



Title	Leaf as a Poincaré convex domain associated with an endomorphism on a real inner product space
Author(s)	小川, 裕之
Citation	大阪大学, 2025, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/105278
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

論文内容の要旨

氏 名 (小 川 裕 之)

論文題名

Leaf as a Poincaré convex domain associated with an endomorphism on a real inner product space
(リーフ：実内積空間上の自己準同型写像に伴うポアンカレ凸領域)

論文内容の要旨

本論文において、実内積空間上の自己準同型写像に対して複素平面内のある領域を与え、その領域に関する構造定理を導出する。この領域の特徴的な形からleaf（葉）と名付けた。実内積空間上の自己準同型写像 ϕ のleafは、単位ベクトル v に対する複素数 $|\phi(v)|\exp(i\theta)$ の全体として定義する。ただし、 $|\phi(v)|$ は $\phi(v)$ のノルム、 i は虚数単位、 θ は v と $\phi(v)$ の交角とする。定義より、Leafは弧状連結な有界閉集合で、複素上半平面の閉包（虚部が非負の複素数の全体）に含まれ、Leafに属する元の絶対値の最大値は ϕ の作用素ノルムに等しい。さらに、Leafと実軸の交点集合は実固有値の全体に一致する。実内積空間の次元が2以下のとき、leafは1点集合、円、または実軸で折り曲げた円のいずれかである。実内積空間の次元が3以上の場合、leafの形はより複雑になる。次の3つの構造定理が成り立つ。

- 構造定理 A 『Leafはポアンカレ凸領域である』
- 構造定理 B 『Leafは虚部が非負の固有値を全て含む』
- 構造定理 C 『正規自己準同型写像のleafは虚部が非負の全ての固有値を含む最小のポアンカレ凸領域である』

自己準同型写像の性質を図形的に可視化するものとして、数域（numerical range）がある。ヒルベルト空間上の有界線形作用 ϕ に対して、数域は $\phi(v) \cdot v$ の像の閉包として定義される。数域は100年以上にわたり、多くの研究が行われてきた。数域研究の基礎となるのが、次の基本定理である。

- 基本定理 1（Toeplitz-Hausdorff）『数域はユークリッド計量に関して凸領域である』
- 基本定理 2（Wintner）『数域はspectrumを含む』
- 基本定理 3 『正規線形作用素の数域は、spectrumを含む最小の凸領域である』
- 基本定理 4 『数域の直径 $w(\phi)$ （数域に属する元の絶対値の最大値）と作用素ノルム $|\phi|$ に関して、 $w(\phi) \leq |\phi| \leq 2w(\phi)$ が成り立つ』

Leafの構造定理は、数域の基本定理に対応する形で構成されている。数域の基本定理4に対応するleafの性質は、より精密な形で成り立ち、先に述べたようにleafの定義から直ちに導かれる。数域の基本定理が数域研究の基礎であることと同様に、leafの構造定理はleaf研究の基礎となる。

Leafと数域の相違点は、次の二点に集約される。第一に、leafが実内積空間においてのみ定義されるのに対し、数域は主にエルミート内積空間において定義される。第二に、leafの凸性はポアンカレ計量に基づくのに対し、数域の凸性はユークリッド計量に基づいている。

実内積空間上の自己準同型写像において、数域とleafを比較する。数域の定義における $\phi(v) \cdot v$ は、leafの定義における $|\phi(v)|\exp(i\theta)$ の実部に等しいので、この場合の数域はleafを実軸へ射影した像で、実軸上の線分である。係数体を複素数体に拡大して、エルミート内積空間上の自己準同型写像としての数域を考えても、複素平面上の凸領域であるから、実軸との共通部分は線分になる。

ここで、実固有値に注目する。数域において、実固有値は領域の内部に含まれるため、図形としての数域から個々の実固有値を識別することは困難である。一方、leafにおいては、実軸との交点として個々の実固有値が明示的に現れるため、図形から直接的にその情報を得ることができる。このように、数域とleafにおいて、図形を通して得られる情報量に明確な差異が存在する。

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏 名 (小 川 裕 之)			
	(職)	氏 名	
論文審査担当者	主 査	教授	中村 博昭
	副 査	教授	渡部 隆夫
	副 査	教授	金 英子
	副 査	准教授	森山 知則

論文審査の結果の要旨

本論文は、実内積空間の線形変換に対して、著者自身によりリーフ(leaf)と名付けられた複素上半平面の閉包に含まれる葉状の領域を定義し、その領域に関するポアンカレ凸性等の基本的な性質を明らかにしている。複素計量空間の線形変換に関しては、数域(numerical range)と呼ばれる複素平面のユークリッド凸領域が、単位球面上のベクトルとその変換像とのエルミート内積全体の集合として定義される。数域に関しては歴史的に、固有値集合の特性を反映する重要な領域として、Toeplitz や Hausdorff などの著名な数学者から今日の研究者に至るまで 100 年以上にわたり様々な性質が研究されてきた経緯がある。小川裕之氏のリーフは、実内積空間の線形変換に限定する代わりに、ベクトルの実内積だけでなく変換角度を反映する虚軸方向の成分も加味した領域として定義される。リーフの実軸への正射影は、数域と実軸との共通部分として与えられる区間と一致しており、リーフはその区間から上方向に伸びる帯に含まれる葉状の弧状連結な有界閉集合として与えられる。

数域に関しては一連の古典的な基本性質（凸性、固有値の包含、正規変換の場合に固有値集合の凸閉包になる、作用素ノルムの評価）が、Toeplitz, Hausdorff, Wintner 等により示されていた。本論文の主要な結果は、数域の場合のユークリッド計量をリーフの場合のポアンカレ計量に置き換えることにより、リーフに対する一連の基本定理を確立したことである。

数域と比較してリーフ不変量の優れた点としては、リーフと実軸との共有点が実固有値の集合と完全に一致することをはじめ、線形変換の代数的性質が精緻に反映される特長が挙げられ、今後の幅広い分野での応用が期待される。実際、最適制御理論などの工学分野では、数年前から Scaled Relative Graph (SRG)と呼ばれるリーフと類似の図形が導入され応用研究が進められている。小川氏のリーフは、SRG とは独立の動機から体系的に導入され、リーフのポアンカレ凸性の証明に独自の手法が使われている点を含め、既存の文献に見出すことのできない知見に及んでいる。また本論文において展開されている平明な論証は、小川裕之氏の長年にわたる研究および教育実践において培われた深い洞察力を示しており、学術的に意義深い価値のある成果であるといえる。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。