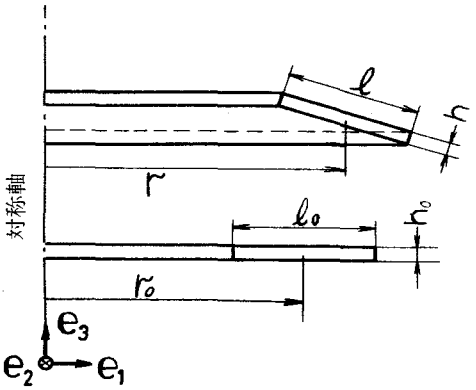


図１－３　軸対称変形

$$\gamma_{11} = \left[(1/l_0)^2 - 1\right]/2 \quad , \quad \Delta\gamma_{11} \cong l\Delta l/l_0^2$$
$$\gamma_{22} = (r^2 - r_0^2)/2 \quad , \quad \Delta\gamma_{22} \cong r\Delta r$$

$$\gamma_{33} = [(h/h_0)^2 - 1]/2 \quad , \quad \Delta\gamma_{33} \cong h\Delta h/h_0^2 \qquad (1\text{-}26)_1$$

$$\varepsilon_{11} = \ln l/l_0 \quad , \quad \Delta\varepsilon_{11} = \Delta l/l$$

$$\varepsilon_{22} = \ln r/r_0 \quad , \quad \Delta\varepsilon_{22} = \Delta r/r$$

$$\varepsilon_{33} = \ln h/h_0 \quad , \quad \Delta\varepsilon_{33} = \Delta h/h \qquad (1\text{-}26)_2$$

上式のGreenのひずみ増分 $\Delta\gamma_{(kk)}$ を空間座標（直交デカルト座標系 $\mathbf{e}_m$）へ座標変換する（物理成分表示）とつぎのようになる。

$$\Delta e_{(mm)} = G^{(mm)}\,\Delta\gamma_{(mm)} \qquad (1\text{-}26)_3$$

ここで、$G^{(mm)}$は埋込み座標系の反変計量テンソルでつぎのように表される。

$$G^{11} = (l_0/l)^2, \quad G^{22} = 1/r^2 \quad , \quad G^{33} = (h_0/h)^2 \qquad (1\text{-}26)_4$$

式（1－26）$_{1\sim4}$ より、それぞれのひずみおよび増分量の間に、つぎの等式が成立することがわかる。

$$\Delta e_{(mm)} = G^{(mm)}\,\Delta\gamma_{(mm)} = \Delta\varepsilon_{(mm)}$$
$$\tilde{e}_{(mm)} = \frac{1}{2}\ln(1+2\gamma_{(mm)}\,G_0^{(mm)}) = \varepsilon_{(mm)} \qquad (1\text{-}26)_5$$

以上のような特別な場合を除いて、一般には、ひずみ $\tilde{e}_{mn}$ は対数ひずみでもなく、また、つぎのテンソル変換で得られるひずみ e_{mn} とも区別されなくてはならない。

$$e_{mn} = \gamma_{jk}\,\frac{\partial\theta^j}{\partial\bar{x}^m}\,\frac{\partial\theta^k}{\partial\bar{x}^n} \qquad (1\text{-}27)$$

1－4　法線ベクトル，面積，体積の増分

図1－2に示すC，$\overline{C}$状態における膜体の同じ物体座標を有する表面に立てた単位法線ベクトルを、$\mathbf{n}$，$\overline{\mathbf{n}}$で表し、それぞれつぎのように成分表示する。

$$\mathbf{n} = n_\alpha \mathbf{a}^\alpha + n_3 / \lambda \, \mathbf{a}^3$$
$$\overline{\mathbf{n}} = \overline{n}_\alpha \overline{\mathbf{a}}^\alpha + \overline{n}_3 / \overline{\lambda} \, \overline{\mathbf{a}}^3 \qquad (1\text{-}28)$$

式（1－12）を用いると、ベクトル$\mathbf{n}$の増分$\Delta\mathbf{n}$はつぎのように表される。

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{n} &= \overline{\mathbf{n}} - \mathbf{n} \\ &= \Delta n_\alpha \mathbf{a}^\alpha - n_\alpha (\Delta u^\alpha{}_{,,\beta} \mathbf{a}^\beta + \Delta u^\alpha{}_{,,3} \mathbf{a}^3 / \lambda) + n_3 \Delta u^\alpha{}_{,,3} / \lambda^2 \mathbf{a}_\alpha \\ &\quad + (\Delta n_3 / \lambda - 2 n_3 \Delta\lambda / \lambda^2 + n_3 \Delta u^3{}_{,,3} / \lambda) \, \mathbf{a}_3 \end{aligned} \qquad (1\text{-}29)$$

ただし、　$\Delta n_k = \overline{n}_k - n_k$

同様に、中央面に対しての単位法線ベクトルの増分$\Delta\mathbf{n}'$を示すとつぎのようになる。

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{n}' &= \overline{\mathbf{a}}_3 - \mathbf{a}_3 \\ &= (\Delta u^3{}_{,,3} \lambda \mathbf{a}_3 + \Delta u^\alpha{}_{,,3} \mathbf{a}_\alpha) / \overline{\lambda} - \Delta\lambda / \lambda \mathbf{a}_3 \end{aligned} \qquad (1\text{-}30)$$

計量テンソル　$a_{\alpha\beta}$，$\overline{a}_{\alpha\beta}$の行列式をa，$\overline{a}$　とおくと、変位増分$\Delta\mathbf{u}$を微小と考えることにより、式（1－13）からつぎの関係を得る。

$$\begin{aligned}\overline{a} &= (1 + 2 \Delta u^\alpha{}_{,,\alpha}) \, a \\ \Delta a &= \overline{a} - a = 2 \Delta u^\alpha{}_{,,\alpha} a \end{aligned} \qquad (1\text{-}31)$$

いっぽう、単位法線ベクトルと微小面素に関するNansonの関係式[21),(25)]は、増分変形前後でつぎのように表される。

$$n_s \bar{\lambda} \sqrt{a}\ dA = \bar{n}_s \lambda \sqrt{a}\ d\bar{A} \qquad (1\text{-}32)$$

面ベクトルの増分量 $\Delta(n_k dA)$ は、式（ 1 − 31 ）を代入することで得られつぎのようになる。

$$\Delta(n_k dA) = n_k (\Delta u^{\alpha}{}_{,\alpha} + \Delta\lambda/\lambda)\ dA \qquad (1\text{-}33)$$

ここで、関係式 $n_g n^g = 1$ を用いると、式（ 1 − 33 ）から微小面積素 dA の増分量 Δ（ dA ）が得られつぎのようになる。

$$\Delta(dA) = \left[(\Delta u^{\alpha}{}_{,\alpha} + \Delta\lambda/\lambda) - n^s \Delta n_s\right] dA \qquad (1\text{-}34)$$

つぎに、P ，$\bar{P}$ 近傍の微小体積素を、 $d\tau$ ，$d\bar{\tau}$ で表すと、質量保存則からつぎの関係を得る。

$$\lambda \sqrt{a}\ d\bar{\tau} = \bar{\lambda} \sqrt{\bar{a}}\ d\tau \qquad (1\text{-}35)$$

微小体積素の増分 Δ（ $d\tau$ ）は、式（ 1 − 31 ）を代入することで得られつぎのようになる。

$$\Delta(d\tau) = (\Delta u^{\alpha}{}_{,\alpha} + \Delta\lambda/\lambda)\ d\tau \qquad (1\text{-}36)$$

質量保存則は、増分変形前後の密度を ρ ，$\bar{\rho}$ とすると、つぎのように表される。

$$\rho\ \lambda \sqrt{a} = \bar{\rho}\ \bar{\lambda} \sqrt{\bar{a}} \qquad (1\text{-}37)$$

1 − 5　合応力，合表面力，合慣性力

物体に作用する外力は、物体要素に働く物体力（慣性力を含む）と物体の表面要素に作用する表面力とがある。さらに、応力は物体内部の仮想的な面に作用する単位面積あたりの力として定義される。ここでは、つぎの関係を満足する基本ベクトル $\mathbf{G}_k$ を採用して諸量

を表した後、合応力，合表面力，合慣性力を求める。なお、この埋込み座標系の基本ベクトル $\mathbf{G}_k$、およびその計量テンソル G_{mn}，G^{mn} は第2章においても採用する。

$$\mathbf{G}_\alpha = \mathbf{a}_\alpha \quad , \quad \mathbf{G}_3 = \lambda\, \mathbf{a}_3$$

$$\bar{\mathbf{G}}_\alpha = \bar{\mathbf{a}}_\alpha \qquad \bar{\mathbf{G}}_3 = \bar{\lambda}\, \bar{\mathbf{a}}_3 \qquad (1\text{-}38)$$

C状態での点Pにおける応力ベクトルを $\mathbf{t}$，$\overline{C}$ 状態での点 $\overline{P}$ における応力ベクトルを $\bar{\mathbf{t}}$、同じ応力ベクトルをC状態での点Pを含む面で定義して ${}_o\bar{\mathbf{t}}$ で表す。このとき、つぎの応力テンソルとその増分を導入する。

$$\mathbf{t} = n_k\ \tau^{kj}\mathbf{G}_j = n_k\ s^{kj}\mathbf{G}_j$$

$$\bar{\mathbf{t}} = \bar{n}_k\ \bar{\tau}^{kj}\ \bar{\mathbf{G}}_j \ , \ {}_o\bar{\mathbf{t}} = n_k\ \bar{s}^{kj}\ \bar{\mathbf{G}}_j \qquad (1\text{-}39)$$

$$\bar{\tau}^{kj} = \tau^{kj} + \Delta\tau^{kj} \ , \ \bar{s}^{kj} = s^{kj} + \Delta s^{kj}$$

$$\Delta s^{kj} = \Delta\tau^{kj} + \tau^{kj}(\Delta u^{\alpha}{}_{|\,|\alpha} + \Delta\lambda/\lambda) \qquad (1\text{-}40)$$

ここで、τ^{mn} は真応力（Cauchyの応力）、s^{mn} はC状態を基準としたKirchhoff応力、$\Delta\tau^{mn}$，Δs^{mn} はそれぞれの増分である。

なお、n_k，$\bar{n}_k$ はそれぞれC，$\overline{C}$ 状態で点P，$\overline{P}$ を含む面の単位法線ベクトルの成分である。

物体の表面および境界上において、それぞれの応力ベクトルは単位面積あたりの表面力のベクトルとつり合っている。その関係を示すとつぎのようになる。

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}' = T^m\mathbf{G}_m \qquad (\text{Cの面A上で})$$

$$\bar{\mathbf{t}} = \bar{\mathbf{T}}' = \bar{T}^m\,\bar{\mathbf{G}}_m \qquad (\overline{C}\text{の面}\overline{A}\text{上で})$$

$$ {}_0\bar{\mathbf{t}} = {}_0\bar{\mathbf{T}}' = {}_0\bar{T}^m \bar{\mathbf{G}}_m \qquad (\text{C の面 A 上で}) $$

$$ \bar{T}^m = T^m + \Delta T^m \ , \quad {}_0\bar{T}^m = T^m + \Delta \hat{T}^m $$

$$ \Delta \hat{T}^m = \Delta T^m + T^k \Delta u^m{}_{|| k} \qquad (1\text{-}41) $$

ここで、$\mathbf{T}'$, $\bar{\mathbf{T}}'$は、それぞれ C , $\bar{C}$で作用している表面力のベクトル、また ${}_0\bar{\mathbf{T}}'$は、$\bar{\mathbf{T}}'$をCの面上で考えたものになつている。

増分変形前後の加速度ベクトルを

$$ \mathbf{f} = f^k \mathbf{G}_k \ , \quad \bar{\mathbf{f}} = \bar{f}^k \bar{\mathbf{G}}_k $$

$$ \bar{f}^k = f^k + \Delta f^k \qquad (1\text{-}42) $$

と表せば、単位体積あたりの物体力は、慣性力のみが作用しているとみなした場合はつぎのように表される。

$$ \mathbf{F}' = \rho \mathbf{f} \ , \quad \bar{\mathbf{F}}' = \bar{\rho} \ \bar{\mathbf{f}} \qquad (1\text{-}43) $$

つぎに、膜体を対象として、面埋込み座標系の基本ベクトル $\mathbf{a}_m$ 基準での合応力，合表面力，合慣性力の表示を行う。

平面応力状態の膜体では、つぎの関係が成立している。

$$ \tau^{\alpha 3} = \Delta\tau^{\alpha 3} = \tau^{33} = \Delta\tau^{33} = 0 $$

$$ s^{\alpha 3} = \Delta s^{\alpha 3} = s^{33} = \Delta s^{33} = 0 \qquad (1\text{-}44) $$

θ^α ＝一定の面に働く単位座標あたりの合応力 $\mathbf{N}_\alpha$は、式（1－39）を考慮すると、変形前後でつぎのように表される。

$$ \mathbf{N}_\alpha = \sqrt{a}\ n^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta \ , \quad \bar{\mathbf{N}}_\alpha = \sqrt{\bar{a}}\ \bar{n}^{\alpha\beta} \bar{\mathbf{a}}_\beta $$

$$ n^{\alpha\beta} = \tau^{\alpha\beta\lambda} \underset{0}{h} \ , \quad \bar{n}^{\alpha\beta} = n^{\alpha\beta} + \Delta n^{\alpha\beta} + n^{\alpha\beta} (\Delta\lambda/\lambda) $$

$$ \Delta n^{\alpha\beta} = \Delta\tau^{\alpha\beta} \lambda \underset{0}{h} \qquad (1\text{-}45) $$

中央面の単位座標面積あたりに働く合表面力を $\mathbf{T}$, $\bar{\mathbf{T}}$, ${}_0\bar{\mathbf{T}}$ とし、それらをつぎのように成分表示する。

$$\mathbf{T} = \sqrt{a}\,\mathbf{T}' = \sqrt{a}(T^{\alpha}\mathbf{a}_{\alpha} + T^{3}\lambda\,\mathbf{a}_{3}) \qquad (\text{Cの面A上で})$$
$$\bar{\mathbf{T}} = \sqrt{\bar{a}}\,\bar{\mathbf{T}}' = \sqrt{\bar{a}}(\bar{T}^{\alpha}\bar{\mathbf{a}}_{\alpha} + \bar{T}^{3}\bar{\lambda}\,\bar{\mathbf{a}}_{3}) \qquad (\bar{C}\text{の面}\bar{A}\text{上で})$$
$${}_{o}\bar{\mathbf{T}} = \sqrt{a}\,{}_{o}\bar{\mathbf{T}}' = \sqrt{a}({}_{o}\bar{T}^{\alpha}\bar{\mathbf{a}}_{\alpha} + {}_{o}\bar{T}^{3}\bar{\lambda}\,\bar{\mathbf{a}}_{3}) \qquad (\text{Cの面A上で})$$
$$(1\text{-}46)$$

ここでは、中央面に対して垂直方向に圧力が加わる場合の圧力pおよびその増分 Δp と表面力増分 $\Delta\hat{T}^{k}$ の関係を求めておく。式（1－39）～（1－41）を用いて表すとつぎのようになる。

$$\Delta\hat{T}^{\alpha} = -p/\lambda\ \Delta u^{3}{}_{,\beta}\ \lambda^{2}\ a^{\beta\alpha}$$
$$\Delta\hat{T}^{3} = \Delta p/\lambda + p/\lambda\ \Delta u^{\alpha}{}_{,\alpha} \qquad (1\text{-}47)$$

さらに、単位座標面積あたりの合慣性力（合物体力）ベクトルは、式（1－43）からつぎのように表される。

$$\mathbf{F} = \sqrt{a}\lambda\,\underset{o}{h}\,\mathbf{F}' = \sqrt{a}\lambda\,\underset{o}{h}\,\rho(f^{\alpha}\mathbf{a}_{\alpha} + f^{3}\lambda\,\mathbf{a}_{3})$$
$$\bar{\mathbf{F}} = \sqrt{\bar{a}}\ \bar{\lambda}\,\underset{o}{\bar{h}}\,\bar{\mathbf{F}}' = \sqrt{\bar{a}}\ \bar{\lambda}\,\underset{o}{\bar{h}}\,\bar{\rho}(\bar{f}^{\alpha}\bar{\mathbf{a}}_{\alpha} + \bar{f}^{3}\bar{\lambda}\,\bar{\mathbf{a}}_{3}) \qquad (1\text{-}48)$$

1－6 運動方程式と仮想仕事の原理

増分変形前後C，$\bar{C}$において、膜体が満足すべき運動方程式はつぎのようになる。[20] ただし、ここでは物体力として慣性力のみを考慮する。

$$\mathbf{N}_{\alpha,\alpha} + \mathbf{T} = \mathbf{F}$$
$$\bar{\mathbf{N}}_{\alpha,\alpha} + \bar{\mathbf{T}} = \bar{\mathbf{F}} \qquad (1\text{-}49)$$

式（1－49）に、式（1－45），（1－46），（1－48）を代入し差し引き、2次以上の微小項を省略することによつて、つぎの増分形の運動方程式を得る。

$$\{\sqrt{a}\left[\Delta n^{\alpha\beta} + n^{\alpha\beta}\left(\Delta u^{\nu}{}_{,,\nu} + \Delta\lambda/\lambda\right)\right]\mathbf{a}_{\beta} + \sqrt{a}\, n^{\alpha\rho}\left(\Delta u^{\beta}{}_{,,\rho}\,\mathbf{a}_{\beta} + \Delta u^{3}{}_{,,\rho}\lambda\,\mathbf{a}_{3}\right)\}_{,\alpha} + \sqrt{a}\left(\Delta\hat{T}^{\alpha}\,\mathbf{a}_{\alpha} + \Delta\hat{T}^{3}\lambda\,\mathbf{a}_{3}\right) = \Delta\hat{F}^{\alpha}\,\mathbf{a}_{\alpha} + \Delta\hat{F}^{3}\lambda\mathbf{a}_{3} \quad (1\text{-}50)$$

ここで、$\Delta\hat{F}^{k}$はつぎのように表される。

$$\Delta\hat{F}^{k} = \rho\lambda\underset{0}{h}\sqrt{a}\left(\Delta f^{k} + f^{j}\Delta u^{k}{}_{,,j}\right) \quad (1\text{-}51)$$

式（1－50）において、変位増分の共変微分が乗ぜられた項は初期応力があるために生じる項であり、有限変形理論においては省略できない。これらの項を省略して、変形前後の座標系を区別しない場合は、いわゆる無限小ひずみ理論による運動方程式に対応する。

以上得られた増分形の運動方程式（1－50）に変位に対する拘束を乱さないような仮想速度

$$\mathbf{v} = v_{\alpha}\,\mathbf{a}^{\alpha} + v_{3}\,\mathbf{a}^{3}/\lambda \quad (1\text{-}52)$$

を乗じて、中央面の領域Aにわたつて積分を行うことにより、つぎの仮想仕事の原理の式を得る。

$$-\int_{A}\sqrt{a}\left[\Delta n^{\alpha\beta}\,v_{\beta}{}_{,,\alpha} + n^{\alpha\beta}\left(\Delta u^{\nu}{}_{,,\nu} + \Delta\lambda/\lambda\right)v_{\beta}{}_{,,\alpha} + n^{\alpha\beta}\,\Delta u^{n}{}_{,,\beta}v_{n}{}_{,,\alpha}\right]dA + \int_{A}\sqrt{a}\Delta\hat{T}^{k}\,v_{k}\,dA = \int_{A}\Delta\hat{F}^{k}\,v_{k}\,dA \quad (1\text{-}53)$$

なお、同様の結果を、C，$\overline{C}$状態に対するエネルギつり合い式の差により導出することができる。(21) 式（1－53）が、増分形の有限要素関係式の定式化の基礎となる。

1－7　結　言

本章においては、第３章における膜体の増分形の有限要素関係式の定式化に必要な基礎関係式を導出した。

これまで、面埋込み座標による運動学的諸量の表示は、A．E．Green[20],[32],[33]らによつて行われ、J．T．Oden[35]らによつて薄板の弾性有限変形問題に対する有限要素関係式の定式化に用いられているが、一般には、空間座標が、微小変形理論の延長としての観点から採用されている。[34],[40]～[46]

本論文で対象とする大ひずみ大変形問題では、材料の構成関係式が変形履歴の影響を受けるため、各物体点について変形を追跡していかねばならないが、そのために都合の良い物体表示法と運動やつり合い条件の記述が簡単になる特徴を兼ね備えている面埋込み座標を採用して定式化を行つた。

ここでは、任意の変形状態における膜体の無次元板厚λを一定としたが、これは第３章で示す有限要素の板厚を一定とすることに対応し、薄板全体の板厚は要素ごとに階段状に変化していることになる。板厚の変化をなめらかなものと仮定した膜理論、および横せん断力の影響を考慮した修正曲げ理論の展開は今後大いに期待される。[45],[46]

本章で導出した増分形の運動方程式は、一般の境界値問題の解析にも応用できる。また、仮想仕事の原理の式は、第３章での有限要素関係式の定式化における基礎式となる。

第 2 章　構成関係式

2－1　緒　言

本章では、大ひずみ大変形を受ける弾塑性膜体、超塑性（弾塑性クリープ）膜体、および弾／粘塑性膜体の応力とひずみの増分関係を、有限要素法による解析に用いる目的で定式化する。

材料固有の性質を表す構成関係式を求める場合の諸前提および方法については、固体力学関係の専門書[26)～(31)]に詳しく記されており、それに従つて有限ひずみに対する構成関係式も数多く提案されている。[(55)～(57)]しかし、本論文で取扱う静的、準静的、および動的な大ひずみ大変形問題の解析に適用し得る構成関係式は、いわゆる材料非線性およびひずみ速度依存性に対する考慮が必要であり、限られている。大変形問題に対しては、応力、ひずみの定義およびそれらの増分量が客観性を有することを明確にする必要がある。ここでは、応力およびひずみに対して一貫して面埋込み座標における Jaumann の応力増分および Green のひずみ増分を採用する。

弾塑性膜体に対しては、Prandtl-Reuss の式を大変形問題に対して矛盾の無いように拡張した応力増分およびひずみ増分の線形関係式を用いる。[(21),(48)]

ひずみ速度の大きい動的変形過程においては、材料のひずみ速度依存性（粘性効果）が顕著となることを N.Cristescu[(31)]や I. E . Malvern[(58)] など多くの研究者が指摘しているが、[(9)～(16)]本論文では塑性域において粘性効果を考慮する P . Perzyna の提案した弾／粘塑性モデル[(59)] を採用して構成関係式を求める。

準静的な場合でも、クリープ変形を塑性変形とまつたく独立させ

て取扱うことについて疑問が出ており、従来の弾塑性クリープ理論[29),(30]の他にP．Perzynaの提案した粘塑性モデルを採用した構成関係式による数値解析例も報告されている。[60)~(63] ここでは従来からのNorton 法則[30]を用いた弾塑性クリープ（超塑性）理論およびP。Perzynaの弾／粘塑性理論を採用して構成関係式を求める。

2-2節では、材料の均質等方性、等方ひずみ硬化を仮定し、さらに、弾性ひずみ増分と塑性ひずみ増分との連成効果はないとした上で、弾性ひずみ増分に対してはHooKeの法則を、塑性ひずみ増分に対してはMisesの塑性ポテンシヤルと流れ法則を適用して、弾塑性体に対する構成関係式を求める。

2-3節では、時間に依存しない弾塑性変形と、時間に依存するNorton 法則に従う定常クリープ変形とを独立に取扱う弾塑性クリープ理論を展開する。

2-4節では、ひずみ速度依存性を考慮したP．Perzynaの弾／粘塑性モデルを採用して構成関係式を求める。

2－2　弾塑性体の構成関係式

全ひずみ増分 $\Delta\gamma_{ij}$ は、弾性ひずみ増分 $\Delta\gamma_{ij}^{(e)}$ および塑性ひずみ増分 $\Delta\gamma_{ij}^{(p)}$ の和によつて表されると仮定する。すなわち

$$\Delta\gamma_{ij} = \Delta\gamma_{ij}^{(e)} + \Delta\gamma_{ij}^{(p)} \qquad (2\text{-}1)$$

まず、弾塑性体に対する埋込み座標表示の応力増分とひずみ増分との関係を求めるに、弾性ひずみ増分が、亜弾性体の構成関係式[23]によつて与えられるとすると、客観性のある応力速度の成分はつぎ

のような形に表される。

$$\overset{\nabla}{\sigma}{}^{ij} = C^{ijkn} V_{kn} \qquad (2\text{-}2)$$

ここで、$\overset{\nabla}{\sigma}{}^{ij}$ および V_{kn} は、それぞれ固定直交デカルト座標系 x^m に対するJaumannの応力変化率および変形速度テンソルである。(21)

式（２－２）を、基本ベクトルを G_m とするような埋込み座標系 θ^j のJaumannの応力増分 ${}_J\Delta\tau^{mn}$ と弾性ひずみ増分の間の線形関係として表すとつぎのようになる。

$$ {}_J\Delta\tau^{mn} = B^{mnst} \Delta\gamma_{st} \qquad (2\text{-}3)$$

$$\begin{cases} {}_J\Delta\tau^{mn} = \overset{\nabla}{\sigma}{}^{rs} \Delta t \dfrac{\partial\theta^m}{\partial\bar{x}^r}\dfrac{\partial\theta^n}{\partial\bar{x}^s} \\ \Delta\gamma_{st} = V_{kn} \Delta t \dfrac{\partial x^k}{\partial\bar{\theta}^s}\dfrac{\partial x^n}{\partial\bar{\theta}^t} \\ B^{mnst} = C^{ijkq} \dfrac{\partial\theta^m}{\partial\bar{x}^i}\dfrac{\partial\theta^n}{\partial\bar{x}^j}\dfrac{\partial\theta^s}{\partial\bar{x}^k}\dfrac{\partial\theta^t}{\partial\bar{x}^q} \end{cases}$$

ここで、弾性的に等方である材料に対する B^{mnst} はつぎのように表される。

$$B^{mnst} = \lambda G^{mn} G^{st} + \mu(G^{ms} G^{nt} + G^{mt} G^{ns}) \qquad (2\text{-}4)$$

この場合、λ , μ は、Lame の定数であつて縦弾性係数Eとポアソン比νとの間につぎの関係がある。

$$\lambda = 2\nu\mu /(1-2\nu) \quad , \quad \mu = E/2(1+\nu) \qquad (2\text{-}5)$$

式（２－３）は、HooKeの法則の有限変形の場合への一つの拡張となつている。

つぎに、塑性ひずみ増分に対する構成関係式を、北川、富田の方法(48)によつて導く、塑性体の増分形の構成関係式は、客観性のある応力増分が、ひずみ依存性のある材料テンソルを係数とするひず

み増分の同次一次式で与えられるという形で表現することができる。(48),(57)

ここでは、応力増分およびひずみ増分として埋込み座標表示によるJaumannの応力増分およびGreenのひずみ増分を採用する。

これらの量を用いた理由は、

1. 単軸の真応力－真ひずみ曲線の多軸の構成関係式への一般化が容易にできる。
2. Jaumannの応力増分が零のとき、応力の不変量が停留するという性質を有している。つまり、応力の不変量によつて構成関係式が簡潔に表現できる。

上のことにより、弾塑性体の構成関係式を表すとつぎのようになる。(21)

$$ {}_{J}\Delta\tau^{ij} = D^{ijkl}\ \Delta\gamma_{kl} \qquad (2\text{-}6) $$

式（２－６）の係数 D^{ijkl} は、Misesの塑性ポテンシャル

$$ f = 1/2\ \tau'^{ij}\ \tau'_{ij} = 1/3\ \bar{\sigma}^2 $$

$$ \tau'^{ij} = \tau^{ij} - G^{ij}\ G_{kl}\ \tau^{kl}/3\ ,\ \tau'_{ij} = \tau'^{km}\ G_{ik}\ G_{jm} $$

と流れ法則 (2-7)

$$ \Delta\gamma_{ij}^{(p)} = \Delta\eta\ \partial f/\partial\tau^{ij} \qquad (2\text{-}8) $$

$$ \Delta\eta = 3\tau'^{ij}\ \Delta\gamma_{ij}/2\bar{\sigma}^2(F'/2\mu+1) $$

$$ F' = df/dW^{(p)} = 2H'/3 = 2/3\ d\bar{\sigma}/d\bar{\varepsilon}^{(p)} $$

$dW^{(p)} = \tau^{ij}\ d\gamma_{ij}^{(p)}$, $d\bar{\varepsilon}^{(p)}$：相当塑性ひずみ増分

を用いることにより、つぎのように表される。

$$D^{ijkl} = B^{ijkl} - \alpha \frac{2\mu\,\tau'^{ij}\,\tau'^{kl}}{2/3\,\bar{\sigma}^2(F'/2\mu+1)} \qquad (2\text{-}9)$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 & : \tau'^{mn}\ d\gamma^{(p)}_{mn} > 0 \quad (\text{負荷}) \\ \alpha = 0 & : \tau'^{mn}\ d\gamma^{(p)}_{mn} \leqq 0 \quad (\text{除荷，中立}) \end{cases}$$

式（２－９）は、直交デカルト座標系において微小変形の仮定のもとにR。Hill がPrandtl-Reussの式を逆変換して求めたものを有限ひずみに対して拡張したものに対応している。

仮想仕事の原理式（１－53）に現れるOldroydの応力増分$\Delta\tau^{rs}$とGreenのひずみ増分$\Delta\gamma_{kl}$との関係はつぎのように表される。

$$\Delta\tau^{rs} = E^{rskl}\,\Delta\gamma_{kl}$$

$$E^{rskl} = D^{rskl} - F^{rskl} \qquad (2\text{-}10)$$

ここで、$F^{rskl} = (G^{sl}\tau^{kr} + G^{ks}\tau^{lr} + G^{rk}\tau^{sl} + G^{rl}\tau^{sk})/2$

膜体の解析に適用するために、平面応力状態の場合の面埋込座標表示の構成関係式を求める。計量テンソル、ひずみ増分、応力増分について、つぎの条件が成立する。

$$a_{\alpha_3} = a^{\alpha_3} = \Delta\gamma_{\alpha_3} = \Delta\tau^{\alpha_3} = \Delta\tau^{33} = 0 \qquad (2\text{-}11)$$

弾性ひずみ増分とJaumannの応力増分との関係はHookeの法則によりつぎのように表される。

$$({}_T\Delta\tau^{11}\ {}_T\Delta\tau^{22}\ {}_T\Delta\tau^{12})^T = \mathbf{B}\,(\Delta\gamma^{(e)}_{11}\ \Delta\gamma^{(e)}_{22}\ \Delta\Gamma^{(e)}_{12})^T \qquad (2\text{-}12)$$

ここで

$$\Delta\Gamma_{12} = \Delta\gamma_{12} + \Delta\gamma_{21}$$

$$\mathbf{B}=\frac{2\mu}{1-\nu}\begin{bmatrix} a^{11}a^{11} & (1-\nu)a^{12}a^{12}+\nu a^{11}a^{22} & a^{11}a^{12} \\ & a^{22}a^{22} & a^{22}a^{12} \\ \text{SYM} & & 1/2\left[(1-\nu)a^{11}a^{22}+(1+\nu)a^{12}a^{12}\right] \end{bmatrix}$$

つぎに、塑性ひずみを得るために、流れ法則式（２－８）における $\Delta\eta$ を求めると、

$$\Delta\eta=(F^{11}\Delta\gamma_{11}+F^{22}\Delta\gamma_{22}+F^{12}\Delta\Gamma_{12})/\hat{F}$$

$$\hat{F}=2/3\,\bar{\sigma}^2F'+F^{11}\tau'_{11}+F^{22}\tau'_{22}+2F^{12}\tau'_{12}$$

$$(F^{11}\ F^{22}\ F^{12})^T=\mathbf{B}(\tau'_{11}\ \tau'_{22}2\tau'_{12})^T \qquad (2\text{-}13)$$

ここで、$\hat{F}$, $F^{\alpha\beta}$, F' は材料の単軸引張試験結果より求まる塑性特性を表す量である。最終的に得られる弾塑性体に対する増分形の応力－ひずみ関係はつぎのようになる。

$$({}_J\Delta\tau^{11}\ {}_J\Delta\tau^{22}\ {}_J\Delta\tau^{12})^T=\mathbf{D}(\Delta\gamma_{11}\ \Delta\gamma_{22}\ \Delta\Gamma_{12})^T$$

$$\mathbf{D}=\mathbf{B}-\frac{1}{\hat{F}}\begin{bmatrix} F^{11}F^{11} & F^{11}F^{22} & F^{11}F^{12} \\ & F^{22}F^{22} & F^{22}F^{12} \\ \text{SYM} & & F^{12}F^{12} \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}14)$$

式（２－１０）に対応する関係式はつぎのように表される。

$$(\Delta\tau^{11}\ \Delta\tau^{22}\ \Delta\tau^{12})^T=\mathbf{E}(\Delta\gamma_{11}\ \Delta\gamma_{22}\ \Delta\Gamma_{12})^T$$

$$\mathbf{E}=\mathbf{D}-\begin{bmatrix} 2\tau^{11}a^{11} & 2\tau^{12}a^{12} & \tau^{12}a^{11}+\tau^{11}a^{12} \\ & 2\tau^{22}a^{22} & \tau^{22}a^{12}+\tau^{12}a^{22} \\ \text{SYM} & & \tau^{12}a^{12}+(\tau^{11}a^{22}+\tau^{22}a^{11})/2 \end{bmatrix}$$

(2-15)

板厚方向のひずみ増分 $\Delta\gamma_{33}$ は、平面応力状態の条件から得られつぎのようになる。

$$\Delta\gamma_{33} = A_{33}^{\alpha\beta} \Delta\gamma_{\alpha\beta}$$

$$A_{33}^{\alpha\beta} = -\nu/E\ a_{\mu\nu} D^{\mu\nu\alpha\beta} \lambda^2 + \tau'_{33} F^{\alpha\beta} / \hat{F} \qquad (2\text{-}16)$$

なお、相当応力、相当ひずみ増分、相当塑性ひずみ増分はつぎのように表される。

$$\bar{\sigma}^2 = 3/2 \left[\tau'^{\alpha\beta} \tau'^{\lambda\nu} a_{\alpha\lambda} a_{\beta\nu} + (\tau'^{33} \lambda^2)^2 \right]$$

$$\Delta\bar{\varepsilon}^2 = 2/3 \left[a^{\alpha\beta} a^{\lambda\nu} \Delta\gamma_{\lambda\beta} \Delta\gamma_{\alpha\nu} + (\Delta\gamma_{33}/\lambda^2)^2 \right]$$

$$\Delta\bar{\varepsilon}^{(p)} = 2/3\ \bar{\sigma}\ \Delta\eta \qquad (2\text{-}17)$$

2-3 弾塑性クリープおよび超塑性体の構成関係式

本節では、クリープ[29),(30)]および超塑性[(1)～(8)]を現象論的に取扱うための構成関係式について検討する。クリープおよび超塑性は、前者は構造設計、後者は塑性加工というように問題となる分野も異なり、そのひずみ速度のオーダーも大きく異なるが、同一の数式表示で両現象が近似できることが知られている。ちなみに、クリープひずみ速度は定常状態で 10^{-5}～10^{-7}（１／時間）程度であり、超塑性ひずみ速度は 10^{-4}～10^{-1}（１／秒）程度である。さらに使用材料は、クリープでは鉄系合金が主流であり、強度が大きく変形が小さいことが要求されるのに対して、超塑性では主にアルミニウム合金であり良好な成形性が要求される。

この場合、単軸状態における応力σとひずみ速度 $\dot{\varepsilon}^{(s)}$ との関係はつぎのように表される。

定常クリープ　$\dot{\varepsilon}^{(s)} = K' \sigma^n$　（Norton 法則）　$(2\text{-}18)_1$

遷移クリープ　$\dot{\varepsilon}^{(s)} = A \sigma^l t^{-\lambda}$　（時間硬化理論）　$(2\text{-}18)_2$

$\dot{\varepsilon}^{(s)} = B \sigma^p \varepsilon^{(s)-\mu}$　（ひずみ硬化理論）　$(2\text{-}18)_3$

超塑性　$\sigma = K \dot{\varepsilon}^{(s)m}$　$(2\text{-}18)_4$

ここで、K'，n，A，l，λ，B，p，μ，K，m は、それぞれ材料および温度によつて定まる定数＊，tは時間である。

つぎに、式（2－18）に弾性および塑性ひずみ増分を加えて、多軸応力状態における構成関係式に変換する。この場合、全ひずみ増分はつぎのように表される。

$$\Delta\gamma_{rs} = \Delta\gamma_{rs}^{(e)} + \Delta\gamma_{rs}^{(p)} + \Delta\gamma_{rs}^{(s)} \qquad (2\text{-}19)$$

弾塑性ひずみ増分に関して2－2節で導いた関係式を採用すると、式（2－6）よりJaumannの応力増分との間につぎの関係を得る。

$$_J\Delta\tau^{rs} = D^{rskl}\ (\Delta\gamma_{kl} - \Delta\gamma_{kl}^{(s)}) \qquad (2\text{-}20)$$

式（2－18）をクリープおよび超塑性についての相当応力と相当ひずみ速度との関係と考えて

基本ベクトル $\mathbf{G}_m$ の埋込み座標で表すとつぎのようになる。

$$\Delta\gamma_{rs}^{(s)} = C_{rskl}\ \tau'^{kl}\ \Delta t \qquad (2\text{-}21)$$

ここで、Δt は増分時間であり、係数 C_{rskl} は単軸状態での式(2－18)を考慮するとつぎのようになる。

$$C_{rskl} = (3/2\ K'\bar{\sigma}^{n-1})G_{rk}G_{sl} \quad \text{定常クリープ} \qquad (2\text{-}22)_1$$

$$C_{rskl} = (3/2\ A\ \bar{\sigma}^{l-1}t^{-\lambda})G_{rk}G_{sl} \quad \text{遷移クリープ(時間硬化)} \qquad (2\text{-}22)_2$$

$$C_{rskl} = (3/2\ B\ \bar{\sigma}^{p-1}\bar{\varepsilon}^{(s)-\mu})G_{rk}G_{sl} \quad 〃\ \text{（ひずみ硬化）} \qquad (2\text{-}22)_3$$

$$C_{rskl} = (3/2\ K^{-\frac{1}{m}}\bar{\sigma}^{\frac{1}{m}-1})G_{rk}G_{sl} \quad \text{超塑性} \qquad (2\text{-}22)_4$$

ここで、$\bar{\varepsilon}^{(s)}$ は相当クリープひずみであり、つぎの関係より得ら

＊超塑性におけるK，m値が定数と考えられるのは、ひずみ速度がある範囲内の場合に限られており、一般には、ひずみ，ひずみ速度,応力等の関数として表されるという報告もある。(5)

れる。

$$\bar{\varepsilon}^{(s)} = (2/3\ G^{ik} G^{jl}\ \gamma_{ij}^{(s)}\ \gamma_{kl}^{(s)}\ )^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{n} \Delta\bar{\varepsilon}_{(n)}^{(s)} = \sum_{n=1}^{n} (2/3\ G_{(n)}^{ik}\ G_{(m)}^{jl}\ \Delta\gamma_{(n)ij}\ \ \Delta\gamma_{(n)kl}\ )^{\frac{1}{2}} \qquad (2\text{-}23)$$

$\Delta\bar{\varepsilon}_{(n)}^{(s)}$ は、任意の増分変形段階 n における相当クリープひずみ増分を示す。

塑性変形に対する負荷、除荷の判定条件はつぎのようになる。

$$\tau'^{mn}\left[\ \Delta\gamma_{mn}\ -(\ \Delta\gamma_{mn}^{(s)}+\Delta\gamma_{mn}^{(e)})\right] > 0 \quad (\text{負荷})$$

$$\lesseqgtr \leq 0 \quad (\text{除荷，中立}) \qquad (2\text{-}24)$$

式（2-10），（2-20），（2-21）を考慮することにより、Oldroyd の応力増分 $\Delta\tau^{rs}$ と Green のひずみ増分 $\Delta\gamma_{nt}$ との関係が得られつぎのようになる。

$$\Delta\tau^{rs} = E^{rsnt}\ \Delta\gamma_{nt} - D^{rsnt}\ C_{ntpq}\ \tau'^{pq}\ \Delta t \qquad (2\text{-}25)$$

つぎに、平面応力状態における面埋込み座標表示の構成関係式を導く。式（2－11）を考慮し、式（2－14），（2－15）の係数テンソル **E**，**D** を用いることによりつぎの関係が得られる。

$$(\Delta\tau^{11}\ \Delta\tau^{22}\ \Delta\tau^{12})^{T} = \mathbf{E}(\Delta\gamma_{11}\ \Delta\gamma_{22}\ \Delta\Gamma_{12})^{T}$$

$$-\mathbf{D}\cdot\mathbf{C}(\tau'^{11}\ \tau'^{22}\ \tau'^{12})^{T}\ \Delta t \qquad (2\text{-}26)$$

ここで、定常クリープの場合の係数テンソル **C** を示すとつぎのようになる。

$$\mathbf{C} = (3/2\ K'\ \bar{\sigma}^{n-1}) \begin{bmatrix} a_{11}\,a_{11} & a_{12}\,a_{12} & 2a_{11}\,a_{12} \\ & a_{22}\,a_{22} & 2a_{22}\,a_{12} \\ \text{SYM} & & 2(a_{11}\,a_{22}+a_{12}\,a_{12}) \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}27)$$

板厚方向ひずみ増分 $\Delta\gamma_{33}$ は平面応力の条件から求められつぎのようになる。

$$\begin{aligned}\Delta\gamma_{33} &= \Delta\gamma_{33}^{(e)} + \Delta\gamma_{33}^{(p)} + \Delta\gamma_{33}^{(s)} \\ &= -\nu/E\ \lambda^2 a_{\alpha\beta}\Delta\tau^{\alpha\beta} + \tau'^{33}\lambda^4 \frac{F^{\alpha\beta}}{\hat{F}}(\Delta\gamma_{\alpha\beta}-\Delta\gamma_{\alpha\beta}^{(s)}) \\ &\quad + C_{3333}\,\tau'^{33}\,\Delta t \\ &= A_{33}^{\alpha\beta}\,\Delta\gamma_{\alpha\beta} + (-A_{33}^{\alpha\beta}\,C_{\alpha\beta\lambda\nu}\,\tau'^{\lambda\nu} + C_{3333}\,\tau'^{33})\,\Delta t \end{aligned} \qquad (2\text{-}28)$$

ここで、定常クリープの場合は $C_{3333} = (3K'\bar{\sigma}^{n-1}/2)\lambda^4$ が成立する。なお、遷移クリープ、超塑性の場合も同様な方法で構成関係式を得ることができる。

2-4 弾／粘塑性体の構成関係式

金属、非金属を問わず、すべての材料の変形挙動を観察すると、変形速度に依存した粘性の影響が認められることは古くから指摘されている。[9] 衝撃試験の結果より、降伏応力が静的な場合の2～3倍に達し、応力－ひずみ関係では応力値が数％～数十％も高い値を示すことがわかつた。[58],[59]

このひずみ速度依存性を考慮した構成関係式は、これまで数多くの研究者によつて提案されて来た。その中で、数値解析への応用に適しているものは、塑性ひずみ速度が静的な場合の降伏曲面からの〝へだたり〟（過剰応力）の関数として表されるとしたL．E．Malvern[58]とP．Perzyna[59]の提案した式と思われる。

$$\dot{\varepsilon}^{(vp)} = F\left[\sigma - f(\varepsilon)\right] \tag{2-29}$$

L.E.Malvern : $F\left[\sigma-f(\varepsilon)\right] = K\left[\sigma-f(\varepsilon)\right]$ (2-30)

P.Perzyna : $F\left[\sigma-f(\varepsilon)\right] = \gamma^{*}\left[\exp\left(\frac{\sigma}{\sigma_s}-1\right)-1\right]$ (2-31)

$$F\left[\sigma-f(\varepsilon)\right] = \gamma\left(\frac{\sigma}{\sigma_s}-1\right)^{n} \tag{2-32}$$

($F(z)>0 : z>0$, $F(z)=0 : z \leqq 0$)

なお、$\sigma_s = f(\varepsilon)$ は単軸状態での静的な対数ひずみ ε と応力 σ_s との関係を表す。式（2－32）において $n=1$ の場合は式（2－30）と等価となる。ここでは、式（2－32）を採用して、多軸応力状態での構成関係式を求める。なお、$n=1$ とする。

全ひずみ増分は、弾性および粘塑性ひずみ増分の和によつて表されるとする。

$$\Delta\gamma_{rs} = \Delta\gamma_{rs}^{(e)} + \Delta\gamma_{rs}^{(vp)} \tag{2-33}$$

粘塑性ひずみ増分 $\Delta\gamma_{rs}^{(vp)}$ はMisesの降伏条件および加工硬化説を採用し、基本ベクトル $\mathbf{G}_m$ の埋込み座標表示するとつぎのようになる。

$$\Delta\gamma_{rs}^{(vp)} = V_{rsnt}\ \tau'^{nt}\ \Delta t$$

$$V_{rsnt} = \gamma < \Phi\left(\frac{F}{F_0}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J_2}}\, G_{rn} G_{st} \tag{2-34}$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} < \Phi\left(\frac{F}{F_0}\right) > & = & \frac{F}{F_0} \qquad : F > 0 \\ < \Phi\left(\frac{F}{F_0}\right) > & = & 0 \qquad : F \leqq 0 \end{array} \right\}$$

ただし、 $F = \sqrt{3}\sqrt{J_2} - \sigma_s$ であり、 $F_0 = \sigma_s = f(\varepsilon)$ である。多軸状態の場合では、ε には相当ひずみ増分をひずみ経路にそつて積分した量を対応させる。$1/\gamma$ は粘性係数に対応し、J_2 は応力の

第２不変量、Δt は微小増分時間を表す。

弾性ひずみ増分に HooKe の法則式（２－３）を用いることにより、Jaumann の応力増分と Green のひずみ増分の間にはつぎの関係が成立する。

$$ {}_J\Delta\tau^{rs} = B^{rskl} \left(\Delta\gamma_{kl} - V_{klmn}\, \tau'^{mn}\, \Delta t \right) \qquad (2\text{-}35) $$

Oldroyd の応力増分と Green のひずみ増分との関係は式（２－10）よりつぎのように表される。

$$ \Delta\tau^{rs} = \left(B^{rskl} - F^{rskl} \right)\Delta\gamma_{kl} - B^{rskl}\, V_{klmn}\, \tau'^{mn}\, \Delta t \qquad (2\text{-}36) $$

つぎに、平面応力状態における増分形の構成関係式を求める。式（２－11）を考慮して、粘塑性ひずみ増分を面埋込み座標表示するとつぎのようになる。

$$ (\Delta\gamma_{11}\ \Delta\gamma_{22}\ \Delta\Gamma_{12})^T = \mathbf{B}^{-1} \left({}_J\Delta\tau^{11}\ {}_J\Delta\tau^{22}\ {}_J\Delta\tau^{12} \right)^T + \mathbf{V} \left(\tau^{11}\ \tau^{22}\ \tau^{12} \right)^T \Delta t \qquad (2\text{-}37) $$

ここで、

$$ \mathbf{V} = \gamma \left\langle \Phi\left(\frac{F}{F_0} \right) \right\rangle \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J_2}} \begin{bmatrix} a_{11}a_{11} - a_{1\alpha}a_{1\beta}a^{\alpha\beta}a_{11}/3 & a_{12}a_{12} - a_{2\alpha}a_{2\beta}a^{\alpha\beta}a_{11}/3 & 2a_{11}a_{12} - 2a_{1\alpha}a_{2\beta}a^{\alpha\beta}a_{11}/3 \\ a_{12}a_{12} - a_{1\alpha}a_{1\beta}a^{\alpha\beta}a_{22}/3 & a_{22}a_{22} - a_{2\alpha}a_{2\beta}a^{\alpha\beta}a_{22}/3 & 2a_{22}a_{12} - 2a_{2\alpha}a_{2\beta}a^{\alpha\beta}a_{12}/3 \\ 2a_{12}a_{22} - 2a_{1\alpha}a_{2\beta}a^{\alpha\beta}a_{22}/3 & 2(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{12}) - 4a_{1\alpha}a_{2\beta}a^{\alpha\beta}a_{12}/3 & \end{bmatrix} $$

$\mathbf{B}$ は弾性係数テンソル式（２－13）である。

式（２－10），（２－37）より Oldroyd の応力増分と Green のひずみ増分との関係が得られつぎのようになる。

$$ \left(\Delta\tau^{11}\ \Delta\tau^{22}\ \Delta\tau^{12} \right)^T = (\mathbf{B} - \mathbf{F}) \left(\Delta\gamma_{11}\ \Delta\gamma_{22}\ \Delta\Gamma_{12} \right)^T - \mathbf{P} \left(\tau^{11}\ \tau^{22}\ \tau^{12} \right)^T \Delta t \qquad (2\text{-}38) $$

ここで、$\mathbf{P} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{V}$ は、4階の混合テンソルである。

後の3－5節における軸対称変形に対する有限要素式の定式化に必要な成分を示すとつぎのようになる。なお、軸対称の場合は $a_{12} = a^{12} = \Delta\tau^{12} = \Delta\gamma_{12} = \Delta\Gamma_{12} = 0$ である。

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11}^{11} & P_{22}^{11} \\ P_{11}^{22} & P_{22}^{22} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2\mu}{(1-\nu)} \frac{1}{2\sqrt{J_2}\sqrt{3}} \gamma < \Phi(\frac{F}{F_0}) > \begin{bmatrix} (2-\nu) & (2\nu-1)a_{22}a^{11} \\ (2\nu-1)a^{22}a_{11} & (2-\nu) \end{bmatrix} \quad (2\text{-}39)$$

板厚方向のひずみ増分 $\Delta\gamma_{33}$ は、平面応力の条件から求められつぎのようになる。

$$\Delta\gamma_{33} = \Delta\gamma_{33}^{(e)} + \Delta\gamma_{33}^{(vp)}$$

$$= A_{33}^{\alpha\beta} \Delta\gamma_{\alpha\beta} + P_{33} \Delta t$$

$$A_{33}^{\alpha\beta} = -\nu/E \ \lambda^2 \ a_{\delta\nu} B^{\delta\nu\alpha\beta}$$

$$P_{33} = \nu/E \ \lambda^2 a_{\delta\nu} P_{\alpha\beta}^{\delta\nu} \tau^{\alpha\beta} - \gamma < \Phi(\frac{F}{F_0}) > \frac{\lambda^2}{2\sqrt{3}\sqrt{J_2}} a_{\alpha\beta} \tau^{\alpha\beta}$$

(2-40)

2－5　結　言

本章では、静的、準静的および動的な薄板の大ひずみ大変形問題の解析に用いる増分形の有限要素関係式の導出に先立つて、仮想仕事の原理の式に直接用いることができる埋込み座標表示による増分形の応力－ひずみ関係を求めた。

静的な変形過程の解析に対しては、Misesの塑性ポテンシャルと流れ法則から導かれた弾塑性体に対する構成関係式を、準静的な場

合には、Norton 法則に従う定常クリープひずみおよびP. Perzynaの示した粘塑性ひずみを考慮して得られた構成関係式を、動的な場合には、弾／粘塑性体に対する構成関係式をそれぞれ採用するのが適当と考える。

有限ひずみの場合には、弾性および塑性ひずみの連成、材料のひずみ履歴への依存性など、完全な構成関係式を得るまでに解決すべき問題点は多い。

第 3 章　有限要素法による膜体の運動方程式とその解法

3－1　緒　言

本章では、前章までに得た面埋込み座標表示の仮想仕事の原理の式、運動学的諸量、および構成関係式を用いて、薄板の大ひずみ大変形問題の解析を目的とする増分形の有限要素関係式を定式化する。

有限要素法は、連続な分布系を離散系におきかえる手法の一つで、対象とする領域を有限個の部分領域（有限要素）に分割し、個々の要素の節点での値によつてそれぞれの要素内部の関数を定義することで、全領域にわたる関数を区分多項式で近似する方法である。(34),(35)

ここでは、変位の場を区分多項式で近似する変位法を用いる。この方法では境界条件の導入も含めて考えると、もつとも数値計算式の定式化が簡単と考えられる。(34),(35)

離散モデルの構成は、つぎのようにして行われる。はじめに、連続体を有限個の要素に分割し、個々の要素において仮想仕事の原理を適用することで運動方程式を導出し、つぎに、連続体全体として仮想仕事の原理を満足するように再構成することで、その運動方程式を求める。有限要素としては、膜体の任意の変形解析を目的とする三角形要素および軸対称変形解析を目的とする円輪板要素を採用する。変位関数としては、Lagrange の内そう関数を用いる。なお、円輪板要素の場合は諸量を重心での値で代表させることで運動方程式を求める。

ここで行う定式化では、前章までに求めた運動の Lagrange 表示を用いるが、これ以外に、Euler 表示による定式化も行われている。(37)

構成関係式の形から、基本となる弾塑性問題の場合を３－２，３－３節で扱い、粘性項の入つてくる弾塑性クリープおよび弾／粘塑性問題の場合を３－４および３－５節で扱う。

３－２節では、任意の形状の弾塑性膜体に対する増分形の有限要素関係式を導出する。有限要素としては、三角形要素を採用し、要素の頂点を節点とする変位法により個々の要素の運動方程式を得る。さらに、膜体全体の運動方程式を組み立てる手法を具体例によつて説明する。

３－３節では、弾塑性膜体の軸対称変形を解析するために円輪板要素を採用し、要素の運動方程式を導出する。三角形要素の場合と異なり、計量テンソル，ひずみ，応力は一定でなく、クリストツフエル記号も零でないことから、諸量を重心の値で代表させる操作を導入する。

３－４節では、弾塑性クリープ（超塑性）モデルを、３－５節では、弾／粘塑性モデルをそれぞれ用いて軸対称変形解析を目的とする円輪板要素の運動方程式を導く。

３－６節では、以上で得た運動方程式の解法を示す。これらは、時間変数に関して連立常微分方程式であるが、NewmarKのβ法[67]～[69]によつて連立代数方程式となる。

なお、本論文では、三角形要素を用いた場合を非軸対称有限要素法、円輪板要素を用いた場合を軸対称有限要素法と呼ぶこととする。

３－２ 弾塑性膜体の非軸対称変形の場合

３－２－１　変位関数および基本ベクトル：変位法では、要素の節点における変位の値によつて要素内部の変位が唯一的に決まるよう

な適当な変位関数を選択しなければならない。ここでは、その関数にLagrangeの内そう関数を用いる。有限要素としては、任意の形状の膜体の大ひずみ大変形問題を解析することを目的として、頂点を節点とするような三角形要素を採用する。(21)

三角形要素は図３－１のように変形していくが、任意の点θ^mにおける増分変位を式（１－７）のように表した上で、この増分変位成分を節点Ｎにおける値で近似するためにつぎのような関数 $\psi_N(\theta^\alpha)$ を導入する。

$$\Delta u^r = \psi^N(\theta^\alpha)\ \Delta u^r_N$$

$$\Delta u_r = \psi_M(\theta^\alpha)\ \Delta u^M_r$$

$$(M,N = 1,2,3) \qquad (3\text{-}1)$$

式（３－１）において、Ｍ，Ｎの範囲は要素に含まれる節点数であり、その範囲内で総和規約を適用する。関数 $\psi_N(\theta^\alpha)$ はLagrangeの内そう関数であり、頂点を節点とするような三角形要素の場合はつぎのようになる。 $\psi_N = \alpha_N + \beta_{N\alpha}\,\theta^\alpha = \psi^N = \alpha^N + \beta^N_\alpha\,\theta^\alpha$

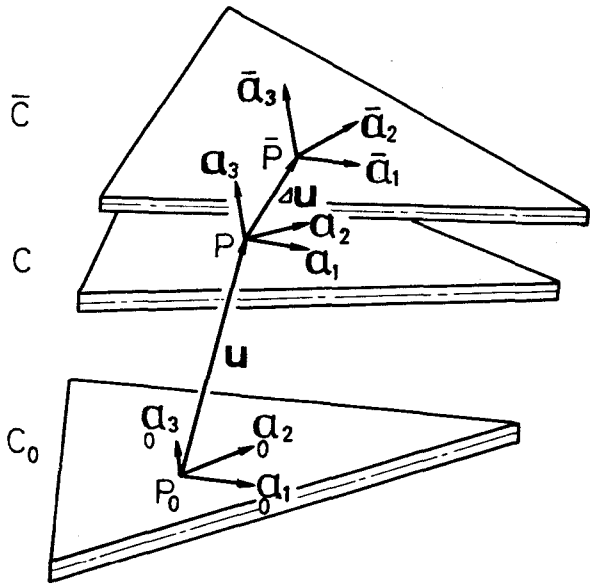


図3－１　三角形要素の変形

$$\alpha_N = \frac{1}{2A_0}\begin{Bmatrix} \theta^1_2\theta^2_3 - \theta^1_3\theta^2_2 \\ \theta^1_3\theta^2_1 - \theta^1_1\theta^2_3 \\ \theta^1_1\theta^2_2 - \theta^1_2\theta^2_1 \end{Bmatrix}$$

$$\beta_{N\alpha} = \frac{1}{2A_0}\begin{bmatrix} \theta^2_2 - \theta^2_3 & \theta^1_3 - \theta^1_2 \\ \theta^2_3 - \theta^2_1 & \theta^1_1 - \theta^1_3 \\ \theta^2_1 - \theta^2_2 & \theta^1_2 - \theta^1_1 \end{bmatrix}$$

$$2A_0 = \theta^1_2\theta^2_3 - \theta^2_2\theta^1_3 + \theta^1_3\theta^2_1 - \theta^1_1\theta^2_3 + \theta^1_1\theta^2_2 - \theta^1_2\theta^2_1 \qquad (3\text{-}2)$$

（ θ^{α}_{N} ：要素内の節点 N の θ^{α} 座標値）

ここで、関数 ψ_N は要素内部のみで定義されたもので、座標値 θ^{α} が節点 N の座標値と一致した場合1になり、他の節点の座標値をとつた場合は零になる性質を有する。ここでは、面埋込み座標系を用いているため、変形によつて変化を受けず一定である。このような性質を有する関数 ψ_N の具体的な例については、J. T. Oden(35) が示している。なお、A_0 は要素の初期状態における面積である。上式および以下において、とくに断らない限り、すべて特定の一つの要素について考えており、表示が複雑になるために要素を区別する記号はつけないことにする。

C状態における共変微分を、式（3－2）の変位関数を用いて表すとつぎのようになる。

$$\Delta u_{s\,|r} = (\psi_{N,r}\ \delta^{n}_{s} - \psi_{N}\bar{\Gamma}^{n}_{rs}\ )\Delta u^{N}_{n} = {}_{N}\Psi^{n}_{sr}\ \Delta u^{N}_{n}$$

$$\Delta u^{s}{}_{|r} = (\psi^{N}{}_{,r}\,\delta^{s}_{n} + \psi^{N}\bar{\Gamma}^{s}_{nr}\ )\Delta u^{n}_{N} = {}^{N}\Phi^{s}_{nr}\ \Delta u^{n}_{N} \qquad (3\text{-}3)$$

さて、式（3－2）が増分変位場を節点増分変位と座標 θ^{α} の線形関数として表していることからも分るように、要素内のひずみは一定であり曲率も零である。曲率が零であることは、面の第2基本形 b^{α}_{β} が零であることに対応し、ひずみが一定であることは、クリストツフエル記号 $\bar{\Gamma}^{r}_{st}$ がすべて零であることに対応している。このことから、式（3－3）の係数はつぎのように表される。

$${}_{N}\Psi^{\nu}_{\alpha\beta} = \beta_{N\beta}\ \delta^{\nu}_{\alpha}\ ,\ {}_{N}\Psi_{3}{}^{3}_{\alpha} = \beta_{N\alpha}\ ,\ {}_{N}\Psi_{3}{}^{\beta}_{3} = {}_{N}\Xi_{3}{}^{\beta}_{3}$$

$${}^{M}\Phi^{\alpha}_{\nu\beta} = \beta^{M}_{\beta}\ \delta^{\alpha}_{\nu}\ ,\ {}^{M}\Phi_{3}{}^{3}_{\alpha} = \beta^{M}_{\alpha}\ ,\ {}^{M}\Phi_{\alpha}{}^{3}_{3} = {}^{M}\Lambda_{33\alpha}/\lambda^{2} \qquad (3\text{-}4)$$

それ以外の ${}_N\Psi_{st}^{r}$, ${}^N\Phi_{st}^{r}$ は零である。 ${}_N\Xi_{33}^{\alpha}$, ${}^N\Lambda_{33_\alpha}$ は構成関係より決まつてくるものであり、後に式（３－１０）において示す。

増分変位成分と同様、要素内部の速度成分 v_k ，加速度成分 f_k も内そう関数 ψ_N で近似的に表されるとするとつぎのようになる。

$$v^r = \psi^N(\theta^\alpha)\ v_N^r \quad , \quad v_r = \psi_N(\theta^\alpha)\ v_r^N$$
$$f^r = \psi^N(\theta^\alpha)\ f_N^r \quad , \quad f_r = \psi_N(\theta^\alpha)\ f_r^N \qquad (3\text{-}5)$$

速度の共変微分も、式（３－３）と同様にして得られつぎのようになる。

$$v_{s\,|\,p} = {}_M\Psi_{sp}^{n}\ v_n^M \quad , \quad v^s{}_{|\,p} = {}^M\Phi_{np}^{s}\, v_M^n \qquad (3\text{-}6)$$

以上の関係式を用いることにより、一つの要素内での変形を記述する運動学的諸量は、節点の増分変位と速度によつてつぎのように表現される。まず、増分変形後 $\bar{C}$ 状態の基本ベクトル $\bar{\mathbf{a}}_m$ と計量テンソル $\bar{a}_{st}$ を表すとつぎのようになる。

$$\bar{\mathbf{a}}_\alpha = (\delta_\alpha^\beta + \Delta u^\beta{}_{|\,\alpha})\ \mathbf{a}_\beta + \Delta u^3{}_{|\,\alpha}\ \lambda\,\mathbf{a}_3$$
$$= (\delta_\alpha^\beta + {}^N\Phi_{\nu\alpha}^{\beta}\Delta u_N^\nu)\ \mathbf{a}_\beta + {}^N\Phi_{3\alpha}^{3}\Delta u_N^3\ \lambda\,\mathbf{a}_3$$
$$= (\delta_\alpha^\beta + \beta_\alpha^N \Delta u_N^\beta)\ \mathbf{a}_\beta + \beta_\alpha^N \Delta u_N^3\ \lambda\,\mathbf{a}_3$$
$$\bar{\lambda}\,\bar{\mathbf{a}}_3 = \left[\Delta u^\alpha{}_{|\,3}\ \mathbf{a}_\alpha + (1+\Delta u^3{}_{|\,3})\lambda\ \mathbf{a}_3\right]$$
$$\bar{a}_{\alpha\beta} = (\delta_\alpha^\nu + \beta_\alpha^N \Delta u_N^\nu)(\delta_\beta^\mu + \beta_\beta^M \Delta u_M^\mu)\ a_{\nu\mu} + \beta_\alpha^N\ \beta_\beta^M\ \Delta u_N^3 \Delta u_M^3\ \lambda^2$$
$$\cong a_{\alpha\beta} + \beta_\alpha^N a_{\nu\beta}\Delta u_N^\nu + \beta_\beta^M a_{\alpha\mu}\Delta u_M^\mu$$
$$\bar{a}_{\alpha 3} = \bar{a}_{3\alpha} = 0$$

$$\bar{\lambda}^2 = \lambda^2+2\lambda\Delta\lambda+(\Delta\lambda)^2$$
$$=\Delta u^{\alpha}{}_{,3}\Delta u^{\beta}{}_{,3}a_{\alpha\beta}+\left[1+2\Delta u^{3}{}_{,3}+(\Delta u^{3}{}_{,3})^2\right]\lambda^2$$
$$\cong\lambda^2+2\lambda\Delta\lambda \cong \lambda^2+2\Delta u^{3}{}_{,3}\lambda^2 \qquad (3\text{-}7)$$

式（1－22）よりひずみ増分を求めるとつぎのようになる。

$$\Delta\gamma_{\alpha\beta} =(\bar{a}_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta})/2$$
$$\cong(\beta^{N}_{\alpha}a_{\nu\beta}\Delta u^{\nu}_{N} + \beta^{N}_{\beta}a_{\alpha\mu}\Delta u^{\mu}_{N})/2$$
$$\cong(\beta_{N\alpha}\Delta u^{N}_{\beta} + \beta_{N\beta}\Delta u^{N}_{\alpha})/2$$

$$\Delta\gamma_{\alpha 3} = \Delta\gamma_{3\alpha} = 0$$

$$\Delta\gamma_{33}= (\bar{\lambda}^2 - \lambda^2)/2\cong \lambda\Delta\lambda \cong \Delta u^{3}{}_{,3}\lambda^2 \cong \Delta u_{3,3} \qquad (3\text{-}8)$$

板厚方向のひずみ増分を決定するために必要な式（3－4）中の

${}_{N}\Xi_{33}^{\beta}$, ${}^{N}\Lambda_{33\alpha}$ は、弾塑性体における平面応力状態の構成関係式（2－16）を考慮することによりつぎのように表される。

$$\Delta\gamma_{33}= A_{33}^{\alpha\beta}\,\Delta\gamma_{\alpha\beta}= {}_{N}\Xi_{33}^{\alpha}\,\Delta u^{N}_{\alpha} = {}^{N}\Lambda_{33\beta}\,\Delta u^{\beta}_{N} \qquad (3\text{-}9)$$

$${}_{N}\Xi_{33}^{\alpha} = {}^{N}\Lambda_{33\beta}\,a^{\alpha\beta} = A_{33}^{\alpha\beta}\,\beta_{N\beta} \qquad (3\text{-}10)$$

計量テンソルの行列式および体積素の増分 $\Delta(d\tau)$ はつぎのように表される。

$$\bar{a} = a\,(1 + 2{}^{N}\Phi_{\nu\alpha}^{\alpha}\,\Delta u^{\nu}_{N})$$
$$= a\,(1 + 2\beta^{N}_{\alpha}\Delta u^{\alpha}_{N}) \qquad (3\text{-}11)$$

$$\Delta(d\tau) = ({}^{N}\Phi_{\nu\alpha}^{\alpha}\Delta u^{\nu}_{N} + \Delta\lambda/\lambda)\,d\tau$$
$$= (\beta^{N}_{\alpha}\Delta u^{\alpha}_{N} + \Delta\lambda/\lambda)\,d\tau \qquad (3\text{-}12)$$

つぎに、各変形状態における基本ベクトル $\mathbf{a}_m$ と計量テンソル

a_{st} について述べる。図３－２に示すように、空間固定の座標系として直交デカルト座標系 x^m をとる。初期状態（無ひずみ、無応力）においては面埋込み座標 θ^m と一致しているものとする。なお、ここでは論旨を明確にするために直交座標系を選んだが、斜交座標系であつても同様であり、面埋込み座標系に対して一般的な曲線座標系を選んだ場合においても、それを要素ごとに区分的斜交座標系であると近似することによつて、まつたく同様にあつかうことができる。[21] ここでの直交デカルト座標系の基本ベクルトを $\mathbf{e}_m = \mathbf{e}^m$ で表す。初期状態において膜体を構成している任意の要素の内部の点の空間座標 θ^m が変形とともに変化する面埋込み座標を形成することになる。図３－２に示すように、膜体に加わる増分的な内的および外的な作用によつて生じる膜体の運動とともに、物体点の空間位置が P_0 , P_1 , P_2 , ・・・ P_m , P_{m+1} ・・・・に移つたと考える。なお、$\overrightarrow{P_0P_1}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$ ・・・ $\overrightarrow{P_mP_{m+1}}$ ・・・は微小量であるとする。点 P_1 の位置ベクトル $\mathbf{R}_1$ はつぎのように表される。

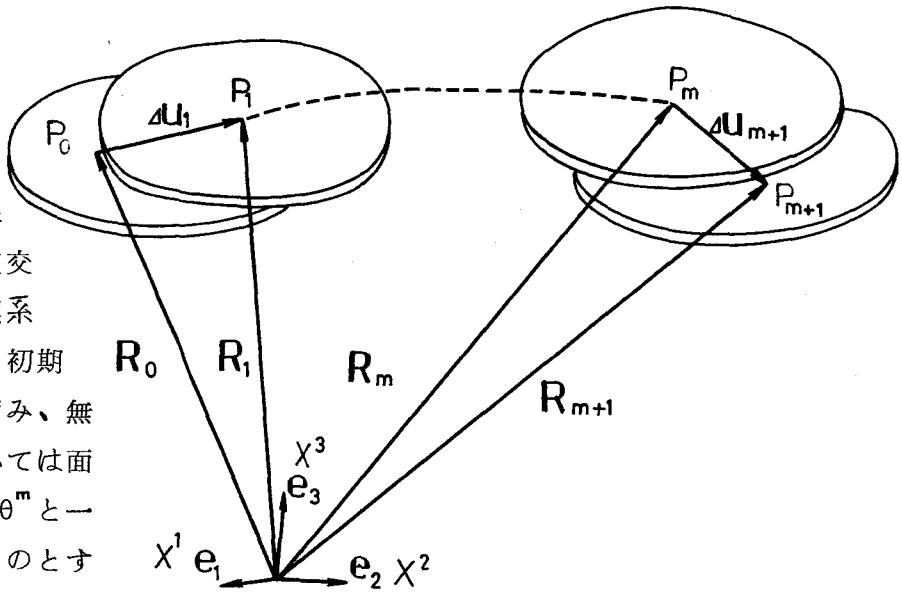


図３－２　膜体の増分変形

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_0 + \Delta\mathbf{u}_1 \qquad (3\text{-}13)$$

$$\Delta\mathbf{u}_1 = \Delta u_1^r \mathbf{e}_r = \Delta u_1^s \mathbf{e}_s \qquad (3\text{-}14)$$

基本ベクトル $\mathbf{a}_{1s}$, $\mathbf{a}_1^s$ は式（１－９），（１－12）からつぎのようになる。

$$\mathbf{a}_{1r} = (\delta_r^s + \Delta u_{1,r}^s)\mathbf{e}_s$$

$$= (\delta_r^s + {}^N\Phi_{1nr}^s \Delta u_{1N}^n)\mathbf{e}_s$$

$$\mathbf{a}_1^r = (\delta_s^r - \Delta u_1^{r},_s)\,\mathbf{e}_s$$
$$= (\delta_s^r - {}^{N}\Phi_{1}^{r}{}_{ns}\,\Delta u_{1N}^{n})\,\mathbf{e}_s \qquad (3\text{-}15)$$

式（３－１５）を導出した過程をくり返して行うことによつて、ｎ回目の増分後の要素の基本ベクトル $\mathbf{a}_{n_s}$，$\mathbf{a}_n^s$ をつぎのように表すことができる。

$$\mathbf{a}_{n_s} = \Theta_{n\,s}^{Kn}\ \Theta_{n-1\,Kn}^{Kn-1}\cdots\cdots\Theta_{1\,K2}^{K1}\ \mathbf{e}_{K1} = \Theta_{n\,s}^{Kn}\ \mathbf{a}_{n-1\,Kn} \equiv \overline{\Theta}_{n\,s}^{K1}\ \mathbf{e}_{K1}$$
$$\mathbf{a}_n^s = \Omega_{n\,Kn}^{s}\ \Omega_{n-1\,Kn-1}^{Kn}\cdots\cdots\Omega_{1\,K1}^{K2}\ \mathbf{e}_{K1} = \Omega_{n\,Kn}^{s}\ \mathbf{a}_{n-1}^{Kn} \equiv \overline{\Omega}_{n\,K1}^{s}\ \mathbf{e}_{K1}$$
$$(K1 \cdots Kn = 1,2,3) \qquad (3\text{-}16)$$

ここで

$$\Theta_{n\alpha}^{\beta} = (\delta_\alpha^\beta + \Delta u_n^{\beta}{}_{,\alpha}) \quad , \quad \Theta_{n\alpha}^{3} = \Delta u_n^{3}{}_{,\alpha}\ \lambda_{n-1}$$
$$\Theta_{n3}^{\alpha} = \Delta u_n^{\alpha}{}_{,3}/\ \lambda_n \quad , \quad \Theta_{n3}^{3} = (1+\Delta u_n^{3}{}_{,3})\ \lambda_{n-1}/\lambda_n$$
$$\overline{\Theta}_{n\,s}^{K1} = \Theta_{n\,s}^{Kn}\cdots\cdots\Theta_{1\,K2}^{K1}$$

$$\Omega_{n\beta}^{\alpha} = (\delta_\beta^\alpha - \Delta u_n^{\alpha}{}_{,\beta}) \quad , \quad \Omega_{n3}^{\alpha} = -\Delta u_n^{\alpha}{}_{,3}/\lambda_{n-1}$$
$$\Omega_{n\alpha}^{3} = \Theta_{n3}^{\alpha} \quad , \quad \Omega_{n3}^{3} = \Theta_{n3}^{3}$$
$$\overline{\Omega}_{n\,K1}^{s} = \Omega_{n\,Kn}^{s}\cdots\cdots\Omega_{1\,K1}^{K2}$$

計量テンソルは、つぎのように表される。

$$a_{n\alpha\beta} = \overline{\Theta}_{n\alpha}^{s}\ \overline{\Theta}_{n\beta}^{s} = \Theta_{n\alpha}^{p}\ \Theta_{n\beta}^{q}\ a_{n-1\,pq}$$
$$a_{n\alpha 3} = a_{n3\alpha} = \overline{\Theta}_{n3}^{s}\ \overline{\Theta}_{n\alpha}^{s} = \Theta_{n3}^{p}\ \Theta_{n\alpha}^{q}\ a_{n-1\,pq} = 0$$
$$a_{n33} = \overline{\Theta}_{n3}^{s}\ \overline{\Theta}_{n3}^{s} = \Theta_{n3}^{p}\ \Theta_{n3}^{q}\ a_{n-1\,pq} = 1$$
$$a_n^{\alpha\beta} = \overline{\Omega}_{n\,s}^{\alpha}\ \overline{\Omega}_{n\,s}^{\beta} = \Omega_{n\,p}^{\alpha}\ \Omega_{n\,q}^{\beta}\ a_{n-1}^{pq}$$
$$a_n^{\alpha 3} = a_n^{3\alpha} = \overline{\Omega}_{n\,s}^{3}\ \overline{\Omega}_{n\,s}^{\alpha} = \Omega_{n\,p}^{3}\ \Omega_{n\,q}^{\alpha}\ a_{n-1}^{pq} = 0$$

$$a_n^{33} = \bar{\Omega}_s^3 \bar{\Omega}_s^3 = \Omega_p^3 \Omega_q^3 a_{n-1}^{pq} = 1$$

$$\delta_s^p = \bar{\Theta}_s^t \bar{\Omega}_t^p \qquad (3\text{-}17)$$

3次元空間では4面体、2次元空間では3角形というように、対象としている空間より1だけ多い節点を有し、その節点を頂点とするような多面体要素を単体要素と呼ぶ。この単体要素においては、本節の三角形要素においても成立しているが、要素内において座標系の計量テンソル，ひずみ、および応力は一様である。このような単体要素の場合、要素分割を細かくしていくと真の解に収束することが保証されている。(34)

3－2－2　Kirchhoff の応力増分と表面力の増分

前節までの関係式を式（1－40）に代入することで、有限要素内部のKirchhoffの応力増分 $\Delta s^{\alpha\beta}$ は C状態での真応力 $\tau^{\alpha\beta}$ とその増分 $\Delta\tau^{\alpha\beta}$ によつて表されつぎのようになる。

$$\Delta s^{\alpha\beta} = \Delta\tau^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta}\left[(\beta_\nu^N + {}^N\Lambda_{33\nu}/\lambda^2)\Delta u_N^\nu\right] \qquad (3\text{-}18)$$

つぎに、C状態での圧力 p とその増分 Δp が規定される場合の表面力の増分 $\Delta\hat{T}^s$ は、式（1－47）よりつぎのように表される。

$$\Delta\hat{T}^\alpha = -p/\lambda\ \beta_\nu^N\ a^{\nu\alpha}\ \lambda^2\ \Delta u_N^3$$
$$\Delta\hat{T}^3 = \Delta p/\lambda + p/\lambda\ \beta_\alpha^N\ \Delta u_N^\alpha \qquad (3\text{-}19)$$

3－2－3　増分形の運動方程式の定式化

1－6節で導出した仮想仕事の原理の式に、前節までに得た諸関

係式を代入し整理することで、つぎの一つの有限要素に対する運動方程式を導くことができる。

$$m_N^M \Delta f_M^s + \int_A \Delta n^{rt}\ {}_N\Psi_{tr}^s\, dA + (\underset{(G)}{K_{rN}^{sM}} + \underset{(\sigma)}{K_{rN}^{sM}})\Delta u_M^r + \underset{(I)}{m_{rN}^{sM}} \Delta u_M^r = \Delta \bar{P}_N^s \qquad (3\text{-}20)$$

ここで、Aは有限要素の面積を表し、係数はそれぞれつぎのようになる。

$$m_N^M = \int_A \rho\ \psi^M\ \psi_N dA\ \lambda h_o$$

$$\underset{(G)}{K_{rN}^{sM}} = \int_A n^{tm}\ {}_N\Psi_{mt}^s\ {}^M\Phi_{rn}^n\ dA$$

$$\underset{(\sigma)}{K_{rN}^{sM}} = \int_A n^{tn}\ {}_N\Psi_{mt}^s\ {}^M\Phi_{rn}^m\ dA$$

$$\underset{(I)}{m_{rN}^{sM}} = \int_A f^m\ {}^M\Phi_{rm}^s\ \psi_N\ dA\ \lambda h_o$$

$$\Delta \bar{P}_N^s = \int_A \Delta \hat{T}^s\ \psi_N dA = \Delta P_N^s + \underset{(S)}{R_{rN}^{sM}}\ \Delta u_M^r$$

式（3－20）は物体力および熱発生を考慮しない場合の有限要素に関する増分形の運動方程式であり、初期状態 C_0 から増分変形前の状態Cへの変形量の大きさに制限されず厳密に成立する。上式でのマトリクス m_N^M, $\underset{(\sigma)}{K_{rN}^{sM}}$, $\underset{(S)}{R_{rN}^{sM}}$, $\underset{(I)}{m_{rN}^{sM}}$ はそれぞれ質量マトリクス、初期応力マトリクス、荷重修正マトリクス、質量修正マトリクスと呼ばれているものに対応し、従来の理論において導出されているものと同じ意味をもつものであるが、基準座標の取り方が異なるために式の形が同一ではない。(37),(43),(48)

いっぽうマトリクス $\underset{(G)}{K_{rN}^{sM}}$ は、τ^{mn} の作用する面が増分変形によつてその大きさを変えるために生じてくる項であり、第2初期応力マトリクスあるいは $\underset{(\sigma)}{K_{rN}^{sM}}$ と合わせて初期応力マトリクスと呼ぶことができるものである。このマトリクスは、埋込み座標系の真応力 τ^{mn}

を用いた定式化において、とくに圧縮性の物体に対しては省略することができない項である。(21)

従来の埋込み座標を用いていない場合の増分形の運動方程式と著しく異なる点は、初期変位があるために生じる、いわゆる初期変位マトリクスが無いことである。埋込み座標を基準とした定式化においては、各増分段階の計算ごとにその段階の増分変位が埋込み座標の計量の変化の形で逐次考慮されていることになるので、これが生じないのである。

つぎに、膜体に対して上の運動方程式をあてはめることにする。前章で導出した弾塑性膜体の平面応力状態における増分形の構成関係式（２－15）はつぎのようになる。

$$\Delta\tau^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\delta\nu}\ a_{\delta\mu}\ {}^{M}\Phi_{\lambda\nu}^{\ \mu}\ \Delta u_{M}^{\lambda}$$

$$= E^{\alpha\beta\delta\nu}\ a_{\delta\mu}\ \beta_{\nu}^{M}\ \Delta u_{M}^{\mu} \qquad (3\text{-}21)$$

さらに、面埋込み座標系であるために座標値は変化しない。また、ひずみは計量テンソルで表現することができるがその値は一定である。このために、面積積分に関してつぎの式が成立する。

$$A_e = \sqrt{a}\int_{A_0} d\theta^1 d\theta^2 = \sqrt{a}\ A_0 \qquad (3\text{-}22)$$

$$A_N = \sqrt{a}\int_{A_0} \psi_N\ d\theta^1 d\theta^2 = \sqrt{a}\ \alpha_N\ A_0 \qquad (3\text{-}23)$$

ここで、A_0 は要素の初期の面積である。式（３－21）～（３～23）および平面応力の条件を考慮することにより、式（３－20）はつぎのようになる。

$$m^{M}_{N}\Delta f^{\alpha}_{M} + (K^{\alpha M}_{\beta N} + {}_{(G)}K^{\alpha M}_{\beta N} + {}_{(\sigma)}K^{\alpha M}_{\beta N} + {}_{(I)}m^{\alpha M}_{\beta N})\Delta u^{\beta}_{M} = {}_{(S)}R^{\alpha M}_{3 N}\Delta u^{3}_{M}$$

$$K^{3M}_{3N}\Delta u^{3}_{M} + {}_{(I)}m^{3M}_{\alpha N}\Delta u^{\alpha}_{M} + {}_{(I)}m^{3M}_{3N}\Delta u^{3}_{M} = \Delta P^{3}_{N} + {}_{(S)}R^{3M}_{\alpha N}\Delta u^{\alpha}_{M} \quad (3\text{-}24)$$

ここで

$$m^{M}_{N} = \rho\lambda h_{0}\ \psi^{M}\psi_{N}\ A_{e}$$

$$K^{\alpha M}_{\beta N} = E^{\delta\alpha\nu\lambda}\beta^{M}_{\nu}a_{\lambda\beta}\beta_{N\delta}\lambda h_{0}\ A_{e}$$

$$K^{\alpha M}_{(G)\beta N} = (n^{\alpha\nu}\beta^{M}_{\beta}\beta_{N\nu} + {}^{M}\Lambda_{33}\beta_{N\nu}\ n^{\alpha\nu}/\lambda^{2})\ A_{e}$$

$$K^{rM}_{(\sigma)sN} = (n^{\delta\nu}\beta^{M}_{\nu}\beta_{N\delta})\delta^{r}_{s}\ A_{e}$$

$${}_{(S)}R^{\nu M}_{3 N} = -p/\lambda\ \lambda^{2}a^{\alpha\nu}\beta^{M}_{\alpha}\ A_{N}$$

$${}_{(S)}R^{3M}_{\nu N} = p/\lambda\ \beta^{M}_{\nu}A_{N}$$

$${}_{(I)}m^{\alpha M}_{\beta N} = f^{\nu}\beta^{M}_{\nu}\delta^{\alpha}_{\beta}\rho\lambda h_{0}\ A_{N}$$

$${}_{(I)}m^{3M}_{\alpha N} = f^{3\,M}\Lambda_{33\alpha}/\lambda^{2}\rho\lambda h_{0}\ A_{N}$$

$${}_{(I)}m^{3M}_{3N} = f^{\alpha}\beta^{M}_{\alpha}\rho\lambda h_{0}\ A_{N}$$

$$\Delta P^{3}_{N} = \Delta p/\lambda\ A_{N}$$

式（３－２４）中の $K^{\alpha M}_{\beta N}$ は、いわゆる微小変形理論を用いた場合の剛性マトリクス[34]に対応するが、変形による計量の変化を厳密に考慮している点で本質的に異なる。

以上のようにして、一つの三角形要素に対する増分形の運動方程式を得ることができた。

３－２－４　膜体の運動方程式の組立て

前節までに、要素ごとの増分形の運動方程式の導出を示した。膜体全体は、このようにして特徴づけられた個々の要素の集合として

モデル化される。そこで、これら個々の要素の運動方程式を構成して膜体全体の運動方程式を求める過程を示す。

一般に、要素ごとに異なつた座標系（局所座標系）で要素の運動方程式が記述されていると、膜体の中では、同じ節点であつてもそこで結合されている要素個々の運動方程式中の変位、速度、および節点力ベクトルの各成分はそれぞれの要素ごとの異なつた座標系の基本ベクトルで成分表示されていることになる。このような場合には、共通座標系への変換を行うことで、膜体全体の運動方程式を組立てて行くことになるが、その手順を簡略に示す。

共通座標系として、図３－１に示すように変形していない状態における面埋込み座標系と一致する直交デカルト座標系 $\mathbf{e}_s$ を採用する。式（３－１６）を考慮し、座標変換係数をつぎのように書き改める。

$$\underset{(e)}{\mathbf{a}}_r = \underset{(e)}{\overline{\Theta}^s_r}\,\mathbf{e}_s \quad , \quad \underset{(e)}{\mathbf{a}}^r = \underset{(e)}{\overline{\Omega}^r_s}\,\mathbf{e}_s \tag{3-25}$$

ここで、〃(e)〃は要素での量を表す。

前節までに導出した要素の運動方程式を、改めてつぎのように表す。

$$\underset{(e)}{m^M_N}\ \underset{(e)}{\Delta f^s_M} + \underset{(e)}{k^{sM}_{rN}}\ \underset{(e)}{\Delta u^r_M} = \underset{(e)}{\Delta p^s_N} \tag{3-26}$$

上式を、共通座標系へ変換するとつぎのようになる。

$$\underset{(e)}{\hat{m}^M_N}\ \underset{(e)}{\Delta \hat{f}^s_M} + \underset{(e)}{\hat{k}^{sM}_{rN}}\ \underset{(e)}{\Delta \hat{u}^r_M} = \underset{(e)}{\Delta \hat{p}^s_N} \tag{3-27}$$

ここで、

$$\underset{(e)}{\Delta u^t_M} = \underset{(e)}{\overline{\Omega}^t_r}\,\underset{(e)}{\Delta \hat{u}^r_M}$$

$$\underset{(e)}{\Delta f^r_M} = \underset{(e)}{\overline{\Omega}^r_s}\,\underset{(e)}{\Delta \hat{f}^s_M}$$

$$\hat{m}^{M}_{(e)\,N} = \overline{\Theta}^{s}_{(e)\,r}\; m^{M}_{(e)\,N}\; \overline{\Omega}^{r}_{(e)\,s}$$
$$\hat{k}^{s\,M}_{(e)\,r\,N} = \overline{\Theta}^{s}_{(e)\,n}\; k^{nM}_{(e)\,tN}\; \overline{\Omega}^{t}_{(e)\,r}$$
$$\Delta\hat{p}^{s}_{(e)\,N} = \overline{\Theta}^{s}_{(e)\,r}\; \Delta p^{r}_{(e)\,N}$$

式（３－２７）は、要素の共通座標で表示した運動方程式であり、膜体全体の運動方程式は、Ｊ．Ｔ。Ｏｄｅｎ らが行つたと同様な手法によつて組み立てられる。[34),(35] 膜体の任意の節点Ｋにおける増分変位および増分速度ベクトルの共通座標の基本ベクトル $\mathbf{e}_n$ 方向の成分を、それぞれ ΔU^{j}_{K} ，ΔF^{r}_{s} で表す。これらは、式（３－２７）中の $\Delta\hat{u}^{r}_{M}$ ，$\Delta\hat{f}^{s}_{N}$ とつぎの関係がある。

$$\Delta U^{j}_{K} = \delta^{M}_{K}\; \Delta\hat{u}^{j}_{(e)\,M}$$
$$\Delta F^{r}_{s} = \delta^{N}_{S}\; \Delta\hat{f}^{r}_{(e)\,N} \qquad (3\text{-}28)$$

ここで、指標Ｍ，Ｎは前節までに示しているように、三角形要素の節点を表し、その範囲は節点数（＝３）であり、指標Ｋ，Ｓは膜体の節点を表し、範囲は膜体全体に含まれる節点数である。

最終的に得られる膜体の運動方程式はつぎのようになる。

$$M^{S}_{K}\; \Delta F^{j}_{S} + K^{j\,S}_{m\,K}\; \Delta U^{m}_{S} = \Delta P^{j}_{K} \qquad (3\text{-}29)$$

ここで、

$$M^{S}_{K} = \sum_{(e)=1}^{NE} \hat{m}^{M}_{(e)\,N}\; \delta^{S}_{M}\; \delta^{N}_{K}$$
$$K^{j\,S}_{m\,K} = \sum_{(e)=1}^{NE} \hat{k}^{j\,M}_{(e)\,m\,N}\; \delta^{S}_{M}\; \delta^{N}_{K}$$
$$\Delta P^{j}_{K} = \sum_{(e)=1}^{NE} \Delta\hat{p}^{j}_{(e)\,N}\, \delta^{N}_{K}$$

式（３－２９）は、膜体の運動方程式である。

3－3　弾塑性膜体の軸対称変形の場合

軸対称変形の場合には、独立変数が一つになる。この場合には、有限要素として円輪板要素を用いる方が、式は少々複雑になるが、計算量、精度ともにすぐれている。ここでは、図3－3に示す円輪板要素を用いて薄板の軸対称大ひずみ大変形問題に対する膜体近似による増分形の有限要素関係式の定式化を行う。

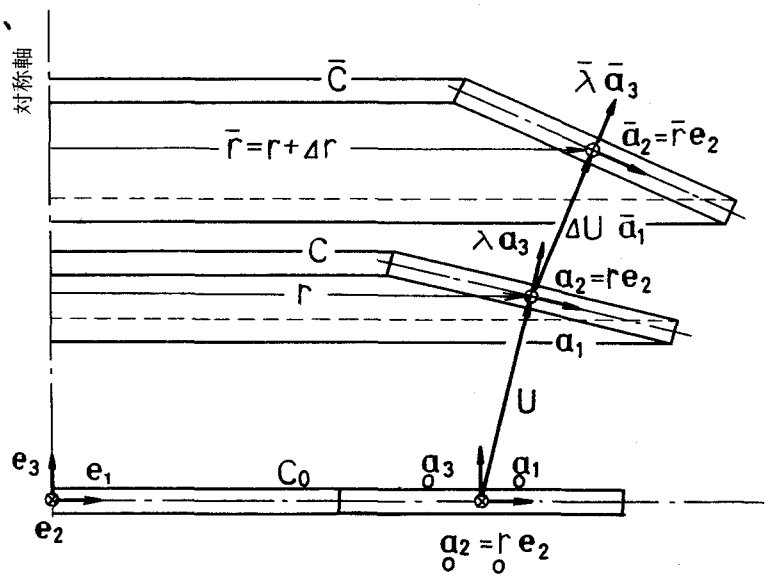


図3－3　　円輪板要素の変形

仮想仕事の原理から運動方程式を導出する方法は前節と同様である。しかし、円輪板要素を採用した場合には、直交曲線座標となるために零でないクリストツフエル記号が存在する。

なお、平面応力状態および軸対称の条件から、つぎの一連の関係が成立する。

$$\Delta\tau^{\alpha 3} = \Delta\tau^{33} = \Delta\tau^{12} = 0$$

$$\Delta\gamma_{\alpha 3} = \Delta\gamma_{12} = a_{\alpha 3} = a_{12} = 0 \qquad (3\text{-}30)$$

3－3－1　クリストツフエル記号

図3－3に示すように、中央面にそつて、半径方向にθ^1、円周方向にθ^2および中央面に対して垂直方向にθ^3をとる。この座標系は、物体とともに変化し、互いに直交する面埋込み座標系を形成する。

前節の三角形要素では、要素内で計量テンソルは一定、クリストツフエル記号は零であるのに対して、この円輪板要素では、計量テンソル、クリストツフエル記号ともに変化する値となる。そこで、ここでは、全ての量を重心での値で代表して表すことにより運動方程式の導出の簡略化をはかることにする。

図３－４は、任意の変形状態にある円輪板要素を示している。ここで、面埋込み直交座標 θ^m と基準直交デカルト座標 x^m との関係を示すとつぎのようになる。

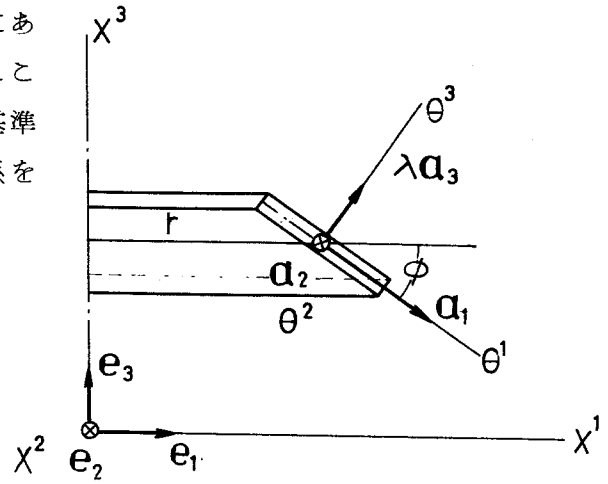


図３－４　面埋込み直交座標

$$x^1 = (h_1\theta^1\cos\phi + h_3\theta^3\sin\phi)\cos\theta^2$$

$$x^2 = (h_1\theta^1\cos\phi + h_3\theta^3\sin\phi)\sin\theta^2$$

$$x^3 = -h_1\theta^1\sin\phi + h_3\theta^3\cos\phi \qquad (3\text{-}31)_1$$

ここで、h_j は面埋込み直交座標の計量であり、つぎのように表される。

$$h_1 = \sqrt{a_{11}}$$

$$h_2 = \sqrt{a_{22}} = r = h_1\theta^1\cos\phi + h_3\theta^3\sin\phi$$

$$h_3 = \lambda \qquad (3\text{-}31)_2$$

ここで、r は要素の重心の半径方向（ $\mathbf{e}_1$ 方向）の距離である。計量テンソルはつぎのようになる。

$$a_{11} = \frac{\partial x^k}{\partial\theta^1}\frac{\partial x^k}{\partial\theta^1} = (h_1)^2$$

$$a_{22} = \frac{\partial x^k}{\partial\theta^2}\frac{\partial x^k}{\partial\theta^2} = (h_2)^2 = r^2$$

$$\lambda^2 = \frac{\partial x^k}{\partial\theta^3}\frac{\partial x^k}{\partial\theta^3} = (h_3)^2 \qquad (3\text{-}32)$$

式（３－３２）以外の計量テンソルは零である。

以上の関係式と、式(1-15)を考慮することにより、クリストッフェル記号を表すとつぎのようになる。

$$\overline{\Gamma}_{12}^{2} = \overline{\Gamma}_{21}^{2} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\theta^1} = \frac{1}{r}h_1\cos\phi$$

$$\overline{\Gamma}_{32}^{2} = \overline{\Gamma}_{23}^{2} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\theta^3} = \frac{1}{r}\lambda\sin\phi$$

$$-\overline{\Gamma}_{22}^{3} = \frac{h_2}{(h_3)^2}\frac{\partial h_2}{\partial \theta^3} = \frac{r}{\lambda^2}\lambda\sin\phi$$

$$-\overline{\Gamma}_{22}^{1} = \frac{h_2}{(h_1)^2}\frac{\partial h_2}{\partial \theta^1} = \frac{r}{(h_1)^2}\, h_1\cos\phi \qquad (3\text{-}33)$$

上記以外のクリストツフエル記号は零である。

ここで、図３－３の変形状態Ｃにおける面埋込み直交座標系 $\mathbf{a}_m$ と基準直交デカルト座標系 $\mathbf{e}_m$ との関係をつぎのように表す。

$$\mathbf{a}_s = \overline{\Theta}_s^i \mathbf{e}_i \quad , \quad \mathbf{a}^s = \overline{\Omega}_i^s \mathbf{e}_i \qquad (3\text{-}34)$$

式（３－３４）を用いることにより、式（３－３３）はつぎのようになる。

$$\overline{\Gamma}_{12}^{2} = \overline{\Gamma}_{21}^{2} = \frac{1}{r}\overline{\Theta}_1^1 = \frac{1}{r}a_{11}\,\overline{\Omega}_1^1$$

$$\overline{\Gamma}_{32}^{2} = \overline{\Gamma}_{23}^{2} = \frac{1}{r}\overline{\Theta}_3^1 = \frac{1}{r}\lambda^2\,\overline{\Omega}_1^3$$

$$-\overline{\Gamma}_{22}^{3} = \frac{r}{\lambda^2}\,\overline{\Theta}_3^1 = r\,\overline{\Omega}_1^3$$

$$-\overline{\Gamma}_{22}^{1} = \frac{r}{a_{11}}\,\overline{\Theta}_1^1 = r\,\overline{\Omega}_1^1 \qquad (3\text{-}35)$$

以上の関係を用いて、変位増分 $\Delta\mathbf{u}$ のＣ状態での面埋込み座標基準の共変微分を求めるとつぎのようになる。

$$\Delta u^s{}_{,,j} = \Delta u^s{}_{,j} + \overline{\Gamma}_{kj}^{s}\,\Delta u^k \qquad (3\text{-}36)$$

増分変形後の状態 $\overline{C}$ における基本ベクトル $\overline{\mathbf{a}}_m$ および計量テンソル $\overline{a}_{\alpha\beta}$ を式（１－９）$_2$，（１－１３），（１－１４）より求めるとつぎのようになる。

$$\overline{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{a}_1 + \Delta u^1{}_{,1}\,\mathbf{a}_1 + \Delta u^3{}_{,1}\,\lambda\,\mathbf{a}_3$$

$$\overline{\mathbf{a}}_2 = (1 + \overline{\Gamma}_{12}^{2}\Delta u^1 + \overline{\Gamma}_{32}^{2}\,\Delta u^3)\,\mathbf{a}_2$$

$$\overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{a}}_3 = \lambda\,\mathbf{a}_3 + \Delta u^1{}_{,3}\,\mathbf{a}_1 + \Delta u^3{}_{,3}\,\lambda\,\mathbf{a}_3 \qquad (3\text{-}37)$$

$$\bar{a}_{11} \cong a_{11} + 2\Delta u^1{}_{,1}\, a_{11}$$

$$\bar{a}_{22} \cong a_{22} + 2\left(\bar{\Gamma}_{12}^{2}\Delta u^1 + \bar{\Gamma}_{32}^{2}\Delta u^3\right) a_{22}$$
$$= r^2 + 2r\Delta r$$

$$\bar{\lambda}^2 \cong \lambda^2 + 2\Delta u^3{}_{,3}\,\lambda^2 = \lambda^2 + 2\lambda\Delta\lambda \qquad (3\text{-}38)$$

式（1－22）によつて、ひずみ増分はつぎのように表される。

$$\Delta\gamma_{11} \cong \Delta u^1{}_{,1}\, a_{11} = \Delta u_{1,1}$$

$$\Delta\gamma_{22} \cong \left(\bar{\Gamma}_{12}^{2}\,\Delta u^1 + \bar{\Gamma}_{32}^{2}\,\Delta u^3\right) a_{22}$$
$$= \left(\bar{\Gamma}_{12}^{2}\, a^{11}\,\Delta u_1 + \bar{\Gamma}_{32}^{2}\,\frac{1}{\lambda^2}\,\Delta u_3\right) a_{22}$$
$$= r\,\Delta r$$

$$\Delta\gamma_{33} \cong \Delta u^3{}_{,3}\,\lambda^2 = \Delta u_{3,3} = \lambda\,\Delta\lambda \qquad (3\text{-}39)$$

3－3－2　増分形の運動方程式の定式化

円輪板要素内において、変位増分、速度、および加速度増分は線形に変化しているものと仮定し、節点でのそれらの値と、つぎに示す変位関数によつてつぎのように表す。

$$\Delta u^s = \psi^N\,\Delta u^s_N \quad , \quad \Delta u_s = \psi_N\,\Delta u^N_s$$
$$v^s = \psi^N\, v^s_N \quad , \quad v_s = \psi_N\, v^N_s$$
$$\Delta f^s = \psi^N\,\Delta f^s_N \quad , \quad \Delta f_s = \psi_N\,\Delta f^N_s \qquad (3\text{-}40)$$

ただし、 $\Delta u^2 = \Delta u_2 = v^2 = v_2 = \Delta f^2 = \Delta f_2 = 0$

ここで、 Δu^j_N , Δu^M_j , v^j_N , v^M_j , Δf^j_N , Δf^M_j はそれぞれ要素端（節点）M，Nでの値であり、添字 M，N の範囲は 1，2であり、その範囲内で総和規約をとる。 ψ^N , ψ_M は Lagrange の内そう関

数でつぎのように表される。

$$\psi_N = \alpha_N + \beta_{N1}\,\theta^1 \quad , \quad \psi^N = \alpha^N + \beta_1^N\,\theta^1$$

$$\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\alpha^1\\ \alpha^2\end{Bmatrix} = \frac{1}{\theta_1^1-\theta_2^1}\begin{Bmatrix}-\theta_2^1\\ \theta_1^1\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\beta_{11}\\ \beta_{21}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\beta_1^1\\ \beta_1^2\end{Bmatrix} = \frac{1}{\theta_1^1-\theta_2^1}\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix} \qquad (3\text{-}41)$$

ここで、θ_N^1 は節点Nの θ^1 座標値であり、この解析では埋込み座標を用いているから変形過程中で一定値をとる。

諸量を重心における値で近似的に代表させることにより、変位増分、速度成分のC状態での $\mathbf{a}_m$ 基準の共変微分はつぎのようになる。

$$\Delta u_{j\,|\,s} = {}_N\Psi_j^k\ \Delta u_k^N \quad , \quad \Delta u^j{}_{|\,s} = {}^N\Phi_{ks}^{\ j}\ \Delta u_N^k$$

$$v_{j\,|\,s} = {}_N\Psi_j^k\ v_k^N \quad , \quad v^j{}_{|\,s} = {}^N\Phi_{ks}^{\ j}\ v_N^k \qquad (3\text{-}42)$$

ここで、

$${}_N\Psi_1{}_1^1=\beta_{N1},\ {}_N\Psi_2{}_2^1={}_N\Pi_2{}_2^1,\ {}_N\Psi_3{}_3^1=A_3^{11}\ \beta_{N1}+A_3^{22}\ {}_N\Pi_2{}_2^1$$

$${}_N\Psi_3{}_1^3=\beta_{N1},\ {}_N\Psi_2{}_2^3={}_N\Pi_2{}_2^3,\ {}_N\Psi_3{}_3^3=A_3^{22}\ {}_N\Pi_2{}_2^3$$

$${}^N\Phi_1{}_1^1=\beta_1^N,\ {}^N\Phi_1{}_2^2=a^{22}\ {}^N\Gamma_{221}\ ,\ {}^N\Phi_3{}_1^3=\beta_1^N\ ,\ {}^N\Phi_3{}_3^3=A_3^{22}\ {}^N\Gamma_{223}/\lambda^2$$

$${}^N\Phi_1{}_3^3=a_{11}A_3^{11}\ \beta_1^N/\lambda^2+A_3^{22}\ {}^N\Gamma_{221}/\lambda^2\ ,\ {}^N\Phi_3{}_2^2={}^N\Gamma_{223}a^{22}$$

それ以外の ${}_N\Psi_{st}^{\ r}$, ${}^N\Phi_{st}^{\ r}$ は零である。上式での $A_{33}^{\alpha\beta}$ は、式（2－16）に示している。また、${}^N\Gamma_{22s}$, ${}_N\Pi_2{}_2^s$ は、式（3－34），（3－35）よりつぎのように表される。

$${}^N\Gamma_{22s} = r^N\ \overline{\Theta}_s^1/2 \quad , \quad {}_N\Pi_2{}_2^s = r_N\ \overline{\Omega}_1^s/2 \qquad (3\text{-}43)$$

(r^N , r_N は、節点 N の半径(e_1)方向の距離である。)

有限要素のひずみ増分は、式(1 − 22) より、重心での値で近似的に代表させて表すとつぎのようになる。

$$\Delta\gamma_{11} = \beta_{N1}\Delta u_1^N = \beta_1^N\, a_{11}\, \Delta u_N^1$$

$$\Delta\gamma_{22} = {}^N\Gamma_{22s}\, \Delta u_N^s = {}_N\Pi_{22}^s\, \Delta u_s^N \qquad (3\text{-}44)_1$$

さらに、板厚方向の成分は式(2 − 16) よりつぎのように表される。

$$\Delta\gamma_{33} = \sum_{\alpha=1}^{2} A_{33}^{\alpha\alpha}\, \Delta\gamma_{\alpha\alpha} \qquad (3\text{-}44)_2$$

Kirchhoff の応力増分および表面力の増分を具体的に示すとつぎのようになる。

$$\Delta s^{(\alpha\alpha)} = \Delta\tau^{(\alpha\alpha)} + \tau^{(\alpha\alpha)}\left(\beta_1^N\Delta u_N^1 + a^{22}\,{}^N\Gamma_{22s}\,\Delta u_N^s + a_{11}A_{33}^{11}\beta_1^N\Delta u_N^1/\lambda^2 + A_{33}^{22}\,{}^N\Gamma_{22s}\,\Delta u_N^s/\lambda^2\right)$$

$$\Delta\hat{T}^1 = -p/\lambda\ \beta_1^N a^{11}\lambda^2\Delta u_N^3$$

$$\Delta\hat{T}^3 = \Delta p/\lambda + p/\lambda\left[(\beta_1^N + a^{22}\,{}^N\Gamma_{221})\Delta u_N^1 + a^{22}\,{}^N\Gamma_{223}\Delta u_N^3\right] \qquad (3\text{-}45)$$

以上の関係式を仮想仕事の原理の式(1 − 53) に代入し整理することにより、つぎの一つの円輪板要素に対する増分形の運動方程式を得る。

$$m_N^M\,\Delta f_M^j + (K_{sN}^{jM} + \underset{(G)}{K_{sN}^{jM}} + \underset{(O)}{K_{sN}^{jM}} + \underset{(S)}{R_{sN}^{jM}} + \underset{(I)}{m_{sN}^{jM}})\Delta u_M^s = \Delta P_N^j \qquad (3\text{-}46)$$

ここで

$$m_N^M = \rho\lambda h_o \psi^M \psi_N A_e$$

$$K_{1N}^{1M} = (E^{1111}a_{11}\beta_1^M\beta_{N1} + E^{1122}{}^M\Gamma_{221}\beta_{N1} + E^{2211}a_{11}\beta_1^M{}_N\Pi_{22}^{1} + E^{2222}{}^M\Gamma_{2211}{}_N\Pi_{22}^{1})\lambda h_o A_e$$

$$K_{3N}^{1M} = (E^{1122}\beta_{N1}{}^M\Gamma_{223} + E^{2222}{}^M\Gamma_{2233}{}_N\Pi_{22}^{1})\lambda h_o A_e$$

$$K_{1N}^{3M} = (E^{2211}a_{11}\beta_1^M{}_N\Pi_{22}^{3} + E^{2222}{}^M\Gamma_{2211}{}_N\Pi_{22}^{3})\lambda h_o A_e$$

$$K_{3N}^{3M} = E^{2222}{}^M\Gamma_{223}{}_N\Pi_{22}^{3}\lambda h_o A_e$$

$$K_{(G)1N}^{1M} = (n^{11}\beta_{N1} + n^{22}{}_N\Pi_{22}^{1})\left[(\beta_1^M + {}^M\Gamma_{221}a^{22}) + (\beta_1^M A_{33}^{11}a_{11} + {}^M\Gamma_{221}A_{33}^{22})/\lambda^2\right] A_e$$

$$K_{(G)3N}^{1M} = (n^{11}\beta_{N1} + n^{22}{}_N\Pi_{22}^{1})(a^{22} + A_{33}^{22}/\lambda^2){}^M\Gamma_{223} A_e$$

$$K_{(G)1N}^{3M} = \left[\beta_1^M(1 + A_{33}^{11}a_{11}/\lambda^2) + {}^M\Gamma_{221}(a^{22} + A_{33}^{22}/\lambda^2)\right] n^{22}{}_N\Pi_{22}^{3} A_e$$

$$K_{(G)3N}^{3M} = (a^{22} + A_{33}^{22}/\lambda^2)n^{22}{}^M\Gamma_{223}{}_N\Pi_{22}^{3} A_e$$

$$K_{(O)1N}^{1M} = (n^{11}\beta_1^M\beta_{N1} + n^{22}a^{22}{}^M\Gamma_{221}{}_N\Pi_{22}^{1}) A_e$$

$$K_{(O)3N}^{1M} = n^{22}a^{22}{}^M\Gamma_{223}{}_N\Pi_{22}^{1} A_e$$

$$K_{(O)1N}^{3M} = n^{22}a^{22}{}^M\Gamma_{221}{}_N\Pi_{22}^{3} A_e$$

$$K_{(O)3N}^{3M} = (n^{11}\beta_1^M\beta_{N1} + n^{22}a^{22}{}^M\Gamma_{223}{}_N\Pi_{22}^{3}) A_e$$

$$R_{(S)3N}^{1M} = +p/\lambda\ \beta_1^M a^{11}\ \lambda^2 A_N$$

$$R_{(S)1N}^{3M} = -p/\lambda\ (\beta_1^M + a^{22}{}^M\Gamma_{221})\ A_N$$

$$R_{(S)3N}^{3M} = -p/\lambda\ a^{22}{}^M\Gamma_{223} A_N$$

$$m_{(I)1N}^{1M} = \rho\lambda h_o f^1 \beta_1^M A_N$$

$$m_{(I)1N}^{3M} = \rho\lambda h_o f^3(a_{11}A_{33}^{11}\beta_1^M + A_{33}^{22}{}^M\Gamma_{221})/\lambda^2 A_N$$

$$m_{(I)3N}^{3M} = \rho\lambda h_o (f^1\beta_1^M + f^3 A_{33}^{22}{}^M\Gamma_{223}/\lambda^2) A_N$$

$$\Delta P_N^3 = \Delta p/\lambda A_N$$

$$\left[\begin{array}{l} A_e = 2\pi \int_{A_0} \sqrt{a}\, d\theta^1 \quad , \quad A_N = 2\pi \int_{A_0} \sqrt{a}\, \psi_N\, d\theta^1 \\ A_0 \ , \ \underset{0}{h} \text{ は、初期状態での面積、板厚である。} \end{array}\right]$$

軸対称膜体全体の運動方程式の組立ては、3－2－4節において示した手法と同様に行うことができる。

3－4　弾塑性クリープおよび超塑性膜体の軸対称変形の場合

構成関係式（2－26）の形から分るように、ひずみ増分に比例する項以外に、時間増分に比例する項を伴つている。このため、前節までに扱つた運動方程式に追加項が生じる。ここでは、軸対称変形問題に限定して、図3－3の円輪板要素を用いる。式（3－41）に示した変位関数を用いて、変位増分のC状態における $\mathbf{a}_m$ 基準の共変微分を求めるとつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \Delta u_{s\,,\beta} &= {}_N\Psi_{s\ \beta}^{\ r}\, \Delta u_r^N \ , \ \Delta u^s{}_{,\beta} = {}^N\Phi_{r\ \beta}^{\ s}\, \Delta u_N^r \\ \Delta u_{3\,,3} &= {}_N\Psi_{3\ 3}^{\ s} \Delta u_s^N + (-A_{3\ 3}^{\delta\mu} C_{\delta\mu\lambda\nu} \tau^{,\lambda\nu} + C_{3333} \tau^{,33})\ \Delta t \\ \Delta u^3{}_{,3} &= {}^N\Phi_{s\ 3}^{\ 3} \Delta u_N^s + (-A_{3\ 3}^{\delta\mu} C_{\delta\mu\lambda\nu} \tau^{,\lambda\nu} + C_{3333} \tau^{,33})/\lambda^2 \Delta t \end{aligned} \qquad (3\text{-}47)$$

ここで、${}_N\Psi_{st}^{\ r}$ 、${}^N\Phi_{st}^{\ r}$ は、式（3－42）に示した係数と等しく、追加項は式（2－28）に示すように、板厚方向ひずみ増分における粘性の影響を表している。

3－3節と同様にして、仮想仕事の原理の式（1－53）から一つの円輪板要素に対する運動方程式を得る。

$$m_N^M \Delta f_M^j + (K_{sN}^{jM} + \underset{(G)}{K_{sN}^{jM}} + \underset{(\sigma)}{K_{sN}^{jM}} + \underset{(S)}{R_{sN}^{jM}} + \underset{(I)}{m_{sN}^{jM}})\Delta u_M^s = \Delta P_N^j + (S_N^j + \underset{(m)}{S_N^j})\Delta t \qquad (3\text{-}48)$$

ここで、

$$S_N^j = \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}\left[-D^{\beta\beta\alpha\alpha}C_{\alpha\alpha\alpha\alpha}\tau^{,\alpha\alpha}{}_N\Psi^j_{\beta\beta}\lambda\underset{o}{h} + n^{\alpha\alpha}{}_N\Psi^j_{\alpha\alpha}(-A_{33}^{\delta\mu}C_{\delta\mu\lambda\nu}\tau^{,\lambda\nu}+C_{3333}\tau^{,33})/\lambda^2\right] A_e$$

$$S^1_{N\,(m)} = 0 \quad , \quad S^3_{N\,(m)} = \rho\lambda\underset{o}{h}\, f^3/\lambda^2(-A_{33}^{\delta\mu}C_{\delta\mu\lambda\nu}\tau^{,\lambda\nu}+C_{3333}\tau^{,33})A_N$$

他の係数および $\underset{o}{h}$, A_N , A_e は、式（３－46）に示している。

以上により、弾塑性クリープおよび超塑性モデルを用い、諸量を重心の値で近似的に代表して表した場合の運動方程式が得られた。軸対称膜体全体の運動方程式の組立ては、３－２－４節と同様である。

３－５　弾／粘塑性膜体の軸対称変形の場合

３－４節同様に、構成関係式（２－38）の右辺第２項に起因して、３－３節で得た運動方程式に追加項が生じる。軸対称変形問題に限定し、図３－３に示す円輪板要素を用いる。式（３－41）の変位関数を用いて、変位増分のC状態での $\mathbf{a}_m$ 基準の共変微分を求めるとつぎのようになる。

$$\Delta u_{s\,,\beta} = {}_N\Psi_{s\beta}^{\ r}\,\Delta u_r^N \quad , \quad \Delta u^s{}_{,\beta} = {}^N\Phi_{r\beta}^{\ s}\,\Delta u_N^r$$

$$\Delta u_{3\,,3} = {}_N\Psi_{33}^{\ s}\,\Delta u_s^N + P_{33}\,\Delta t$$

$$\Delta u^3{}_{,3} = {}^N\Phi_{s3}^{\ 3}\,\Delta u_N^s + P_{33}/\lambda^2\,\Delta t \qquad (3\text{-}49)$$

ここでの係数 ${}_N\Psi^m_{st}$, ${}^N\Phi^m_{st}$ は、式（３－42）に示しているものと等しく、追加項は粘性の影響を表している。なお、

$$P_{33} = \nu/E\ \lambda^2 a_{\delta\mu} P^{\delta\mu}_{\alpha\beta}\ \tau^{\alpha\beta} - \gamma<\Phi(\frac{F}{F_0})> \frac{\lambda^2}{2\sqrt{3}\sqrt{J_2}}\ a_{\alpha\beta}\ \tau^{\alpha\beta} \tag{3-50}$$

以上の関係式を、仮想仕事の原理の式（１－５３）に代入し整理することにより、つぎの一つの円輪板要素に対する増分形の運動方程式が得られる。

$$m^M_N \Delta f^s_M + (K^{sM}_{rN} + \underset{(G)}{K^{sM}_{rN}} + \underset{(\sigma)}{K^{sM}_{rN}} + \underset{(S)}{R^{sM}_{rN}} + \underset{(I)}{m^{sM}_{rN}})\Delta u^r_M = \Delta P^s_N + (Y^s_N + \underset{(m)}{Y^s_N})\Delta t \tag{3-51}$$

ここで、

$$K^{sM}_{rN} = \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2} (B^{\alpha\alpha\beta\beta} - F^{\alpha\alpha\beta\beta}) a_{\beta\beta}\ {}^M\Phi_{r\beta}\ {}_N\Psi^s_{\alpha\alpha} \lambda h_o\ A_e$$

$$Y^s_N = \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2} (P^{\alpha\alpha}_{\beta\beta}\ {}_N\Psi^s_{\alpha\alpha} n^{\beta\beta} + P_{33} n^{\alpha\alpha}\ {}_N\Psi^s_{\alpha\alpha}/\lambda^2)\ A_e$$

$$\underset{(m)}{Y^1_N} = 0\ ,\ \underset{(m)}{Y^3_N} = \rho\lambda h_o\ f^3/\lambda^2\ P_{33}\ A_N$$

他の係数および h_o ，A_N ，A_e は、式（３－４６）に示している。

以上により、弾／粘塑性モデルを用いた場合の運動方程式が得られた。軸対称膜体全体の運動方程式の組立ては、３－２－４節と同様である。

３－６　運動方程式の解法

３－６－１　動的問題

非周期性の過渡入力ベクトルに対する動的応答の計算（数値積分）は、いろいろの方法で行うことができる。[17),(18)]

本論文では、２階の常微分方程式の数値解析法として良好な安定性が保証され、より実用的と考えられている NewmarK の β 法[67)～69)]

を採用する。まず、これまでに導出された運動方程式（３－２４），（３－４６），（３－４８），（３－５１）をつぎのように表す。

$$[\mathbf{M}]\{\Delta\mathbf{f}\} + [\mathbf{K}]\{\Delta\mathbf{u}\} = \{\Delta\mathbf{p}\} \qquad (3\text{-}52)$$

Newmarkのβ法では、微小増分時間 Δt 区間での変位増分ベクトルをつぎのように表す。

$$\{\Delta\mathbf{u}\} = \{\mathbf{v}\}\Delta t + \{\mathbf{f}\}\Delta t^2/2 + \beta\{\Delta\mathbf{f}\}\Delta t^2 \qquad (3\text{-}53)$$

ここで、$\{\mathbf{v}\}$，$\{\mathbf{f}\}$ は、増分変形前の速度、加速度ベクトルである。 β（$0 \leqq \beta \leqq 1/4$）の値と増分時間区間内における加速度との関係を示すとつぎのようになる。

β =	1/4	加速度は一定である。
=	1/6	〃　は線形に変化する。
=	1/8	〃　は区間内の前半分と後半分をステップ状に変化する。
=	1/12	非減衰構造物の場合に良い精度と安定を示す。

式（３－５２）に式（３－５３）を代入することによりつぎの関係を得る。

$$\{\Delta\mathbf{f}\} = [\mathbf{Q}]^{-1}\{\{\Delta\mathbf{p}\} - [\mathbf{K}](\{\mathbf{v}\}\Delta t + \{\mathbf{f}\}\Delta t^2/2)\}$$

$$[\mathbf{Q}] = [\mathbf{K}]\beta\Delta t^2 + [\mathbf{M}] \qquad (3\text{-}54)$$

式（３－５３），（３－５４）からわかるように、$\{\mathbf{v}\}$，$\{\mathbf{f}\}$ が既知であれば、変位増分ベクトル $\{\Delta\mathbf{u}\}$ の値を求めることができる。初期状態、すなわち積分の開始点での値が与えられていれば、漸次値を求めることができる。

さらに、本研究のように、境界において変位成分が既知である場合の取扱いは連立方程式中の未知変位を既知変位で置換える形で処理できるが、数値計算上で多少の工夫が必要である。ここでは、O。C。ZienKiewitz[34]の提案した方法を採用する。

3－6－2　静的および準静的問題

静的な場合は、運動方程式（3－52）の質量マトリクスが無い場合に相当するために、単純な代数の問題となる。

弾塑性クリープ、超塑性および弾／粘塑性モデルを用いた準静的問題の場合は、静的な場合と比較すると、式（3－48），（3－51）からわかるように、等価節点力に増分時間 Δt に関連した追加項を生じている。ここで採用する解法は、増分負荷 Δp を加え、（増分時間 $\Delta t = 0$ ）微小増分変形解析を行い、つぎに増分時間 Δt を加え（ $\Delta p = 0$ ）微小増分変形を生じさせる操作をくり返して、圧力と時間の関係を示す負荷曲線を階段状にたどることで近似応答解析を行うという方法である。

3－7　結　言

本章では、静的、準静的および動的な薄板の大ひずみ大変形問題の解析を目的として、弾塑性、弾塑性クリープ、超塑性、弾／粘塑性モデルを採用して、三角形要素および円輪板要素による増分形の有限要素関係式を定式化し、その解法もあわせて示した。

H。D。Hibbit らは、Euler法による増分形の有限要素関係式を定式化しているが、[37]その中で座標系および参照基準を明確にした厳密な理論が要求されることを指摘している。本論文において、

面埋込み座標表示のLagrange 法による膜体の仮想仕事の原理から導出した運動方程式は、幾何学的および材料的非線形によつて生じる修正付加マトリクスに関してHibbit らの結果と一致した。

埋込み座標系を基準とすると、その計量テンソルが空間的にそして変形に伴つて時間的に変化するため、解析的手法を使用する場合は、特別な場合を除いて一般に使用できない。

しかし、有限要素法のような数値的解法を用いる場合は、ひずみとその増分の取扱い、つり合い式の表現などが簡潔になり、むしろ都合が良いことが報告されている。(47)~(54)

第４章　薄板の静的大変形解析（1）
（弾塑性体の場合）

４－１　緒　言

本章では、３－２節、３－３節で定式化した弾塑性膜体の軸対称および非軸対称有限要素法を用いて、静水圧を受ける薄板の弾塑性大変形解析を行う。その数値解析結果と従来から得られている結果との比較、および実験値との比較を行う。

薄板の大変形問題の解析は、板の成形加工、構造物の安全設計、板材の材料試験などに関連しており、工学上重要である。この問題では、板厚が他の板の寸法に比べて十分に小さいため、従来から膜理論を用いた解析が多く行われている。[43],[44]また、現在までに行われた研究の多くは、軸対称変形でひずみの小さい大たわみ領域までの解析である。[42]塑性加工の観点から有限ひずみを考慮した解析は少なく、山田ら[40]，高橋ら[41]，および井関ら[43],[44]によつてなされているにすぎない。前２者は、軸対称変形解析のみを行つたものである。軸対称の場合には、主ひずみ方向が回転しないために解析がきわめて簡単になる。

山田らは、変形の初期段階に対して、かく理論による解析を行つている。それには、鋼板を使用した実験結果との比較から、中心のたわみが板厚と同程度以上になると、かく理論と膜理論との解はほぼ一致するということが示されている。それに対して、井関らは、膜理論により初期直交デカルト座標系を基準として増分形の有限要素関係式を導出し、軸対称および非軸対称変形の解析を行つている。

４－２節では、薄肉円板の液圧バルジ変形を対象として、本有限

要素法による解析結果と山田らの差分法による解析結果[40]，井関らの有限要素法による解析および実験結果[43]，著者らが行つたモアレトポグラフイ法[64]～[66]と格子法を併用した実験結果との比較を行う。

4－3節では、正方形、長方形、だ円板の液圧バルジ変形を非軸対称有限要素法により解析し、井関らの解析結果[44]および著者らが行つた実験結果との比較を行う。

4－2　薄肉円板の液圧バルジ変形

3－2および3－3節で定式化した弾塑性膜体に対する有限要素法を用いて、(1)鋼円板、(2)アルミニウム円板の液圧バルジ変形の解析を行い、従来から得られている結果[40],[43],[44]との比較より、その有効性を確認した上で、(3)モアレトポグラフイ法と格子法を併用したアルミニウム円板の実験結果との比較を行う。なお、解析には軸対称有限要素法を用いるが、非軸対称有限要素法による結果も必要に応じて示すことにする。

以下に示す解析結果から、液圧と中心のたわみの関係は、縦軸に液圧、横軸に中心たわみをとると、概略つぎのようになる。液圧を上げていくと、最初は、下に凸の関係を描きつつたわみが増加するが、しだいに膜力が大きくなつてくるために、上に凸の曲線になり、ある点で液圧極大点を生じる。極大点以降に対しても、一定の中心たわみ量を生じるようにして解を求めるという計算を進めていくことで、液圧－中心たわみの関係を知ることができる。実際の場合には、液圧極大点を過ぎると、急激に破断に至るような変形を生じると考えられる。

ここでは、他の研究者[43],[44]にならつて、最大液圧点を破断点と考えることにする。

解析を行うに先立つて、分割数と精度との関係を検討するために、円板の変形を軸対称有限要素法を用いて、半径方向に10 および50 等分割して計算したところ、最大液圧点での変形差は、1.0 %程度であつた。そこで、以下の円板の解析においては、半径方向50 等分割を採用する。

非軸対称有限要素法では、1/4 円領域を41分割して計算を行う。*

また、計算の第1段階に入る前に、板の初期変位を与える必要があるが、それには、回転放物面状に変形するものと仮定し、エネルギ法により求めた弾性解を用いることとする。

4－2－1　軟鋼円板の液圧バルジ変形

図4－1に、軟鋼円板について、軸対称有限要素法により解析した結果を示す。

材料の応力－ひずみ関係および材料特性値を示すとつぎのようになる。

$$\bar{\sigma} = 105.\ (0.0019 + \bar{\varepsilon}^{(p)})^{0.2} \qquad Kg/mm^2$$

$$E = 21000.\ Kg/mm^2 \quad , \quad \sigma_y = 30.\ Kg/mm^2$$

$$\nu = 0.3 \qquad (4\text{-}1)$$

これらは、山田らが解析に用いたものである。[40]

＊　解の精度と分割数の関係は、4－3節に述べているが、1/4円領域を28、41分割した場合の最大液圧点での変形差は、2.0％程度である。

図4－1(a)は、液圧と中心の板厚方向ひずみとの関係を示している。山田らの差分法による解および井関らの有限要素法による解[43]も示している。本解法の結果は、変形の全領域にわたつて、これらの解とよく一致しているが、ひずみの大きい領域で、材料の剛性がわずかに低く見積られ、同一圧力に対してややひずみが大きく出ていることがわかる。山田らは、変形の初期段階で、かく理論による解析を行い、膜理論による解析が十分正確な結果を与えることを示している。

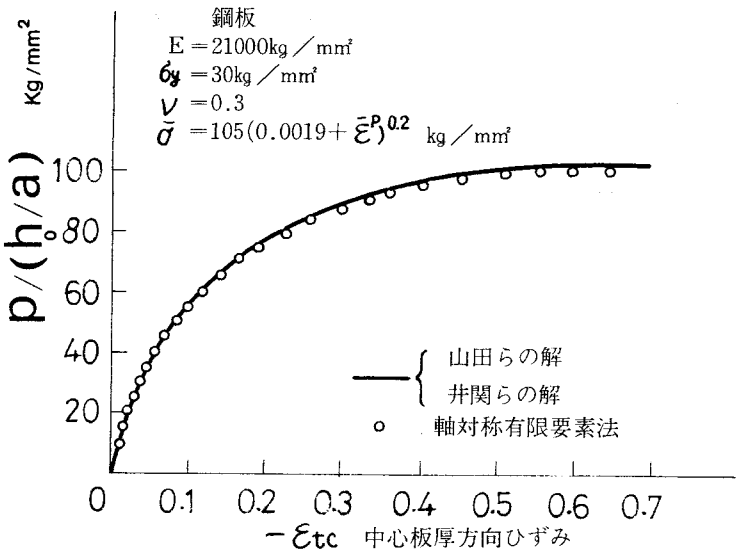


図4－1(a)　液圧＝中心の板厚方向ひずみ

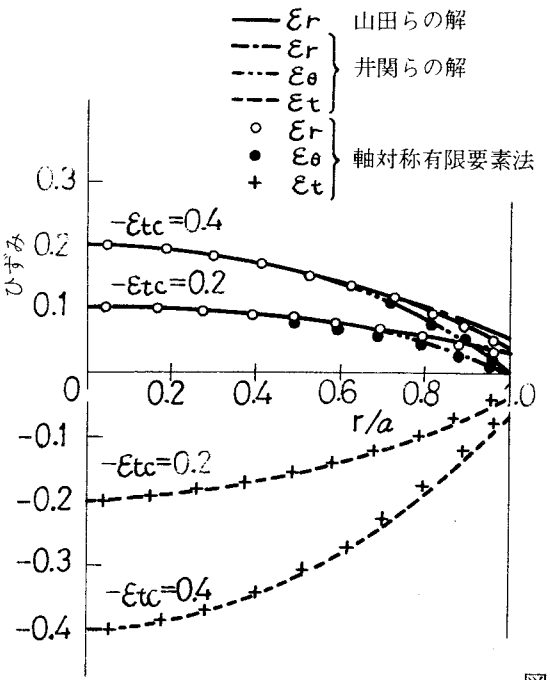


図4－1(b)　軟鋼円板のひずみ分布

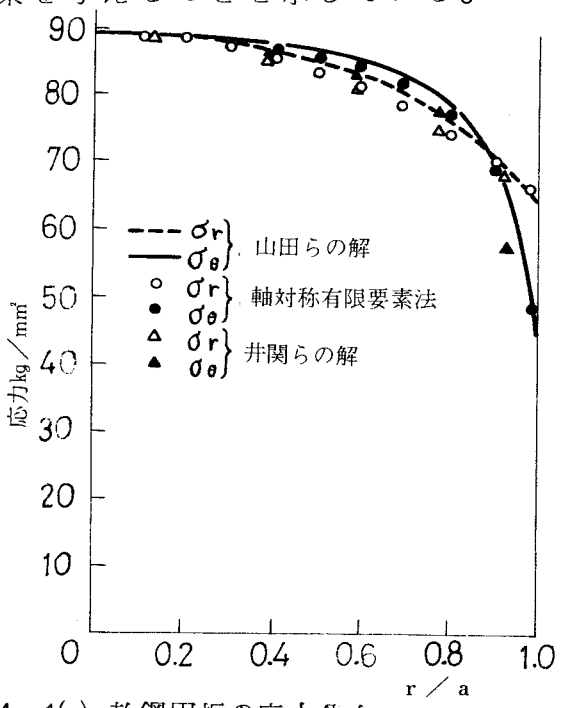


図4－1(c)　軟鋼円板の応力分布

図４－１(b)，(c)は、中心の板厚方向ひずみ ε_{tc} をパラメータとした半径上のひずみ分布および応力分布を示している。山田らの結果とよく一致しており、本手法による変形解析は、十分正確な結果を与えることがわかる。いっぽう、井関らの解とは境界近傍のひずみ、応力について少しの差が認められる。

４－２－２　アルミニウム円板の液圧バルジ変形(1)

――― 井関らの解析結果との比較 ―――

図４－２に、アルミニウム円板について本有限要素法により解析した結果を示す。

材料の応力－ひずみ関係および材料特性値は、井関らが実験より求めたものを用いた。

$$\bar{\sigma} = 18.(0.000769 + \bar{\varepsilon}^{(p)})^{0.29} \quad \mathrm{Kg/mm^2}$$

$$E = 7000. \ \mathrm{Kg/mm^2}, \quad \sigma_y = 2.25 \ \mathrm{Kg/mm^2}$$

$$\nu = 0.314 \qquad (4\text{-}2)$$

図４－２(a)は、液圧と中心たわみとの関係を、井関らの解析結果および実験結果[43]と比較して示している。ここでも本有限要素法による結果は井関らの実験結果と非常によく一

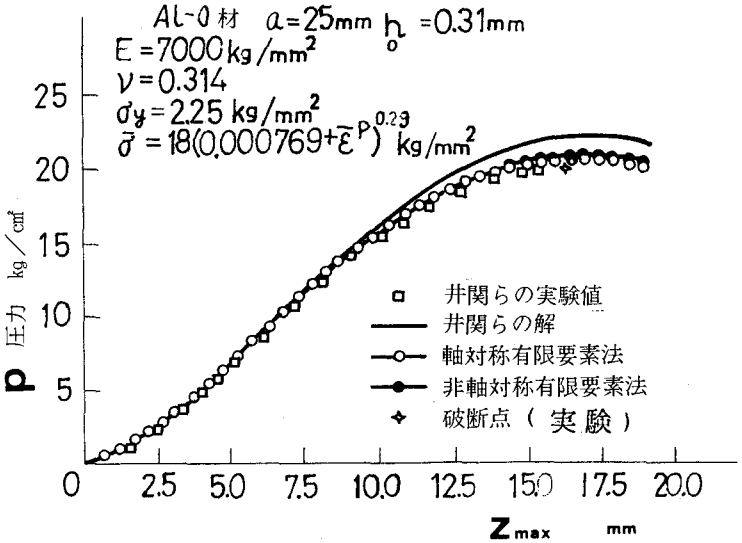


図４－２(a)　液圧－中心たわみ

致する。

図４－２(b)，(c)は、中心での板厚方向ひずみ ε_{tc} をパラメータとしたひずみ分布および応力分布を示している。境界の近傍を除いて、本有限要素法による結果は、井関らの実験結果とよく一致している。

なお、井関らの有限要素法では、1/4 円板を 41分割しており、本計算においても非軸対称有限要素法では同一分割数を用いている。

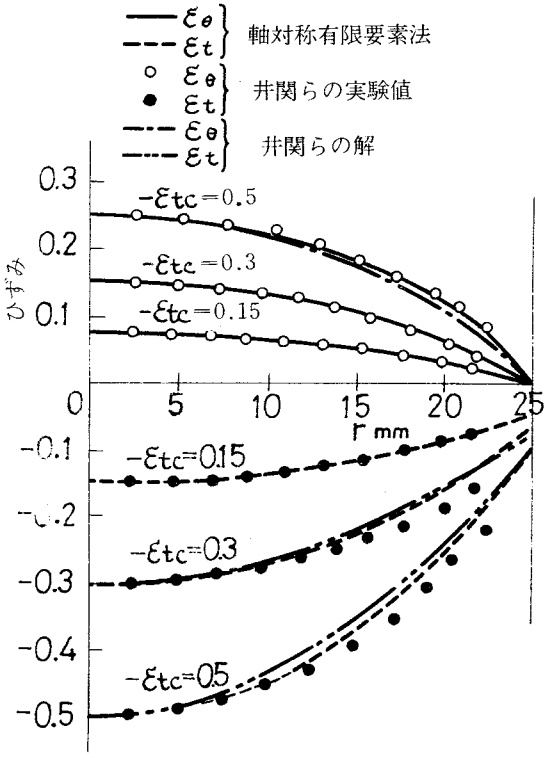


図４－２(b)　アルミニウム円板のひずみ分布

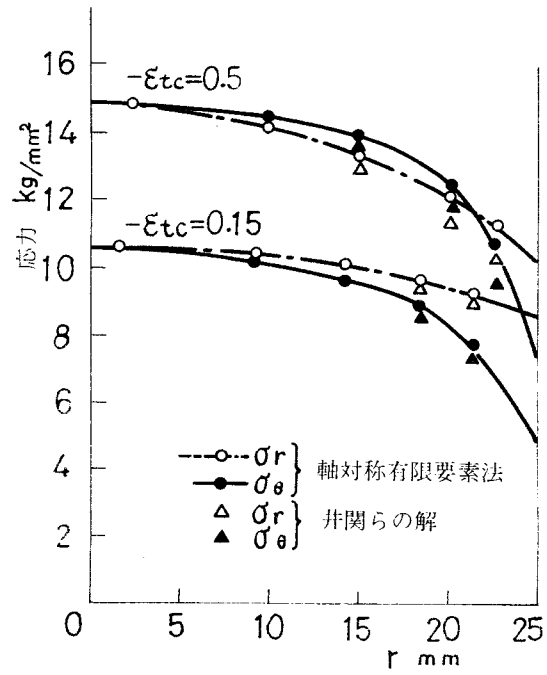


図４－２(c)　アルミニウム円板の応力分布

4－2－3　アルミニウム円板の液圧バルジ変形(2)

――――　実験結果との比較　――――

図4－4に、アルミニウム円板の液圧バルジ実験を行つて得た結果と解析結果との比較を示す。

実験は、板厚0.31mm,半径50mmのアルミニウム円板（Al 1100P-O 材）を用い、変形、ひずみ、応力解析では、薄板の大変形の測定に対して変形を全体的にとらえることができ、しかも非接触である光学的測定法の一つであるモアレトポグラフィ法[64)～(66)]と格子法を併用する。

計算に用いた材料の応力－ひずみ関係と材料特性値は、

$$\bar{\sigma} = 16.(0.0011542 + \bar{\varepsilon}^{(p)})^{0.29} \quad Kg/mm^2$$

$$E = 7000. \quad Kg/mm^2 , \quad \sigma_y = 2.25 \ Kg/mm^2$$

$$\nu = 0.314 \qquad (4\text{-}3)$$

これは、同一材料の単軸試験と円板の液圧バルジ試験の両者より決定したもので、図4－3に実験値との比較を示す。ひずみが小さいところでは実験値との差は大きいが、10%を越えると良く一致している。図中のnは、応力－ひずみ関係をn乗則で表した場合の指数を示し

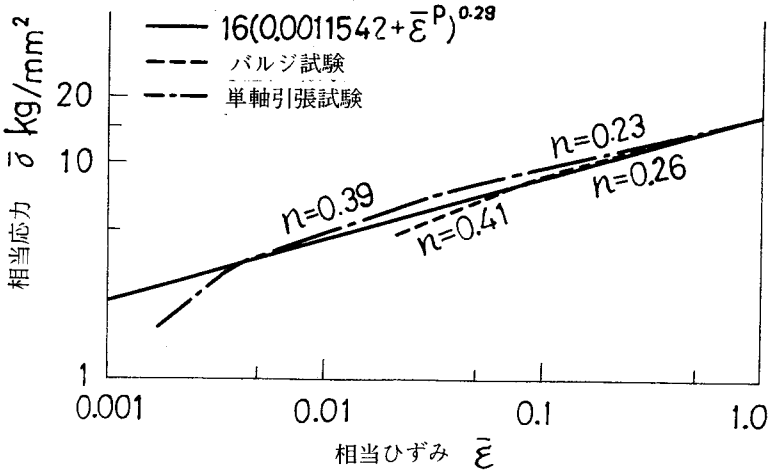


図4－3　応力－ひずみ関係

ている。

実験に用いたものは、半径50mmの円板であるが、境界からのき裂発生と破断を防ぐために半径4mmの丸みを上ダイスにつけていることを考慮して、計算には有効半径52mmを用いた。

図4－4(a)は、液圧と中心たわみの関係を実験値と比較したもので、本有限要素法による解析結果との良好な一致を示している。

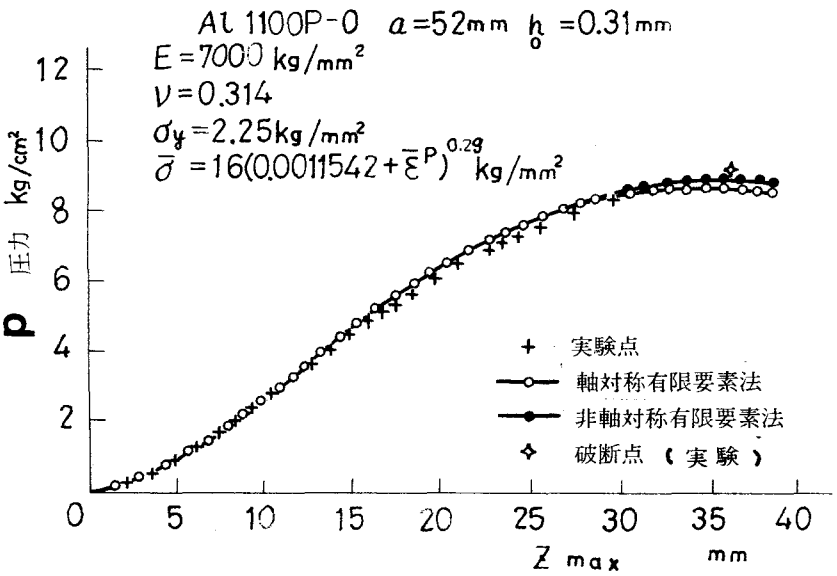


図4－4(a)　液圧ー中心たわみ

図4－4(b)は、モアレトポグラフィ法によつて得たたわみ形状を、液圧をパラメータとして解析結果とともに示している。境界を除いてよく一致している。

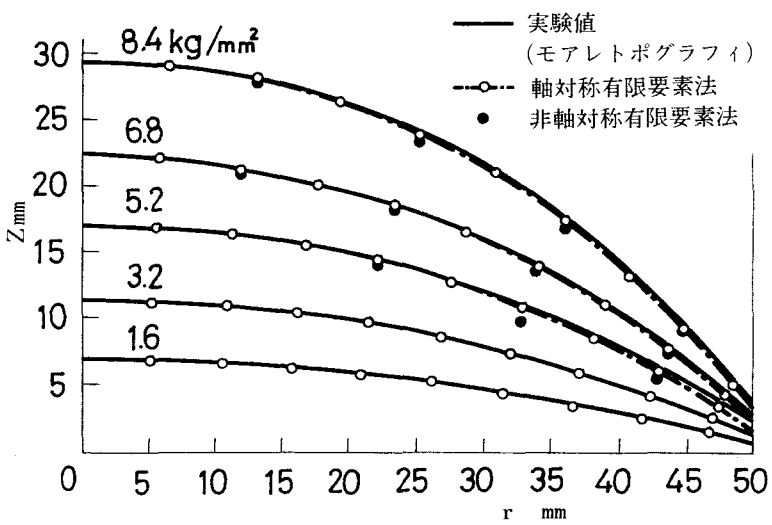


図4－4(b)　たわみ形状

図４－４(c)，(d)は、ひずみ分布および応力分布について比較したもので、中心の板厚方向ひずみ ε_{tc} をパラメータとしている。解析結果は、境界近傍を除いて実験値とよく一致している。

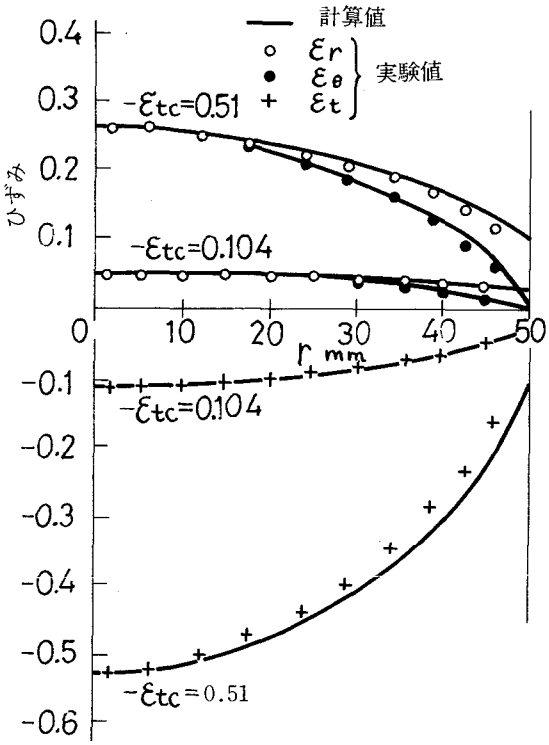


図4－4(c)　　ひずみ分布

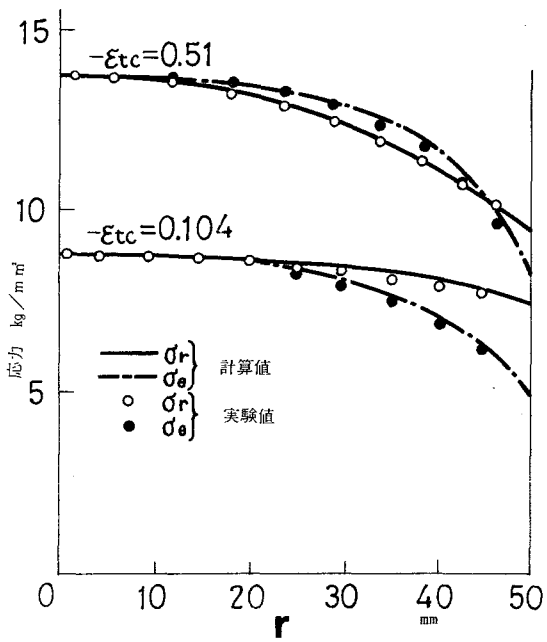


図4－4(d)　　応力分布

材料の応力－ひずみ関係が解析結果に与える影響を調べるために、つぎの構成関係式（Swiftの式）

$$\bar{\sigma} = A\left(B + \bar{\varepsilon}^{(p)}\right)^{n} \qquad (4\text{-}4)$$

の定数 A，B，n を変えて、軸対称有限要素法（半径方向10等分割）により、円板の液圧バルジ変形の解析を行つた。なお、A，B，nの値は、図４－３に示したアルミニウム材料の試験結果を目安にして選んでいる。表４－１に、最大液圧 Pmax とその時の中心たわみ Zmax を示す。これより、最大液圧はA値に、最大液圧点での中

心たわみ量はn値に依存することがわかる。計算結果の最大液圧が実験の破断液圧よりわずかに小さく出ている。これから言えることは、計算で採用したA値の評価がやや低かつたことを表しているものと思われる。

計算所要時間は、京都大学大型計算機FACOM230/75で、軸対称有限要素法（50等分割）の場合、最大液圧点まで180秒（0.3秒／1回の増分計算）程度であり、非軸対称有限要素法（41分割）の場合は、軸対称有限要素法に比べ半径方向分割数が1／10であるにもかかわらず、約5倍の計算時間を要した。

表4－1

材料特性値と解析結果

No.	A (Kg/mm²)	n	B	Pmax (Kg/cm²)	Zmax (mm)
1	18	0.2	0.305×10^{-4}	10.9	31.0
2	18	0.24	0.173×10^{-3}	10.5	33.0
3	18	0.29	0.769×10^{-3}	10.1	34.0
4	17	0.29	0.100×10^{-2}	9.6	33.8
5	16	0.29	0.11542×10^{-2}	8.9	33.8
6	15	0.29	0.144×10^{-2}	8.5	33.7
7	14	0.29	0.183×10^{-2}	8.0	33.7

4－3　非軸対称薄板の液圧バルジ変形

非軸対称変形問題では、一般にひずみの主軸が材料自身に関して回転するため、4－2節において用いた対数ひずみ、真応力の増分といつた主軸の方向が変化しないときのみ意味を持つような量をそ

のまま持込むことはできない。このために、支配方程式がきわめて複雑になり、解析された例は少なく、わずかに井関らの研究[44]が挙げられるのみである。しかし、井関らの研究においては、構成関係式の扱い方とひずみの積分の仕方にひずみの主軸の回転が大きくなると誤差が大きくなる近似を含んでおり、正確な有限変形理論にもとずく解析はまだ行われていないようである。

4－2節においては、円輪板要素を用いた解析結果と三角形要素を用いた結果との比較をいくつか示した。本節では、さらに、三角形要素を用いた場合の解の精度の検討を行つた後に、正方形、長方形、だ円板の液圧バルジ変形の解析を行う。

4－3－1　分割数と解の精度

図4－5は、三角形要素を用いた場合の要素分割のパターンの例であり、1/4領域を41分割した場合を示している。

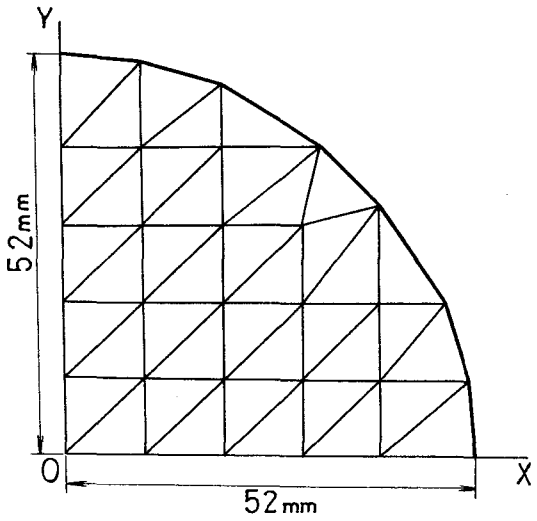


図4－5　1／4円板の分割パターン
（41分割の場合）

図4－6(a)は、4－2－3節のアルミニウム円板の液圧バルジ変形を解析した結果であり、液圧と中心の板厚方向ひずみの関係を示す。十分正確と思われる円輪板要素を用いた解と比較して、相当に粗い三角形要素でも十分良い結果が得られていることがわかる。

104分割による解は、計算が膨大となるために途中で打切

つたが、解析を行つた範囲では、円輪板要素の解にほぼ完全に一致している。

図４－６(b)は、ひずみ分布について比較したもので、104分割を行えば十分精度良い結果が得られることがわかる。

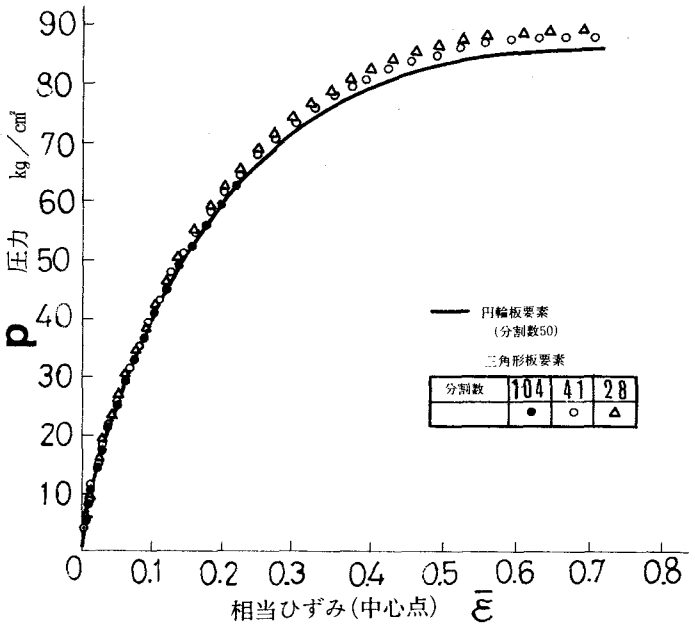


図4－6(a)　液圧ー中心の相当ひずみ

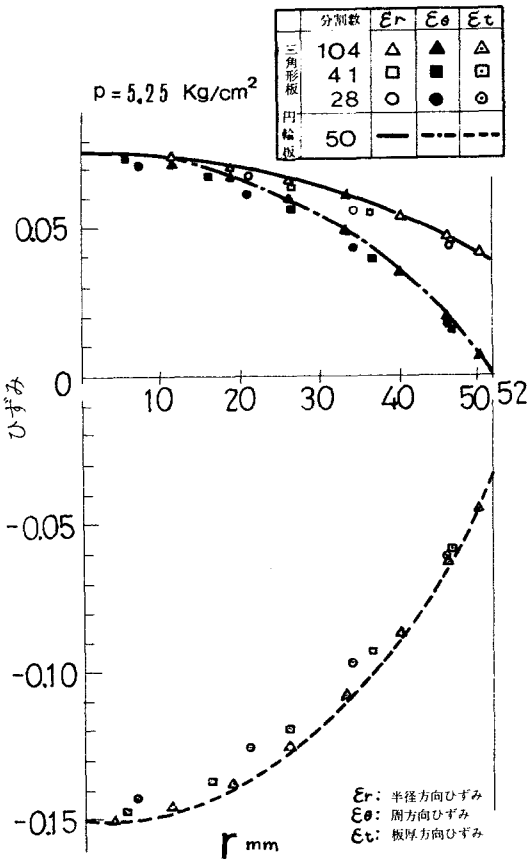


図4－6(b)　ひずみ分布

なお、104分割および41分割は、半径をそれぞれ8および5等分したことになつている。

以下の異形板に対する計算では、以上の結果および計算時間を考慮して、104分割と41分割の中間である半径をほぼ6等分割したことに相当する要素分割を行つた。

4－3－2　　正方形板の液圧バルジ変形

図4－7に、正方形板の液圧バルジ変形に対する本解法による解析結果と井関ら[44]の実験結果および解析結果との比較を示す。解析に用いた材料の応力ーひずみ関係、材料特性値および形状は、

$$\bar{\sigma} = 13.9\ (9.62\times10^{-4} + \bar{\varepsilon}^{(p)})^{0.235} \qquad Kg/mm^2$$

$$E = 7050.\ Kg/mm^2\ ,\ \sigma_y = 2.71\ Kg/mm^2$$

$$\nu = 0.314$$

$$1/2辺 = 28.0\ mm\ ,板厚\ h_o = 0.3\ mm \qquad (4\text{-}5)$$

これは、井関らが実験に用いた試料として示したものである。要素分割は、本解析例においてのみ、井関らの解析結果と比較するために、図4－7(a)に示す1/4領域を32等分割したものを採用した。

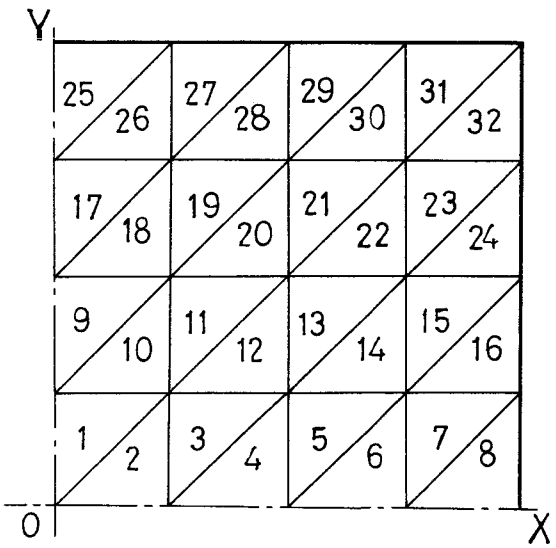


図4－7(a)　1/4 正方形板の分割パターン

図4－7(b)に、液圧と中心たわみの関係を示す。2つの解および井関らの実験値とは良く一致している。

図4－7(c)に、図4－7(a)中のX軸上のひずみ分布を示す。中心付近を除いて、2つの解析結果の間にはかなりの差異が生じているが、本解析結果は、井関らの実験結果により近い値を示している。

図4－7(d)は、応力分布を示している。σ_Y が、境界付近で少し相違しているが、両者はほぼ一致している。

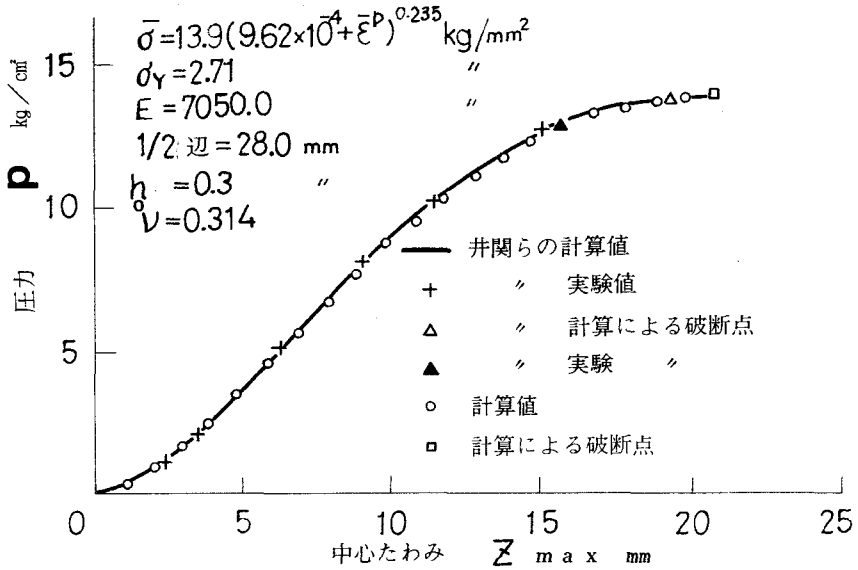


図 4－7(b)　液圧―中心たわみ

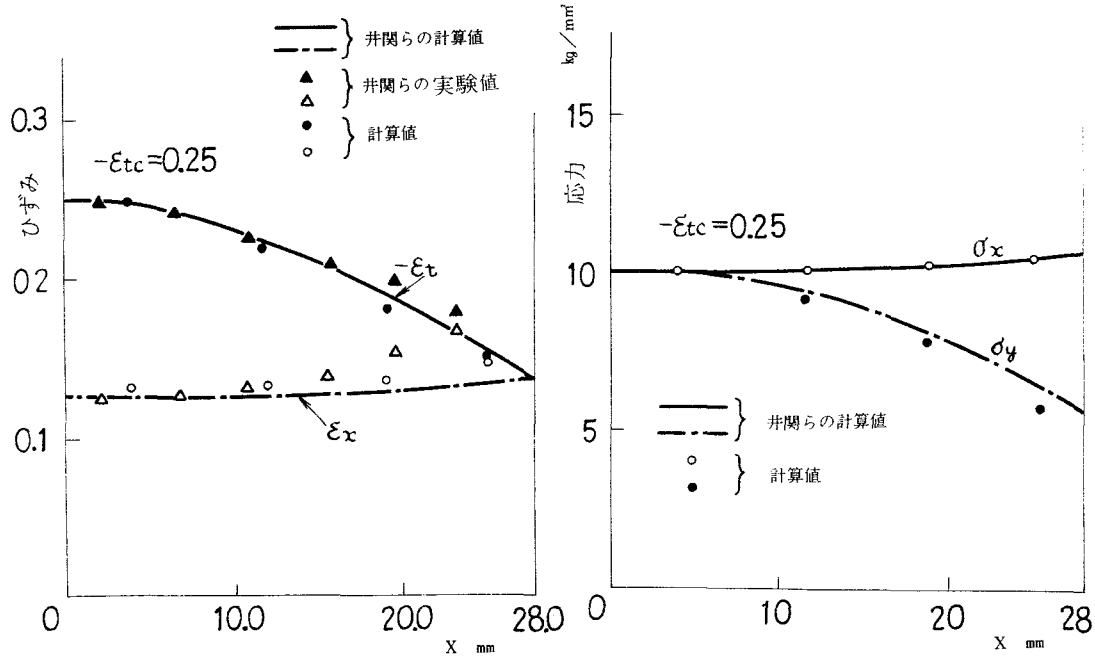


図 4－7(c)　ひずみ分布

図 4－7(d)　応力分布

つぎに、モアレトポグラフィ法と格子法を併用する方法を用いてA1100P-O 材の正方形板に対して行つた液圧バルジ変形の実験的解析結果と本有限要素法による数値解析結果との比較を行う。実験に用いた正方形板の寸法は、120×120mm，板厚 0.31mm であるが、有限要素法による解析では、円板の場合と同様に、周辺固定部につけた丸みの影響を考慮して、124×124mmの正方形の 1/4 領域について解析を行つた。解析に用いた材料の応力—ひずみ関係および材料特性値は、式（4－3）に示したものと同じである。

図4－8(a)は、液圧と中心たわみの関係、図4－8(b)は、圧力をパラメータにした、たわみ形状の変化、図4－8(c)は、圧力3.0，5.0 Kg／Cm² のときのひずみ分布をそれぞれ示している。実験での破断が、やや低い圧力値において発生すること、および境界付近でのひずみにかなりの差を生じることを除けば、解析結果は実験結果とよく一致している。 この傾向は、つぎに示す長方形板の場合と同様である。これは、解析では、するどい角を持つ形状の場合、そ

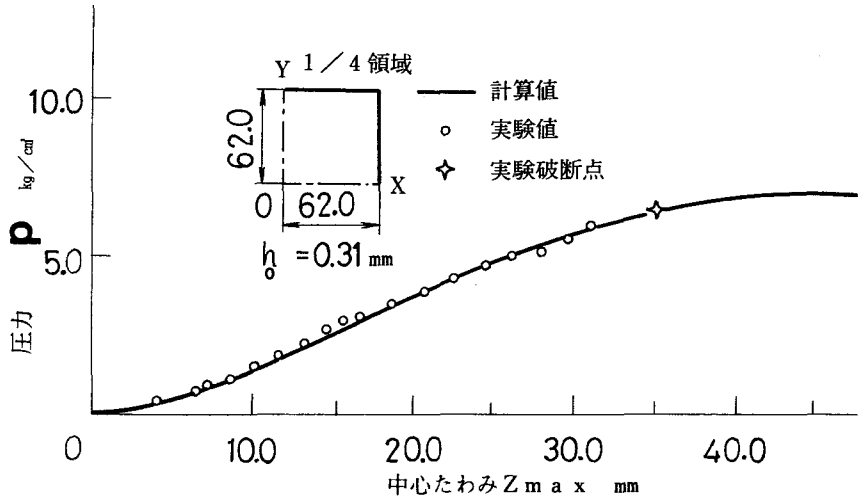


図4－8(a)　液圧—中心たわみ

の付近で板面内に急激な曲率の変化を生じる部分があり、そのために膜近似の精度が悪くなること、またいっぽう、実験では、境界付近での測定上の困難さの

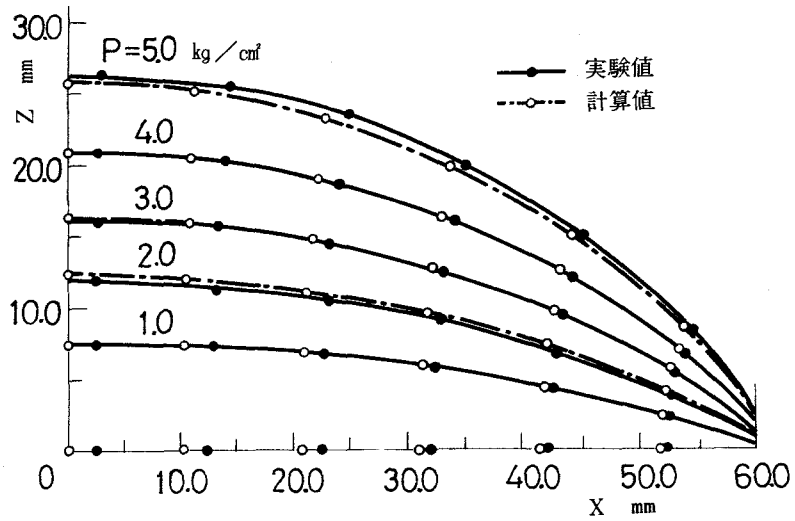


図4－8(b)　たわみ形状

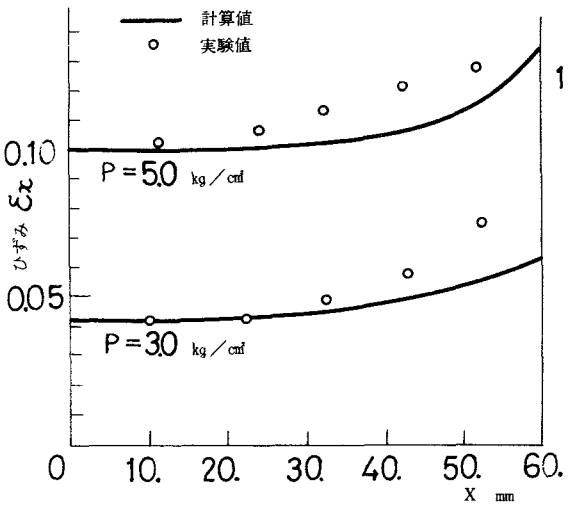


図4－8(c)　ひずみ分布

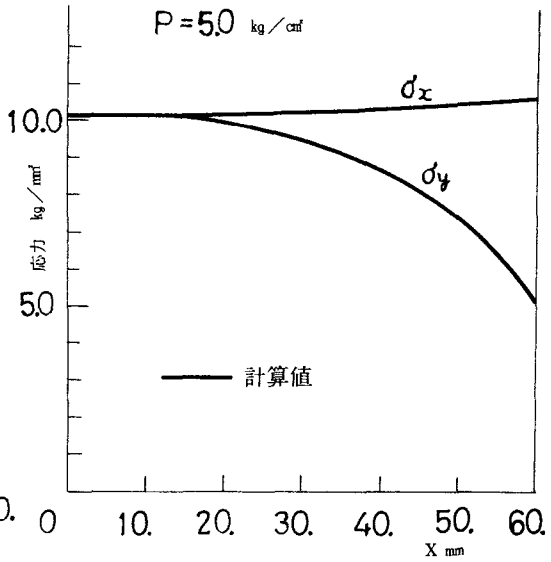


図4－8(d)　応力分布

ために測定精度が落ちることに起因するものと考えられる。解析での最大ひずみは、周辺中心の境界直角方向に生じ、実験による破断はその点で境界に平行に生じた。このことから、本解析法によつて、正方形板の破断の位置と方向を推定することができると思われる。

図４－８(d)に、計算によつて得た応力分布を示す。

なお、以上の計算は、1/4領域を７２等分割して行つたものであるが、３２等分割によつて得た最大液圧点での中心たわみの差は2.0％程度であつた。

４－３－３　長方形板の液圧バルジ変形

本節では、A1100P-O 材の長方形板、縦×横＝80×160mm，板厚0.31mmの液圧バルジ実験結果と非軸対称有限要素法による解析結果との比較を行う。解析に用いた材料特性値は式（４－３）に示したものと同じである。

図４－９(a)は、液圧と中心たわみの関係、図４－９(b)は、圧力をパラメータにした、たわみ形状の変化、図４－９(c)は圧力 3.0，5.0 Kg／cm² のときのひずみ分布についての実験結果と解析結果との比較を示したものである。実験値と計算値とは、境界付近で両者に差が生じていることを除いて、ほぼ一致している。これは、前節で考察した結果と同様のことが原因と思われる。解析での最大ひずみは長辺中央部で境界に直角方向に生じ、実験における破断はその点で境

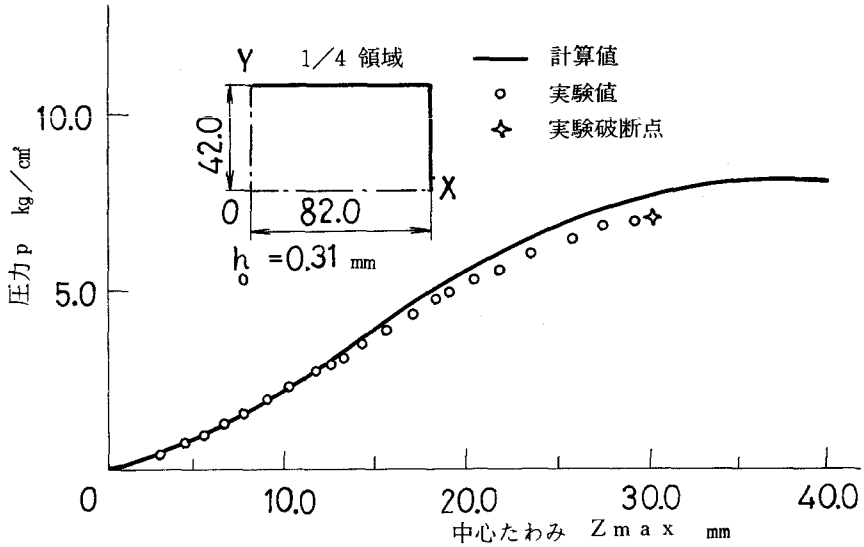
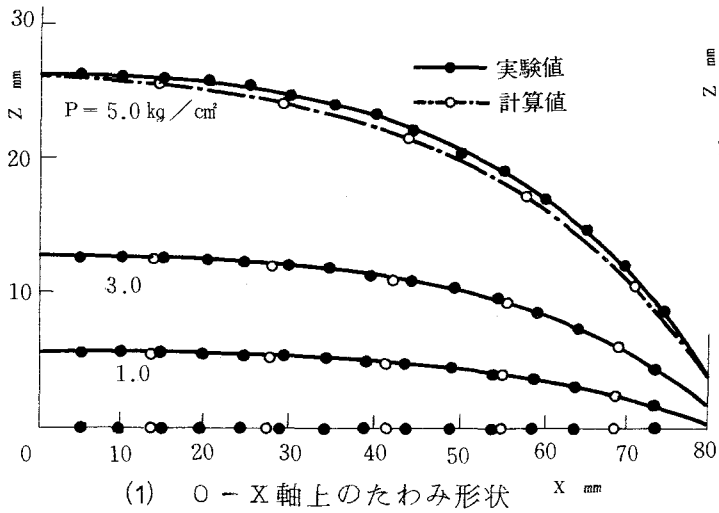
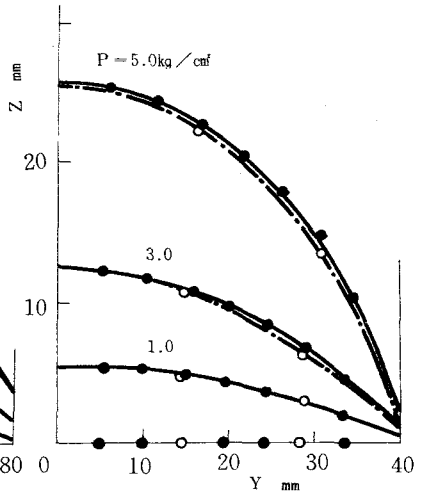


図4－9(a)　液圧ー中心たわみ

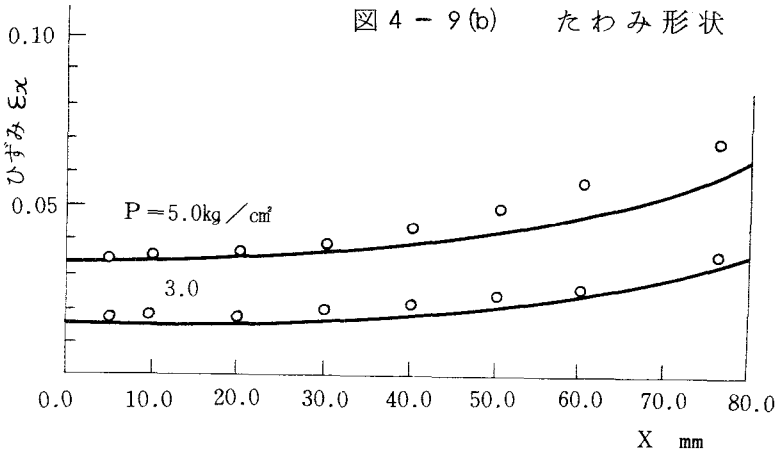


(1)　O－X軸上のたわみ形状



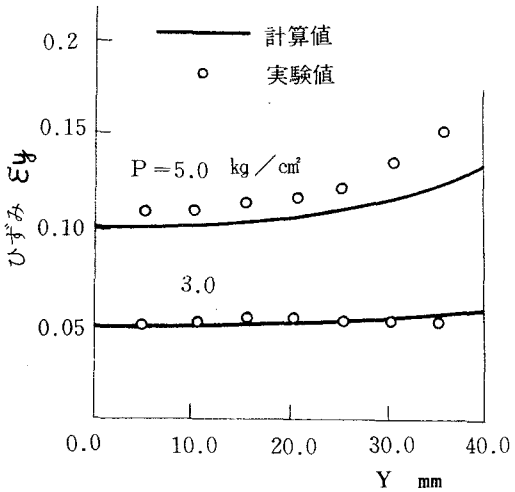
(2)　O－Y軸上のたわみ形状

図4－9(b)　たわみ形状



(1)　O－X軸上のひずみ分布

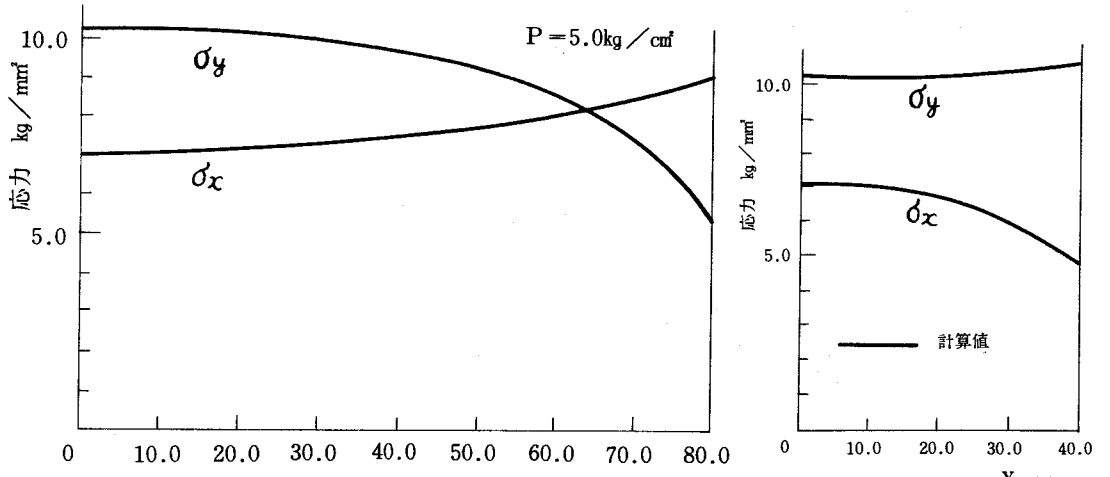
図4－9(c)
ひずみ分布



(2)　O－Y軸上のひずみ分布

界に平行に生じた。このことは、本解析法により破断の位置と方向の推定が可能であることを示していると考える。

図４－９(d)に、計算によつて得た応力分布を示す。



(1)　０－Ｘ軸上の応力分布　　(2)　０－Ｙ軸上の応力分布

図４－９(d)　応力分布

なお、解析に用いた寸法は、前節同様、周辺固定部の丸みを考慮して図４－９(a)に示す値を用いた。

以上の計算は、1/4領域を６４等分割して行つたものであるが、３６等分割の場合の最大液圧点での中心たわみ量との差は2.0％程度であつた。

４－３－４　だ円板の液圧バルジ変形

本節では、A1100P-O 材のだ円板、長径×短径＝180×90 mm，板厚0.31 mm の液圧バルジ実験結果と非軸対称有限要素法による解析結果との比較を行う。解析には、周辺固定部の丸みを考慮して、図４－１０(a)に示す寸法を用いた。また、材料特性値は、式（４－３）に示すものを用いた。

図４－１０(a)は、液圧と中心たわみの関係、図4－１０(b)は、圧力をパラメータにした、たわみ形状の変化、図４－１０(c)は、圧力3.0，5.0Kg/cm²のときのひずみ分布を示す。正方形および長方形板の場合よりも実験結果と解析結果とはよく一致する。ひずみ分布の良好な一致は、板の形状に角を持たない場合には、周辺で変形に対する拘束はなめらかであり、したがつて全領域で比較的なめらかな変形を生じているの

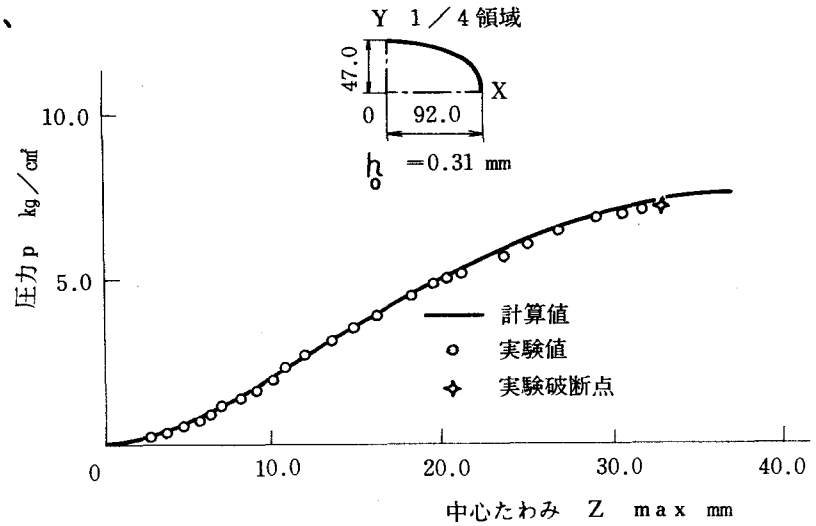
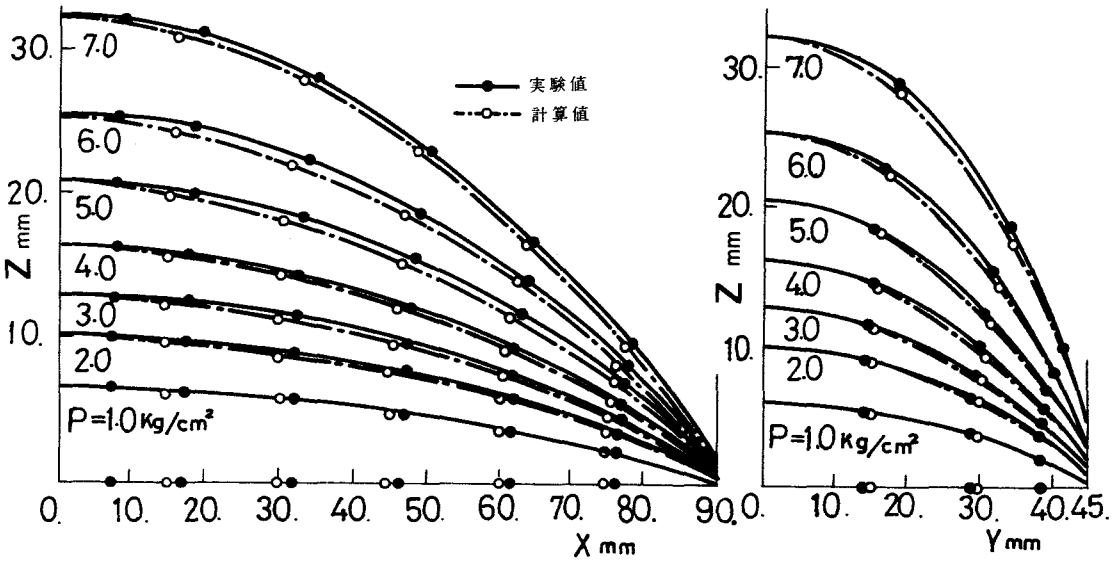


図４－１０(a)　液圧一中心たわみ



(1)　長径上のたわみ形状　　(2)　短径上のたわみ形状

図４－１０(b)　たわみ形状

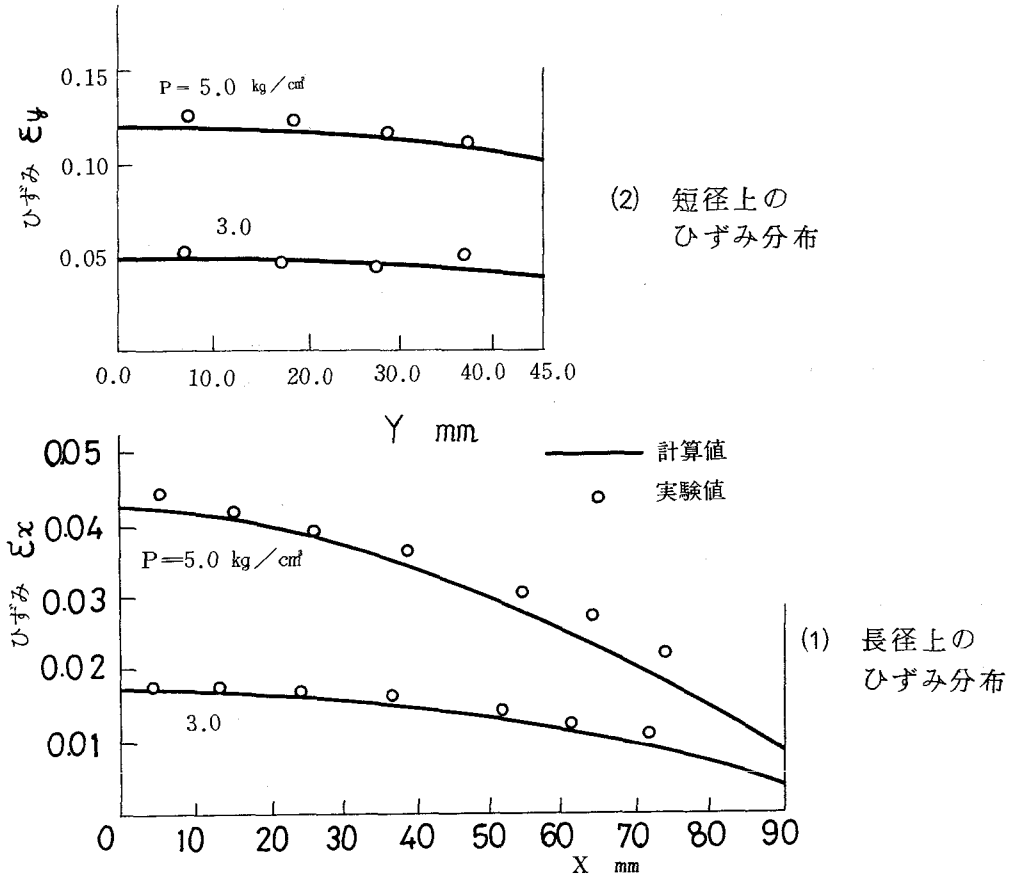
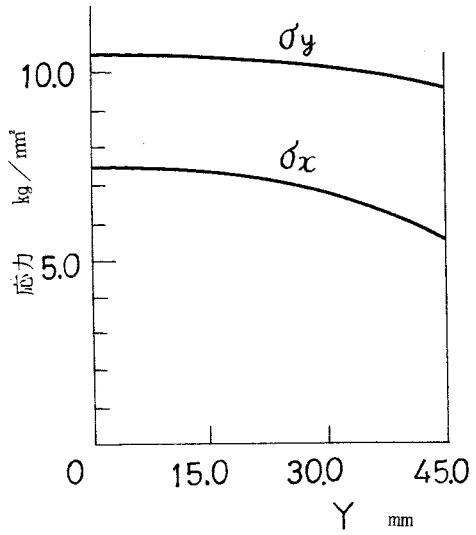


図 4－10(c)　　ひずみ分布

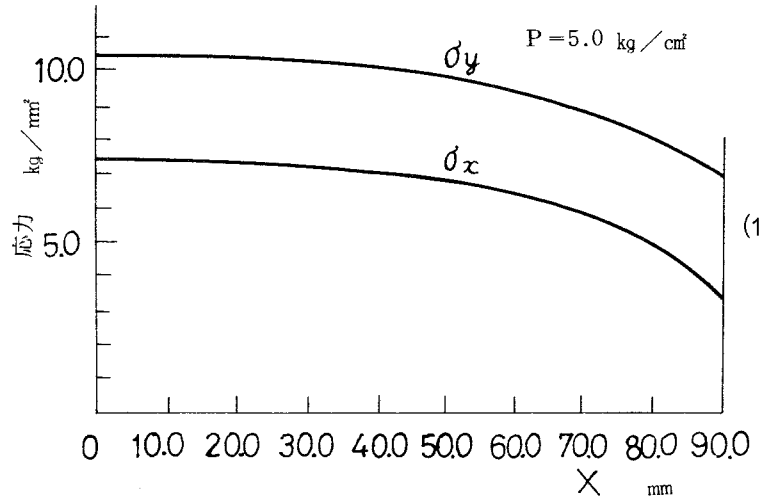
で、膜近似が良好に成立すること、および実験での測定誤差が少ないためと思われる。解析での最大ひずみは、中央部短径方向に生じ、実験による破断は、その点での長径方向に生じた。これは、正方形、長方形の場合と異なつており注目に値する。このことは、前節同様本解析法によつて、だ円板の破断の位置と方向の推定が可能であることを示している。

図 4 － 10 (d)に、計算によつて得た応力分布を示す。

なお、以上の計算は、1／4 領域を 76 分割して行つたものであるが、32 分割によつて得た最大液圧点での中心たわみとの差は 3.2 %程度であつた。



(2)　短径上の応力分布



(1)　長径上の応力分布

図 4－10(d)　応力分布

4－4　結　言

本章では、3－2および3－3節で定式化した弾塑性膜体に対する有限要素法を用いて、薄板の液圧バルジ変形の解析を行つた。

円板では、山田らの曲げをも考慮した差分法による解析結果[40]、および井関らの膜体近似の増分形有限要素法によるアルミニウム板

の液圧バルジ実験とその変形解析結果[43]との比較を行つた。異形板では、同じく井関らの正方形アルミニウム板の液圧バルジ実験とその解析結果[44]との比較を行つた。そして、それぞれ良好な一致を見た。

これらの一連の従来から得られている結果との比較検討により、本有限要素解析法の有効性を確認した上で、モアレトポグラフイ法と格子法を併用する非接触測定法による円板、正方形板、長方形板、だ円板の実験を行い、その際用いた材料の特性値を用いて解析を行つた結果と比較した。

ここに展開した有限要素解析法は、膜体近似を行つているために、固定境界のごく近傍では正しい解が得られない。

しかし、山田らの曲げを考慮した薄肉鋼板の解析結果および著者が行つた実験結果との比較により、板厚の数倍程度以上のたわみを生じ、板面内のほとんどの領域で、膜応力により降伏する状態になれば、膜体近似による誤差はそれほど大きくないと考えられる。

以上のことから、本解析法によつて、任意形状の板の変形、ひずみ、および応力を材料の破断に至るまで、十分正確に解析できるものと考える。

また、分割数の比較的粗い要素でも、工学的には十分な結果が得られることが確認できた。

第５章　薄板の静的大変形解析(2)

（弾／粘塑性体および超塑性体の場合）

５－１　緒　言

本章では、３－４節および３－５節で定式化した超塑性体（弾塑性クリープ）および弾／粘塑性体の軸対称有限要素法により、慣性力の影響を考慮する必要のない程度の変形速度で変形する薄肉円板の液圧バルジ変形を解析し、材料のひずみ速度依存性が板の変形挙動におよぼす影響を検討する。

弾／粘塑性モデルは、塑性域において材料の粘性を考慮し、ひずみ速度が静的な降伏応力からの過剰応力に比例するという構成関係式[59]を採用するもので、第６章で扱う衝撃負荷応答のような高ひずみ速度領域では、このひずみ速度依存性が顕著となることが多くの研究者によつて確認されている。[15],[16]低ひずみ速度の場合でも、アルミニウムのような材料においては、同様の効果が現れることが確認されている。O．C．ZienKiewitz らは、このようなひずみ速度の一段と小さい変形を解析する際にもこの弾／粘塑性理論を採用し、実際の現象との比較を行つている。[60]～[63]ここでは、この考えを採用して、準静的な液圧バルジ実験を行つて得た結果と解析結果とを比較する。

つぎに、超塑性体の力学的挙動についての一研究として、２－３節で示したNorton 法則[29]に従うひずみ速度依存性を考慮した弾塑性クリープ理論を導入して定式化した軸対称有限要素法（３－４節）により、超塑性円板の液圧バルジ変形を解析する。ここでは、

西村、宮川の実験[7]、およびD．L．Holt[1)~3)]らの近似計算結果との比較を行い、材料の特性値および液圧負荷速度が板材の成形性におよぼす影響について考察する。なお、ここで採用した構成関係式は、超塑性ひずみを定常クリープひずみとして取扱つており、実際の超塑性現象を完全に説明できる理論ではないが、限られたひずみ速度域では有効であり、超塑性材料の特徴であるひずみの伝ぱに関する説明は可能である。

5－2節では、常温においてもひずみ速度依存性が顕著であるアルミニウム焼なまし材（A11100P－O材）を用いて数種類の液圧負荷速度による円板の液圧バルジ実験を行う。その結果より材料の構成関係式を定め、それを用いて、3－5節で定式化した有限要素法による解析を行う。

5－3節では、超塑性薄肉円板の液圧バルジ変形を、3－4節で定式化した有限要素法により解析する。材料特性値は、西村、宮川の実験結果[7]を参考にして決定する。計算では数種のm値と負荷速度を採用し、その板材の成形性への影響を検討する。

分割数と精度との関係は、前章の弾塑性解析の場合と同じであると考えられるので、軸対称有限要素法において半径方向10等分割を採用する。精度は十分であると考える。

また、計算の第1段階に入る前に与える初期変形は、弾塑性解析の場合と同じく回転放物面状であると仮定し、エネルギ法より求めた弾性解を用いる。

5－2　　弾／粘塑性薄肉円板の液圧バルジ変形

3－5節で定式化した弾／粘塑性体の軸対称有限要素法を用いてAl1100P－O材の液圧バルジ変形を解析し、実験結果との比較を行う。

図5－1は、Al1100P－O材の材料特性を求めるために行つた単軸試験および円板の液圧バルジ試験より得た応力－ひずみ関係を示している。使用材料は、すべて350°C1時間半の焼なましを行つた。単軸試験は、図5－2に示す形状の試験片を用い、オートグラフ（島津社製IM－100型）により引張速度2 mm/min（公称ひずみ速度0.0006372 1/sec）で行つた。これより得た応力－ひずみ関係を

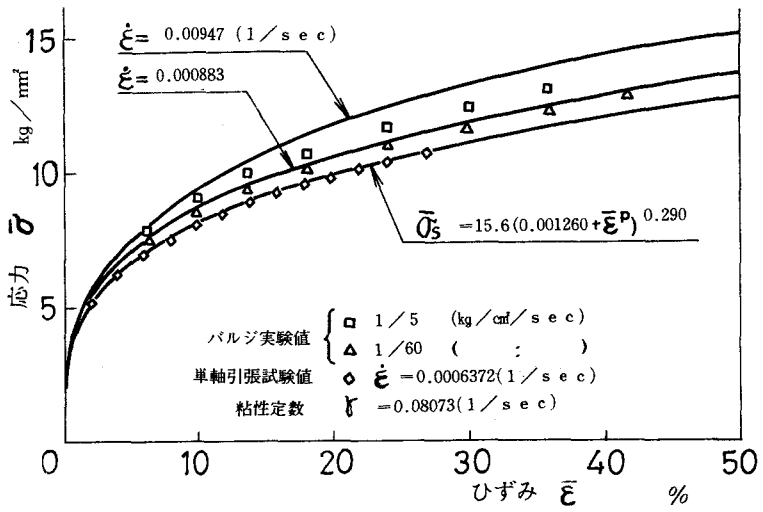


図5－1　　応力－ひずみ関係

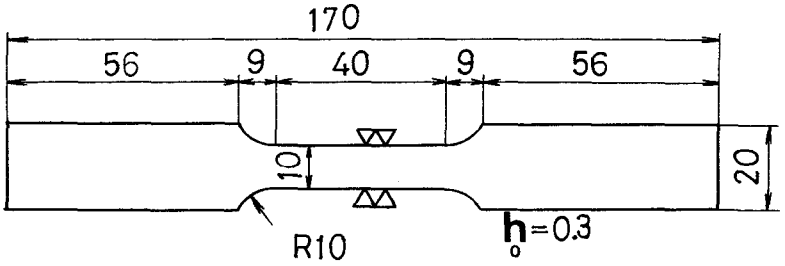


図5－2　　単軸試験片

$$\sigma = 15.6(0.001260 + \varepsilon^{(P)})^{0.29} \qquad Kg/mm^2 \qquad (5\text{-}1)$$

とし、これを式（2－34）の静的な応力－ひずみ関係 $\sigma_s = f(\varepsilon)$ として用いることとする。

液圧負荷速度 $^1/_5$, $^1/_{60}$ (kg／cm^2／sec) を採用して行つた円板の液圧バルジ試験より得た中心部分の応力ーひずみ関係を、図５－１において、□ , △で示す。平均の相当ひずみ速度（破断時の相当ひずみ／破断までの所要時間）が、負荷速度 $^1/_5$, $^1/_{60}$(kg／cm^2／sec) の場合に、0.00947,0.000883(1/sec) であることを考慮して粘性パラメータγを決定した。

$$\gamma = 0.08073 \quad (1/sec) \tag{5-2}$$

このようにして求めたγの値を式（２－３２）に代入して、数値計算を行うことで得た単軸の応力ーひずみ関係を実線で示す。ひずみ速度は、0.00947 および 0.000883 を採用した。

液圧負荷曲線の追跡は、図５－３に示すように、まず増分荷重 Δp を加え、後に全増分時間 $\Delta\bar{t}$ を加える操作をくり返すことで階段状に近似する方法を採用した。

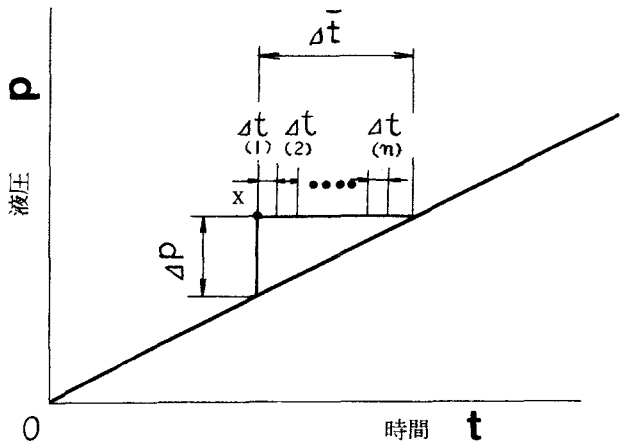


図５－３　液圧ー時間関係

全増分時間 $\Delta\bar{t}$ は、図５－３に示す増分時間間隔 $\Delta t_{(n)}$ の総和によつて表される。

$$\Delta\bar{t} = \sum_{n=1}^{n} \Delta t_{(n)} \tag{5-3}$$

各増分時間 $\Delta t_{(n)}$ は、O．C．ZienKiewitz の提案した方法[60]によつて定めた。

解析に用いた材料特性および試験片の形状を示すとつぎのようになる。

$$\bar{\sigma}_s = 15.6(0.001260 + \bar{\varepsilon}^{(p)})^{0.29} \quad \text{Kg/mm}^2$$

$E = 7000.\ \text{Kg/mm}^2$, $\sigma_y = 2.25\ \text{Kg/mm}^2$, $\nu = 0.314$

半径 $a = 52.\ \text{mm}$, 板厚 $\frac{h}{0} = 0.30\ \text{mm}$ (5-4)

図５－４は、液圧と中心たわみとの関係を実験結果と比較して示す。式（５－１）の応力－ひずみ関係および式（５－４）の材料特性,試験片の形状を用いた弾塑性解析結果もあわせて示す。液圧負荷速度が大きい程剛性が高くなり、同一液圧に対する中心たわみ量は小さい。計算では、

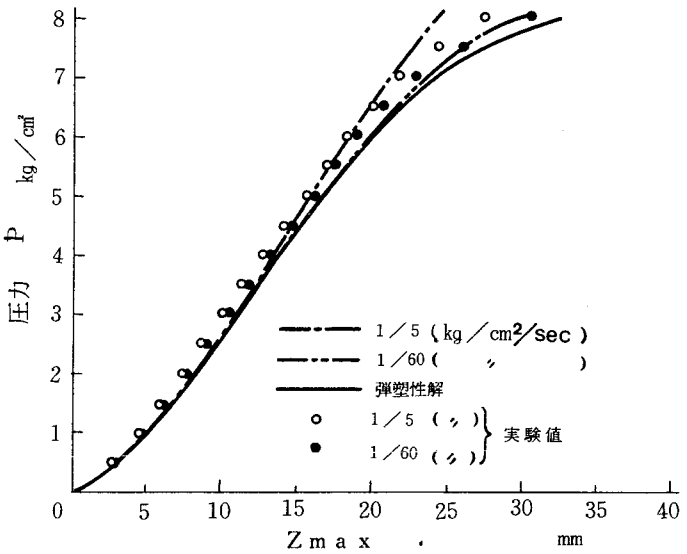


図５－４　液圧－中心たわみ

負荷速度が小さくなるにつれて弾塑性解に漸近している。応答の相違が明らかになるのは、計算では液圧３ kg／Cm² ,実験では１ kg／Cm² 付近である。変形全体にわたり実験結果の方が解析結果より、同一液圧に対する中心たわみが小さく出ている。

ポンプによつて加える液圧の負荷速度が変形速度の急激な増加のために目的の負荷速度に追随できず遅くなり、変形量が大きく出るという結果を生じる場合がある。本実験では、負荷速度 1/5 kg／Cm² /sec で、液圧が７ kg／Cm² 以上の場合、それが顕著であり、解析結果より実験結果の方が大きな変形量を示している。

図５－５に、液圧と中心相当ひずみの関係を示す。負荷速度が大きい程、同一液圧に対する中心相当ひずみは小さくなる。また、解析結果の方が実験結果より、中心相当ひずみ量が大きく出ている。負荷速度 1/5 kg/cm²/sec の場合は前述の理由により、実験結果の方が大きな中心相当ひずみ量を示している。

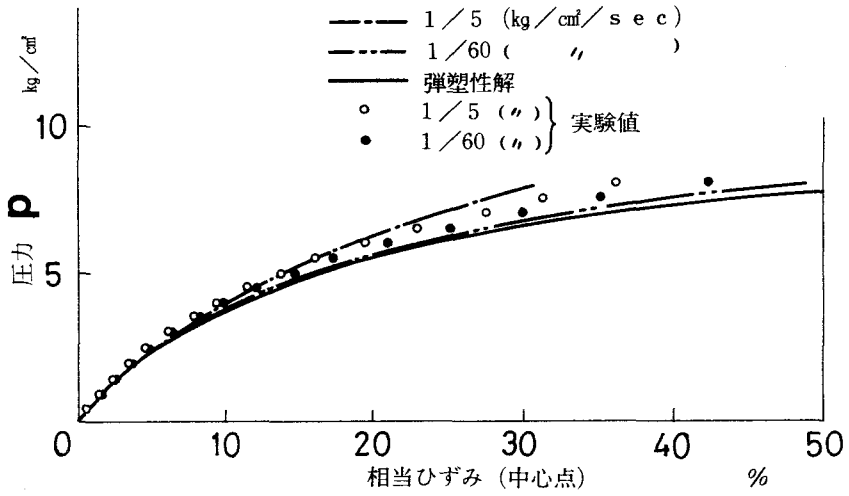


図５－５　液圧―中心の相当ひずみ

以上に示したことから、負荷速度が大きい程同一液圧に対する変形量が小さいという　ひずみ速度依存性を明らかにすることができた。　図５－６に、たわみ形状の変化を圧力をパラメータにして示す。

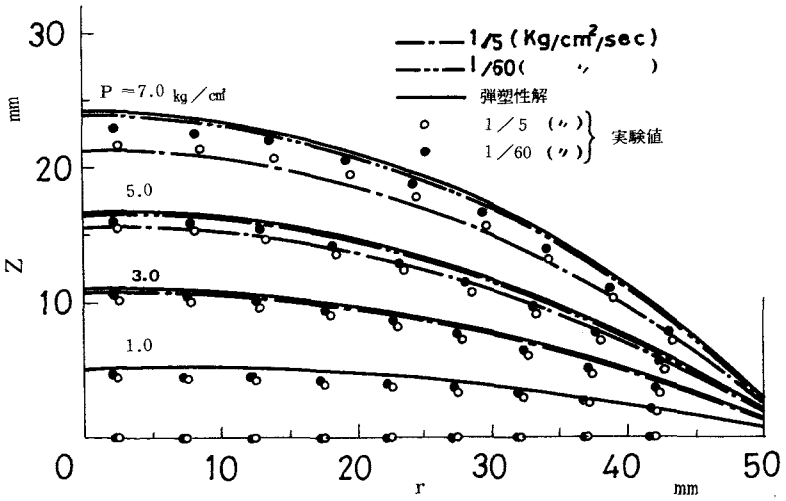


図５－６　たわみ形状

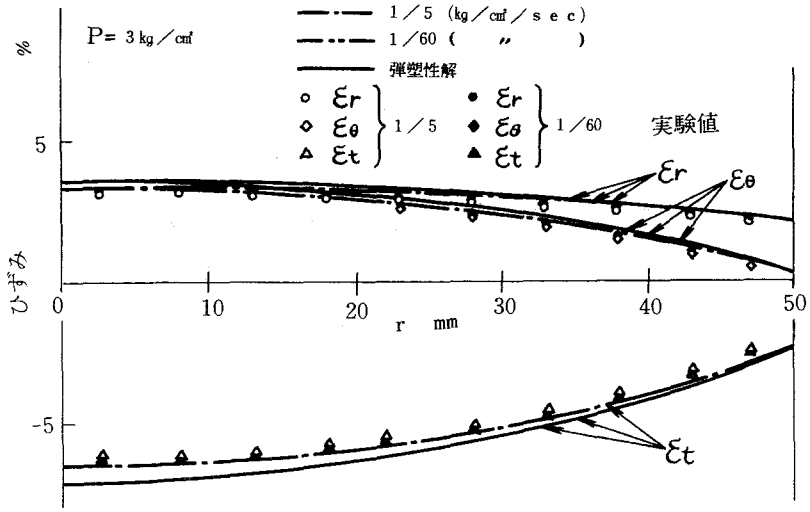
負荷速度 1/5 ，1/60 (kg/cm²/sec) の場合の実験から得た物体点の移動を○，●印で示す。負荷速度が大きい程、同一圧力における変形量は小さい。解析および実験結果は、ほぼ一致していると言える。

図５－７(a)～(c)に、計算および実験によつて得たひずみ分布を、液圧３，５，７ kg／cm^2について比較して示す。負荷速度が大きい程ひずみ量は小さい。その相違は液圧が大きくなる程顕著となる。計算および実験結果はほぼ一致している。計算によるひずみ量は実験での値より大きく出ている。ただし、負荷速度 1／5 kg／cm^2／sec の場合、前述した理由により、液圧 7 kg／cm^2 での実験値は計算結果より大きい。

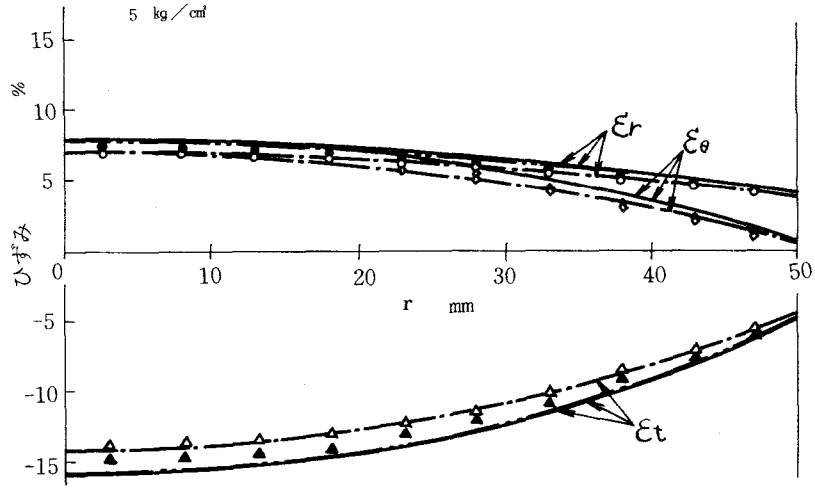
図５－８(a)～(c)に、計算および実験によつて得た応力分布を、液圧３，５，７ kg／cm^2について比較して示す。負荷速度が大きい程応力値は大きい。その相違は液圧が大きくなる程顕著となる。実験での応力値が計算での値に比べて少々大きいが、両者はほぼ一致している。負荷速度 1／5 kg／cm^2／sec，液圧 7 kg／cm^2 の場合は前述した理由より、応力緩和を生じるために実験値が計算値より低く出ている。

以上の結果より、材料の構成関係を表すγの決定および実験における目標負荷速度の達成に関してなお考慮すべき余地を残しているものの、液圧負荷速度の変形への影響を検討することができた。つまり、負荷速度が大きい程、変形およびひずみ量は小さく、応力は大きいことが示された。これは、ひずみ速度依存性を表している。

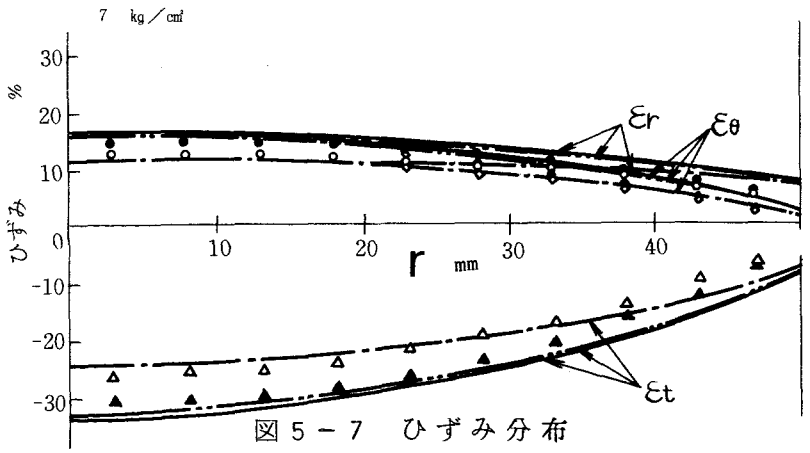
また、解析結果より、負荷速度を小さくすれば弾塑性解析結果に漸近していくことが示された。



(a) p = 3 Kg/cm² の場合

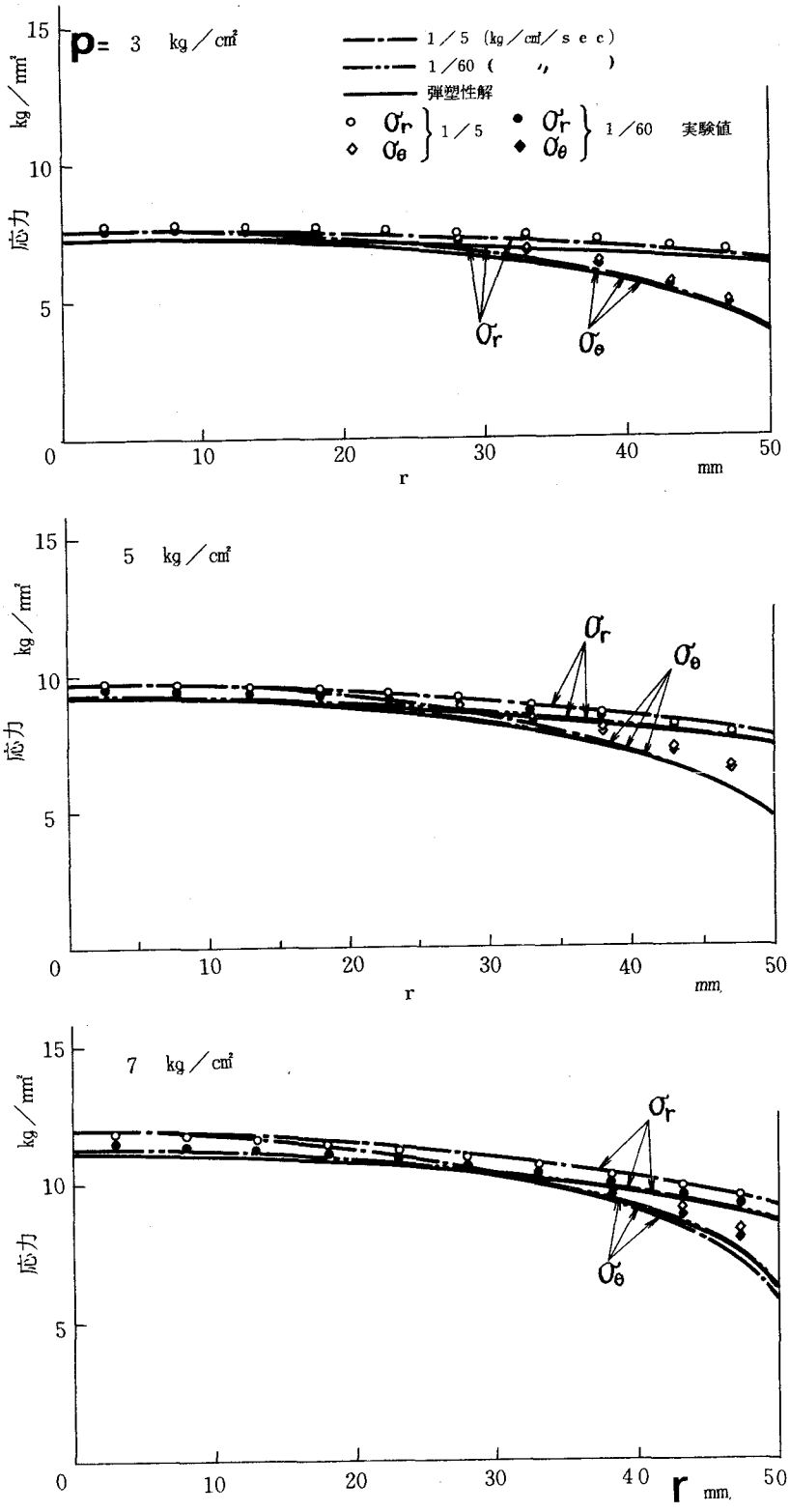


(b) p = 5 Kg/cm² の場合



(c) p = 7 Kg/cm² の場合

図 5－7　ひずみ分布



(a) p = 3 Kg/cm² の場合

(b) p = 5 Kg/cm² の場合

(c) p = 7 Kg/cm² の場合

図５－８　応力分布

5－3　超塑性薄肉円板の液圧バルジ変形

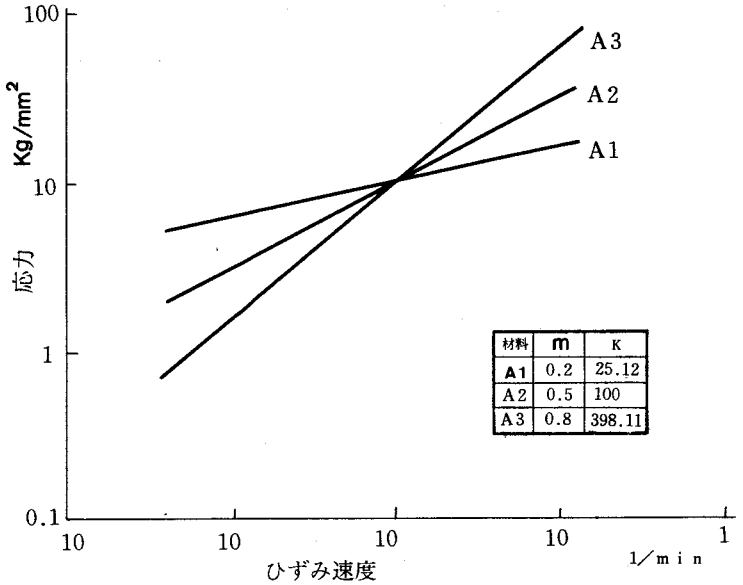
3－4節で定式化した超塑性体の軸対称有限要素法を円板の液圧バルジ変形に適用し、従来から得られている実験および近似計算結果との比較を行い、材料の特性値および液圧負荷速度の変形挙動への影響を検討する。

西村、宮川の Zn－22Al 合金の単軸引張試験結果[7]を参考にして材料の特性値を決定し、まず圧力を一定に保つた場合の変形解析を行う。そこでは、数種類のひずみ速度依存特性値（m値）を用いて解析を行い、m値と変形、ひずみ、および応力との関係を調べる。

つぎに、m値を一定にして、液圧負荷速度を変えて解析を行うことにより、負荷速度と板の変形挙動との関係を調べる。

5－3－1　m値と成形性

西村ら[7]が Zn－22Al 合金に対して求めた材料特性値および応力―ひずみ速度関係を持つ材料として、図5－9(a)，(b)に示すA2材料を定め、それを中心として、A1およびA3の材料を加えることで、3種類の材料モデルを設定する。A1，A2，A3材料モデルは、それぞれ材料構成関係式（2－18）でのm値が、0.2，0.5 0.8であり、ひずみ速度が10^{-2}（1/min）のときに応力が10kg/mm²であるようにK値を選んでいる。他の材料特性値および試験片寸法を示すとつぎのようになる。



材料	m	K
A1	0.2	25.12
A2	0.5	100
A3	0.8	398.11

図５－９(a)　　応力―ひずみ速度関係

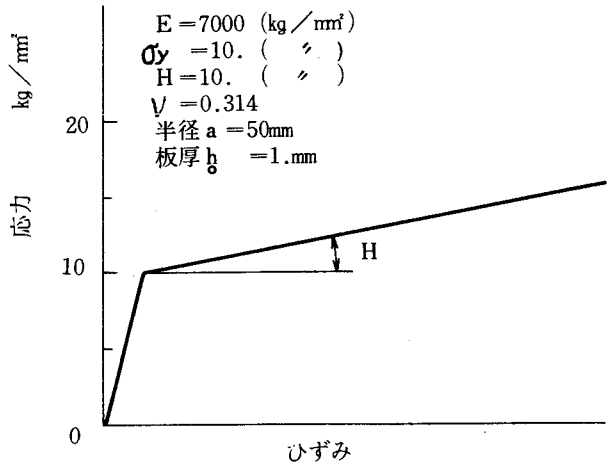


図５－９(b)　　材料特性

$$\bar{\sigma} = 10. + 10.\ \bar{\varepsilon}^{(p)} \qquad Kg/mm^2$$

（弾塑性応力―ひずみ関係）

$E = 7000.\ Kg/mm^2$, $\sigma_y = 10.\ Kg/mm^2$, $\nu = 0.314$

半径 $a = 50.\ mm$, 板厚 $h_0 = 1.0\ mm$　　(5-5)

ここでは、まず圧力30 kg/cm²を加えて弾塑性変形させ、つぎに圧力を保ち時間の経過とともに生じてくる超塑性変形を解析することとした。

解の精度に関係する増分量の制御は、超塑性変形解析では増分ひずみ量が規定値以下となるように増分時間間隔を決定することで行い、計算を進めた。

図５－１０に中心のたわみおよび板厚方向ひずみと時間との関係を示す。解析では、中心での相当ひずみ速度が2(1/min) 以上になると超塑性体の構成関係式が成立しないと考え、計算を打切つた。m値が小さい程短時間の内に変形が進行し急激な変形の増大が見られ、m値が大きくなるにつれ変形量の時間的増加がゆるやかになつている。一般に、超塑性材料のm値は0.5以上と言われており、くびれなしで数百パーセントのひずみが得られる原因として、他の材料に比べてm値が大きいことが指摘されている。(7)

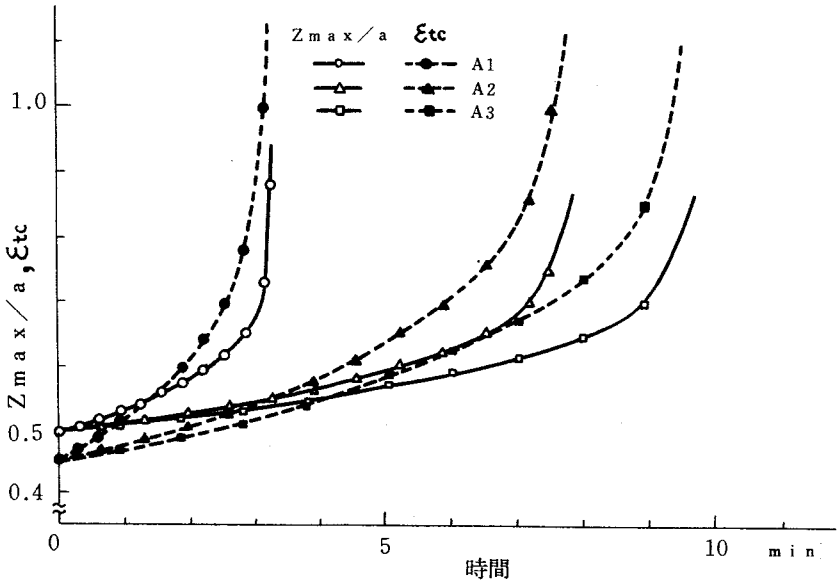


図5－１０　中心のたわみおよび板厚方向ひずみ—時間間係

図５－１１は、Ａ１およびＡ３材料のたわみ形状を中心たわみをパラメータにして示す。

変形が進むにつれて、m値の大きいA3材料（m=0.8）の方が球に近い大きな変形を起こしている。

図5－12に、（中心たわみ／半径）の値が0.873の時のひずみ分布をA1およびA3材料について示す。m値の小さいA1（m=0.2）の方が中心部分でのひずみの集中が顕著であるのに対

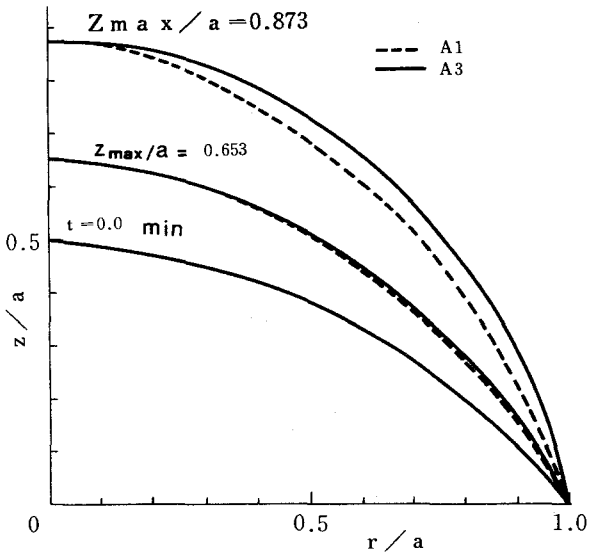


図5－11　たわみ形状

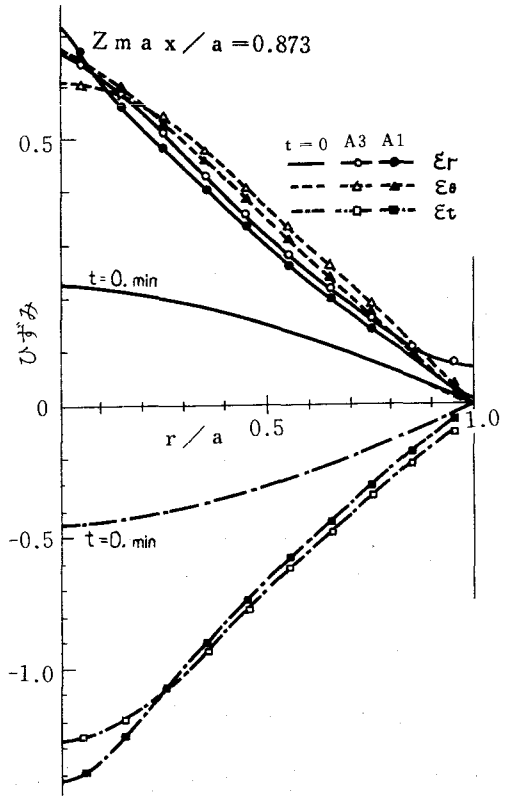


図5－12　ひずみ分布

して、m値の大きいA3は中心部分のひずみの集中が緩和されており、境界付近のひずみもA1に比べると大きく、全体的になめらかなひずみ分布を示している。図では、時刻t＝0 minの弾塑性変形結果も示すが、時間の経過とともに変形が進み、ひずみ量も増大している。

図5－13は、A1およびA3材料の応力分布を時間t=0 minの弾塑性変形結果とともに示す。応力は、図5－9に示した材料

のひずみ速度依存の特性と関連するが、図５－１３のZmax／a＝0.873 の時の中心のひずみ速度は、Ａ１では0.5(1/min)程度で、Ａ３では0.02(1/min)程度である。その後のひずみ速度は、Ａ１の場合は急激に増加するのに対し、Ａ３の場合はそのひずみ速度の増加によつて応力が急上昇するので、負荷圧力とのつり合いを保つためにその後ひずみ速度はそれ程大きくならず、比較的安定したひずみの増加を続ける。

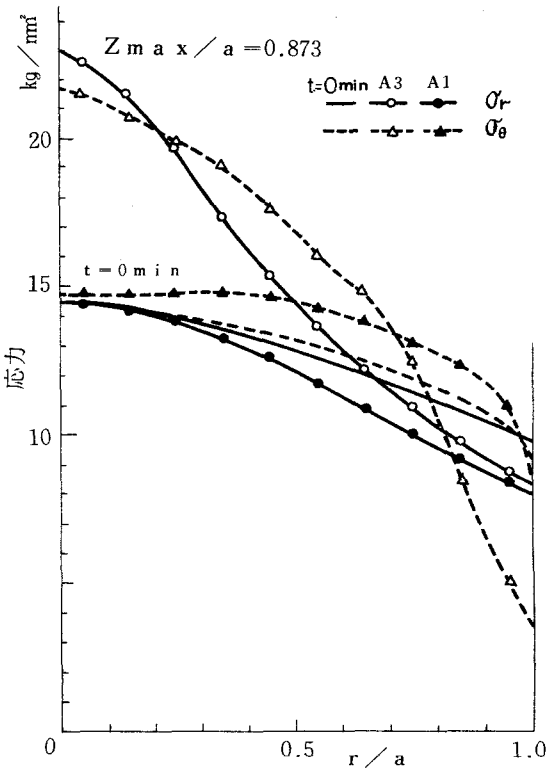


図５－１３　応力分布

弾塑性解析結果（ｔ＝０min）と比較すると、ｍ値が大きい程中心部の応力値が高くなつており、ｍ値が0.2のＡ１材料の場合は周辺部において半径方向応力の緩和が顕著に見られる。

以上の結果から、ｍ値が大きい程応力においては中心部での値が大きく、ひずみにおいてはその分布は全体的になめらかであり、球に近い形状を呈する。いつぽう、ｍ値が小さい場合は、ひずみ速度が大きくなつても応力の上昇が著しくなく、中心部にひずみ集中が発生し不安定な状態になりやすい。

ｍ値が大きい程円板全体にわたつてひずみは大きく、なめらかな分布を示すことは、Ｄ．Ｌ．Holt[1]らも指摘している。

5－3－2　液圧負荷速度と成形性

ここでは、図5－9に示すA2材料（m＝0.5）を用いて、実際の液圧バルジ加工との関連も考慮して、2種類の液圧負荷速度を採用して変形、ひずみ、および応力を解析し、比較を行う。液圧負荷速度は、図5－14に示すようにB1（60 kg/cm²/min）およびB2（10 kg/cm²/min）を採用する。計算は、5－2節と同様に負荷曲線を階段状に近似することで進める。増分量の決定も同様な方法を採用する。

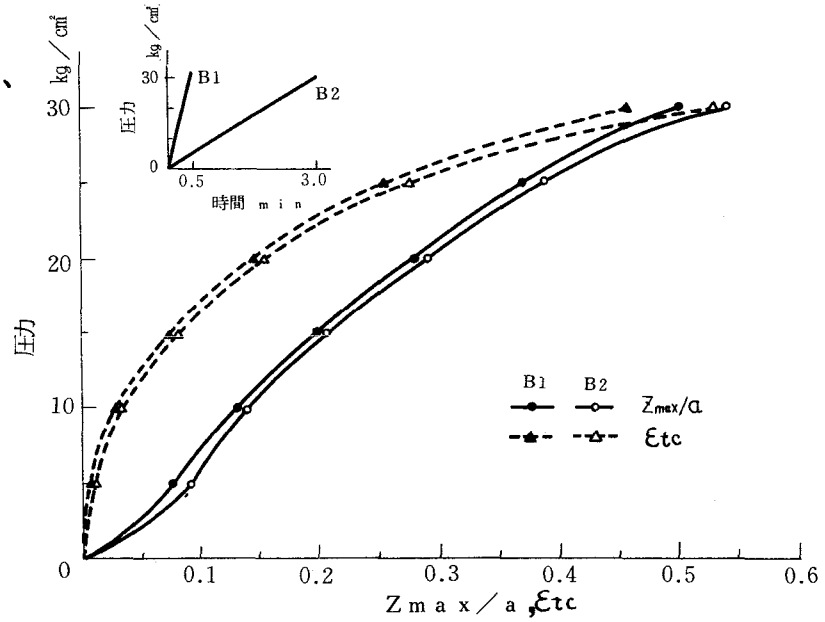


図5－14　液圧―中心のたわみおよび板厚方向ひずみ

図5－14に、液圧と中心のたわみおよび板厚方向ひずみとの関係を示す。負荷速度が大きい程剛性が高く、同一圧力における中心のたわみおよび板厚方向ひずみは小さく出ている。いずれも、その相違は液圧が大きくなる程明らかになるが、変形過程全体ではそれ程大きくない。

図5－15に、たわみ形状の変化を圧力をパラメータにして示す。変形量の相違は見られるが、両者とも球に近い形状を示すことがわかる。

図5－16に、液圧15,30 kg/cm² の時のひずみ分布を比較して示

す。液圧 15 kg/cm² では、両者の相違は明らかではないが、液圧 30 kg/cm² では、負荷速度の大きいＢ１の方がひずみ量は小さい。ひずみ分布に関しては、中心への集中も顕著ではなく両者ともほぼ等しい傾向を示している。この程度の負荷速度の相違では、材料特性値（ｍ値）が同一の場合には、成形性に関する相違は見られないと考えられる。一般の超塑性材料では、ｍ値はひずみ速度に関係し、負荷速度が大きくなるとｍ値が小さくなるために、バルジ高さの大きい領域(Zmax/a ＞ 0.8）ではたわみ形状は円錐状を呈し、ひずみが中心部に集中するという報告[7]も

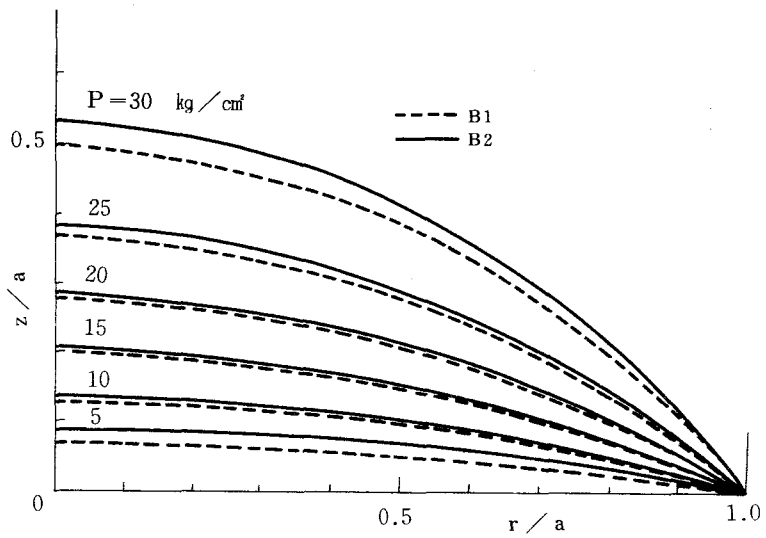


図５－１５　たわみ形状

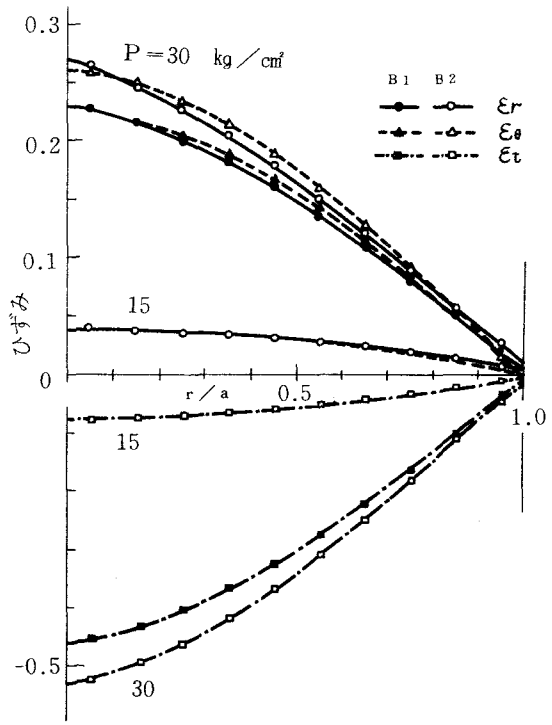


図５－１６ひずみ分布

ある。ここでは、実験による特性値の把握が完全でなく、m値はひずみ速度に関係せずに一定として計算を行つたために、このような結果が得られなかつた。

なお、本計算では、液圧が約32kg/cm²以上となると、B1，B2ともに変形が急激に増大し、ひずみ速度が2（1/min）以上となるため計算を打切つた。

西村、宮川らによるZn—22Al合金の円板液圧バルジ実験*とは、液圧のかけ方について相違があり、完全な比較はできないが、中心たわみがZmax/a＝0.5程度までのたわみ形状については定性的に一致している。

図5－17に、液圧15，30 kg/cm²の時の応力分布を比較して示す。両者の相違はそれ程明らかではないが、負荷速度の大きいB1の方がわずかに応力値が高い。ひずみ分布の場合と同様、m値が等しい場合にはこの程度の負荷速度の相違では、応力値に著しい差異を生じないと思われる。

以上の結果から、つぎのことが言える。

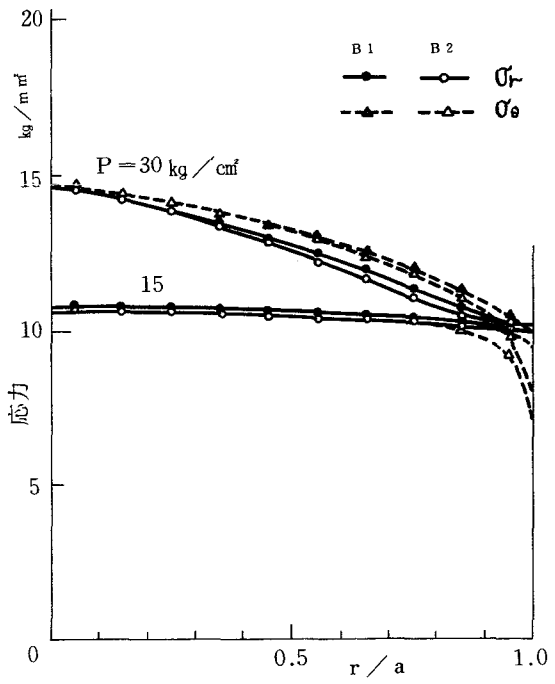


図5－17　応力分布

＊　実験条件は(7)半径＝50mm，板厚1.0mm，液圧負荷速度（平均バルジ高さ速度）＝0.7 mm/secおよび1.0 mm/secである。なお、Zmax/a＝0.5の時の中心の板厚方向ひずみは、両負荷速度の場合ともに ε_{tc} ≒0.5であつたが、図5－14に示した解析結果とほぼ等しい値である。

(1) m値が大きい程、中心部のひずみ集中は顕著でなく、円板全体にわたつてなめらかなひずみ分布を示し、球に近い形状を呈する。

(2) m値が大きい程、中心部の応力値が高く負荷圧力とのつり合いを保つ方向に緩和して、ひずみの伝ぱを促進する。

(3) 圧力の負荷速度が大きい程、応力値は大きくひずみは小さいが、同一の材料特性値（m値）であれば、その相違はわずかであり、たわみ形状、ひずみ分布および応力分布におよぼす影響は少ない。

これにより、m値が成形性と強く関連していること、たとえばm値が小さい（0.2程度）場合は、中心部へのひずみ集中が著しく、くびれが発生しやすく良好な成形性が得られ難いことが示された。つまり、くびれなしで数百パーセントの伸びが得られるという超塑性現象は、m値によつて特徴づけられることがわかる。

5－4　結　言

本章では、3－4および3－5節で定式化した超塑性および弾／粘塑性有限要素法により、薄肉円板の準静的大変形解析を行い、実験および従来から得られている結果との比較を行つた。材料のひずみ速度依存の性質が板の変形におよぼす影響についても検討を加えた。

5－2節では、P. Perzynaの提案した弾／粘塑性モデルを採用した有限要素法により、実際の板材の液圧バルジ加工を想定した液圧負荷速度によるアルミニウム円板の液圧バルジ変形を解析し、モ

アレトポグラフィ法と格子法を併用した実験結果との良好な一致を得た。そこでは、負荷速度が大きい程、変形およびひずみ量は小さく、応力は大きいという材料のひずみ速度依存の性質が確認された。

また、解析において負荷速度を小さくすれば弾塑性解析結果に漸近することが示された。

5－3節では、Zn－22Al合金を想定したm値および材料特性値を用いた超塑性有限要素法により、薄肉円板の液圧バルジ変形の解析を行い、従来から得られている結果との定性的な一致を得た。超塑性現象を特性づけるm値に関しては、その値が大きい程（$m>0.5$）円板全体にわたつて　なめらかなひずみ分布を示し、球に近い形状を呈し、小さい程（$m<0.2$）ひずみの周辺部への伝ばが起こり難いために、中央部へのひずみ集中が顕著となり、くびれが発生しやすく良好な成形性が得られ難いことがわかつた。また、負荷速度が大きい程ひずみは小さく、応力は大きく出るがm値が等しい場合は、その相違はわずかであることが示された。

以上のように、薄板の準静的大変形問題に対して、材料のひずみ速度依存性を考慮した構成関係式を用いた有限要素解析法を確立し、解析を行つたが、さらに実際の現象との対比を行うことにより、厳密な構成関係式の導出と解析手法の改善が進められるものと考える。

第6章　衝撃圧力を受ける円板の動的応答解析

6－1　緒　言

薄板が衝撃的な圧力を受けて大きな非弾性変形を生じる問題を解析することは、液体中にある板構造物、高エネルギ成形、さらにはエネルギ吸収、緩衝装置などの諸問題に関連しており、工学上きわめて重要である。したがつて、この問題については、これまでいろいろな分野で数多くの研究がなされて来ている。[9]～[19]ところが、この問題は板の形状、荷重のかかり方を理想化した場合でも、大変形に起因する幾何学的な非線形性、材料特性の非線形性、そしてひずみ速度依存性などを考慮しなければならず、解析的な扱いは大変困難となる。そのため理論的な研究は、定性的な現象の解明にとどまるものが多い。

本章では、薄肉円板がステップ状衝撃圧力を受ける場合の動的応答解析を行う。この問題に関しては、N. Cristescu[31]によると、G. E. Hudson[13]らのように、円錐台状形状を示した後、円錐状に変形するとしている報告や、J. S. Rinehart[11]らのAl合金板の実験結果のように、最初中央部は水平を保ちつつ、周辺部は丸みをおびた形状を呈し、最終的には球状に変形するという報告もあり、材料のひずみ速度依存性および圧力波形によつて変形機構が異なることが指摘されている。ここでは、3－5節の弾／粘塑性膜体の有限要素法を用いて圧力波形および材料のひずみ速度依存性の薄肉円板の応答への影響を検討する。

材料特性は、アルミニウム合金を想定したものを採用し、試験片

の形状は半径 $a = 50$ mm，板厚 $h_o = 1.0$ mm とする。また、計算での増分時間間隔 Δt は、初期変位を与えた状態での最小固有周期の数分の1の値*を基準にして、過大な増分変形を起こさないように増分変形量を規定し**、それに近づくように反復計算し、修正した上で計算を進める。また、NewmarKの β法、式（3－53）におけるβは、1/4の値を用いる。

計算に用いる要素分割としては、半径方向に50等分割したものを採用する。この分割数を用いた静的解析では十分精度良い解が得られている。

計算の第1段階に入る前に初期変位を与える必要があるが、4－2節同様、回転放物面状に変形するものとして初期節点変位を決定する。初期速度および初期加速度は零とする。

＊　ここでは、0.5　μsecを用いた。

＊＊　ここでは、中心での垂直方向たわみ増分0.05 mmを用いた。

6－2　動的応答に対する立上り時間および圧力の大きさの影響

解析に用いる材料の特性は、

$$\bar{\sigma}_s = 7.0 + 8.0\ \bar{\varepsilon}^{(p)} \qquad Kg/mm^2$$

$$E = 7000.\ \ Kg/mm^2\ ,\ \sigma_y = 7.0\ Kg/mm^2\ ,\ \nu = 0.314$$

$$\rho = 2.75\times10^{-10}\ \ Kg\ sec^2/mm^4$$

$$\gamma = 50.\qquad 1/sec \qquad (6\text{-}1)$$

粘性パラメータγの値は、P. Perzyna[59]の示した値を参考にして定めた*。図6－1に、材料のひずみ速度が一定の場合の応力ーひずみ関係を示す。

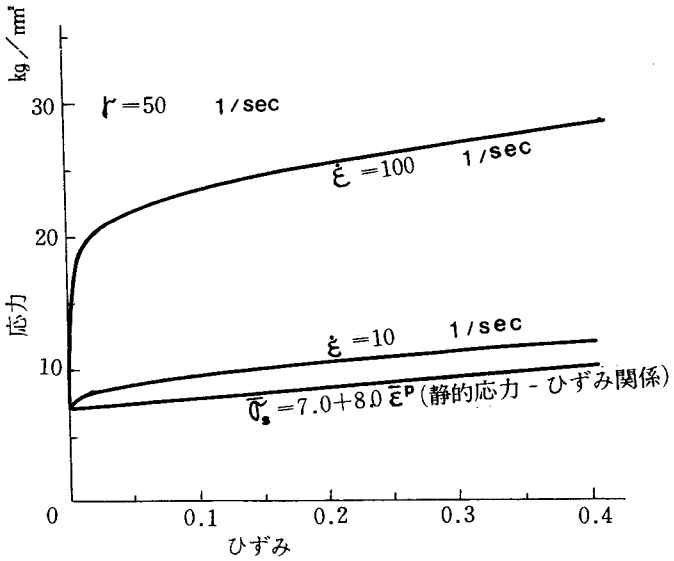


図6－1　応力とひずみ

＊　ここに用いたγの値が、アルミニウム材料に対して妥当かどうかの検討は行つていない。

図６－２は、図中に示した３種類のステップ状衝撃圧力が加わつた場合の中心のたわみの変化を示したものである。ここでは、振動を伴う過度応答の比較的初期の部分を示している。中心のたわみは０.３msec 近傍で第１番目のピークが現れた後、圧力の立上り時間の短い場合の方に、より振幅の大きい振動を発生する。振動は、２，３サイクルで減衰し、５msec程度経過すると、

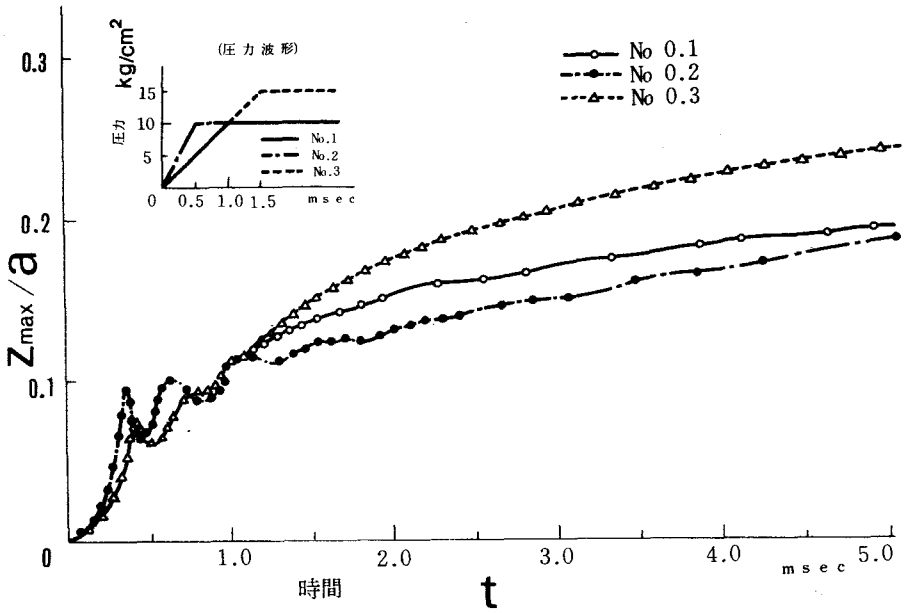


図６－２　　中心たわみ－時間関係

中心たわみ量はなだらかに増加するようになる。図では省略したが、増加の割合は立上り時間の短い方が大きく、十分時間の経過した t ＝ 30。msecにおける値は、式（６－１）の材料特性を用いた静的弾塑性解析結果によつて得た圧力 10kg/cm² での中心のたわみに対して、№１の場合で 1.５倍、№２の場合で２倍程度であつた。

負荷速度の等しい№１および№３圧力波に対する応答結果は、1.0 msec までは同じであり、その後も変形形状、ひずみ分布および応力分布の形は後で示すようによく似ている。そこで、まず変形に対する負荷速度の影響を考察するために、№１および№２圧力波に対する解析結果を比較する。

図６－３(a)，(b)は、たわみ形状の変化を示したもので、振動を伴う初期段階に対しては中心たわみが極大となる付近を選んでいる。変形のごく初期では中央部の平らな円錐台状に盛り上り、ついで振動を伴いつつ変形が中央部に集中するようになり、中心部分に円錐状突起を発生している。十分に時間が経過した後の形状

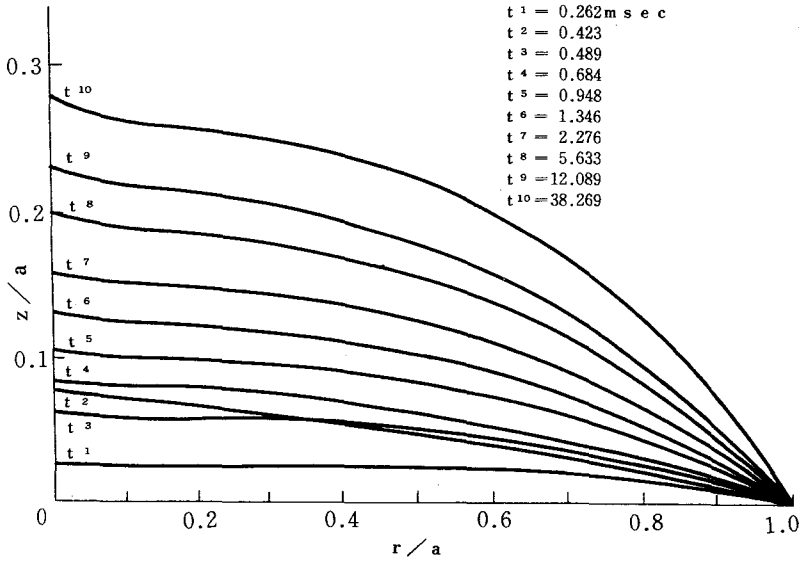


図６－３(a)　たわみ形状（№１）

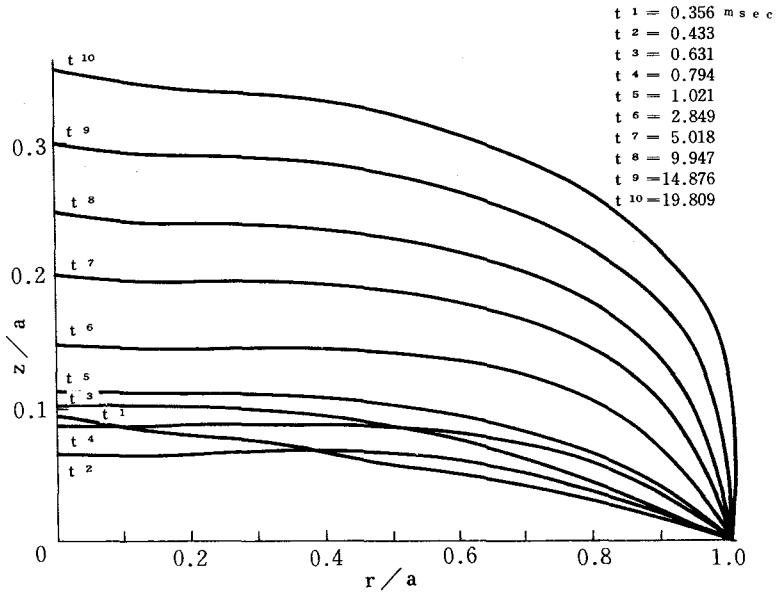


図６－３(b)　たわみ形状（№２）

は、№１圧力波の場合は中心部を除けば球面に近く、№２圧力波の場合は中心の水平部が広い頂部のつぶれた球状になり、周辺部は固定端より外側に

はみ出すようになる。

この結果より、圧力波の立上り時間が短い程広い範囲で大きな変形を生じることがわかる。

図6－4(a)，(b)は、ひずみ分布の変化を示す。中心たわみ振動の第1ピーク時を越えるあたりから、中心部にひずみが集中していく　様子がわかる。負荷速度が大きい場合には、その傾向が顕著である。中心部でのひずみの集中は多くの実験で確認されており、[11]～[13] 円板の高速度バルジ変形の一つの特徴である。

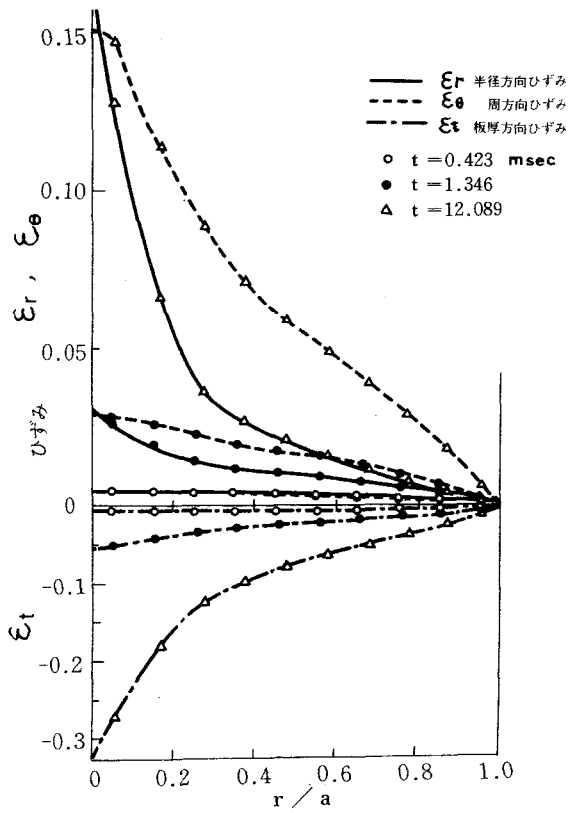


図6－4(a)　ひずみ分布（№1）

図6－5(a)，(b)は、応力分布の変化を示す。負荷速度が大きい場合の方が応力集中が顕著であり、応力値も高い。

図6－6(a)に、中心での相当ひずみの変化を、№3の圧力波に対する結果もあわせて示す。これより、圧力値の大きさよりも負荷速度の大きさの方がひずみ増加におよぼす影響が著しいことがわかる。図では相当ひずみの計算結果をなめらかに結んだが、実際には微小な振動を伴いつつ増加している。

図6－6(b)は、中心のたわみが静的弾塑性解析結果とほぼ等しいときのたわみ形状を比較したものである。やはり、負荷速度の影響

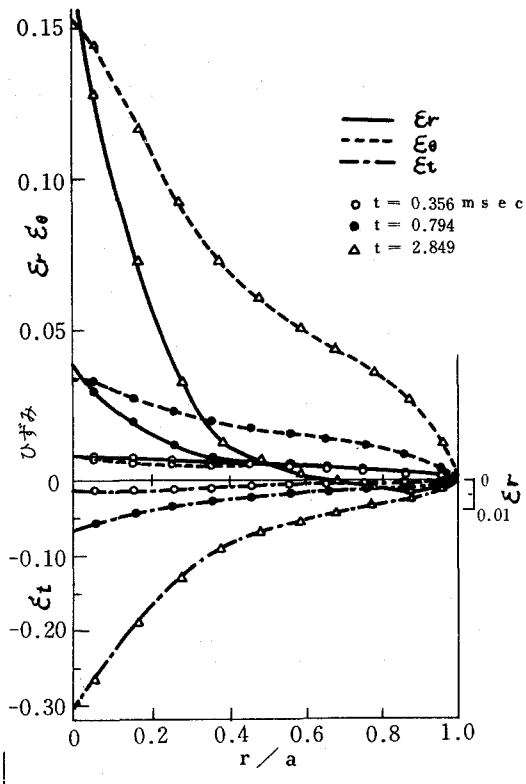


図6－4(b)

ひずみ分布（№2）

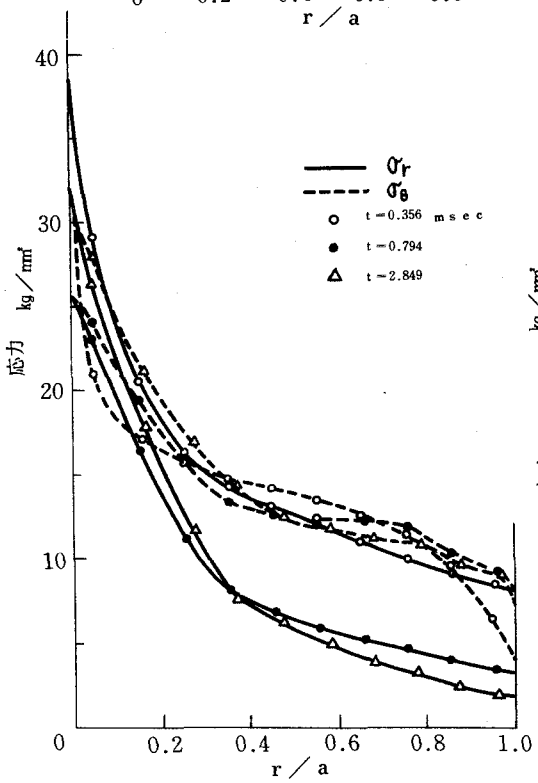


図6－5(b)　応力分布（№2）

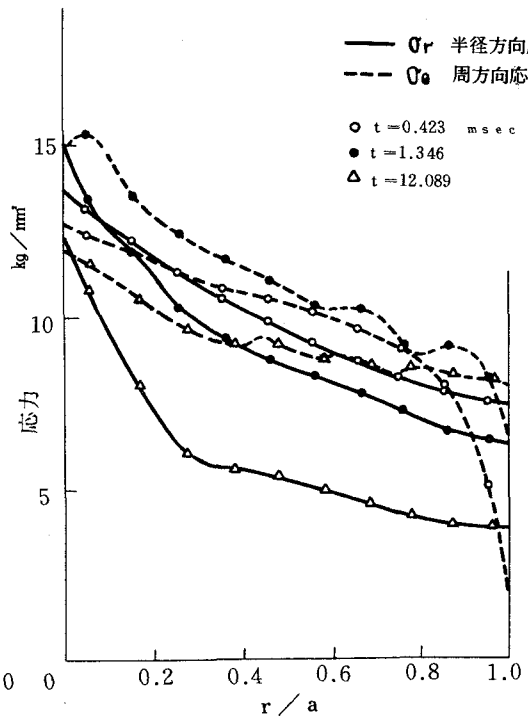


図6－5(a)　応力分布（№1）

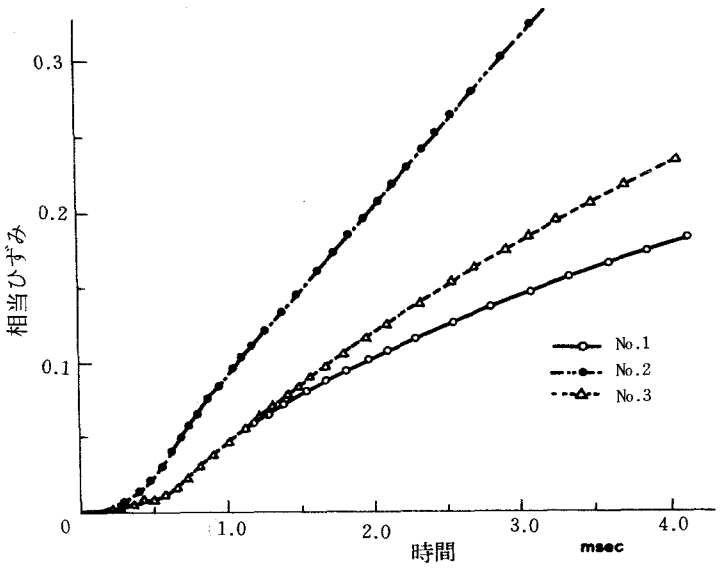


図６－６(a)　中心の相当ひずみ―時間関係

が著しいことがわかる。

図６－６(c)，(d)は、時刻ｔ＝3.0 msec におけるひずみ分布および応力分布を№１～№３の圧力波に関して比較している。

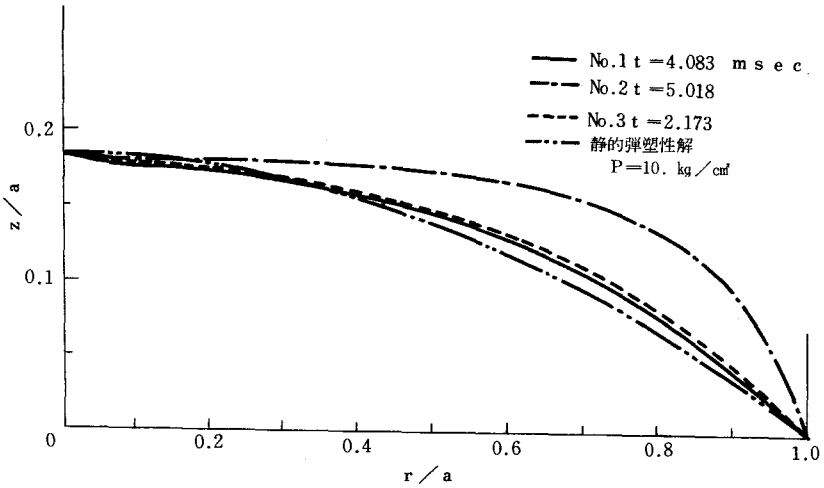


図６－６(b)　たわみ形状

負荷速度が大き程、中心でのひずみおよび応力の集中が顕著であることがわかる。

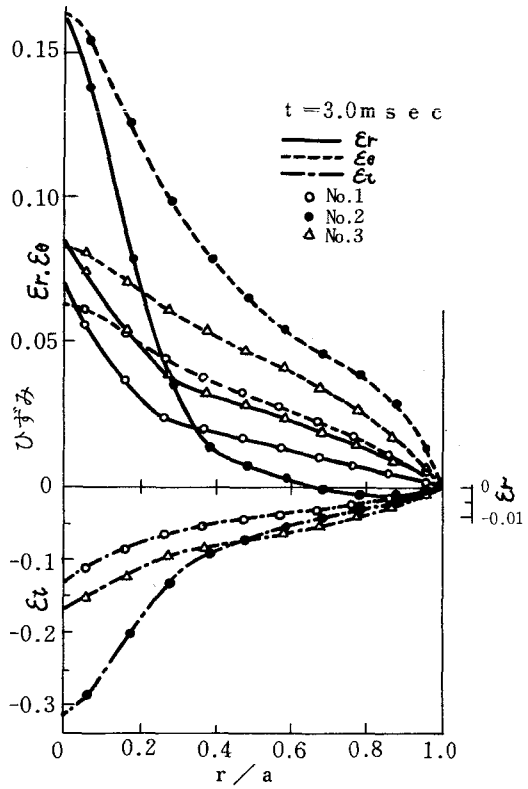


図６－６(c)　ひずみ分布

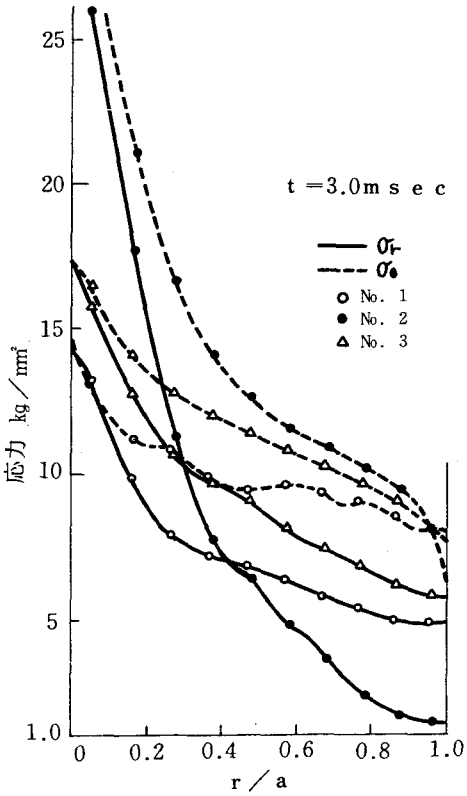


図６－６(d)　応力分布

6－3　粘性パラメータγの相違による応答の検討

P．Perzynaの構成関係式（2－32）の粘性パラメータγの値の逆数は、過剰応力に対して生ずる非弾性ひずみ増分の比例定数となつている。従つて、γが大きい程ひずみ速度が大きくなつても過剰応力を生じない。すなわち塑性挙動に近くなり、γが小さい程弾性的挙動に近くなる。

ここでは、薄肉円板が衝撃的圧力を受ける場合を取上げ、粘性パラメータγの変形挙動への影響を調べるために、Ma 1圧力波が加わつたとし、γ＝10，100(1/sec)を用いて解析を行う。材料特性値および形状は、6－2節と同様である。

図6－7に、中心のたわみおよび相当ひずみの比較的初期の時間的変化を示す。γが小さい場合の方が変形量は小さく、振幅の大きい振動を長い時間伴つている。中心のたわみ、相当ひずみともに、γが大きい場合の方が急激な増加を示している。なお、十分時間の経過したt＝30 msecにおける値は、静的弾塑性解での圧力10 kg／cm²のときの値に比べ、中心た

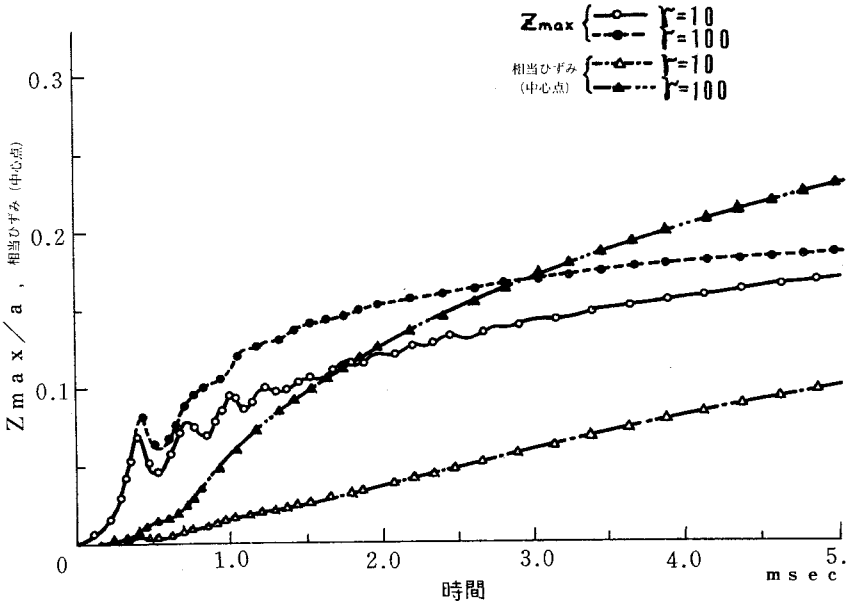


図6－7　中心のたわみおよび相当ひずみ－時間関係

わみでは両者とも1.5倍程度、中心相当ひずみではγ＝10の場合には10倍、γ＝100の場合には14倍程度であつた。

図6－8(a)に、たわみ形状の変化を静的弾塑性解とともに比較して示す。γが大きい方が、中心の水平部分が広く保たれ、大きく変形していることがわかる。

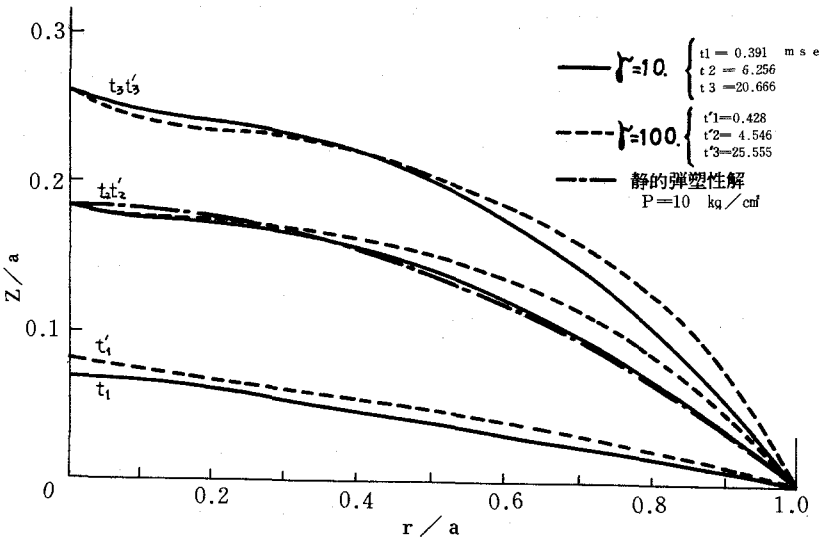


図6－8(a)　たわみ形状

図6－8(b)，(c)には、時刻t＝3.0 msec におけるひずみおよび応力分布を、静的弾塑性解とともに示す。

ひずみ分布では、γ＝10の場合は、中心部へのひずみ集中も顕著でなく、その値も小さく、ほぼ静的弾塑性解に近い分布を示している。それに対して、γ＝100の場合には、ひずみの中心部への集中が著しく、その値も大きい。つまり、γが大きい程ひずみ量は大きく、中心部への集中が顕著であると言える。

一方、応力では、γが小さい方が、中心部に著しい集中を生じ、その値も大きい。γ＝100の場合は、中心部への集中も著しくなく、半径方向応力は静的な解に比べ、中心付近を除いて緩和している。

なお、6－2および6－3節で行つた一連の解析において、最大

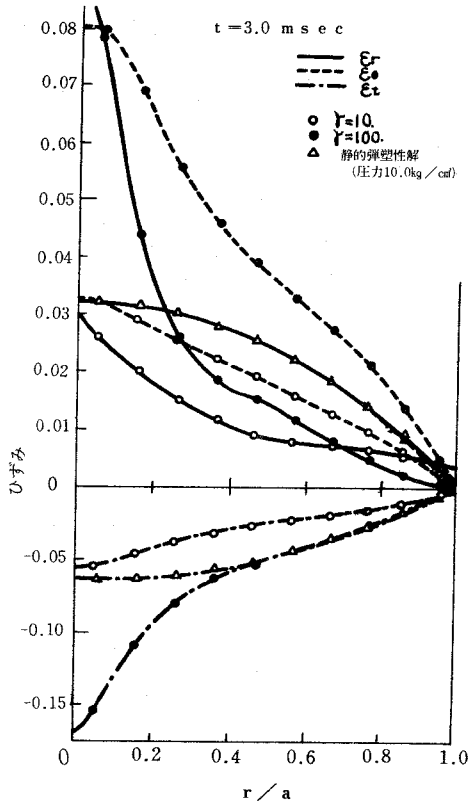


図６－８(b)　ひずみ分布

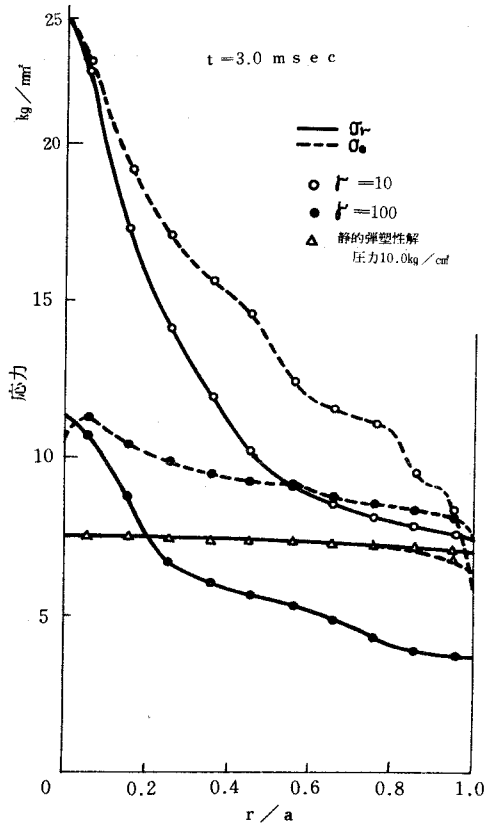


図６－８(c)　応力分布

変形速度は 100(m/sec)以下、最大ひずみ速度は 100(1/sec)以下であった。

6－4　結　言

本章における一連の弾／粘塑性円板の有限要素法による動的応答の解析結果から、ステップ状衝撃圧力が加わる場合の円板の変形過程は、大略つぎのように特徴づけられる。

衝撃荷重が加えられた直後、板はピストン状に前進し、ついで減衰する振動を伴いつつ静的な場合よりも平らな形の盛上りを続け、つぎに中心部にひずみの集中を生じて円錐状突起が生じる。この結果は、すでに多くの実験によつて確認されている円板の高速度バルジ変形の特徴をよく説明している。

また、圧力の立上り時間が板の変形におよぼす影響は極めて大きく、立上り時間が短い程初期に発生する振動は著しく振幅は大きいこと、また、その後頂部の平らな板全体にわたつて大きな変形を生じることがわかつた。

いつぽう、ひずみ速度依存の性質を表すγが小さい場合は、頂部のたわみは小さく、中心部のひずみの集中も小さいことが示され、応力は、逆に中心部の集中が顕著でその値も大きいことが示された。

この解析により、従来から衝撃液圧バルジ加工過程に関する実験および定性的理論解析によつて指摘されてきた変形挙動の一側面が解明されたと考える。

第７章　液圧バルジ変形の実験的解析

７－１　緒　言

本章では、モアレトポグラフイ法と格子法を併用した薄板の液圧バルジ変形の非接触応力ひずみ解析法を述べる。

一般に、２組の細かい平行線群を重ね合わせるとモアレじまができ、双方の間に相対的な移動および回転を生ぜしめると、これに応じてしまは移動する。このモアレじまの現象を利用して変位やひずみの測定を行うのがモアレ法であり、[64],[21]基準の格子とその物体表面への投影格子との重ね合わせによつて生じるモアレ等高じまによつて物体の形状測定を行うのがモアレトポグラフイ法[64)～(66]である。モアレトポグラフイ法の長所は、原理が簡単で実験もとくに高度な技術および装置を必要とせず、物体形状の測定ができることである。

ところで、モアレトポグラフイ法は原理的に点光源有限遠視点および平行光線無限遠視点の２つに分けられるが、測定対象物体が大きくなく、大口径のレンズが準備できる場合は、後者の方が等標高差の等高モアレじま群が得られるために、精度およびしまの解析に要する労力の点から有利である。

本章では、平行光線無限遠視点のモアレトポグラフイ法を用い、さらに格子法を導入することで物体点の移動を測定し、薄板の液圧バルジ変形における応力、ひずみ解析を行う方法について述べ、第４章および第５章で示した有限要素法による解析結果の検討のための実験を行う。

７－２節では、モアレトポグラフイ法の原理と薄板の液圧バルジ

実験の測定原理を示す。実際のバルジ変形形状の測定結果を、ダイヤルゲージによる測定結果と比較することにより、本測定法の精度的検討もあわせて行う。

7－3節では、初期状態において薄板表面に格子を描き、バルジ過程の各変形状態において写真撮影したモアレじまと格子によつて物体点の変位を得る。それより、薄肉円板の液圧バルジ実験の応力ひずみ解析を行う。

7－4節では、任意形状の薄板の変形、ひずみ解析法を示す。ひずみ解析では、増分形の有限要素関係式の定式化に用いた変位関数を利用する。実際のひずみ解析例として、長方形板のひずみ分布を示す。

7－2　モアレトポグラフイ法

本手法は、光学的測定法の一つで、物体表面に直接等高モアレじまが見え、瞬間の物体形状を非接触的に測定できるという利点を持つために、従来のダイヤルゲージや顕微鏡による測定法[70]に比べ時間的に変化する現象の場合や測定対象が柔かいために接触できないような場合に、きわめて有効である。

同様な光学的測定法として、レーザーホログラフイ法があり、高い精度が保証されているが、高価な上に高度な写真技術が必要である。そのため、要求される精度がそれ程でなく、対象とする物体がかなり大きい場合は、装置製作費も安価で十分精度良い測定が期待できるモアレトポグラフイ法が有力となる。

以下に、モアレトポグラフイ法の原理、実験より得たモアレじまおよびその測定精度の検討を行う。

7－2－1　　原　　理

(a)　平行光線無限遠視点

図7－1は、太陽光線あるいは点光源と視野レンズを組み合わせることで得られる平行光線束を平面等間隔格子を通過させて測定対象に照射し、視野レンズとカメラを組み合わせることで得られる格子平面に垂直な方向の無限遠視点によつて観察する場合を示す。図中○印のところに反射物（物体表面）があると明るく見え、他は暗いために明暗のモアレじまができる。S_0 を平面等間隔格子の格子間隔、θを平行光線の無限遠視点方向との相対的な入射角度とすると、つぎの関係が成立する。

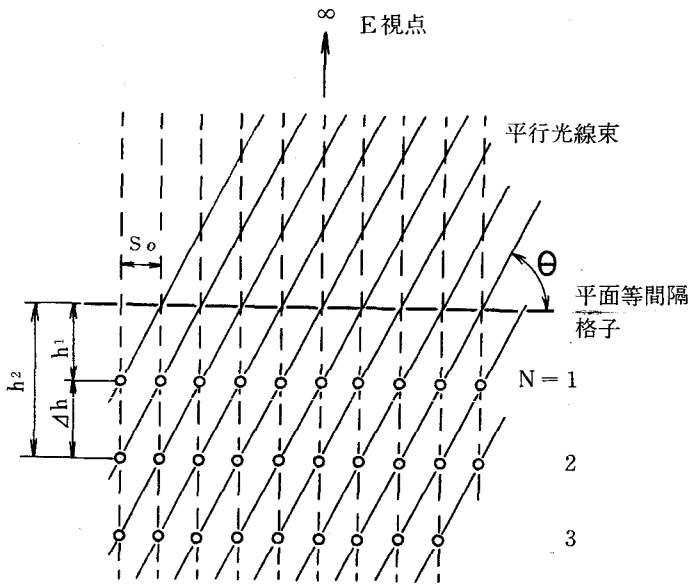


図7－1　　平行光線無限遠視点

$$\Delta h = s_0 \tan \theta \qquad (7\text{-}1)$$

$$h_N = N\, s_0 \tan \theta \qquad (7\text{-}2)$$

したがつて、しま次数Nを求めることによつて平面等間隔格子からの垂直距離 h_N が得られ、結果的には形状が決定される。つまり、ここで得られるモアレじまは、等標高差の等高線群であり、しまが密な程傾きが急な形状をしていることがわかる。

(b)　点光源有限遠視点

(a)の方法では、被測定物の大きさがレンズの口径で制限される。これに対して、点光源有限遠視点の場合はそのような制限はなく、光源と視点とが平面等間隔格子から等垂直距離にあるならば、得られるモアレじまは、平面格子から一定の深さを示す等高線となる。

図7－2に示すように、○印の明るく見える位置は、たとえばN＝2の場合はつぎのようにして得られる。

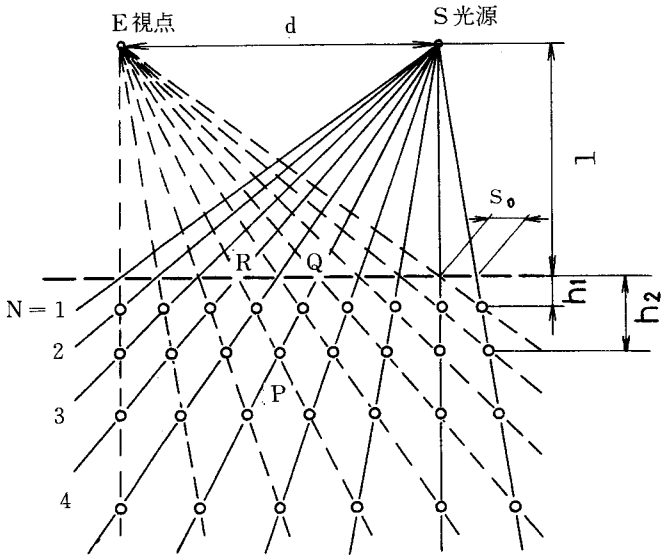


図7－2　点光源有限遠視点

$$\overline{ES} : \overline{RQ} = (1+h_2) : h_2 \qquad (7\text{-}3)$$

一般に、N番目に明るく見える点の平面格子からの距離 h_N はつぎのようにして得られる。

$$d : N s_0 = (1+h_N) : h_N$$

$$h_N = N\, l\, s_0/(d-Ns_0) \qquad (7\text{-}4)$$

7－2－2　実験装置

平行光線無限遠視点のモアレトポグラフイ法を用いた薄板の液圧バルジ実験の変形測定装置と原理図を示す。

図7－3(a)，(b)に、第4章の静的弾塑性解析結果との比較において用いた太陽光線利用の装置を示す。太陽光線束は、非常に明るい良質の平行光線束であるために、明暗のはつきりしたしまが得られ、光線の入射角が正確に測定できる実験の場合は光源としてきわめて有効と考えられる。ところが、入射角の測定が正確に行えない場合あるいは気象条件が実験に影響をおよぼす可能性のある場合は、つぎに示す人工光源を用いる方が便利である。

図7－4(a)，(b)に、5－2節の弾／粘塑性解析結果との比較において用いた人工光源利用の装置を示す。

静的な実験の場合は、変形が安定するまでその圧力を保ちつつ、0.2～0.4 kg／cm^2きざみで圧力を増加する。また、準静的な場合は、X－Tレコーダの記録紙にあらかじめ目標とする液圧負荷曲線を描き、それに追随するように油圧ポンプを作動する。

実験では、モアレじまを写真撮影し、しまの位置を読取顕微鏡で測定することでたわみ形状を得た。その際、レンズの収差を考慮する必要があるが、ここでは、初期状態で板表面に置いたスケールを写し、位置における長さを修正する方法を用いる。

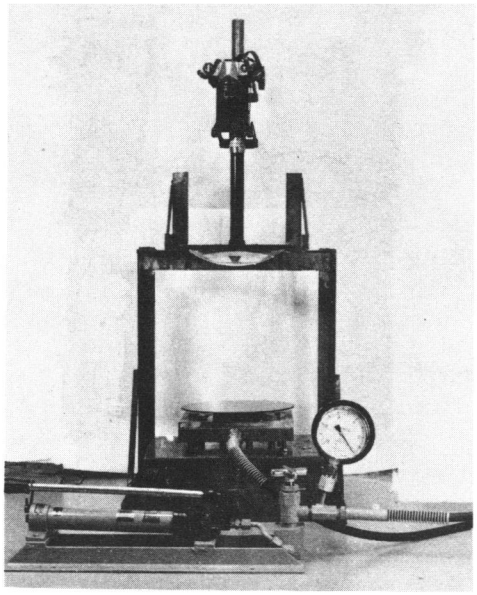


図７－３（a） 実験装置（静的）

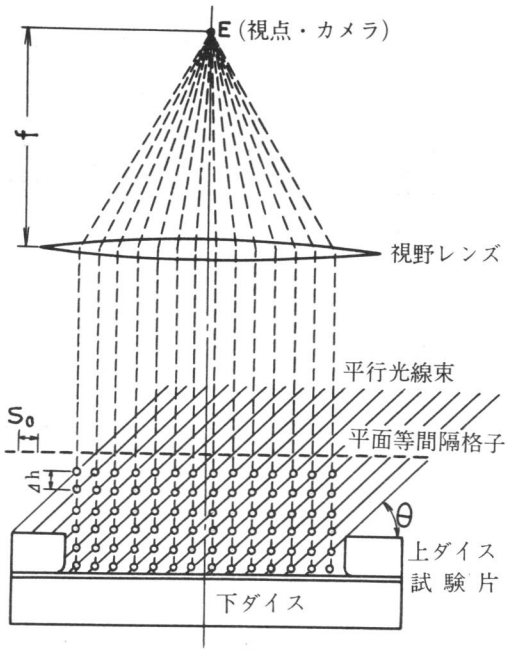


図７－３（b） 装置略図（静的）

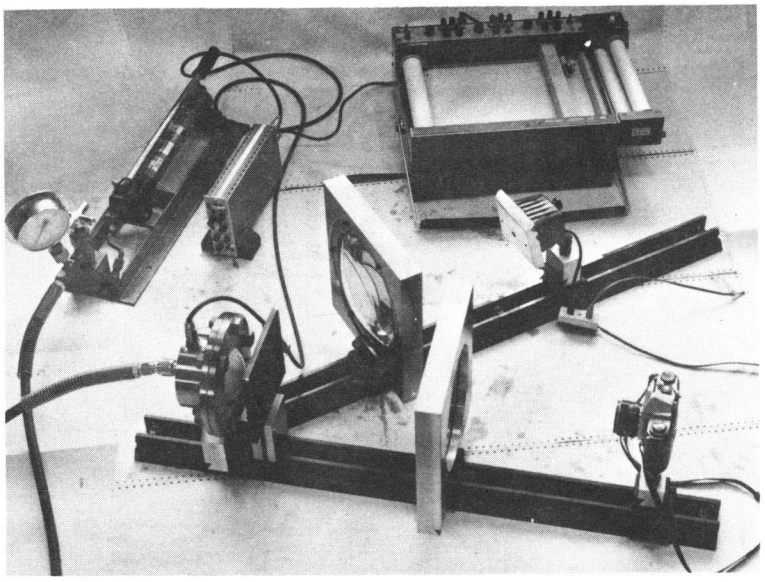


図7－4（a） 実験装置（準静的）

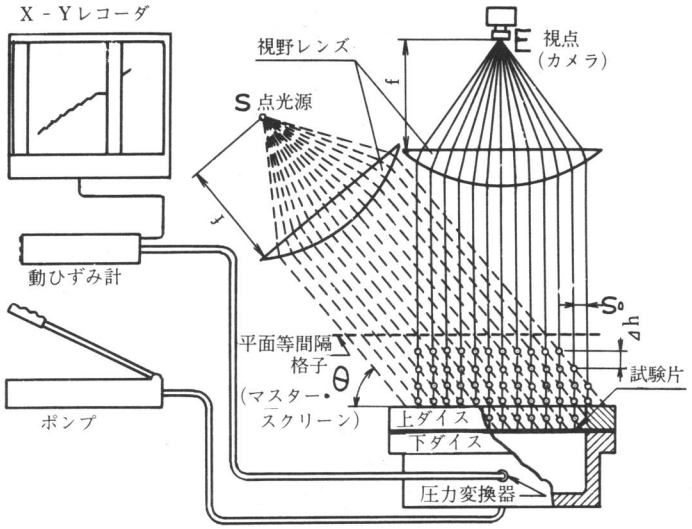


図7－4（b） 装置略図（準静的）

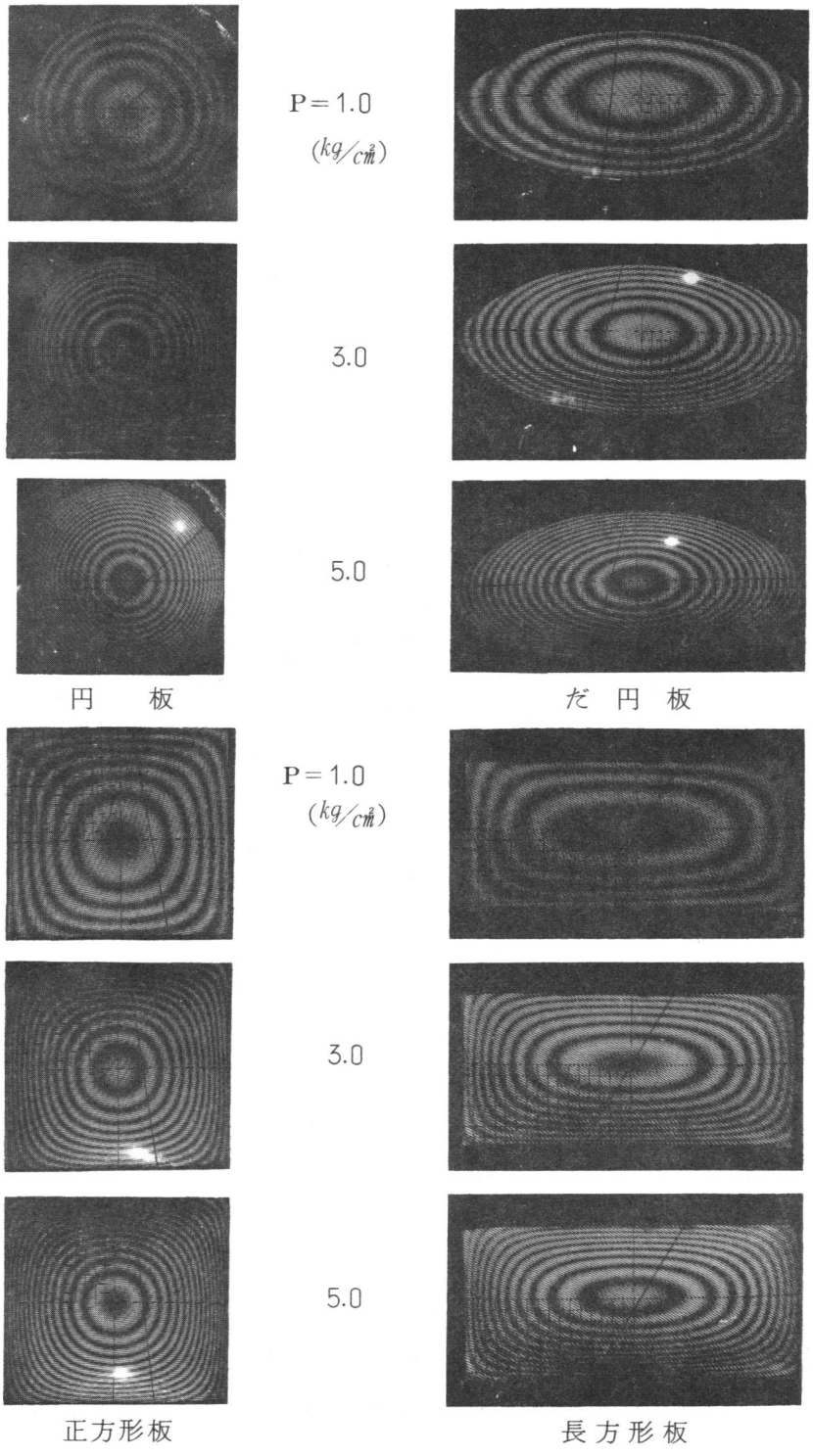


図7－5　モアレじま

7－2－3　　モアレじま

図7－5に、円板、だ円板、正方形板、および長方形板の液圧バルジ実験（静的な場合）において得られたモアレじまを示す。

周辺部でしまの一部が欠けているが、これは締付け用の上ダイスの影が原因である。

7－2－4　　たわみ形状

図7－6に、モアレじまから求めるたわみ形状の精度を検討するために、半球状曲面をモアレトポグラフィ法および精度1/100 mmのダイヤルゲージによつて測定した結果を比較して示す。面の傾きが大きいところで、最大測定差2％程度を生じるが、ダイヤルゲージの測定子先端の丸みを考慮すると精度的には同程度と思われる。

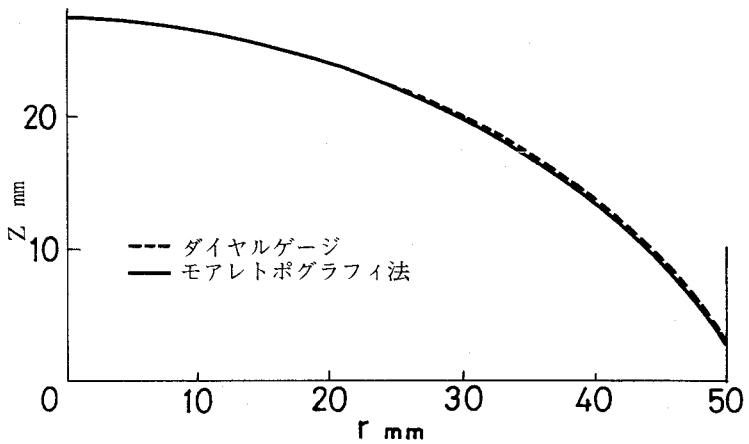


図7－6　　形状測定の比較

図7－7(a)に、円板の静的液圧バルジ実験における液圧と中心たわみとの関係を示す。実線はモアレトポグラフィ法によつて得たものであり、○印はダイヤルゲージによる測定結果である。ダイヤルゲージの場合の方が圧力が高めに出ているのは針圧のためと思われる。

図7－7(b)に、液圧負荷速度1／5kg／cm²/sec　の円板バルジ実験における液圧と中心たわみとの関係を示す。○印で示された変位計

（東京測器社製　SDP－50－BS）による測定結果の方がモアレトポグラフィ法による結果よりも圧力が高めに出ているが、針圧の影響と思われる。

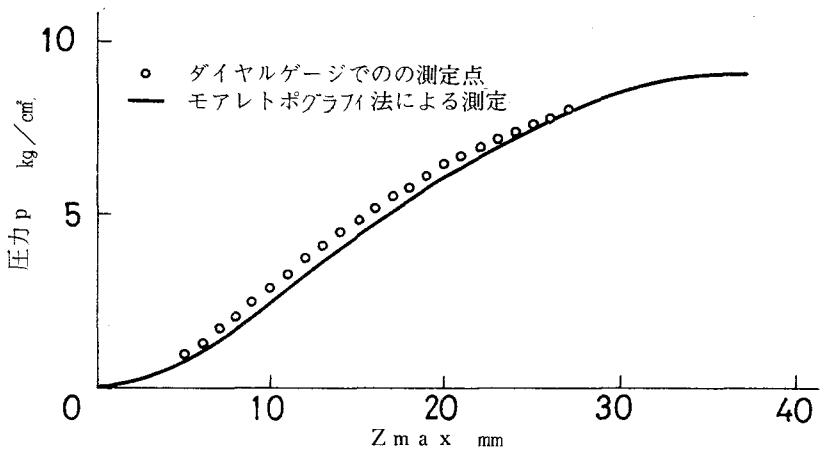


図７－７(a)　　液圧ー中心たわみ（静的）

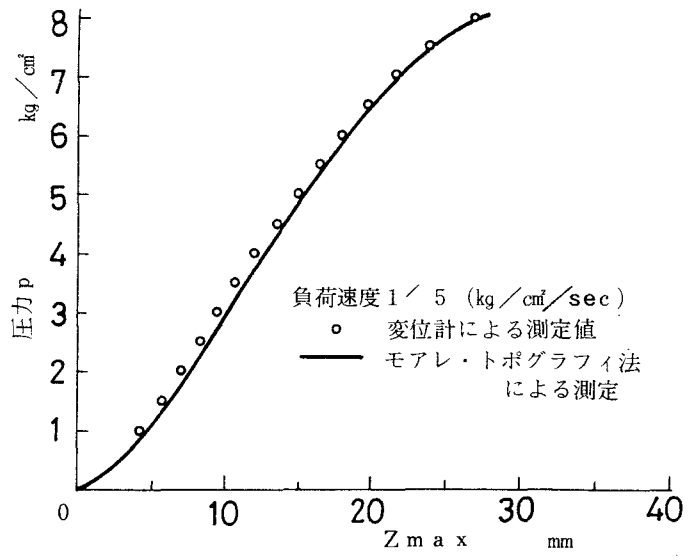


図７－７(b)　　液圧ー中心たわみ（準静的）

図７－８(a)，(b)に、円板の静的および準静的なバルジ実験において得たたわみ形状を、圧力をパラメータにして示す。

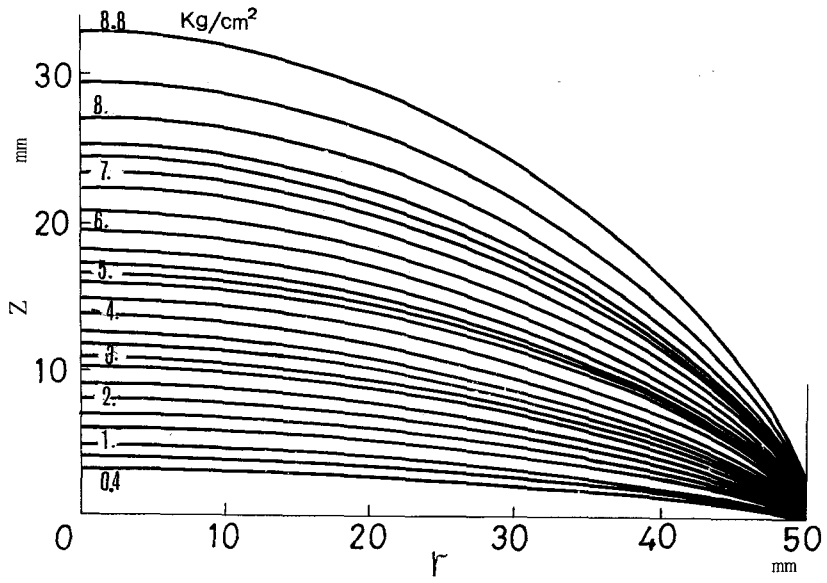


図７－８(a)　　円板のたわみ形状（静的）

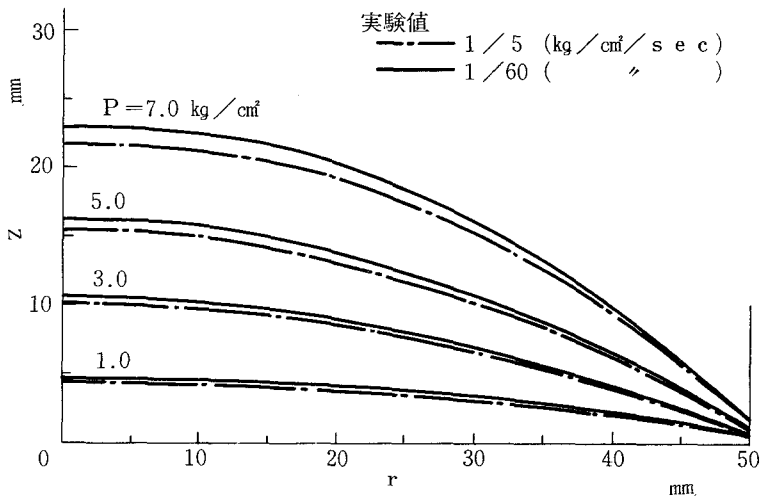


図７－８(b)　　円板のたわみ形状（準静的）

図７－８(c)，(d)に、正方形板の辺方向および対角線方向におけるたわみ形状を圧力をパラメータにして示す。

境界でのたわみが零でないのは、境界での破断を防ぐために丸み（４Ｒ）をつけているためである。

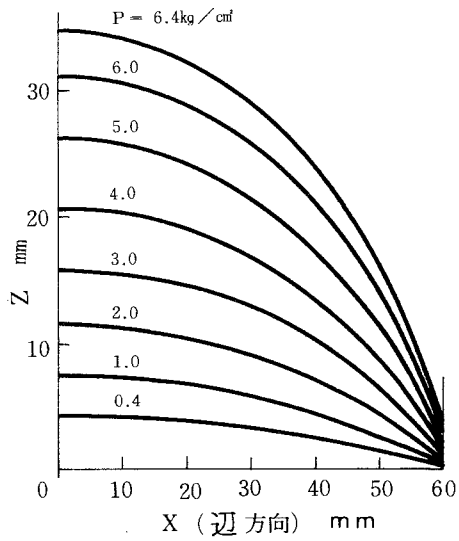


図7－8(c)　正方形板のたわみ形状

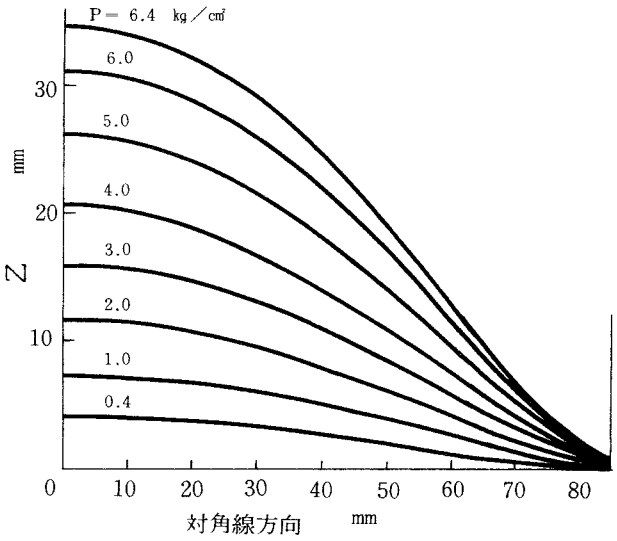


図７－８(d)　正方形板のたわみ形状

７－３　円板の応力，ひずみ解析

ここでは、薄肉円板の液圧バルジ実験における応力、ひずみ解析法を示すが、主に静的な実験の解析結果をとり上げて、本解析法の有効性を検討する。

７－２節に示したモアレトポグラフィ法により得たたわみ形状と格子法より得た格子点の変位より、格子点間の距離を求め半径方向ひずみ ε_r を決定する。つぎに、格子点間の中点の半径方向変位によつて、その点を含む要素の周方向ひずみ ε_θ を求める。残る板厚

方向ひずみ ε_t は、体積一定の条件から求める。

応力成分は、つぎのようにして決定する。

上述のたわみ形状より、格子点間の中点の子午線方向および周方向の曲率半径 ρ_1 , ρ_2 を求める。これらの値と板厚 h , 圧力 p、および膜体に生じる半径方向および周方向の応力 σ_r , σ_θ の間にはつぎの関係がある。

$$\sigma_r / \rho_1 + \sigma_\theta / \rho_2 = p / h \qquad (7\text{-}5)$$

ここで、図7－9に示すように、垂直方向のつり合いを考慮することにより σ_r が得られ、式（7－5）に代入することにより σ_θ が得られ、つぎのようになる。

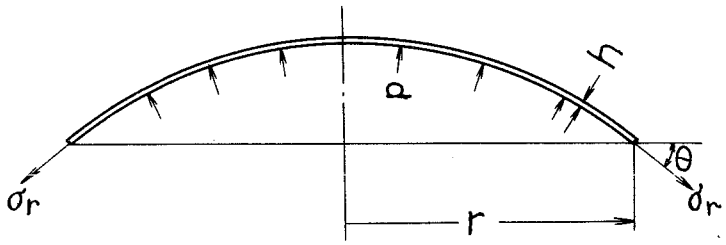


図7－9　膜応力

$$\sigma_r = p\,r / 2\,h \sin\theta$$

$$\sigma_\theta = (1 - r/2\rho_1 \sin\theta)\rho_2 p/h \qquad (7\text{-}6)$$

以上により得られた、ひずみおよび応力成分により、相当ひずみ $\bar{\varepsilon}$ および相当応力 $\bar{\sigma}$ はつぎのように表される。

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{2}/\sqrt{3}\ (\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_t^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{\sigma} = (\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta)^{\frac{1}{2}} \qquad (7\text{-}7)$$

図7－10 に、A1 1100P-O 材について行つた単軸引張り試験※、西村ら[70]のダイヤルゲージ を用いた球かく近似測定法およびモアレトポグラフイ法と格子法を併用した測定法をそれぞれ用いた円板の液圧

バルジ実験によつて得た応力ーひずみ関係を示す。

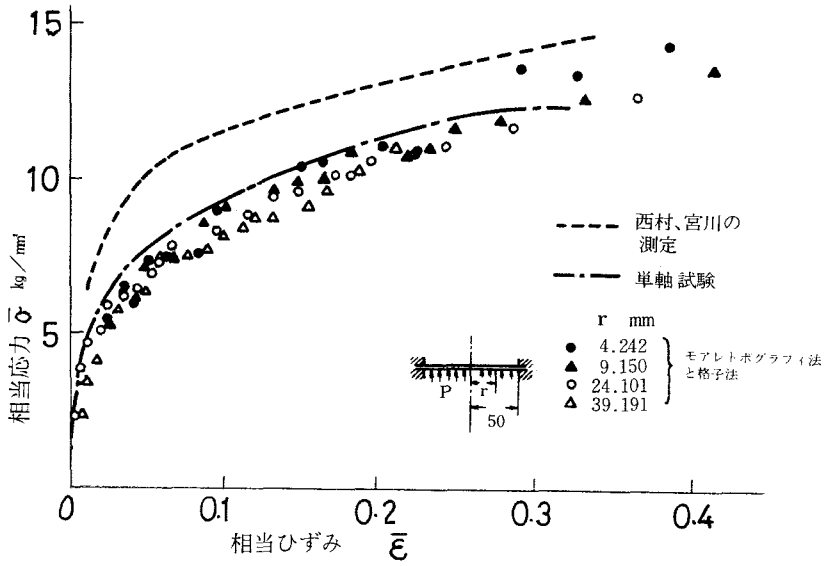


図７－１０　応力ーひずみ関係（静的）

西村らの頂点付近を球かく（等２軸応力状態　$r \leqq 0.2a$　）とみなして応力、ひずみを求める測定法による結果では応力が高めに出ている。これは、ダイヤルゲージの測定圧および球かく近似理論を原因としていると思われ、簡便ではあるが精度上の限界がありそうである。

単軸試験では、くびれが発生するために 20 ～ 30 %程度のひずみが限度であるが、液圧バルジ試験では、測定法が非接触であるかぎり本実験のような極薄板（板厚 0.31mm ）でも 50% 近くのひずみが得られることから、薄板の材料試験法として有効と思われる。

モアレトポグラフィ法と格子法の併用による応力、ひずみ解析法は、モアレじまの写真撮影、読取り顕微鏡による観測、計算機によ

＊　引張り試験は、オートグラフ（島津社製ＩＭ－１００）を用い、引張り試験速度は、２mm/min　であつた。

るたわみ曲線近似と応力、ひずみの算出というように中間誤差の入り易い手法ではあるが、図７－１０からもわかるように、円板の液圧バルジ試験の応力、ひずみ測定法としての精度上の問題はないと言える。

準静的な液圧バルジ実験の応力、ひずみ解析も同様にして行うことができ、図７－１１に中心での応力－ひずみ関係を、単軸引張試験結果とともに示す。

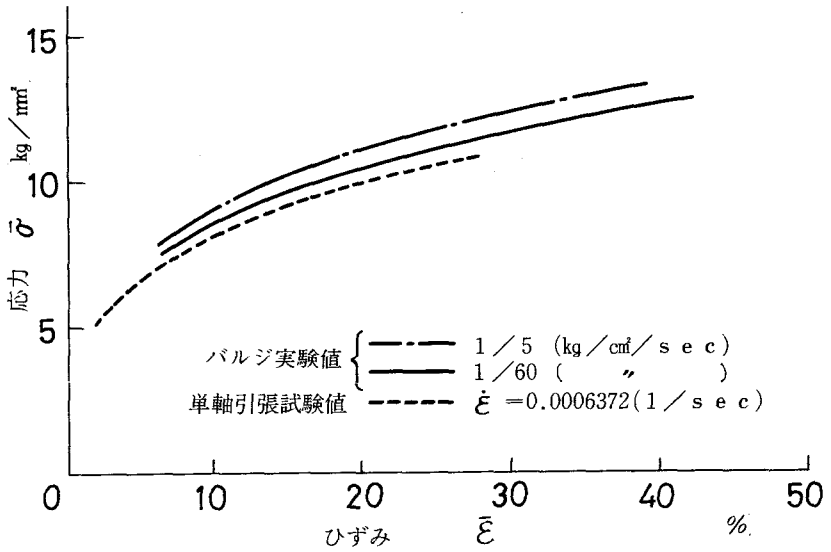


図７－１１　応力―ひずみ関係（準静的）

従来、材料のひずみ速度依存の特性値は単軸試験より求めていたが、本液圧バルジ試験のように、くびれの生じ難い２軸応力状態でのひずみ速度依存性の検討も材料試験の一方法として取り入れていく必要があると考える。

衝撃的な圧力に対する応答の測定法としても本方法は有効と思われ、今後、映像技術の進歩に伴い応用部門を広めるものと思われる。

以上に示した解析法によつて得た応力およびひずみは、４－２および５－２節に示した。

7－4　非軸対称薄板のひずみ解析

対数ひずみは、ひずみの主軸が材料に対して回転しない場合には合理的なものであるが、主軸の回転が生じる非軸対称薄板の大変形大ひずみの場合は一般には使用できない。ただし、この場合でも、ひずみ主軸の回転しない対称軸上では対数ひずみを用いることができる。その値は、7－3節に示した方法により求めることができ、結果は4－3節に示した。

対称軸を除く部分では、ひずみの主軸が回転するが、その場合には、ひずみ増分を加算することができる面埋込み座標におけるGreenのひずみ増分をつぎのようにして求める。

格子によつて区切られた三角形膜有限要素（図3－1参照）を考え、この要素内では、曲率は零、ひずみは一定であると仮定する。

式（3－2）の変位関数 ψ_N を導入することで、要素内の増分変位場 $\Delta\mathbf{u}$ を格子点（節点N）の増分変位 Δu_N^k の線形関数で表し、Greenのひずみ増分 $\Delta\gamma_{\alpha\beta}$ を求める。

$$\Delta\mathbf{u} = \Delta u^{\alpha}\,\mathbf{a}_{\alpha} + \Delta u^{3}\lambda\,\mathbf{a}_{3} = \Delta U^{s}\mathbf{e}_{s} \qquad (7\text{-}8)$$

$$\Delta u^{s} = \psi^{N}\,\Delta u_N^{s} \qquad (N=1,2,3) \qquad (7\text{-}9)$$

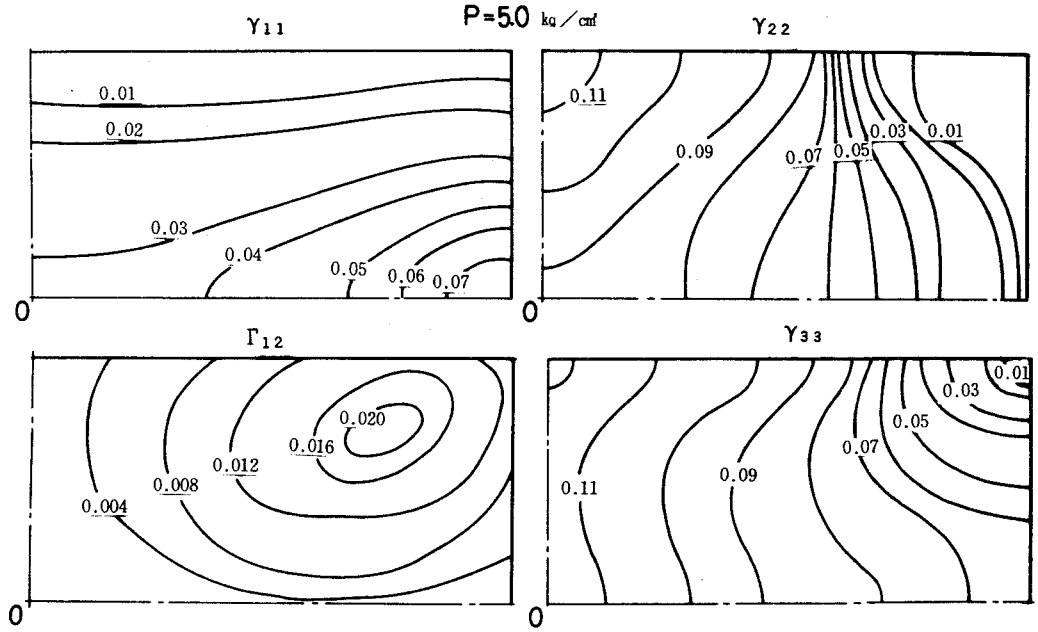
$$\begin{aligned}\Delta\gamma_{\alpha\beta} &= \left\{(\beta_{\alpha}^{N}a_{\nu\beta}+\beta_{\beta}^{N}a_{\alpha\nu})\Delta u_N^{\nu}+\beta_{\alpha}^{N}\beta_{\beta}^{M}a_{\lambda\nu}\Delta u_N^{\lambda}\Delta u_M^{\nu}\right\}/2\\ &= \left\{(\beta_{\alpha}^{N}a_{\nu\beta}+\beta_{\beta}^{N}a_{\alpha\nu})\Delta U_N^{s}\bar{\Omega}_s^{\nu}+\beta_{\alpha}^{N}\beta_{\beta}^{M}a_{\lambda\nu}\bar{\Omega}_k^{\lambda}\bar{\Omega}_s^{\nu}\Delta U_N^{k}\Delta U_M^{s}\right\}/2\end{aligned} \qquad (7\text{-}10)$$

ただし、$\mathbf{e}_k = \bar{\Omega}_k^{s}\mathbf{a}_s$ の関係がある。$\mathbf{a}_s$ は増分変形前の状態における要素の基本ベクトルであり一定値となる。$\bar{\Omega}_k^{s}$ は固定直交デカルト座標系 $\mathbf{e}_k$ との座標変換係数で既知量である。

モアレトポグラフィ法と格子法の併用により求まるのは直交デカルト座標における節点の増分変位 ΔU_N^k である。これを、式（７－１０）に代入することによつてGreenのひずみ増分 $\Delta\gamma_{\alpha\beta}$ が求まる。Greenの全ひずみ $\gamma_{\alpha\beta}$ はひずみ増分 $\Delta\gamma_{\alpha\beta}$ の加算により求まり、板厚方向ひずみ γ_{33} は体積一定の条件より決定される。

例として、長方形板のひずみ分布を示す。初期状態において長方形板の中央面に沿つて長辺方向に θ^1 ，短辺方向に θ^2 ，中央面に垂直方向に θ^3 の各座標を埋込む。これらは、変形とともに変化する面埋込み座標を形成し、Greenのひずみ成分はこの座標の計量テンソルの変化より求められる。（式（１－２１）参照）

図７－１２に、液圧 5.0 kg/cm² の時の 1/4 長方形板領域の各ひずみ成分の分布を示す。



7－5　結　言

本章では、有限要素法による薄板の大変形問題の解析結果の妥当性を検討するために行つた実験のひずみ、応力解析を目的とするモアレトポグラフイ法と格子法を併用した測定法を示した。

円板の応力、ひずみ測定では、ダイヤルゲージによる測定法および単軸試験の結果との比較を行い、本手法の有効性を確認した。

非軸対称薄板の変形に対しては、3－2節に示した三角形要素に対する変位関数を用いて格子で区切られた領域の増分変位場を決定し、Greenのひずみ増分を求めた。

本測定法は、装置および原理が比較的簡単であるうえに、非接触であるために、ダイヤルゲージなどを用いる方法と異なり測定圧の影響が入らないという長所を有しており、瞬間の薄板の変形全体を測定するためには有効であり、その精度も十分であると考える。

また、従来のモアレトポグラフイ法では点光源有限遠視点が多く用いられているが、基準となる絶対的な位置が把握できない場合は高さの算定が困難となり精度が落ちる。本論文で用いた平行光線無限遠視点では、等標高差の等高線が得られるために、その問題はなく、形状の測定には有利と考える。

今後は、得られたモアレじまの解析システムを改善して、読取りの際の中間誤差をなくすことが必要と思われる。

結　　論

本論文においては、大ひずみ大変形を受ける薄板の非弾性問題を解析するための膜体近似を用いた増分形の有限要素関係式を導出し、円形，正方形，長方形、およびだ円形の薄板の静的，準静的、および動的な液圧バルジ変形を解析するとともに、その結果と従来から得られている結果およびモアレトポグラフイ法と格子法による実験結果との比較を行つた。
研究結果の考察、検討などは各章末において述べたとおりであるがここでは、それらを総括する。

第１章においては、有限要素関係式の定式化の基礎式となる膜体の仮想仕事の原理の式を導出した。

膜体の運動学的および力学的諸関係式の定式化には、面埋込み座標系を用いている。この座標系は、物体の変形に伴う物体点の追跡に都合が良く、また物体表示法と運動やつり合い条件の記述が簡単になるという特徴を兼ね備えている。そのため、構成関係式が変形履歴の影響を受ける材料の大ひずみ大変形問題の解析には都合が良い。

ここで導出した増分形の諸関係式は、有限要素関係式の定式化のみならず、膜体の初期値、境界値問題を解析するための基礎式として利用することができるものである。

第２章においては、弾塑性体，超塑性体，クリープ変形を伴う弾塑性体、および弾／粘塑性体により作られた膜体に対する、埋込み

座標表示による増分形の構成関係式を導出した。

弾塑性体に対する構成関係式は、Misesの塑性ポテンシヤルと流れ法則を基礎として導いた。非弾性変形のひずみ速度依存性を考慮するためには、定常クリープ変形を扱う場合に用いられるNorton法則を一般化する方法と、Perzynaの提案になる過剰応力とひずみ速度を関係させる方法とを採用して、構成関係式を求めた。なお、応力およびひずみの増分は、構成関係式の客観性に対する要請と第1章で導出した運動学的および力学的諸量とのむすびつきを考慮して、真応力のJaumannの増分とGreenのひずみ増分を用いて表現した。

第3章においては、第1章の増分形の仮想仕事の原理の式と第2章の材料構成関係式を用いて、増分形の有限要素関係式を導出した。

有限要素のモデルとしては、膜体の任意の変形解析を目的とする三角形要素および軸対称変形解析を目的とする円輪板要素を用いた。変位関数にLagrange の内そう関数を用いて、弾塑性，超塑性（弾塑性クリープ）、および弾／粘塑性材料に対して、各々有限要素の運動方程式を導出し、膜体全体の運動方程式を求める方法、および時間軸方向の積分の方法について論じた。

第4章においては、弾塑性膜体の増分形有限要素法を用いて、円板、正方形板、長方形板、およびだ円板の液圧バルジ変形の解析を行つた。

円板の場合は、円輪板要素を用いて解析を行い、従来から得られている結果およびアルミニウム円板の実験結果との比較から、本手法の解析が十分精度良い解を与えることを示した。また、有限要素

による分割と解の精度の検討のために、三角形要素を用いた解析結果と円輪板要素を用いた解析結果との比較を行つた。

正方形板、長方形板、およびだ円板の場合は、三角形要素を用いたが、井関らの実験結果および著者らのアルミニウム板の実験結果と本有限要素法による解析結果は良好な一致を示した。

第5章においては、弾／粘塑性および超塑性膜体の有限要素法により、薄肉円板の準静的大変形解析を行つた。

弾／粘塑性モデルを用いて行つた数種の液圧負荷速度によるアルミニウム円板の液圧バルジ変形の解析では、実験結果との良好な一致を得た。そこでは、負荷速度が大きい程、変形、ひずみ量は小さく、応力は大きいという材料のひずみ速度依存の性質が確認された。

いつぽう、Zn－22A1合金を想定した材料特性を用いた超塑性円板の変形解析では、従来から得られている実験および近似解析結果との定性的な一致を得た。そこでは、超塑性現象を特性づけるm値に関して、その値が大きい程（$m > 0.5$）円板全体にわたつてなめらかなひずみ分布を生じて、球に近い形に変形し、小さい場合は、ひずみの中心部への集中が顕著となり、くびれが発生しやすく良好な成形性が得られ難いことなどの点で、材料特性と成形性との関連が解明された。

第6章においては、弾／粘塑性膜体の有限要素法により、ステップ状衝撃圧力が加わる場合の薄肉円板の動的大変形応答の解析を行つた。

静的な変形に比べ、板中央部が大きな変形を受けること、この傾

向は立上り時間が短い程顕著になること、いつぽう、粘性パラメータγが小さい程、変形量は小さく、中心部のひずみ集中も小さいが逆に応力の値は大きく、中心部の集中も顕著であることが示された。

この解析により、従来から衝撃バルジ加工過程に関する実験および定性的理論解析によつて指摘されて来た変形挙動の一側面が解明された。

第7章においては、有限要素法による薄板の大変形問題の解析と比較するために行つた実験の測定法について述べ、円板および非軸対称薄板の液圧バルジ変形の応力、ひずみ解析結果を示した。

測定は、モアレトポグラフイ法と格子法を併用して行つた。本方法は、装置および原理が比較的簡単であるうえに非接触であるために、ダイヤルゲージなどを用いる方法と異なり測定圧の影響が入らず、その瞬間の薄板の変形全体を測定できる長所を有している。ダイヤルゲージなどによる測定結果との比較により、精度的には十分であることが示された。

以上、本研究によつて、非弾性挙動を解析できるような膜体の有限要素関係式を定式化し、これにより薄板の静的および動的な大ひずみ大変形問題を、十分精度よく解くことができることを示した。

今後は、材料科学的な取組みにより、材料の破壊現象が解明され、破壊のクライテリオンが確立されれば、本手法は、構造物の大変破壊や塑性加工における欠陥発生の解析に対して十分応用できるものと考える。

さらに、本解法の適用によつて、非弾性体の構成関係式を決定するために行う材料試験中の変形を解明することによつて、現在、暗

中模索の状態である材料の構成関係の定式化に対して、一つの有力な手法となるものと考える。

謝　　辞

終りに臨み、研究を遂行するにあたつて、終始懇切なるご指導と激励を賜つた、浜田実教授および北川浩助教授に謹んで深甚の感謝をささげます。

また、種々有益なるご助言を賜つた上田幸雄教授、大路清嗣教授菊川真教授、中川憲治教授、理論解析および実験において御助力を賜つた熊本大学竹園茂男教授および神戸大学冨田佳宏助教授、実験に際してご援助をいただいた井上豊助手、山口修氏、東京工業大学井関日出男博士、熊本大学山口敏彦氏、原敏郎氏、岩男栄一氏に併せて厚く感謝致します。

参 考 文 献

1. D.L.Holt , Int.J.Mech.Sci., 12(1970) , 491
2. G.C.Cornfield & R.H.Johnson,Int.J.Mech.Sci.,12(1970),479
3. F.Javane , Int.J.Mech.Sci., 10(1968) , 403
4 E.E.Underwood , J.Metals , 14(1962),914
5. J.Hedworth & J.M.Stowell , J.Mater.Sci., 6(1971) , 1061
6. G.C.W.Clemas,et al.,Int.J.Mech.Sci., 17(1975) , 711
7. 西村，宮川， 機誌 ,75-639(1972-4) , 614
8. 沢田 , 塑性と加工 ,16-177(1975-10) , 908
9. J.Hopkinson,Collected Scientific Paper,Vol.II,(1872),316
10. P.Ludwik , Physik.Z., 10(1909) , 411
11. J.S.Rinehart & J.Pearson,Explosive Working of Metals , (1963) , Pergamon Press
12. W.Johnson & R.Sowerby,Proc.Instn.Mech.Engrs.,179(1964-1965), 197
13. G.E.Hudson , J.Appl.Phys., 22(1951) , 1
14. 清田， 塑性と加工 ,3-22(1962-11) , 767
15. 中桐， 生産研究 ,28(1976) , 23
16. 岸田ほか２名，塑性と加工 ,17-180(1976-1),61
17. K.J.Bathe,et al.,Int.J.Num.Meth.Engng.,9-2(1975),353
18. R.P.Goel & L.E.Malvern,J.Appl.Mech.,37(1970),1100

19. H.Lippmann,Int.J.Mech.Sci., 16-5(1974) , 297

20. A.E.Green & W.Zerna,Theoretical Elasticity,(1968),Oxford

21. 富田，弾塑性問題に対する大ひずみ大変形の有限要素法とその応用に関する研究，大阪大学学位論文（1972）

22. A.C.Eringen,Nonlinear Theory of Continuum Media, (1962),McGraw-Hill

23. C.Truesdell & W.Noll,The Nonlinear Field Theories of Mechanics, Handbuch der Physik(Ed. S.Flügge),III/3,(1965),Springer Verlag

24. C.Truesdell & R.A.Toupin,The Classical Field Theories, Handbuch der Physik(Ed. S.Flügge),III/1,(1960),226-881, Springer Verlag

25. L.E.Malvern,Introduction to Mechanics of a Continuous Medium, (1969),Prentice-Hall Inc.

26. Y.C.Fung,Foundations of Solid Mechanics,(1965),Prentice-Hall Inc.

27. R.Hill,The Mathematical Theory of Plasticity,(1950), Clarendon Press

28. W.Prager,Introduction to Mechanics of Continua,(1960),Ginn

29. F.K.G.Odqvist & J.Hult , Kriechfestigkeit Metallischer Werkstoffe , (1962) , Springer Verlag

30. F.H.Norton,Creep of Steel at High Temperatures,(1929) , McGraw-Hill

31. N.Cristescu,Dynamic Plasticity,(1967),North Holland Pub.Co.

32. P.M.Naghdi,Foundations of Elastic Shell Theory,(1963),
North Holland Pub.Co.

33. P.M.Naghdi,The Theory of Shells and Plates ,
Handbuch der Physik, VI a/2,(1972),423-633,Springer Verlag

34. O.C.Zienkiewitz,The Finite Element Method in Engineering
Science , (1971) , Mcgraw-Hill

35. J.T.Oden , Finite Elements of Nonlinear Continua ,
(1972) , Pergamon Press

36. K.Washizu,Variational Method in Elasticity and Plasticity,
(1968),Pergamon Press

37. H.D.Hibbit,P.V.Marcal & J.R.Rice,Int.J.Solids.Struct.,
6(1970),1069

38. S.Yaghmai & E.P.Popov,Int.J.Solids.Struct.,7(1971),1375

39. M.Kleiber,Int.J.Engng.Sci., 13(1975) , 513

40. 山田，横内， 日本鋼構造協会第５回研究集会，マトリクス構造
解析法研究発表論文集（昭４６－６），２７４

41. 高橋，竹山 ， 機論 ,36-281(1970-1) , 40

42. 進藤ほか２名 ， 機論 ,37-298(1971-6),1075

43. 井関ほか２名 ， 機論 ,40-330(1974-2),372

44. 井関ほか２名 ， 機論 ,42-359(1976-7),2042

45. M.Gotoh , Int.J.Num.Meth.Engng., 8-4(1974-10),731

46. H.Abe , Int.J.Engng.Sci., 13(1975) , 1003

47. Y.Seguchi, et al.,Mem.Facl.of Engng,Kobe Univ.,17(1971-3),51

48. 北川，富田　，　機論　　,40-331(1974-3) , 663

49. 北川ほか２名 ，　機論　　,38-307(1972-3) , 479

50. 北川，富田　，　塑性と加工　,14-153(1973-10) , 788

51. H.Kitagawa, et al., Ing.-Arch., 41-3(1972-4) , 213

52. H.Kitagawa & Y.Tomita,Proc.21st Japan Nat.Congr.Appl.Mech., (1973) , 243

53. H.Kitagawa, et al., Technology Reports of The Osaka Univ., , 22-1080(1972) , 675

54. H.Kitagawa & Y.Tomita , Z.AMM , 52(1972) , 183

55. R.Hill , J.Mech.& Phys.Solids , 6(1958) , 236

56. E.H.Lee , J.Appl.Mech.,36(1969) , 1

57. B.Budiansky , Trans.ASME , Ser.E ,26(1959) , 259

58. L.E.Malvern , J.Appl.Mech.,18(1951) , 203

59. P.Perzyna,Advances in Appl.Mech.,9(1966),243,Academic Press

60. O.C.Zienkiewitz, et al.,Nucl.Engng.& Des.,28(1974),278

61. O.C.Zienkiewitz & I.C.Cormeau,Int.J.Num.Meth.Engng., 8(1974) , 821

62. S.Nagaragan & E.P.Popov,Int.J.Solids.Struct.,11(1975),1

63. I.C.Cormeau,Int.J.Num.Meth.Engng., 9(1975)109

64. A.J.Durelli & V.J.Parks , Moiré Analysis of Strain , (1970) , Prentice Hall Inc.

65. H.Takasaki , Appl.Opt., 9-6(1970) , 1467

66. H.Takasaki , Appl.Opt., 12-4(1973) , 845

67. N.M.Newmark , J.Eng.Mech.Div.,ASCE,85(1959),67

68. S.P.Chan, et al.,J.Roy.Aero.Soc., 66(1962) , 457

69. 河島 , 動的応答解析 ,(1972) , 培風館

70. 西村 , 宮川 , 塑性と加工 ,14-144(1973-1) , 3

関係論文

1. 北川，仲町，冨田，山口
薄板の大変形問題の有限要素法による弾塑性解析
（第１報　円板の大変形問題の膜理論による解析と実験）
日本機械学会論文集　43－366（昭52－2）470～478

2. 北川，仲町，冨田
薄板の大変形問題の有限要素法による弾塑性解析
（第２報　非軸対称薄板の大変形問題の膜理論による解析と実験）
日本機械学会論文集　44－379（昭53－3）874～881

3. 仲町，北川
薄板の大変形問題の有限要素法による弾塑性解析
（第３報　ひずみ速度依存性を考慮した円板の大変形動的応答解析）
日本機械学会論文集　45－394（昭54－6）

4. H。Kitagawa，E。NaKamachi，Y。Tomita
Static and Dynamic Ana1yis of Large Deflection of E1astic-P1astic Thin P1ate
Proceedings of the 6th North American Meta1 WorKing Conference（1978－4）236～243

5. 北川，仲町，竹園
モアレトポグラフイ法と格子法による薄板の液圧バルジ試験の応力、ひずみ解析
日本機械学会講演論文集　760－12（昭51－10）261～263

6. 竹園，仲町，山口
大ひずみ大変形を受ける薄い円板の弾／粘塑性解析
日本機械学会講演論文集　778－1（昭52－3）25～27

7. 竹園，仲町，山口
内圧を受ける薄い弾／粘塑性円板の大変形実験
日本機械学会講演論文集　788－2（昭53－5）7～9

8. 仲町，北川，冨田
薄板の大変形問題の有限要素法による弾塑性解析
（第4報　超塑性変形解析）
日本機械学会講演論文集　780－12（昭53－10）128～130