OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Ambient isotopy invariants of oriented compact surfaces with boundary in the 3-sphere
Author(s)	新井, 克典
Citation	大阪大学, 2026, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/105805
rights	
Note	やむを得ない事由があると学位審査研究科が承認したため、全文に代えてその内容の要約を公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

様式３

論　文　内　容　の　要　旨

氏　名　（　新井克典　）	
論文題名	Ambient isotopy invariants of oriented compact surfaces with boundary in the 3-sphere （3次元球面内の境界付き有向コンパクト曲面の全同位不変量）

論文内容の要旨

Quandleは結び目理論におけるReidemeister変形に対応する公理をもった代数系であり、JoyceとMatveevにより独立に導入された。Quandleは結び目不変量の研究において重要な役割を果たし、現在も活発に研究されている。とくにQuandle彩色不変量は結び目図式のQuandle彩色と呼ばれる写像の個数であり、結び目群からの準同型の個数の精密化として理解される。

空間曲面は3次元球面内に埋め込まれたコンパクト曲面のことである。二つの空間曲面が同値であるとは、3次元球面内の全同位で移り合うときをいう。とくに境界付き有向空間曲面はSeifert曲面と呼ばれるものであり、その分類を行うことは結び目理論において重要な問題の一つである。Matsuzakiは、境界付き有向空間曲面を空間3価グラフの図式により表示し、それに対するReidemeister型変形を導入した。本学位論文は、このReidemeister型変形に対応する代数系を研究し、得られた結果についてまとめたものである。

一つ目の結果は、境界付き有向空間曲面のgroupoid rack彩色不変量についてである。まず、groupoid rackという代数系を導入し、境界付き有向空間曲面の図式のgroupoid rack彩色を定義した。そして境界付き有向空間曲面の図式のgroupoid rack彩色の個数が空間曲面の不変量となることを示した。この不変量はIshii-Matsuzaki-Murаoが導入した代数系であるmultiple group rackを用いた彩色不変量やSaito-Zappalaで与えられた彩色不変量の一般化と考えることができる。

二つ目の結果は、groupoid rackの普遍性についてである。境界付き有向空間曲面の図式の彩色の個数が不変量となるような代数系はgroupoid rackでなければならないことを示した。この結果は、カンドルが結び目図式の彩色に関する普遍性をもつことの類似である。

三つ目の結果は、multiple group rackの構成についてである。Ishii-Iwakiri-Jang-Oshiroにより導入されたRackのG族は集合と群Gの元ごとに定まる二項演算の族の組であり、境界付き有向空間曲面の図式のReidemeister型変形に対応する公理をもったものである。IshiiおよびIshii-Matsuzaki-Murаoは、RackのG族からそれに付随したmultiple group rackを構成する方法を与えている。また、Carter-Ishii-Saito-Tanakaにより、与えられたmultiple group rackのアーベル拡大と呼ばれる新たなmultiple group rackを与える方法も知られている。TaniguchiはrackのG族に付随するmultiple group rackのアーベル拡大であって、rackのG族に付随するmultiple group rackになり得ない例をはじめて構成した。本結果では、上記の構成法とは異なるmultiple group rackの構成法を与えた。その応用として、本結果の構成法で得られたmultiple group rackによる彩色不変量を用いて、次を満たす二つの空間曲面を区別した：境界や正則近傍は全同位であるが、どんなrackのG族に付随するmultiple group rackを用いても、その彩色不変量で区別できない。さらにここで用いたmultiple group rackがTaniguchiが与えた例とは本質的に異なることを示した。

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　名	（　新井克典　）

	（職）	氏　名
論文審査担当者	主 査　教授	鎌田 聖一
	副 査　教授	後藤 竜司
	副 査　教授	石田 政司
	副 査　准教授	馬場 伸平

論文審査の結果の要旨

3 次元球面に埋め込まれたコンパクトな曲面を空間曲面という。3 次元球面内で全同位により互いに移り合う空間曲面は同値であるとみなされる。特に、各連結成分が空でない境界を持ち、かつ曲面として有向である空間曲面は、結び目や絡み目を境界とするザイフェルト曲面の概念に一致し、結び目理論において重要な研究対象である。

以下では、各連結成分が空でない境界を持ち、それらが 2 次元円板と同相ではなく、かつ曲面として有向である空間曲面を、単に境界付き有向空間曲面と呼ぶ。

本論文は、境界付き有向空間曲面の不変量を、代数系を用いた図式の彩色によって構成することを主題としている。

境界付き有向空間曲面の表示方法として、空間 3 価グラフの平面図式を用いる方法が知られている。3 価グラフの図式を与えると、そこから境界付き有向空間曲面を構成することができ、逆に、任意の境界付き有向空間曲面は、ある 3 価グラフの図式から得られる空間曲面と同値である。このような図式表示は一意には定まらないが、Reidemeister 型変形と呼ばれるある種の局所変形を法とすると一意的に定まることが Matsuzaki により示されている。この結果に基づき、3 価グラフの図式と Reidemeister 型変形を用いた境界付き有向空間曲面の不変量の構成が、先行研究においてなされてきた。特に、Ishii-Matsuzaki-Murao による multiple group rack という代数系を用いた図式の彩色により不変量が構成されることは、重要な先行研究である。

本論文の第 3 章では、groupoid rack と呼ばれる新たな代数系を定義し、それを用いた図式の彩色数が境界付き有向空間曲面の不変量となることを示している。さらに第 4 章では逆に、代数系を用いた図式の彩色数が境界付き有向空間曲面の不変量を与えるためには、その代数系が groupoid rack の構造を持つことが必要であることを証明している。

multiple group rack（以下 MGR と略す）は groupoid rack の重要なクラスであるが、その構成は必ずしも容易ではない。既存の方法としては、rack の G 族と呼ばれる代数系から MGR を構成する方法や、与えられた MGR のアーベル拡大を用いて新たな MGR を構成する方法が知られている。

本論文の第 5 章では、新しい MGR の構成法が与えられている。これは、rack の G 族と群 G の正規部分群 N を用いる構成法であり、N がある条件を満たす場合には、この方法で得られる MGR はどのような rack の G 族からも従来の方法では構成されず、元の rack の G 族から構成される MGR のアーベル拡大にもならないという特徴を持つ。さらにその応用として、従来のよく知られた不変量では区別できなかった境界付き有向空間曲面の組が、本論文で構成された MGR の彩色数による不変量によって区別できる具体例が示されている。この例は、本論文で提案された MGR の構成法の有効性を明確に示すものであり、境界付き有向空間曲面の今後の研究において極めて有用である。

以上の理由により、本論文は博士（理学）の学位論文として十分な価値を有するものと認める。