

Title	A cluster of sets of exceptional times of linear Brownian motion
Author(s)	磯崎, 泰樹
Citation	
Issue Date	
Text Version	ETD
URL	<a href="http://hdl.handle.net/11094/1093">http://hdl.handle.net/11094/1093</a>
DOI	
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/repo/ouka/all/>

氏名	いそ 磯 ぎき 崎 やす 泰 き 樹
博士の専攻分野の名称	博 士 (理 学)
学位記番号	第 17381 号
学位授与年月日	平成14年12月27日
学位授与の要件	学位規則第4条第2項該当
学位論文名	A cluster of sets of exceptional times of linear Brownian motion (一次元ブラウン運動に関する例外的時刻のなす種々の部分集合について)
論文審査委員	(主査) 教授 小谷 眞一 (副査) 教授 松村 昭孝 教授 長井 英生 助教授 眞鍋昭治郎

### 論 文 内 容 の 要 旨

一次元ブラウン運動の軌跡の原始関数に関連して、Legall と Asparndiarov は、ランダムな例外的時刻（固定した値を取る確率がゼロであるような時刻）からなる、時間軸の部分集合を三種類定義した。彼らはその部分集合のハウスドルフ次元を調べ、二種類の部分集合については、確率1で、一定の値を取るという結果を得た。より詳しく言えば、ブラウン運動の軌跡に依存して上記の部分集合の形態は変わるが、ハウスドルフ次元だけは不変で、四分の三と二分の一だったのである。ただし、三種類の内の一種類だけは、空集合になる場合と、ハウスドルフ次元二分の一になる場合を見だし、さらに、その中間の場合が起こりうるかどうか、彼らにはわからなかった。

本論文では、ブラウン運動のある種のパラメータを含む関数に代入したものの原始関数に関連して、彼らに類似したやり方で、ランダムな部分集合の族、これはパラメータに依存している、を定義した。これら集合の典型的なハウスドルフ次元は、パラメータの変化とともに連続的に変化するという結果が得られた。この変化の範囲は、ハウスドルフ次元の取りうる値としては、網羅的である。つまり、すべての時刻からなる集合であれば次元は1となり、空集合以外で最も小さい集合、すなわち一点からなる集合は次元が0であるわけだが、本論文で定義した部分集合のハウスドルフ次元は、0から1まで変化しうる。

さらに、どのような場合に空集合が実現されるかという問題に答を与えた。この解決は、いまひとつの方向での拡張によりもたらされたものである。この方向とは、ブラウン運動の軌跡を時間積分した原始関数ではなく、ブラウン運動の局所的な変化量を、単調増加関数に代入したものを時間積分して定義されたランダムな部分集合に関する拡張である。この方向では、きわめて強力な普遍性が見られた。すなわち、ブラウン運動に限らず、負の跳躍をしない独立定常増分をもつ確率過程全体について、上記の部分集合の形態が持つ確率法則が、当該確率過程の初到達時刻全体と、同じ法則になるのである。しかも、この法則同値性は、部分集合を定義するときに使った単調増加関数によらず成り立つのである。この同値性と、既知の初到達時刻に関する事実を組み合わせると、たやすく、問題の部分集合が典型的なハウスドルフ次元を持たない場合は、空集合になるという結果が得られた。

これまでに述べた定理の証明は、ブラウン運動をパラメータ付きのある種の関数に代入して、時間積分したものに關する、初到達時刻の分布の評価に基づいている。この評価に於いては、分布の裾野が時間のべき乗のオーダーで減少しており、そのべきは、パラメータに依存して連続的に変化している。このべきの値が、まさにハウスドルフ次元として結果に現れているのである。

## 論文審査の結果の要旨

1次元ブラウン運動はランダムウォークの極限として現れる代表的な確率過程である。その道は確率1で連続ではあるが、どの点でも微分不可能なことが知られており、非常に不規則な幾何学的な性質を持っている。したがって、ブラウン運動が時間についてある性質を満たす集合を考えると、それは一般に薄い集合になる。例えば、時刻1までに原点に到達する時刻の集合を考えると、これはランダムな集合であるが、特定の時刻がこの集合に入る確率は0である。したがってこのランダムな集合のルベグ測度は0であるが、(ハウスドルフ)次元は $1/2$ であることが知られている。

申請者は、ブラウン運動を初期値にもつ1次元非粘性的な Burgers 方程式の解の研究において問題になった道の下凸包に関する除外時間の集合を、それを測る関数を一般にして考察し、既存の結果をより一般的な視点からみることに成功した。それによると測る関数が対称の場合には常に次元が $1/2$ であるが、非対称の場合には次元が $1/2$ とは異なることが分かる。

申請者は、これに至るまでにブラウン運動の加法的汎関数の最大値の分布について深い結果をえており、この申請論文の結果はそれ以前の結果を総動員して示されたものである。申請者の一連の結果はブラウン運動の道の局所的な性質について、新しい考察を加えた。

以上により、本論文は博士(理学)の学位論文として十分価値あるものと認める。