| | |
|---|---|
| Title | NUMBER OF SYLOW SUBGROUPS AND p-NILPOTENCE OF FINITE GROUPS |
| Author(s) | 千吉良, 直紀 |
| Citation | 大阪大学, 1998, 博士論文 |
| Version Type | VoR |
| URL | https://doi.org/10.11501/3144226 |
| rights | |
| Note | |

| | |
|---|---|
| 氏　　　　　名 | 千吉良（ちぎら）　直（なお）　紀（き） |
| 博士の専攻分野の名称 | 博　士（理　学） |
| 学　位　記　番　号 | 第　１３９９４　号 |
| 学位授与年月日 | 平成10年3月25日 |
| 学位授与の要件 | 学位規則第4条第2項該当 |
| 学　位　論　文　名 | NUMBER OF SYLOW SUBGROUPS AND p-NILPOTENCE OF FINITE GROUPS<br>（シロー群の個数とｐべき零性） |
| 論　文　審　査　委　員 | （主査）<br>教　授　川中　宣明<br>（副査）<br>教　授　難波　　誠　　教　授　日比　孝之　　教　授　山本　芳彦<br>助教授　宇野　勝博 |


## 論　文　内　容　の　要　旨

$G$を有限群とし$\pi(G)$を群$G$の位数を割る素数全体の集合とする。また素数$r$に対して$\mathrm{n}(G,r)$で$G$のシロー$r$部分群の個数を表し，これをシロー$r$数（または単にシロー数）と呼ぶ。

素数$p$に対して有限群$G$が$p$べき零であるとはシロー$p$部分群$P$に対して$\mathrm{G}=NP$, $N\cap P=1$を満たす正規部分群Nが存在することをいう。有限群が$p$べき零であるか否かということは有限群の構造を調べる上で大変重要であり基本的な概念である。$p$べき零性を用いてBurnsideが示した有限単純群のシロー2部分群は巡回群でないことの証明などは良い例である。またFrobeniusやThompsonなどにより有限群がpべき零であるための必要十分条件が数多く知られている。

シロー数と群の$p$べき零性に関してHuppertは次のような予想をした。

**Huppert予想**(Acta.Sci.Math.22(1961)). 有限群$G$が$p$べき零であるための必要十分条件はすべての$r\in\pi(G)$に対して$(\mathrm{p},\mathrm{n}(G,\mathrm{r}))=1$が成り立ち，かつすべての$r\in\pi(G)$に対して$N_G(\mathrm{R})$（ここでRはシロー$r$部分群）が$p$べき零であることである。

これに対してZhang(J.Algebra 176(1995))は「有限群$G$が$p$べき零であるための必要十分条件はすべての$r\in\pi(G)$に対して$(p,\mathrm{n}(G,r))=1$が成り立つことである」と主張し，これからHuppert予想が成立すると述べている。しかしながらこのZhangの主張には無限個の反例が存在することを発見した。

**定理1**. $G=\mathrm{U}(3,q)$とする。ある$p\in\pi(G)$があってすべての$r\in\pi(G)$に対して$(p,\mathrm{n}(G,r))=1$が成り立つための必要十分条件は，$p=3$であり，かつ$q$は2の$f$乗，$f$は偶数で3で割れない数，である。

この定理からU$(3,q)$以外にも多くの反例が存在することもわかる。

主定理はシロー数と$p$べき零性に関する次の定理である。

**主定理**. $G$を有限群とする。

(i)$p$を3と異なる素数とする。このとき$G$が$p$べき零であるための必要十分条件はすべての$r\in\pi(G)$に対して$(p,\mathrm{n}(G,r))=1$が成り立つことである。

(ii)$G$がその組成因子にU$(3,q)$（$q$は2の$f$乗，$f$は偶数で3で割れない）を持たないとする。このとき$G$が$p$べき零であるための必要十分条件はすべての$r\in\pi(G)$に対して$(p,n(\mathrm{G},r))=1$が成り立つことである。

この定理を用いて次のことが示される。

**系.** Huppert 予想は成立する。

シローグラフとはシロー数を割る素数全体の集合を頂点とし，2頂点の積で割れるシロー数があるとき辺で結ぶことにより定義されるグラフである。シローグラフに関して次の定理を得た。

**定理 2.** 有限単純群のシローグラフは連結である。

この定理を用いると次のことがわかる。

**定理 3.** すべての$r \in \pi(G)$についてシロー$r$数が素数べきである有限群$G$は可解群である。

## 論文審査の結果の要旨

本論文は，有限群のシロー部分群の個数についてのある算術的条件からもとの群の$p$べき零性が導かれることを示したもので，1960年代に提出されたフッパートの予想の肯定的解決を与えている。これは有限群論における顕著な寄与である。よって，本論文を博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。