



Title	Well-posedness for nonlinear Schrödinger equations with quadratic derivative nonlinearities
Author(s)	赤瀬, 康平
Citation	大阪大学, 2026, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/105632
rights	
Note	やむを得ない事由があると学位審査研究科が承認したため、全文に代えてその内容の要約を公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

論 文 内 容 の 要 旨

氏 名 (赤瀬 康平)	
論文題名	Well-posedness for nonlinear Schrödinger equations with quadratic derivative nonlinearities (2次の微分型非線形項をもつ非線形シュレディンガー方程式の適切性について)
論文内容の要旨 本論文は、単独の非線形シュレディンガー方程式および非線形シュレディンガー方程式の連立系に対する初期値問題を研究したものである。また、いずれの場合も、非線形項が微分を含む2次の項であるものを考察する。 非線形項に微分を含む場合には、そこから生じる可微分性の損失を回復する必要があるが、非線形分散型方程式に備わる平滑化効果は強くない。そのため、ソボレフ空間における適切性（解の存在・一意性・初期値に関する連続依存性）は、たとえ正則性の指数が十分に大きい場合であっても明らかではない。したがって、適切性が成立する関数空間の条件と、非線形項の構造との関係を明らかにすることが興味の対象となる。微分を含む非線形項が3次以上の項のみからなる多項式の場合には、Kenig—Ponce—Vega（1993）によって、十分な正則性を課したソボレフ空間において小さな初期値に対する時間局所適切性が示されている。また、空間1次元の場合には、Pornnoppaparth(2018)によって正則性の指数の条件が改良されている。その一方で、非線形項が微分を含む2次の項である場合には、Grünrock（2000）, Christ（2003）, Hirayama（2014）, Ito—Okamoto（2026+）等によって、非線形項の構造の違いが、ソボレフ空間において適切性が成立するために必要な正則性の指数の条件に差異をもたらすことが示されている。特に、Christで扱われている非線形項については、正則性を十分に課したソボレフ空間において非適切であることが示されている。 本論文の目標は、2次の微分型非線形項をもつ非線形シュレディンガー方程式及び連立系に対し、非線形項および連立系の構造の違いが適切性に関する性質にどのように反映されるのかをより詳細に調べることである。 以下、本論文の構成および各章の概要について述べる。本論文は全三章から構成される。 第一章では、研究の背景および動機を述べるとともに、本論文の構成を述べる。 第二章では、1次元ユークリッド空間において単独の方程式を扱う。前半では、ソボレフ空間における解写像の滑らかさについて考察する。特に、正則性の指数が大きなソボレフ空間における解写像が一樣連続とならないため、2次の微分型非線形項に関する条件を導出する。証明はKoch—Tzvetkov(2005)の方法が基盤となるが、Hayashi（1993）およびHayashi—Ozawa（1992）により導入されたゲージ変換を用いて、空間X^sにおいて解を構成する議論を組み合わせる。ここで、X^sとは原始関数の有界性を付加条件として課した正則性指数sのソボレフ空間である。これにより、方程式にエネルギー構造がない場合も扱うことが可能となる。なお、原始関数の有界性はゲージ変換を施す上で必要となるが、この付加条件は、本章の方程式を考察する上である意味最適な条件であることに注意する。実際、一樣連続性の破綻を示すために構成する初期値の列は、付加条件を原始関数の有界性から（元の関数の）可積分性を保証する条件へと強めた空間において発散する。後半では、X^sにおける適切性について考察する。特に、非線形項が発散形である場合に、X^0における時間局所適切性をストリッカーツ評価を用いて示す。さらに、非線形項の係数が特定の条件を満たすとき、X^0における時間大域適切性が成立すること、ならびにH^1において時間大域的に適切であることを示す。 第三章では、d 次元ユークリッド空間において非線形シュレディンガー方程式の連立系を取り扱う。ここで、d は任意の自然数である。本章で考察する連立系は、レーザーとプラズマの相互作用に関するモデルとして、Colin—Colin（2004）により導出されたものである。本章では、連立系の非線形項に微分の損失をもつ共鳴部分が存在する一方で、エネルギー構造を有する場合を扱う。この場合には、Hirayama—Kinoshita—Okamoto（2022）によって、正則性の指数が$(d+6)/2$より大きい場合に、ソボレフ空間における時間局所適切性が示されている。本章では、Ionescu—Kenig—Tataru（2008）により導入されたフーリエ制限ノルム法を用いることで、正則性指数に関する条件を$5/2$改良できることを示す。さらに、Hirayama—Kinoshita—Okamotoに対応する修正エネルギーに追加の修正を施すことで、先行研究において仮定されていた初期値の小ささの条件を取り除けることを示す。	

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏 名 （ 赤 瀬 康 平 ）			
論文審査担当者	(職)		氏 名
	主 査	教授	片山 聡一郎
	副 査	教授	土居 伸一
	副 査	准教授	戌亥 隆恭
	副 査	准教授	水谷 治哉

論文審査の結果の要旨

非線形シュレディンガー方程式は様々な物理現象のモデル方程式としてあらわれるが、数学的にも分散型方程式の代表例として重要なものである。非線形項が未知関数の導関数にも依存する場合には微分型の非線形シュレディンガー方程式という。一般に非線形偏微分方程式の初期値問題を考えるとき、設定した関数空間で解が一意に存在し、初期値に連続に依存するとき、初期値問題はその関数空間で適切であるという。解が任意の時刻まで存在する場合は時間大域的に適切であるといい、ある時刻までの存在が保証されている場合は時間局所的に適切であるという。微分型の非線形項シュレディンガー方程式の場合、可微分性の損失がおこり、通常のエネルギー法では解の存在が示せないという困難がある。そのため可微分性の回復が必要になるが、シュレディンガー方程式の解の平滑化効果は、熱方程式などに比べて弱く、適切性は自明ではない。特に 2 次の非線形項をもつ場合は未解決問題も多く残っており、初期値問題の適切性は現在も活発に研究されている課題である、赤瀬康平氏は 2 次の微分型の非線形項をもつ非線形シュレディンガー方程式の初期値問題の時間局所適切性に取り組み、以下のよう結果を得た。

- (1) 1 次元空間における微分型シュレディンガー方程式について、初期値に対して解を対応させる解写像の滑らかさの問題を考察した。先行研究において、非線形項の係数に応じて、ソボレフ空間において時間局所適切である(したがって解写像は連続である)が、 C^2 級ではないことが知られているケースと、適切性が分かっているが、時間局所適切であったとしても解写像はやはり C^2 級ではないことが分かっているケースなどがある。赤瀬氏は、解写像の滑らかさについて、解写像が一樣連続にならないための非線形項の係数に関する条件を導き、これらの先行研究の状況では、いずれも解写像は一樣連続にはならないことを示した。結果の証明は、Hayashi 氏と Ozawa 氏らによりゲージ変換を用いて得られたソボレフ空間に原始関数の有界性も仮定して定義される関数空間における時間局所適切性を利用することにより、一樣連続性に反する 2 つの解の列を巧妙に構成することによって行っている。またこの関数空間における時間局所適切性に関する先行研究の改良や、特別な係数の場合の時間大域適切性についても論じている。
- (2) 一般の d 次元空間における非線形シュレディンガー方程式の連立系の初期値問題の時間局所適切性の問題を考察した。この連立系は Colin-Colin (2004) によりレーザーとプラズマの相互作用を記述する方程式として提唱されたものである。連立系が可微分性の損失をもつ共鳴部分をもつが、系がエネルギー構造をもつ場合を扱っている。Hirayama-Kinoshita-Okamoto (2022) らは修正エネルギーを導入することにより、正則性の指数が $(d+6)/2$ より大きいソボレフ空間における小さな初期値に対する時間局所適切性を示した。赤瀬氏は、Ionescu-Kenig-Tataru (2008)により導入されたフーリエ制限ノルム法を用いることにより、正則性の指数を先行研究よりも $5/2$ だけ改良できることを示した。合わせて先行研究における修正エネルギーを改良することにより、初期値の大きさに関する制約を取り除き、一般の大きさの初期値に対する時間局所可解性を示すことにも成功している。

以上に述べた赤瀬氏が得た結果は極めて重要なものであり、証明の技術的にも興味深く、非線形偏微分方程式の研究に資するところは大きい。よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。