



Title	Study on toric degenerations for Grassmannians
Author(s)	小脇, 修和
Citation	大阪大学, 2026, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/105509
rights	
Note	やむを得ない事由があると学位審査研究科が承認したため、全文に代えてその内容の要約を公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

論文内容の要旨

氏 名 (小 脇 修 和)	
論文題名	Study on toric degenerations for Grassmannians (グラスマン多様体のトーリック退化に関する研究)
論文内容の要旨 グラスマン多様体は射影空間の一般化であり、射影多様体の最も基本的な例として古くから研究されている。近年では正値幾何学などにより素粒子物理学などとの関係も指摘されており、その重要性は未だ色褪せてはいない。射影多様体などの代数多様体の研究はその座標環を通じて代数的に研究することが一つの方法であるが、一般的な剰余環の研究は極めて困難である。そこで、イニシャル代数という、単項式順序や重みによる順序を導入して、多項式環を割るイデアルを単項式イデアルやトーリックイデアルといった扱いやすいものに落とし込む手法が研究されている。イニシャル代数がCohen-Macaulay性や正規性等の良い性質を持てば、元の座標環も同じ性質を持つことが知られている。しかし、元の座標環がこれらの良い性質を持っても、イニシャル代数にそれが遺伝するとは限らず、多くの良いイニシャル代数を見つけることが求められている。 それを踏まえ、申請者はグラスマン多様体の可能な限り多くのトーリック退化を得ること、つまりは、定義イデアルに順序を入れてトーリックイデアルに落とし込むことを目的に研究を行っている。グラスマン多様体のトーリック退化の研究には様々な手法があるが、申請者はコヒーレントマッピングフィールドという、行列により引き起こされるような順序の導入によるトーリック退化を行っている。この順序により、グラスマン多様体の定義イデアルであるブリュッカイデアルのイニシャルイデアルがトーリックイデアルになっているかを判定するにはブリュッカイデアルがグラスマン多様体の座標環であるブリュッカイ代数のSAGBI基底となっていることを確かめれば十分である。SAGBI基底はイデアルでのグレブナー基底の部分代数版である。 しかし、SAGBI基底の判定はそれほど簡単ではない。グレブナー基底であれば、有限時間で求めるアルゴリズムが存在するが、SAGBI基底は有限のものが存在するとは限らない。それゆえ、あるコヒーレントマッピングフィールドが与えられたとき、SAGBI基底の判定を行うことなくトーリック退化が為されるかの判定を行う手法が求められる。応募者はコヒーレントマッピングフィールドに対応するトロピカル超平面配置の情報からこれを判定する十分条件を得た。 さらに、申請者はこの分野で長年研究されているブロックダイアゴナルマッピングフィールドを拡張し、そのクラスについてほとんどの場合で結果を得た。 また、トーリック環であることが知られているグラフに対応する環であるエッジ環についてGorensteinの一般化の一つであるpseudo-Gorensteinとなる条件をいくつか発見し、特に二部グラフに対応するエッジ環については完全に特徴づけた。	

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏 名 (小 脇 修 和)			
	(職)	氏 名	
論文審査担当者	主 査	准教授	東谷 章弘
	副 査	教授	杉山 由恵
	副 査	教授	降旗 大介
	副 査	准教授	藤田 直樹 (熊本大学)
論文審査の結果の要旨 小脇修和氏の論文は、グラスマン多様体のトーリック退化に関する研究を主題としている。特に、グラスマン多様体の斉次座標環であるPlücker代数に対してSAGBI基底を構成することにより得られる、代数的観点からのトーリック退化の構成に焦点を当てている。本論文では、以下の3つのトピックに関する研究成果がまとめられている。 (1) ブロックダイアゴナルマッチングフィールドがトーリック退化を与える条件 (2) トロピカル超平面配置と組合せ論的変異を用いたトーリック退化の構成 (3) 有限グラフに付随するトーリック環のpseudo Gorenstein性およびalmost Gorenstein性 まず (1) について述べる。多項式環の有限生成部分代数の生成系がSAGBI基底をなすかどうかは、選択する単項式順序に大きく依存する。Plücker代数の文脈では、単項式順序はコヒーレントマッチングフィールドと呼ばれる対象に対応している。本論文において小脇氏は、コヒーレントマッチングフィールドの一種であるブロックダイアゴナルマッチングフィールドに着目し、それがSAGBI基底を与えるための条件を詳細に解析した。Plücker代数に対する新たなSAGBI基底の構成問題は、グラスマン多様体に関する研究において重要視され、近年活発に研究されているテーマであり、本論文の結果はこの研究潮流に沿った意義深い成果である。 次に (2) では、組合せ論的変異同値性を用いてPlücker代数の生成系がSAGBI基底をなすかを判定する手法を発展させている。小脇氏は、コヒーレントマッチングフィールドに付随するトロピカル超平面配置に着目し、その構造を用いてSAGBI基底を与える十分条件を提示した。本結果は、既存の判定結果を系として含むだけでなく、より一般的な状況にも適用可能なものである。トロピカル超平面配置という新たな視点を導入することで、従来の枠組みに新しい理解をもたらしており、本研究は理論的にも高い価値を有している。 最後に (3) では、トーリック退化によって現れる対象であるトーリック環に着目している。トーリック環の代表的な例として、有限グラフに付随するエッジ環があり、可換環論において盛んに研究されてきた。小脇氏は本論文において、可換環論における重要な性質であるpseudo Gorenstein性およびalmost Gorenstein性に注目し、エッジ環がこれらの性質を満たすための条件をグラフの言葉で記述した。本結果は、エッジ環の環論的性質に対する理解を一層深化させるものであり、今後の研究展開においても重要な基礎を与える成果である。 上記の研究成果はいずれも、当該分野における研究をさらに進展させるものであり、十分に価値のあるものであると言える。よって、本論文は博士 (理学) の学位論文として価値のあるものと認める。			