OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Studies on phantom categories
Author(s)	村井, 宏志朗
Citation	大阪大学, 2026, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/105631
rights	
Note	やむを得ない事由があると学位審査研究科が承認したため、全文に代えてその内容の要約を公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

様式３

論　文　内　容　の　要　旨

氏　名　（　村井　宏志朗　）	
論文題名	Studies on phantom categories (ファントム圏についての諸研究)

論文内容の要旨

代数多様体上の連接層の導来圏は、その多様体のさまざまなホモロジー的性質を記述する三角圏である。導来圏は、代数幾何学、表現論、数理物理学などの多様な分野において重要な役割を果たしている。導来圏を研究する手法の一つに、半直交分解がある。半直交分解を用いることで、一つの三角圏を、より解析が容易な三角部分圏へと分解することができる。

ファントム圏とは、Grothendieck 群と Hochschild ホモロジーが共に消滅する三角圏のことである。ファントム圏は、擬射影平面や Barlow 曲面といった、いくつかの代数多様体上の連接層の有界導来圏において存在することが知られている。ファントム圏の存在は、Grothendieck 群や Hochschild ホモロジーといった基本的な不変量だけでは、三角圏の構造を完全には理解できないことを示唆している。ファントム圏は、通常の不変量では捉えることのできない、代数多様体の幾何学的性質に関連していると考えられている。

これに関連する例として、半直交分解の停止問題が挙げられる。この問題は、与えられた三角圏の半直交分解の長さに上限が存在するかどうかを問うものである。この問題はファントム圏の存在と関連しており、もしファントム圏が存在しなければ、半直交分解は必ず停止することが導かれる。

本論文では、第I章にて三角圏についての基本事項についてまとめた後、ファントム圏に関して以下の2つの研究を行う。

第II章：Ekedahl の擬射影平面上の例外列: 第II章では、Ekedahl の擬射影平面上での例外列を構成する。擬射影平面とは、射影平面と同じベッチ数を持つが、射影平面とは同型でない滑らかな射影曲面のことである。Ekedahl の擬射影平面は、標数2の代数閉体上で定義される擬射影平面である。本章では、Ekedahl の擬射影平面上に長さ3の例外列が存在することを示し、その例外列の右直交補圏の Grothendieck 群と Hochschild ホモロジーを計算する。その結果、複素数体上の擬射影平面の場合とは対照的に、この右直交補圏は準ファントム圏（quasi-phantom category）ではないことが判明した。これは、Grothendieck 群は有限群であるが、Hochschild ホモロジーは消滅しないような三角圏の例を与えている。この例は、複素数体上で得られた Gorchinskiy-Orlovの結果が正標数では成立しないことを示している。これを修正するため、第II.6節では、正標数における彼らの結果の修正版を定式化して証明し、それに応じて準ファントム圏の定義を修正する。

第III章：非可換射影平面におけるファントム圏の非存在: 第III章では、非常に一般な非可換射影平面がファントム圏を持たないことを示す。非可換射影平面は、3次元の二次 Artin-Schelter（AS-）正則代数上の次数付き加群の圏を、有限次元加群のなす部分圏で割った商圏として定義されるアーベル圏である。Del Pezzo 曲面、特に射影平面上の連接層の導来圏はファントム圏を持たないことが知られている。この結果は Borisov-Kemboi によって一般化され、非常に一般な位置にある有限個の点で射影平面をブローアップした多様体もファントム圏を持たないことが示されている。本研究では、Borisov-Kemboi の手法を非可換射影平面に適応させることで、非常に一般な非可換射影平面におけるファントム圏の非存在を証明する。第III章の主結果でカバーされていない非可換射影平面のその他のケースについては、第III.1節で論じる。

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　名	（　村井宏志朗　）	
	（職）	氏　名
論文審査担当者	主 査　教授	髙橋篤史
	副 査　教授	安田健彦
	副 査　教授	吉永正彦
	副 査　准教授	大川新之介

論文審査の結果の要旨

代数多様体上の連接層の導来圏やシンプレクティック多様体から定まる深谷圏など、様々な幾何学的対象から（増強）三角圏が定まる。三角圏を基本的な研究対象とするのが非可換代数幾何学であり、その研究を通して古典的な幾何学的対象の性質を解明することを一つの動機としている。一方、非自明な三角圏であってその加法的不変量が全て消えているものが phantom 圏である。その定義から phantom 圏は捉えどころが無い対象であり、非可換代数幾何学における最も不可解な研究対象の 1 つである。本論文は第 1 章で準備をした後、第 2 章、第 3 章で phantom 圏に関する研究を行っている。

第 2 章では Ekedahl によって構成された標数 2 の擬射影平面の導来圏について研究し、さらにそれを契機とした考察が展開されている。標数 0 における擬射影平面のうちの多くのものについて、導来圏に長さ 3 の例外対象列が存在し、その余剰成分として quasi-phantom 圏が得られることが予想されている。また、いくつかの場合に実際に証明されている。Quasi-phantom 圏は phantom 圏よりも少し弱い条件で定義されるが、複数のものを上手に組み合わせることで phantom 圏の例が構成できることが知られており（Gorchinskiy—Orlov）、重要な対象である。本研究では、Ekedahl の擬射影平面の導来圏に実際に長さ 3 の例外対象列を構成し、その余剰成分として得られる三角圏の K 群が 2-torsion な有限群である一方、Hochschild homology が消えていないということを証明している。一方、Gorchinskiy—Orlov の結果によれば、標数 0 においては K 群が torsion ならば自動的に Hochschild homology が消えるため、このような状況は起き得ない。これを踏まえて、申請者は正標数における quasi-phantom 圏の定義を従来のものからより自然なものに変更し、新しい定義のもとでは Gorchinskiy—Orlov の結果と同様の事実が成立することを確認した。

第 3 章では非常に一般の非可換射影平面の導来圏の admissible 部分圏として phantom 圏が含まれ得ないことを証明している。Phantom 圏は典型的に小平次元 1 以上の曲面の導来圏の admissible 部分圏として得られるため、有理曲面の導来圏に phantom 圏が含まれるか、という問題が長らく未解決であった。この方面に近年進展があり、del Pezzo 曲面には phantom 圏が含まれない一方、射影平面の 10 点以上の爆発の場合には点配置によって結論が変化することがわかった。本研究は、有理曲面の非可換変形の場合に同様の問題を考えたものであり、非可換代数曲面に対する最初の結果を与えるものである。Borisov—Kemboi の議論を非可換射影平面に通用する形に適切に焼き直すと共に、Artin—Tate—Van den Bergh による非可換射影平面上の連接層に関する基本的な結果を上手に駆使することで証明が完遂されている。本研究の手法はより一般の非可換 del Pezzo 曲面、非可換有理曲面に通用し得るものであり、続く研究が俟たれる。

以上述べてきたように、本論文は当該分野への十分な貢献を含んでおり、博士（理学）の学位論文として十分価値があるものと認める。