

Title	線形システムの故障診断に関する研究
Author(s)	太田, 快人
Citation	大阪大学, 1986, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/1102
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

線形システムの
故障診断に関する研究

昭和 61 年 7 月

太 田 快 人

線形システムの
故障診断に関する研究

昭和 61 年 7 月

太 田 快 人

線形システムの 故障診断に関する研究

目 次

内容梗概

第1章 緒論	1~6
第2章 線形システムの故障診断アルゴリズム	7~17
2.1. 緒言	7
2.2. システムの記述	8
2.3. 故障診断の原理・識別可能条件	9
2.4. 故障診断アルゴリズム	12
2.5. 故障同値類	15
2.6. 結言	17
第3章 システム構造を考慮に入れた 故障診断アルゴリズムの適用	18~66
3.1. 緒言	18
3.2. 定常状態にある線形システムへの適用	19
3.2.1. システム構造とその表現グラフ	20
3.2.2. 識別可能条件	21
3.2.3. 故障診断アルゴリズム	29
3.2.4. 故障同値類・単一故障を互いに識別する 観測点の設計法	31
3.3. 定常状態にあるコンパートメントシステムへの適用	36
3.3.1. コンパートメントシステムの記述・その定常状態	37
3.3.2. 代数的な識別可能条件	38
3.3.3. グラフ的な識別可能条件	42
3.4. 線形ダイナミカルシステムへの適用	52
3.4.1. システム構造とその表現グラフ	53
3.4.2. 代数的な識別可能条件	56
3.4.3. グラフ的な識別可能条件	57
3.4.4. 故障診断アルゴリズム	61
3.5. 結言	66

第4章 伝達関数の係数変化に基づいた線形ダイナミカルシステムの故障診断	67~151
4.1. 緒言	67
4.2. 検出可能条件・識別可能条件	68
4.2.1. 故障診断の原理	68
4.2.2. 代数的な検出可能条件・識別可能条件	70
4.3. 状態方程式で記述された線形ダイナミカルシステムへの適用	73
4.3.1. システムの記述	74
4.3.2. 故障診断の原理	77
4.3.3. システム構造を考慮に入れた変位多項式	81
4.3.4. 特性行列の小行列式の素因子分解とシステム表現グラフの既約成分分解	83
4.3.5. グラフ的な検出可能条件・識別可能条件	116
4.4. 動的なコンパートメントシステムへの適用	135
4.4.1. システムの記述	135
4.4.2. 故障診断の原理	136
4.4.3. グラフ的な検出可能条件・識別可能条件	139
4.4.4. 故障診断アルゴリズム	147
4.5. 結言	151
第5章 結論	152~153
謝辞	154
文献	155

内容梗概

本論文は、線形システムの故障診断について、筆者が昭和57年春から昭和61年春にかけて大阪大学大学院工学研究科後期課程に在学中、ならびに大阪大学工学部電子工学科に在職中に行った研究の成果を記述したものである。

本論文では、線形システム—工業プラントの平衡点近傍近似モデルなどに用いられる線形ダイナミカルシステム、その定常状態記述に用いられる線形代数方程式系、生体内の薬物動態の解析に用いられるコンパートメントモデル—を対象に、三つの故障診断問題—検出可能性、識別可能性、診断アルゴリズム—を考察する。この問題に対して、二種類の故障診断法を提案する。一つは、故障が発生しても正常な部分に対するシステム記述は不変であるという不変性の原理を用いた方法である。もう一つの方法は、故障が発生したときの伝達関数の係数の変化に着目する方法である。代数的な方法に加えて、システムの構造を表現したグラフを用いて、これらの三問題を解く。

第2章・第3章では、不変性の原理に基づいて、故障診断問題を考察する。第2章では、まずこの不変性について説明したあと、それを利用した故障診断の原理を述べる。つぎに、故障の検出可能性、識別可能性について代数的条件を導出するとともに、故障診断アルゴリズムを提案する。このアルゴリズムでは、さきに考察した検出可能条件、識別可能条件が本質的に重要であり、それらを用いてアルゴリズムの実行可能性と結果の正当性が示される。また、故障が高々一箇所に限定される場合、つまり単一故障の仮定のもとで互いに識別できない故障の組として故障同値類を定義し、それを用いて前述のアルゴリズムの若干の修正によりどの故障同値類内に故障があるかを判定するアルゴリズムを導く。

第3章では、第2章で展開した故障診断アルゴリズムを三種類の線形システム—線形代数方程式で記述される定常状態にある線形システム、定常状態にあ

るコンパートメントシステム、線形微分方程式で記述される状態方程式表示の線形ダイナミカルシステム^一に適用する。そのときにシステム内部のサブシステム間の結合関係（システム構造という）を用いれば、故障の識別可能なための代数的条件をシステム構造を表現するグラフを用いて、等価的なグラフ条件におきかえることができることを示す。このグラフ条件の直接的な応用として、観測位置の設計問題について一つの方法を提案する。また、このグラフ条件を用いてアルゴリズム中の一部の手続きをグラフ的な手法でおきかえることができる。

第4章では、線形ダイナミカルシステムの故障診断問題を前二章とは、異なった原理により考察する。ここで、対象とする線形ダイナミカルシステムは、線形微分方程式で記述される状態方程式表示の線形ダイナミカルシステム、線形コンパートメントシステムの二種類を考えている。ここではシステムに故障が発生したとき、伝達関数の分母多項式、分子多項式の係数は、故障に応じて決った仕方に変化するという原理を用いて、故障診断問題を考察する。第2章と同じくまず故障診断の原理を述べたあと、故障の検出可能性、識別可能性について代数的条件を導出する。次に、その代数的条件をシステム構造を表現するグラフを用いて、等価的なグラフ条件におきかえる。このことにより、故障を識別するための試験信号の入出力位置を設計することができる。

第5章は、本論文のしめくりであって、各章でのまとめを受けて、全体としての結論を述べている。

記号一覧

集合・写像

$ X $	集合 X の要素数
$X \setminus Y$	$= \{x \mid x \in X, x \notin Y\}$
${}^c X$	集合 X の補集合
$P(X)$	集合 X の巾集合
$\text{Im}(\cdot)$	値域

代数

R	実数体
C	複素数体
R^n	実数 n ベクトル
C^n	複素数 n ベクトル
$R^{m \times n}$	$m \times n$ 実数行列
A^T, x^T	転置行列, 転置ベクトル
$R[s]$	実係数多項式環
$R[X]$	実係数多変数多項式環 (X は変数の集合)
$R[X, s]$	$= R[X \cup \{s\}]$
$R[X][s]$	$R[X]$ を係数に持つ s を変数とする多項式環
$R(X)$	実係数多変数有理式体 (X は変数の集合)
$R(X)[s]$	$R(X)$ を係数に持つ s を変数とする多項式環
$R[X]/\pm 1$	同値関係 $p \equiv -p$ による $R[X]$ の剰余環 $R[X, s]/\pm 1, \dots$ も同様に定義される。
$q \mid p$	q は p を割切る。

第1章 緒論

システムに故障が発生したとき、その故障の原因を究明し、適当な対策を施して、システムを復旧させることは、重要である。例えば、工業プラントなどの場合、その故障が破壊的なものになれば、物的、人的な損害を招くし、破壊にまで至らなくても、操業不能に伴う金銭的な損害は、多大なものとなる。故障診断法の確立は、安全性、経済性、稼働性の点で、工業的に重要な問題となっている。

最近における技術の進歩は、システム理論的な考え方を故障診断法に導入する必要性と可能性をますます高めている。システムの大規模化、複雑化により系統だった故障診断法なしにシステムを運用することは、不可能になってきている。また計算機技術の進展は、これらの故障診断法を実用化させる大きな力となってきており、理論的な基盤に立脚した故障診断法の確立が望まれている。

本論文で対象としている、線形システムは、つぎのような種類の線形方程式によって記述されるものを考えている。一つは、工業プラントの平衡点近傍近似モデルなどに用いられる状態方程式で記述された線形微分方程式・中間標準形、その定常状態記述に用いられる線形代数方程式、生体内の薬物動態の解析に用いられるコンパートメントモデルである。

本論文では、つぎの三つの故障診断問題を考える。システム観測から故障が発生しているか否かを検出できるか（検出可能性）、異なった故障を見分けることができるか（識別可能性）、識別可能とすればどのような計算を実行すれば故障を特定できるか（診断アルゴリズム）の三問題である。これらの三問題をここでとりあげる理由は、つぎのように考えられる。故障の検出可能条件・識別可能条件を導くことにより、所望としている故障検出、識別が現在のシステム観測（または、システム入力とシステム観測）のもとで達成されているかどうかを決定できる。つまり、システムの観測の設計（または、入力と観測の

設計)に利用できると考えられる。もうひとつの理由は、これらの検出可能条件・識別可能条件に基づいたアルゴリズムの実行可能性を保証することができる。診断アルゴリズムを考察する理由は、観測値がえられたときに故障位置を決定する方法を与えることにある。

本論文では、上記の故障診断問題を‘システム構造’と関連づけて考察する。ここでシステム構造というのは、サブシステムが互いに結合して、システム全体のふるまいを決定しているときに、そのサブシステム間の結合のことをいう。厳密な定義は、次章で行なう。システム構造を図示したものがシステム表現グラフと呼ばれる。このグラフを用いれば、故障診断問題とは、検出可能条件、識別可能条件のグラフ条件を導くこと、グラフを有効に用いたアルゴリズムを構築すること、とすることができる。

故障診断問題にグラフを持ち込む利点としては、つぎの三点が挙げられる。
①検出可能性、識別可能性がシステムの物理的な定数に依らずシステムの結合構造のみによって決定できること、②このことから観測位置(または入力位置と観測位置)の設計方法を与えることができること、③故障診断アルゴリズムを実行するにあたって、グラフ理論で既に得られているアルゴリズムを有効に利用できること、である。

本論文では、正常時のシステムモデルが既知であると仮定する。そのとき、診断の対象となるシステムの観測値、または、入出力伝達関数が診断に利用できるとする。システムに故障が発生したとき、システムの観測値、または、入出力伝達関数が、正常時のそれから変化すれば、故障は検出できるであろう。一方、相異なる故障について、その変化の仕方が、相異なっていれば、故障は識別できるであろう。以下では、この基本的な考え方をもとに、二種類の故障診断法を提案する。一つは、故障が発生しても正常な部分に対するシステム記述は不変であるという不変性の原理に基づいた方法である。逆にいえば、故障が発生した部分のシステムを記述する方程式に式誤差が発生することを用いた

原理ともいえる。もう一つの方法は、故障が発生したときの伝達関数の係数の変化に着目する方法である。

ここで、これら二つの手法の適用範囲について言及しておく。前述したように、ここで扱う線形システムは、状態方程式で記述される線形ダイナミカルシステム、その定常状態を記述する線形代数方程式、コンパートメントシステム、の三種類である。このような方程式で記述されるシステムに故障が発生したとするとシステムは次のような変化を受けることになる。システムを記述する方程式に現れる係数は、そのシステムを構成する部品の物理定数（慣性、熱伝導の係数、物質移行の係数、…）によって決定される。従って、ある構成部品が故障し、その物理定数が変化したとすれば、システムを記述する方程式に現れる係数がある規則をもって変化することになる。その他に、アクチュエータが故障し、正常な入力が増えられなくなる場合、センサが故障し、正常な出力が得られなくなる場合がある。本論文で扱う故障は以上の種類の故障であり、状態方程式の次元が変ってしまうような記述する方程式の形が根本的に変ってしまう故障は扱うことができない。

不変性の原理に基づいた手法では、係数変化、アクチュエータ故障、センサ故障を包括して扱うことができる。ただし制約として第2章で述べるように故障ベクトルが故障要素ベクトルの一次結合で表されることがこの手法を適用するのに必要である。この制約が満たされるかどうかは部品の物理定数が方程式にどのように現れているかに依存している。またこのときある部品が線形特性をはずれて非線形特性を示す場合にもこの制約を満たすならばこの手法は適用可能である。但しここで注意しておくことは、この手法では故障が発生しても不変に保たれている部分空間を明らかにするだけなので、故障と不変に保たれる部分空間が一对一に対応していないことから、個々の故障の発生原因までを求めることはできない。つまり原理上見分けることのできない故障がある（これを等価な故障と呼ぶことにする）。しかし、この手法の利点としては、第2

章で導出する故障診断アルゴリズムを用いて等価な範囲でどの故障が発生しているかを特定できることが挙げられる。また付け加えるならば、この不変性の原理は本質的に非線形なシステムの故障診断にも適用可能なことが示されている。

一方、伝達関数の係数変化に基づく手法では、システムの係数変化、それも第4章で述べる制約を満たす変化、を生じる故障しか扱うことができない。しかし、熱交換器での熱移動の定数、コンパートメントシステムでの物質移行の定数、等が変化する故障はこの制約を満たしており、適用可能なシステムの例は少なからずある。システムの係数変化は、不変性よりもよりシステムの構成部品との対応関係が強いので、不変性の原理で問題となった等価な故障は少なくなる。また不変性の原理に基づく手法に比べて少ない入出力数で故障を識別できる。

故障診断問題の従来への取り組みに関する概観は、線形システムに対して、Willisky のサーベイ [1] があり、電気回路網に対しては、IEEE の特集 [2]、および Bandler らのサーベイ [3] に詳しい。また、Saeks, Liberty 編の本には、計算機システムのようなデジタルシステムに対する故障診断法も含めて、アナログシステムの故障診断法の論文が集められている [4]。

故障診断へのグラフ理論の応用という観点からは、この応用自体は新しいことではない。Mayeda は、正常、異常の二値をとるサブシステムが結合して異常が伝播するシステムについて、初期異常点を見出す方法を論じている [5]。また、Iri らは、過大、正常、過小の三値をとるサブシステムが結合したシステムについて同じ問題を考察している [6]。しかしこれらは、二値的、三値的なシステムであり、線形システムのように連続的な値をとるシステムに適用するには、連続的な値をとるシステムに対する故障診断法が必要である。電気回路網に対する故障診断法としては、回路素子の結合構造を表現するグラフを用いて故障の可診断条件を導出する方法が、Liu らにより論じられてきた [7,8]。

これに対して、線形システムに対する故障診断法にグラフ的手法を持ち込んだ例は少ない。

そこで、本論文の新規性としては、故障の検出可能条件、識別可能条件を導くこと、それに基づいた故障診断アルゴリズムを提案すること、これらの問題を考察するためにシステム構造を表現するグラフを用いて、グラフ的な条件、および、アルゴリズムへのグラフ理論の応用を考えている点にある。

第2章・第3章では、不変性の原理に基づいて、故障診断問題を考察する。第2章では、まずこの不変性について説明したあと、それを利用した故障診断の原理を述べる。つぎに、故障の検出可能性、識別可能性について代数的条件を導出する。そして、故障診断アルゴリズムを提案する。このアルゴリズムでは、さきに考察した検出可能条件、識別可能条件が本質的に重要であり、それらは、アルゴリズムの実行可能性と結果の正当性を保証することが証明される。また、故障が高ターケ所に限定される場合、つまり単一故障の仮定のもとで互いに識別できない故障の組、故障同値類を定義し、それを用いて前述のアルゴリズムの若干の修正によりどの故障同値類内に故障があるかを判定するアルゴリズムを導く。

第3章では、第2章で展開した故障診断アルゴリズムを三種類の線形システム—線形代数方程式で記述される定常状態にある線形システム、定常状態にあるコンパートメントシステム、線形微分方程式で記述される状態方程式表示の線形ダイナミカルシステム—に適用する。そのときにシステム内部のサブシステム間の結合関係（システム構造という）を用いれば、故障の識別可能なための代数的条件をシステム構造を表現するグラフを用いて、等価的なグラフ条件におきかえることができることを示す。このグラフ条件の直接的な応用として、観測位置の設計問題について一つの方法を与える。また、このグラフ条件を用いてアルゴリズム中の一部の手続きをグラフ的な手法でおきかえることができる。

第4章では、線形ダイナミカルシステムの故障診断問題を前二章とは、異なった原理により考察する。ここで、対象とする線形ダイナミカルシステムは、線形微分方程式で記述される状態方程式表示の線形ダイナミカルシステム、線形コンパートメントシステムの二種類を考えている。ここではシステムに故障が発生したとき、伝達関数の分母多項式、分子多項式の係数は、故障に応じて決った仕方に変化するという原理を用いて、故障診断問題を考察する。第2章と同じくまず故障診断の原理を述べたあと、故障の検出可能性、識別可能性について代数的条件を導出する。次に、その代数的条件をシステム構造を表現するグラフを用いて、等価的なグラフ条件におきかえる。このことにより、故障を識別するための試験信号の入出力位置を設計することができる。

第5章は、本論文のしめくりであって、各章でのまとめを受けて、全体としての結論を述べている。

第2章 線形システムの 故障診断アルゴリズム

2.1 緒言

本章では、線形システムに故障が発生したとき、観測に基づいて故障が検出できるか（検出可能性）、相異なる故障が識別できるか（識別可能性）、識別可能とすればどのような計算を実行すれば故障を特定することができるか（故障診断アルゴリズム）の三問題について考察する。ここで用いる手法は、システムの一部に故障が発生したとしても正常に動作している部分は不変に保たれること（これを不変性の原理とよぶことにする）を利用するものである。もう少し詳しく説明するならば、この不変性の結果、故障発生時と正常時の観測値の差は、故障に応じて決まる線形部分空間に含まれる。従って、その差がどの故障に応じた線形部分空間に属するかを調べることにより故障を特定できると考えられる。以下では、この考え方が正しいことを、代数的な故障検出条件、故障識別条件、およびそれらの条件に基づいた故障診断アルゴリズムを導出することにより、示す。

この不変性を利用した故障診断法は、電気回路網の故障診断手法として Biernacki らによって提案された[1]。その後、Huang, Lin, Liu は、電気回路網の結合トポロジーを用いることにより故障診断が可能となるための観測節点の位置に対する条件を導いている[2,3]。

ここでは、まずこの手法を、次章で述べる三つの線形システム（線形代数方程式で記述される定常状態にある線形システム、定常状態にあるコンパートメントシステム、状態方程式で記述されるダイナミカルな線形システム）に適用するために、線形写像、線形部分空間の概念を用いて表現する。つぎに、代数的な故障識別条件を用いて、故障診断アルゴリズムを提案する。故障が同時に複数発生しないときには（単一故障の仮定）、故障が検出可能なシステムにつ

いて、お互いに識別できない故障の組、故障同値類を考えることができる。このとき今述べたアルゴリズムは、若干の修正により、どの同値類の中に故障があるかを判定するアルゴリズムになることが示される。

2.2 システムの記述

ここでは、まず対象とする線形システムを記述したのち、システム故障がシステム記述をどのように変化させるかについて述べる。

システムが正常なときには、

$$Ax = 0 \quad (2.1)$$

と記述されるとする。ここで A は、線形写像 $V \rightarrow E$ 、 V は n 次元状態変数空間、 E は n 次元エラー空間（この意味は後述する）、 $x \in V$ は状態ベクトルである。式(2.1)では、正常状態が 0 となるように状態ベクトルの原点を定めている。また式(2.1)は、行列 A を定数の $n \times n$ 行列とした場合には定常状態にある線形システムを、コンパートメント行列とした場合には定常状態にあるコンパートメントシステムを、 $(sI - A)$ とした場合にはシステム行列を A とする状態空間表示の線形ダイナミカルシステムを表現することができる。式(2.1)がシステムの完全な記述であること、つまり A は、逆写像 $A^{-1}: E \rightarrow V$ をもつことを仮定する。

システムに故障が発生したときには、式(2.1)の等式が成立しなくなり、

$$Ax = \varepsilon \quad (2.2)$$

となるものとする。 $\varepsilon \in E$ を故障ベクトルという（この意味で E をエラー空間とよぶ）。式(2.2)より、システム記述は故障ベクトル ε に直交する部

分空間上で不変であることがわかる。この章の緒言でも述べたようにこの不変性を利用して故障診断を実行する。故障は故障要素の組み合わせであると考えて、 ε は、故障要素ベクトル u_1, \dots, u_t の線形結合で表わせるものとする。（ここで t は故障要素の数とする。故障要素は添字集合 $\{1, \dots, t\}$ の要素と対応づけられる。）たとえば、次章であつかう定常状態にある線形システム、線形ダイナミカルシステムの故障では、故障要素ベクトルは単位ベクトル e_1, \dots, e_n であり、コンパートメントシステムの故障では、故障要素ベクトルは枝ベクトル f_1, \dots, f_t であり、ともにこの仮定を満たしている。これらの場合、故障要素ベクトルはエラー空間 E の生成系となっているが、以下の議論は、命題2.1・定理2.1の前にそれぞれ設けた弱い仮定のもとで、故障要素ベクトルが E の生成系にならない場合にも適用できる。

$I \subset \{1, \dots, t\}$ として、 $i \in I$ に対応する故障要素が故障した場合、故障 I が発生したという。このときには、

$$F(I) := \text{span} \{u_i, i \in I\} \quad (2.3)$$

として $\varepsilon \in F(I)$ となるので、 $F(I)$ を故障 I に対する故障部分空間とよぶ。 $\dim F(I) = k$ を故障の規模と考え、このとき I を k 重故障という。 $F(I) = F(J)$ のとき、故障 I と故障 J は等価であるという。これらは故障ベクトルがどの部分空間に属するかを調べるだけでは見分けのつかない故障である。 $\dim F(I) = |I|$ となる故障を基本故障という。 $\varepsilon \in F(I)$ のとき、故障 I と等価な故障が発生しているという。

2.3 故障診断の原理・識別可能条件

ここではまず、故障が発生した場合に観測値がどのように変化するかを調べたのち、その変化に基づいた故障診断の原理と故障の識別可能条件について考

察する。

状態空間を観測変数と非観測変数に分けて、 $V = V_0 + V_{\bar{0}}$ と、状態変数空間の直和分解を考える。 V_0 を観測変数空間、 $V_{\bar{0}}$ を非観測変数空間という。 $\dim V_0 = m$ とする。状態観測は、線形写像 $C : V \rightarrow V_0$ を V の $V_{\bar{0}}$ に沿った射影とすると、

$$y = Cx \quad (2.4)$$

で与えられる。

故障 I が発生したとすれば、式(2.2)で $\varepsilon \in F(I)$ だから、式(2.4)より $y \in S(I) := CA^{-1}F(I)$ である。 $S(I)$ を故障観測部分空間という。 $S(I) \neq S(J)$ で観測ベクトル y がそれらの共通部分に属しないとすれば、 y が $S(I)$ または $S(J)$ のいずれに属するかによって故障 I 、故障 J のどちらが発生しているかを判定できる。 $y \in S(I) \cap S(J)$ のときには、 $S(I) \subset S(J)$ 、 $S(I) \neq S(J)$ ならば故障 I が発生していると判定する。これらの判定法は、① $S(I) \subset S(J)$ 、 $S(I) \neq S(J)$ で故障 J が発生しているにもかかわらず $y \in S(I)$ となる場合、② $S(I) \not\subset S(J)$ 、 $S(I) \cap S(J)$ のときに $y \in S(I) \cap S(J)$ となる場合を無視している。しかし①、②の場合は、 y が故障観測部分空間の中のより次元の小さな部分空間に含まれるので、①、②を満たす y の原像は故障部分空間中の真に次元の小さな部分空間の和集合(有限個)となる。したがって故障部分空間がルベーグ測度空間とみなせるときには、故障ベクトル ε が連続分布するとすればほとんどすべての場合①、②は起こりえない。このことから、故障部分空間に測度がない場合でも次の仮定は、満たされていると仮定する。

[仮定2.1] 故障 I が発生しているとすれば、 $S(J) \not\subset S(I)$ となる故

障 J について $y \in S(J)$ である。

仮定2.1が満たされているときには、故障 I 、故障 J のいずれかが発生しているとすれば、観測ベクトル y から故障 I 、故障 J のいずれが発生しているかを正しく判定できる必要十分条件は、 $S(I) \neq S(J)$ である。このことから、 $S(I) \neq S(J)$ となることを故障 I と故障 J は識別可能であるという。

以下では、システム (A, C) (式(2.1), (2.4)で表わされるシステムをいう) では、どの程度まで故障が識別できるかについて考察する。

まず、等価な故障 I と故障 J は、必ず $S(I) = S(J)$ となるので識別できない。このことは、式(2.4)の観測写像 C の選び方に無関係である。そこで等価な故障の識別は考えないことにする。

システム (A, C) が k 重識別可能であるというのは、 I を k 重以下の故障、 J を I と等価でない任意の故障とすると、 $S(I) \neq S(J)$ であることと定義する。

[定義2.1] (k 重識別可能) システム (A, C) が k 重識別可能であるとは、

$$\dim F(I) \leq k, F(I) \neq F(J) \implies S(I) \neq S(J) \quad (2.5)$$

が成立することをいう。

この定義は、2.4の定理2.1で示されるように観測ベクトル y が仮定2.1を満たしているとするならば、 y によって k 重以下の故障が発生しているのか、 $(k+1)$ 重以上の故障が発生しているのかを判定でき、しかも k 重以下

の故障が発生しているのならば、等価な故障の範囲内でどの故障が発生しているのかを判定できることを意味する。これらの判定を k 重故障診断法という。 $k=0$ の場合、特にシステム (A, C) は検出可能という。なお、システム (A, C) が k 重識別可能であれば $(k-1)$ 重識別可能であることは明らかである。

システム (A, C) が k 重識別可能であるための必要十分条件は、故障観測部分空間の次元を用いて表現できる。ただし、以下では $\dim F(\{1, \dots, t\}) \geq k+1$ を仮定する。

[命題2.1] [2] システム (A, C) が k 重識別可能 ($k \leq n$) であるための必要十分条件は、任意の $(k+1)$ 重故障 I について、 $\dim S(I) = k+1$ が成り立つことである。

2.4 故障診断アルゴリズム

ここでは、2.3の原理に基づいて k 重故障診断を実行する故障診断アルゴリズムを与える。以下では、 $\dim S(\{1, \dots, t\}) \geq m$ (観測変数空間の次元) を仮定する。

[定理2.1] (k 重故障診断アルゴリズム) システム (A, C) は、 k 重識別可能とする。仮定2.1のもとでつぎのアルゴリズムは、 k 重故障診断法を与える。

アルゴリズム:

(ステップ1) k -被覆集合 K を求める。ここで k -被覆集合とは、つぎの二性質を満たす故障部分空間の系である。

(イ) 任意の $F(I) \in K$ について、 I は m 重故障であり、 $\dim S(I) = m$ である。

(ロ) 任意の k 重以下の故障 J に対して、 $F(I) \in K$ が存在して $F(J) \subset F(I)$ となる。

(ステップ2) 各 $F(I) \in K$ に対し、線形写像 $CA^{-1}|_{F(I)}: F(I) \rightarrow V_0$ は、逆写像 $M(I)$ をもつ。 $\mu(I) := M(I)y$ とするとき、 k 重以下の故障 J 、 $F(J) \subset F(I)$ に対して $\mu(I) \in F(J)$ ならば、 J と等価な故障が発生している。

(ステップ3) ステップ2でどの $F(I) \in K$ についても $\mu(I)$ が、 k 重以下の故障 J 、 $F(J) \subset F(I)$ に対して $\mu(I) \in F(J)$ となるならば、 $(k+1)$ 重以上の故障が発生している。

(証明) 定理の証明には、 k -被覆集合の存在(ステップ1)と、 $\mu \in F(J)$ ならば J と等価な故障が発生している(ステップ2)ことを示さなければならぬ。

[補題2.1] (k -被覆集合の存在条件) k -被覆集合 K ($k \leq n$) が存在するためには、システム (A, C) が $(k-1)$ 重識別可能であることが必要十分である。

(証明) 十分性: J を任意の k 重以下の故障とする。命題2.1から $\dim S(J) = \dim F(J) \leq k$ である。このことから $J \subset I$ となる m 重故障 I を $\dim S(I) = m$ となるように選べる。 $J \subset I$ だから $F(J) \subset F(I)$ である。 k 重以下の故障それぞれに対してこのように作った系 $\{F(I)\}$ は、 k -被覆集合をなす。

必要性: J を任意の k 重故障とする。 $F(I)$ を(イ)、(ロ)を満たす K の元とする。 $\dim S(I) = \dim F(I) = m$ だから、 $F(I)$ の中の一次独立なベクトルは CA^{-1} によって一次独立なベクトルに写されるので、 $F(J) \subset F$

(I) より、 $\dim S(J) = \dim F(J) = k$ である。従って命題2.1よりシステム $\Delta(A, C)$ は、 $(k-1)$ 重識別可能である。 (補題証明終)

[補題2.2] $F(I) \in K$ に対して、線形写像 $CA^{-1}|_{F(I)} : F(I) \rightarrow V_0$ は、逆写像をもつ。その逆写像を $M : V_0 \rightarrow F(I)$ とし、 $\mu := My$ とするとき、 $F(J) \subset F(I)$ に対して $\mu \in F(J)$ である必要十分条件は、 $y \in S(J)$ である。

(証明) $CA^{-1}|_{F(I)}F(I) = CA^{-1}F(I) = S(I)$ と、 $\dim F(I) = \dim S(I) = m$ より、 $CA^{-1}|_{F(I)}$ は全単射となるので逆写像をもつ。 $\mu \in F(J)$ とすれば、 $y = M^{-1}\mu = CA^{-1}|_{F(I)}\mu = CA^{-1}\mu \in S(J)$ である。逆に $y \in S(J)$ とすれば、ある $\varepsilon \in F(J)$ に対し $y = CA^{-1}\varepsilon$ となるので、 $\mu = My = MCA^{-1}\varepsilon = \varepsilon \in F(J)$ である。 (補題証明終)

定理2.1の証明に戻る。補題2.1よりステップ1が実行可能である。補題2.1より k 重以下の故障 J に対してステップ2において $\mu \in F(J)$ ならば、 $y \in S(J)$ である。このとき故障ベクトル ε が $\varepsilon \in F(J)$ であると仮定する。 ε を含む故障部分空間を $F(I)$ とする。すると $F(J) \not\subset F(I)$ であるから、ある $i \in I$ について u_i は、 $F(J)$ と一次独立である。 $J' := J \cup \{i\}$ とすれば J' は $(k+1)$ 重以下の故障だから、システムの k 重識別可能性の仮定を用いると命題2.1より $\dim S(J') = \dim F(J') = \dim F(J) + 1 = \dim S(J) + 1$ となる。従って $CA^{-1}u_i \in S(I)$ は $S(J)$ と一次独立となるので $S(J) \not\subset S(I)$ である。一方、故障 I が発生しているので $y \in S(I)$ であるが、これは仮定2.1に矛盾する。従って $\mu \in F(J)$ ならば $\varepsilon \in F(J)$ となるので、 J と等価な故障が発生していることがわかる。最後に、 k 重以下の故障が発生していれば必ずステップ2で判定されるこ

とを示せばよい。 J を k 重以下の任意の故障とする。 k -被覆集合の定義(口)から $F(J) \subset F(I) \in K$ となる m 重故障 I が存在する。故障 J が発生しているとすれば $y \in S(J)$ であるから補題2.2より $\mu(I) \in F(J)$ となる。従ってステップ2で J と等価な故障が発生していると判定される。

(定理証明終)

(注意2.1) ステップ1は、システムの設計時に一度だけ実行すればよく、システムの観測時にはステップ2~3だけを実行すればよい。

2.5 故障同値類

ここでは、前節までの特別な場合として、システムに単一故障が発生した場合の故障診断法について述べる。ここで単一故障の仮定は、システムの構成要素のうち二つ以上が同時に故障することは可能性がより少ないと考えていることを意味する。2.2のシステム記述に従ってこの単一故障の仮定を述べるならば、式(2.2)で、故障ベクトル ε の方向は、ある故障要素ベクトル u_i の方向と一致する。このとき故障 i (故障 $\{i\}$ というかわりに) が発生したという。システム (A, C) が、1重識別可能ならば、定理2.1のアルゴリズムは、そのまま単一故障を識別するアルゴリズムとなる。観測変数の数が少ない場合にはしばしばおこりうるが、システムが、0重識別可能(つまり検出可能)であり1重識別可能でない場合には、お互いに識別できない故障の組が考えられる。この組を故障同値類とよぶ(厳密な定義は以下で述べる)。以下では、システム観測に基づいてどの故障同値類に故障が発生しているかを判定するアルゴリズムについて述べる。

システム (A, C) は、0重識別可能とする。このとき、故障 i と故障 j が識別不能であるという関係、つまり $S(\{i\}) = S(\{j\})$ という関係は、 $\{1, \dots, t\}$ の上の同値関係である。この同値関係による剰余類を故障同値類

とよぶ。以下では、故障同値類 D は、 $\{1, \dots, t\}$ の部分集合と同一視する。

[定理2.2] システム (A, C) は、0重識別可能とする。仮定2.1のもとでつぎのアルゴリズムは、観測値 y からどの故障同値類の中に故障が発生しているかを判定する。

アルゴリズム：

(ステップ1) 同値類被覆集合 K' を求める。ここで同値類被覆集合とはつぎの二性質を満たす故障要素ベクトルの添字集合 $\{1, \dots, t\}$ の部分集合の系である。

(イ) 任意の $K \in K'$ について、 K は m 重故障であり、 $\dim S(K) = m$ である。

(ロ) 任意の故障同値類 D に対して、 $K \in K'$ が存在して、 $D \cap K \neq \emptyset$ となる。

(ステップ2) 各 $K \in K'$ に対し、線形写像 $CA^{-1}|_{F(K)}: F(K) \rightarrow V_0$ は、逆写像 $M(K)$ をもつ。 $\mu(K) := M(K)y$ とするとき、故障要素ベクトル $u_i, i \in K$ と $\mu(K)$ の方向が一致するならば i と同値な故障が発生している。

(ステップ3) ステップ2でどの $K \in K'$ についても $\mu(K)$ が、故障要素ベクトルと方向が一致しないならば単一でない故障が発生している。

(証明) 同値類被覆集合の存在について： システムは、0重識別可能であるから、補題2.1より1-被覆集合 K が存在する。 K に対して、 $K' := \{K \subset \{1, \dots, t\} \mid F(K) \in K\}$ と定める。 K' が(イ)の条件を満たすことは、1-被覆集合の定義より明らかである。任意の故障同値類 D の任意の元を d とする。 $\{d\}$ は、1重故障だから、1-被覆集合の定義より $F(\{d\}) \subset F(I)$ となる $F(I) \in K$ が存在する。またこのとき補題2.1の証明から $\{d\} \subset I$

ととれることがわかる。 K' の定義より $I \in K'$ だから、 K' は条件(ロ)を満たす。ステップ2について：逆写像の存在は、定理2.1と同様である。 $\mu(K)$ と $u_i, i \in K$ の方向が一致しているとする。つまり $\mu(K) \in F(\{i\})$ であるから、補題2.2より、 $y \in S(\{i\})$ である。このとき故障 j が発生していたとする。すると $y \in S(\{j\})$ である。故障 i と故障 j が同値でないとすれば、 $S(\{i\}) \neq S(\{j\})$ となるが、これは仮定2.1に反する。つまり i と同値な故障が発生している。ステップ3について：故障 i が発生しているとき必ずステップ2で判定されることをいえばよい。 i を含む故障同値類を D とし、 K を条件(ロ)を満たす同値類被覆 K' の元とする。故障 i が発生しているので $y \in S(\{i\})$ となるが、すると補題2.2より $\mu(K) \in F(\{i\})$ である。つまり $\mu(K)$ と u_i の方向は一致することになりステップ2で i と同値な故障が発生していると判定される。（定理証明終）

2.6 結言

本章では、線形システムの故障診断問題を考察し、故障診断アルゴリズムを提案した。一つは、システムが k 重識別可能であるときに、システムに k 重以下の故障が発生しているのか、 $(k+1)$ 重以上の故障が発生しているのかを判定し k 重以下の故障が発生している場合には、どの故障が発生しているかまでを判定するアルゴリズムである。もう一つは、システムが 0 重識別可能なときに、どの故障同値類内に故障が発生しているのかを判定するアルゴリズムであり、前者のアルゴリズムの若干の修正として与えられる。

これらのアルゴリズムの特徴は、①アルゴリズムの実行可能性と正当性が、故障の識別可能条件によって保証されること、②線形演算の範囲で実行でき、計算が容易であること、③次章で示すように広い範囲の線形システムに適用できること、を挙げられる。

第3章 システム構造を考慮に入れた 故障診断アルゴリズムの適用

3.1 緒言

この章では、前章で提案した故障診断アルゴリズムを三つの型の線形システム（線形代数方程式で記述される定常状態にある線形システム、定常状態にあるコンパートメントシステム、状態方程式で記述される線形ダイナミカルシステム）に適用する。そのときにシステム内部のサブシステム間の結合関係（システム構造）を用いれば、故障の識別可能条件と故障診断アルゴリズム（一部）が、それぞれシステム構造を表現するグラフ上の条件とグラフ上の手続きでおきかえられることを示す。

故障診断問題にグラフを持ち込む第一の利点は、観測位置（または、入力位置と観測位置）を、望まれる故障検出性、識別性を保証するように決定する方法を与えることである。第二の利点としては、故障診断アルゴリズムを実行するにあたって、グラフ理論で既に得られているアルゴリズムを有効に利用できる点にある。

故障診断問題をグラフ理論を用いて考察すること自体は新しいことではない。Mayeda は、正常、異常の二値をとるサブシステムが結合して異常が伝播するシステムについて、初期異常点を見出す方法を論じている [1]。また、Iriらは、過大、正常、過小の三値をとるサブシステムが結合したシステムについて同じ問題を考察している [2]。電気回路網に対する故障診断法としては、回路素子の結合構造を表現するグラフを用いて故障の可診断条件を導出する方法が、さかんに論じられてきた。電気回路網の故障診断法の概観は、IEEEの特集 [3]、および、Bandler らのサーベイ [4] に詳しい。これに対して、線形システムに対する故障診断法にグラフ的手法を持ち込んだ例は少ない。

故障診断問題にシステム構造を導入することの利点としては、①検出可能性、

識別可能性がシステムの物理的な定数に依らずシステムの結合構造のみによって決定できること、②このことから観測位置の設計方法を与えることができること、③故障診断アルゴリズムを実行するにあたって、グラフ理論で既に得られているアルゴリズムを有効に利用できること、が挙げられる。①について、もう少し説明すると、検出可能条件、識別可能条件が、システム構造を表現するグラフを用いて、係数行列の非零要素（または、非零移行係数）をパラメータとしたとき generic な条件として与えられる。ここである命題が generic に成立するとは、(イ)その命題の成否は、パラメータ値により決定され、かつ(ロ)その命題を不成立とさせるパラメータは、恒等的には零でないある多項式の零点に含まれていることをいう[5]。つまり命題が generic に成立するとなれば、その命題は、パラメータ空間の稠密な集合の上で成立しているので、システムパラメータは、その命題を成立させていると考えるのは、正当なことであろう。従って、本論文で generic に成立する検出可能条件、識別可能条件、およびそれらに基づき generic に成立する故障診断アルゴリズムを導くのは、正常時の係数行列の非零要素（または、非零移行係数）が、それらを成立させていると考えてもよいからである。

以下では、3.2で定常状態にある線形システム、3.3で定常状態にあるコンパートメントシステム、3.4で線形ダイナミカルシステムに対して、第2章での故障診断アルゴリズムを適用することを考える。

3.2 定常状態にある線形システムへの適用

ここでは、線形代数方程式で記述される定常状態にある線形システムに対して故障診断問題を考察する。まず、サブシステム間の結合関係を表現するために、システム構造とそのグラフ表現を導入する。つぎに、故障観測部分空間を具体的に求め、その次元のグラフ表現を与えることにより、故障の識別可能条件、故障診断アルゴリズムの中の被覆集合をグラフ的に特徴づける。また、単

一故障の仮定のもとで故障同値類のグラフ的特徴づけ、および、すべての単一故障を互いに識別できるための観測位置の設計方法についても考察する。

3.2.1 システム構造とその表現グラフ

システムの記述は、式(2.1), (2.4)を線形代数方程式で書き直して、

$$Ax = 0, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.1)$$

$$y = Cx, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad C \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (3.2)$$

となる。ここでシステム行列 A は、第2章で仮定した逆写像の存在より、正則であるとする。式(3.1)で i 番めの式は、 i 番めのシステム要素（システムの構成部品をさす。たとえば、それが熱交換器とすれば、 i 番めの式は熱平衡の式となる。）に対応しているとする。従って i 番めのシステム要素が故障したときの故障要素ベクトルは、単位ベクトル e_i となる。また、式(3.2)で観測行列 C は、各行が単位ベクトルからなる行フルランクの行列とする。このことは n 個の変数のうち m 個を観測することを意味する。

システムの結合構造は、つぎのように説明される。変数 x_i がシステム要素 i に関係する度合いは、係数 a_{ij} ($A = (a_{ij})$) により与えられ、これらは、物理定数などによって定められる。一方、変数 x_i がシステム要素 i に関係しないときには、それは、物理定数に無関係なシステムに固有の性質と考えられる。これらの性質をシステム構造という。

このシステム構造を表現するには、つぎの二種類のグラフを用いるのが便利である。以下では、行列 A の正則性からシステム要素 i は変数 x_i に関係しているように式を並べかえておく。つまり行列 A は、非零対角要素を持つものとする。行列 A の Coates グラフ、 $G_A(N, E)$ は、変数 x の添字集合 $n := \{1, \dots, n\}$ と一対一に対応した節点集合 $N = \{1, \dots, n\}$ と、

$(i, j) \in E \iff a_{ji} \neq 0$ によって定められる有向枝集合 E をもつ有向グラフである。行列 A の二部グラフ $G_b(N_r, N_c, E_b)$ は、 A の行添字集合 $\{1, \dots, n\}$ と一対一に対応した行節点集合 $N_r = \{\pi_r(1), \dots, \pi_r(n)\}$ (ここで π_r は $N \rightarrow N_r$ への自然な一対一対応を与える)、同様に定義された列節点集合 N_c (π_c も同様に定義される) と $(\pi_r(i), \pi_c(j)) \in E_b \iff a_{ij} \neq 0$ によって定められる無向枝集合 E_b をもつ無向二部グラフである。故障集合 I は、システム要素に対応しているが式を並べかえてあるので $I \subset N$ と考えてもよい。観測変数の集合 $C \subset N$ を観測行列 C と同じ文字を用いて表す。 $I_r := \pi_r(I)$ などの意味は明らかであろう。また、 $N_{r1} \subset N_r, N_{c1} \subset N_c$ とするとき、 $A(N_{r1}, N_{c1})$ は、行 N_{r1} 、列 N_{c1} からなる A の小行列を表す。

3.2.2 識別可能条件

故障 J が発生したときシステムは、

$$Ax = \varepsilon, \quad \varepsilon \in F(J) = R(E^J) \quad (3.3)$$

と変化する。ここで、 $R(\cdot)$ は、行列の像空間を、 E^J は、故障要素ベクトル(この場合、単位ベクトル) $e_i, i \in J$ を横に並べた行列である。従って、故障観測部分空間 $S(J)$ は、

$$S(J) = R(CA^{-1}E^J) \quad (3.4)$$

で与えられる。命題2.1で与えたように故障の識別可能条件は、故障観測部分空間の次元を用いて表現できる。以下では、この次元の代数的な条件、およびそれに等価なグラフ条件を求める。

[補題3.1] $\dim S(J) = k$ となる必要十分条件は、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & E^J \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + k \quad (3.5)$$

である。

(証明)

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} A & E^J \\ C & 0 \end{bmatrix} &= \text{rank} \begin{bmatrix} A & E^J \\ 0 & -CA^{-1}E^J \end{bmatrix} && (3.6) \\ &= n + \dim S(J) && (\text{証明終}) \end{aligned}$$

グラフ条件を求めるまえに、グラフの用語を説明しておく。 $G_A(N, E)$ について、 v_0 を始点、 v_k を終点とする長さ k の有向道 P は、節点と枝の交互列、

$$\begin{aligned} P &= (v_0, (v_0, v_1), v_1, (v_1, v_2), \dots, (v_{k-1}, v_k), v_k), \\ &v_i \in N, i = 0, \dots, k, (v_i, v_{i+1}) \in E, i = 0, \dots, k-1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

のことをいう。長さ0の有向道も許される。 $N(P)$ 、 $E(P)$ でそれぞれ P 中の節点集合、枝集合を表す。 $N_1, N_2 \subset N$ として、 $v_0 \in N_1$ 、 $v_k \in N_2$ ならば、 P を N_1 から N_2 に至る有向道、または単に $N_1 \rightarrow N_2$ 有向道という。互いに節点を共有しない有向道の集りとは、その集りの中のどの二本の有向道も節点を互いに共有しないものをいう。有向道の集り P が $N_1 \subset N$ から $N_2 \subset N$ を結ぶとは、 $N_1 = \{P \text{ 中の有向道の始点}\}$ 、 $N_2 = \{P \text{ 中の有}$

向道の終点} となることである。 $D \subset N$ が、 N_1 から N_2 を分離するとは、 N_1 から N_2 に至る任意の有向道は D 中に節点をもつことをいう。このとき D は、 $N_1 \rightarrow N_2$ 分離集合ともいう。これらについて、 N_1 または N_2 が一つの要素からなれば、たとえば $\{v\} = N_1$ の場合、中括弧を省略することもできる。 $G_b(N_r, N_c, E_b)$ について、マッチングというのは、枝集合の部分集合であり、その中のどの二本も節点を共有しないものをいう。 $N_{r1} \subset N_r$ と $N_{c1} \subset N_c$ の間のマッチングとは、そのマッチング中の枝は、 $N_{r1} \cup N_{c1}$ に接続しているものをいう。節点 v がマッチング M によって飽和しているとは、 v に接続する M の枝が存在することをいう。なお、全体集合が明らかなき補集合を ${}^\circ N_1 \subset N$ のように表す。また、'g-'で generic に成立する性質を表す。

[定理3.1] $J \subset N$, $|J| = r$ とする。つぎの四条件は、等価である。

I) $k = g\text{-dim } S(J)$

II) G_A 中に、 $J_1 \subset J$ から $C_1 \subset C$ 、 $|J_1| = |C_1| = k$ 、を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りが存在し、 k は、この性質を満たす最大数である。

III) G_A 中に、 J から C を分離する集合 $D \subset N$ 、 $|D| = k$ が存在し、 k は、この性質を満たす最小数である。

IV) G_b 中に、飽和しない ${}^\circ C_c$ の節点数が $r - k$ となる ${}^\circ J_r$ と ${}^\circ C_c$ の間のマッチングが存在し、 $r - k$ は、この性質を満たす最小数である。

(証明) II \iff III: Menger の定理 [6] による。

II \iff IV: P を、 G_A 中で J 中の部分集合から C 中の部分集合を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りとし、 $E(P) := \bigcup_{P \in P} E(P)$ とおく。 $|P| = \mu$ とする。このとき G_b 中に ${}^\circ J_r$ と ${}^\circ C_c$ の間のマッチングを

つぎのように構成できる。まず、 E_b の部分集合 M_0, M_1, M_2 をつぎのように定める。 $M_0 := \{(\pi_r(j), \pi_c(i)) \mid (i, j) \in E(P)\}$, $M_1 := \{(\pi_r(i), \pi_c(i)) \mid i \in {}^\circ J \cap {}^\circ C, \pi_c(i) \text{ は } M_0 \text{ によって飽和されていない}\}$, $M_2 := (M_0 \cup M_1) \cap ({}^\circ J_r \times {}^\circ C_c)$ 。任意の節点 $i \in {}^\circ J \cap {}^\circ C$ は、 P 中のどの有向道の始点でも終点でもないので、 $M_1 = \{(\pi_r(i), \pi_c(i)) \mid i \in {}^\circ J \cap {}^\circ C, \pi_r(i) \text{ は } M_0 \text{ によって飽和されていない}\}$ であることに注意する。 M_2 が、実際にマッチングであることを確かめよう。これに反して、 M_2 中の二本の枝 f_1, f_2 が接続する節点 $\pi_c(i), i \in {}^\circ C$ (または $\pi_r(j), j \in {}^\circ J$) が存在したと仮定しよう。これら二本の枝は、同時に M_1 に属さないことは、 M_1 の定義より明らかである。それらのうち一本のみが M_1 に属するとすれば、 $\pi_c(i)$, (または $\pi_r(j)$) は、 M_1 の定義より M_0 によって飽和していないことになるが、これはもう一本の枝が M_0 に属することに反する。 f_1, f_2 がともに M_0 に属するとする。すると $E(P)$ 中にともに始点を i (またはともに終点を j) とする二本の枝が存在することになるが、これは P が互いに節点を共有しない有向道の集りであることに反する。従って、 M_2 はマッチングである。 P は、 J 中の部分集合から C 中の部分集合を結ぶ互いに節点を共有しない μ 本の有向道の集りだから、 $N(P) := \cup_{P \in P} N(P)$ とするとき、 $|J \setminus N(P)| \leq r - \mu$ である。ここで、 ${}^\circ J_c \cap {}^\circ C_c$ の節点はすべて M_2 によって飽和していることに注意する。従って ν を ${}^\circ C_c$ 中の M_2 による不飽和節点の数とすれば、 $\nu \leq r - \mu$ となる。ゆえに、もし IV) が成立すれば、 $r - \mu \geq \nu \geq r - k$ だから $\mu \leq k$ となる。もし II) が成立すれば、 $\mu = k$ と選ぶことにより $r - k \geq \nu$ となる。

逆に、 M を G_b 中の ${}^\circ J_r$ と ${}^\circ C_c$ の間のマッチングとし、 ν を ${}^\circ C_c$ 中の M による不飽和節点の数とする。 $i \in J$ に対して、点列 i_0, i_1, i_2, \dots をつぎのように作る。 $i_0 := i, (\pi_r(i_{k+1}), \pi_c(i_k)) \in M, k = 0, 1, 2, \dots$ 。この点列は、 $\pi_c(i_t)$ は M によって飽和していない i_t, t はある整

数、によって終了する。ここで M はマッチングだから、 $i \in J$ がこの点列を唯一に決定すること、 $v \in N$ がこの点列中にあれば、 v が点列の先頭 i_0 を唯一に決定することに注意する。もし $i \in J$ に対して $i_t \in C$ ならば、この点列は、 $J \rightarrow C$ 有向道 P_i を決定する。 $J_0 := \{i \in J \mid i \text{ に対して上記の点列の終了点 } i_t \text{ が } C \text{ に属する}\}$ 、 $J_1 := J \setminus J_0$ 、 $P := \{P_i, i \in J_0\}$ とおく。すると P は、 J_0 から C の部分集合を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りである。ここで、 $|J_0| = |P| =: \mu$ である。また $i \in J_1$ と $i_t \in C$ 、 $\pi_c(i_t)$ は M によって飽和していない、の間には一対一対応が存在するので、 $r - \mu = |J_1| \leq \nu$ である。ゆえに、もしIV)が成立すれば、 $\nu = r - k$ と選ぶことにより $r - \mu \leq r - k$ 、つまり $\mu \geq k$ である。もしII)が成立すれば $r - k \leq r - \mu \leq \nu$ である。これで、II)とIV)の等価性を示した。

I \Leftrightarrow IV : まず、

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} A & E^J \\ C & 0 \end{bmatrix} &= \text{rank} \begin{bmatrix} (I_n - E^J E^{JT})A(I_n - C^T C) & E^J \\ & C & 0 \end{bmatrix} \\ &= m + r + g\text{-rank } A({}^c J_r, {}^c C_c) \end{aligned} \quad (3.8)$$

が成り立つ。ここで I_n は、 n 次の単位行列である。式(3.6), (3.8)より $g\text{-dim } S(J) = k$ となる必要十分条件は、 $g\text{-rank } A({}^c J_r, {}^c C_c) = n + k - m - r$ である。従って、証明は、 $A({}^c J_r, {}^c C_c)$ の t 次小行列式の一つが generic に零でない必要十分条件が G_b 中の大きさ t の ${}^c J_r$ と ${}^c C_c$ の間のマッチングの存在であることをいえばよい。必要性は、行列式の定義から明らかである。充分性は、マッチングに属さない枝の枝重みを零にすれば明らかである。 (証明終)

この定理3.1と命題2.1から線形定常システム (A, C) が $g-k$ 重識別可能であるためのグラフ条件が得られる。

[定理3.2] ($g-k$ 重識別可能条件) システム (A, C) が、generic に k 重識別可能であるためには、つぎの等価な三条件のうち一つが成り立つことが必要十分である。以下では、故障 $J \subset N$ を $|J|=k+1$ を満たす任意の故障とする。

1) G_A 中に、 J から $C_1 \subset C$ 、 $|J|=|C_1|=k+1$ 、を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りが存在する。

2) G_A 中の J から C を分離する集合 $D \subset N$ は、 $|D| \geq k+1$ を満たす。

3) G_b 中の ${}^\circ J_r$ と ${}^\circ C_c$ の間のあるマッチングによって ${}^\circ C_c$ の節点はすべて飽和される。

(証明) これらの等価な三条件が $g\text{-dim } S(J)=k+1$ となるために必要十分であることは、定理3.1より明らかである。 (証明終)

(例) 以下に示す状態方程式で記述される線形ダイナミカルシステムに対して一定入力を加えた時の定常状態を表す線形システムを考える。これは加圧型原子力発電所の蒸気発生系のモデルである。一定入力 $u \in \mathbb{R}^5$ を加えればこのシステムは定常状態に達するので、この定常状態を原点に移動することにより式(3.1)の記述を得る。図3.1にシステム行列 A の Coates グラフを、図3.2にシステム行列 A の二部グラフを示す。ここで観測節点 C を $C = \{2, 3, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14\}$ と選べば、定理3.2の条件1~3が $k=1$ に対して成立するのでこのシステムは $g-1$ 重識別可能である。例えば、 $J = \{4, 5\}$ として、図3.3に J から $C_1 = \{2, 6\} \subset C$ を結ぶ互いに節点を共有しない有向

道の集りを示す。同じく図3.3より、 J から C を分離する大きさ1の集合が存在しないこともわかる。図3.4に ${}^{\circ}C_c = \{1, 4, 5, 9, 13, 14\}$ を飽和させる ${}^{\circ}J_r = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ と ${}^{\circ}C_c$ の間のマッチングを示す。(例終)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -400x_1 + 0.0125x_2 + 0.0305x_3 - 1781x_4 - 13700x_5 - 13700x_{13} \\ &\quad + 411u_1 + (2200/1.6 \times 10^{-5})u_2 \\ \dot{x}_2 &= 13.125x_1 - 0.0125x_2 \\ \dot{x}_3 &= 87.5x_1 - 0.0305x_3 \\ \dot{x}_4 &= 0.0756x_1 - 0.16466x_4 + 0.16466x_{13} \\ \dot{x}_5 &= 0.05707x_4 - 2.3832x_5 + 2.3263x_{13} \\ \dot{x}_6 &= 0.033645x_5 - 0.033645x_6 \\ \dot{x}_7 &= 2.5x_6 - 2.5x_7 \\ \dot{x}_8 &= 1.45x_7 - 1.45x_8 \\ \dot{x}_9 &= 0.2238x_8 - 0.76642x_9 + 0.53819x_{14} \\ \dot{x}_{10} &= 1.45x_9 - 1.45x_{10} \\ \dot{x}_{11} &= 1.48x_{10} - 1.48x_{11} \\ \dot{x}_{12} &= 0.516x_{11} - 0.516x_{12} \\ \dot{x}_{13} &= 0.05707x_4 + 2.3832x_{12} - 2.4403x_{13} \\ \dot{x}_{14} &= 3.07017x_9 - 5.3657x_{14} + 0.33272x_{15} \\ \dot{x}_{15} &= 1.349x_{14} - 0.2034x_{15} + 0.05328u_3 - 0.03843u_4 - 0.04425u_5 \end{aligned}$$

例の状態方程式

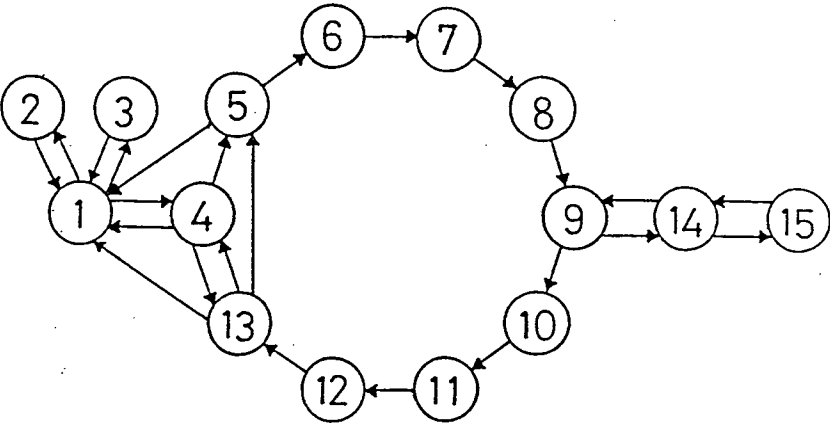


図3.1 例のシステムの Coates グラフ

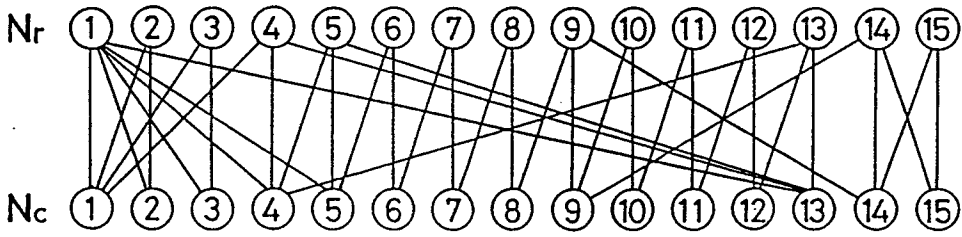


図3.2 例のシステムの二部グラフ

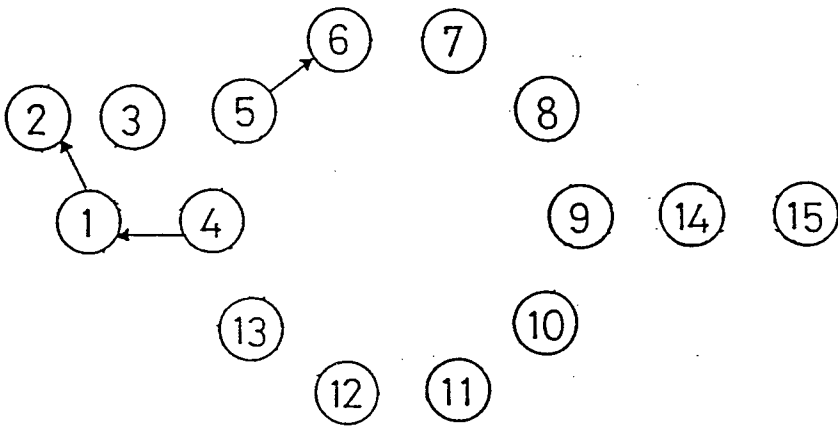


図3.3 J から $C_1 = \{2, 6\}$ $C = \{2, 3, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 15\}$ を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集り

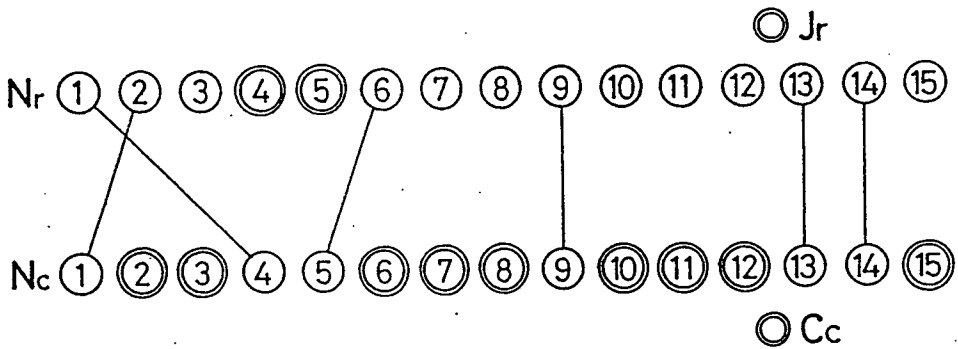


図3.4 $\circ C_c = \{1, 4, 5, 9, 13, 14\}$ を飽和させる $\circ J_r = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ と $\circ C_c$ の間のマッチング

3.2.3 故障診断アルゴリズム

ここでは、定理2.1で与えた故障診断アルゴリズムを定常的な線形システムに適用することを考える。この適用により新たに、ステップ2で必要とした逆写像が具体的に記述されること、さらにシステム構造を用いれば、ステップ1で必要とした被覆集合はシステムの表現グラフ上で求められること、の二点が明らかにされる。

[定理3.3] (k重故障診断アルゴリズム) システム (A, C) は、k重識別可能とする。仮定2.1のもとでつぎのアルゴリズムは、k重故障診断法を与える。

アルゴリズム：

(ステップ1) k-被覆集合 K を求める。ここで k-被覆集合とは、つぎの二性質を満たす節点集合 N の部分集合の系である。

(イ) 任意の $I \in K$ について、 $|I| = m$ であり、行列 $A(\circ I_r, \circ C_c)$ は正則である。

(ロ) 任意の $J \subset N$, $|J| \leq k$ に対して、 $I \in K$ が存在して、 $J \subset I$ となる。

(ステップ2) 各 $I \in K$ に対し、 $z^*(I) := -A(\circ I_r, \circ C_c)^{-1}A(\circ I_r, C_c)y$ を求め、 $\mu(I) := A(N_r, C_c)y + A(N_r, \circ C_c)z^*(I)$ とする。 $\mu(I)$ の非零要素数 $\#(I)$ が、 $\#(I) \leq k$ を満たすならば、 $J := \{i \mid \mu(I) \text{ の第 } i \text{ 要素} \neq 0\}$ として、故障 J が発生している。

(ステップ3) ステップ2でどの $I \in K$ についても $\#(I) > k$ となるならば、 $(k+1)$ 重以上の故障が発生している。

(注意3.1) この場合、 I と $F(I)$ とが一対一に対応する、つまり I と等価な故障は I のみであるので、被覆集合の要素は、故障部分空間ではな

く故障集合であると考える。

(注意3.2) ステップ2から定理2.1での逆写像 M の求め方と、このアルゴリズムの意味がわかる。すなわち、すべての i 行、 $i \in {}^{\circ}I$ 、に式誤差が発生していないと仮定すれば、観測値 y から非観測変数 z が可解である。その解を z^* とするとき、状態量 $x^* = y + z^*$ (直和) より求めた式誤差 μ は、その仮定が正しいとすれば、実際の故障ベクトル ε に等しい。

(証明) まず、ステップ1で求めた k -被覆集合 K が、定理2.1の意味でも k -被覆集合であることを示す(注意3.1参照)。(ロ)どうしは、互いに等しいので、(イ)で $\dim S(I) = m$ となる必要十分条件が、 $A({}^{\circ}I_r, {}^{\circ}C_c)$ が正則であることをいえばよい。これは、式(3.6), (3.8)から直ちに導かれる。

つぎに、ステップ2で与えた写像 $y \rightarrow \mu(I)$ は、 $F(I)$ から E への埋め込みを除いて、 $(CA^{-1}|_{F(I)})^{-1}$ に等しいことを示す。ブロック行列

$$\begin{bmatrix} A(I_r, C_c) & A(I_r, {}^{\circ}C_c) \\ A({}^{\circ}I_r, C_c) & A({}^{\circ}I_r, {}^{\circ}C_c) \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.9)$$

の(1,1)ブロックが $CA^{-1}|_{F(I)}$ であるから、

$$\begin{aligned} & (CA^{-1}|_{F(I)})^{-1} & (3.10) \\ & = A(I_r, C_c) - A(I_r, {}^{\circ}C_c) A({}^{\circ}I_r, {}^{\circ}C_c)^{-1} A({}^{\circ}I_r, C_c) \end{aligned}$$

となり、この後 E への埋め込みをすればステップ2で与えた写像に等しくなる。(証明終)

定理3.1を適用すれば、定理3.3中の k -被覆集合をシステム表現グラフの上で generic な意味で求めることができる。

[定理3.4] (g - k -被覆集合)

N の部分集合の系 K が、 g - k -被覆集合であるための必要十分条件は、つぎの(イ),(ロ)を共に満たすことである。

(イ) 任意の $I \in K$ について、 $|I| = m$ かつ、(イ-1) G_A 中に I から C を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りが存在する。または、(イ-2) G_b 中に $\circ I_r$ と $\circ C_c$ の間に完全マッチングが存在する。

(ロ) 任意の $J \subset N$, $|J| \leq k$ に対して、 $I \in K$ が存在して、 $J \subset I$ となる。

(例) 図3.1に示す Coates グラフをもつシステムに対して、観測節点 C を $C = \{1, 4, 7, 11, 15\}$ とする。このとき、 $K = \{K_1, K_2, K_3\}$, $K_1 = \{1, 4, 7, 11, 15\}$, $K_2 = \{2, 5, 9, 13, 14\}$, $K_3 = \{3, 6, 8, 10, 12\}$ は、定理3.4の条件を満たすので、 g -1 被覆集合である。 (例終)

3.2.4 故障同値類・単一故障を互いに識別する観測点の設計法

ここでは、単一故障の仮定(つまり式(3.3)で、故障ベクトル ε の非零要素は一つに限る)を設け、2.5で導入した故障同値類のシステム表現グラフ上での特徴づけを考えることにより、与えられた観測点のもとで generic に互いに識別できない故障をグラフ上で明らかにする。同時に、単一故障を generic に互いに識別できるための、つまり g -1 重識別可能となるための観測点の設計法をグラフ的に与える。

なお、ここでは故障同値類を考えるわけだから、2.5でも述べたようにシステム (A, C) は、 g -0 重識別可能(つまり g -検出可能)と仮定する。シス

テムが g -検出可能であるための必要十分条件は、定理3.2の特別な形としてつぎのように簡単な形に述べられる。

[系3.1] (g -検出可能条件) システム (A, C) が g -検出可能であるための必要十分条件は、 G_A 中の任意の節点 $v \in N$ から C へ至る有向道が存在することである。

さて、故障集合は、システム構造を表現する Coates グラフ G_A の節点集合 N の部分集合と考えられるので、故障同値類は、節点集合 N の分割 $N = D_1, \dots, D_s$, $D_i \cap D_j = \emptyset$ ($i \neq j$) を与える。つぎの補題は、故障同値類のグラフ上の特徴づけに重要である。

[補題3.2] 故障 $i \in N$ と故障 $j \in N$ が、 g -識別可能である必要十分条件は、 G_A 中に、 $\{i, j\}$ から C の部分集合を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りが存在することである。

(証明) この補題の条件は、定理3.1より、 $g\text{-dim } S(\{i, j\}) = 2$ と等価である。これは、generic に $S(\{i\}) \neq S(\{j\})$ を意味する。つまり generic に故障 i と故障 j は識別可能である。逆に generic に $S(\{i\}) \neq S(\{j\})$ とすれば、仮定よりシステムは、 g -検出可能だから generic に $S(\{i\}) \neq 0$, $S(\{j\}) \neq 0$ となり、これとあわせれば $g\text{-dim } S(\{i, j\}) = 2$ となる。 (証明終)

[定理3.5] (g -故障同値類) $D \subset N$ を故障同値類とする。① $D \cap C = \emptyset$ のとき: $d \in D$ が存在して、 $f \in E(D, \circ D)$ ならば、枝 f の始点は d である。さらに $N_1 := \{v \mid d \text{ は、} v \rightarrow C \text{ 分離節点である}\}$ とすれば、 D

$=N_1$ である。② $D \cap C \neq \emptyset$ のとき: $|D \cap C| = 1$ である。さらに $D \cap C = \{c\}$ として、 $N_1 := \{v \mid c \text{ は、} v \rightarrow C \text{ 分離節点である}\}$ とすれば、 $D = N_1$ である。

(証明) ①: $f_1, f_2 \in E(D, {}^cD)$ として f_1, f_2 の始点 d_1, d_2 が相異なるとする。 f_2 の終点を v とすれば、 $d_1 \in D, v \in D$ より、故障 d_1 と故障 v が g -識別可能であることから、補題3.2より、 $\{d_1, v\}$ から C の部分集合を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集り、 $\{P_1, P_2\}$ が存在する。 P_1 を $d_1 \rightarrow C$ 有向道、 P_2 を $v \rightarrow C$ 有向道とする。 $N(P_2) \subset {}^cD$ が成立する。なぜなら、 $d_3 \in N(P_2) \cap D$ とすれば、 P_1, P_2 は、互いに節点を共有しないので $d_1 \neq d_3$ であり、 P_3 を P_2 中の $d_3 \rightarrow C$ 有向道とすれば、 $\{P_1, P_3\}$ の存在は、補題3.2から故障 d_1 と故障 d_3 は g -識別可能を意味するが、これは、 $d_1, d_3 \in D$ に反するからである。 $P_4 := (d_2, f_2, v) \cdot P_2$ (\cdot は列の連鎖を表す) として、互いに節点を共有しない有向道の集り $\{P_1, P_4\}$ により補題3.2から故障 d_1 と故障 d_2 は g -識別可能となるが、これは、 $d_1, d_2 \in D$ に反する。これで前半が証明された。後半を証明する。 $v \in N_1$ を任意にとる。 N_1 の定義より、 $\{v, d\}$ から C の部分集合を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りは存在しないので補題3.2より、故障 v と故障 d は g -識別可能でない。 $d \in D$ より、 $v \in D$ である。逆に $v \in D$ を任意にとる。 $D \cap C = \emptyset$ より、任意の $v \rightarrow C$ 有向道は $E(D, {}^cD)$ の枝を含むがその始点は d だから、任意の $v \rightarrow C$ 有向道は、 d を通る。ゆえに、 $v \in N_1$ である。

②: $c_1, c_2 \in D \cap C$ とする。 $P_1 := (c_1), P_2 := (c_2)$ (長さ0の有向道) とする。 $c_1 \neq c_2$ とすれば、 $\{P_1, P_2\}$ は、 $\{c_1, c_2\}$ から C の部分集合を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りだから、補題3.2より故障 c_1 と故障 c_2 は g -識別可能である。これは、 $c_1, c_2 \in D$ に反する。

つまり、 $|D \cap C| = 1$ である。 $D = N_1$ の証明は、①の場合と同様である。

(証明終)

(例) 図3.1に示す Coates グラフをもつシステムに対して、観測節点 C を $C = \{1, 4, 7, 11, 15\}$ とする。このとき、 g -故障同値類は、 $\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5\}, \{6, 7\}, \{8, 9\}, \{10, 11\}, \{12, 13\}, \{14\}, \{15\}$ である。これらは、定理3.5の特徴付けを満たしている。

(例終)

つぎに、システムを $g-1$ 重識別可能とするための観測節点 C の設計法を考える。有向グラフ G_A のシンクとは、強連結成分のうち他の強連結成分へ向かう枝を持たないものをいう。 G_A の節点 v 開放グラフ $G_A({}^c\{v\})$ は、 $G_A({}^c\{v\}, E({}^c\{v\}, {}^c\{v\}))$ のことを意味する。

[定理3.6] (観測節点の設計法) 節点集合 N の部分集合の系 H を

$$H := \{H \subset N \mid \exists v \in N, H \text{ は } G_A({}^c\{v\}) \text{ のシンク}\} \quad (3.11)$$

と定義する。観測節点 $C \subset N$ のもとで、システム (A, C) が、 $g-1$ 重識別可能となるためには、任意の $H \in H$ に対して、 $H \cap C \neq \emptyset$ となることが必要十分である。

(証明) 必要性: $H \cap C = \emptyset$ となる $H \in H$ が存在したとする。 H の定義より、ある $v \in N$ について H は $G_A({}^c\{v\})$ のシンクである。 $w \in H$ を任意に選ぶ。 $v \neq w$ に注意する。 H は、 $H \cap C = \emptyset$ を満たす $G_A({}^c\{v\})$ のシンクだから、任意の $w \rightarrow C$ 有向道は、節点 v を通る。従って、 $\{v, w\}$ から C の部分集合を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りは存在し

ないので、定理3.2よりシステムは $g-1$ 重識別可能ではない。

十分性： 逆に、システムは $g-1$ 重識別可能ではないとする。定理3.2より $J = \{i, j\} \subset N$, $i \neq j$ と $v \in N$ とが存在して、 v は $J \rightarrow C$ 分離節点である。 $i \neq j$ より、 i または j は $G_A(c\{v\})$ の節点である。仮に i がそうであるとしよう。 $G_A(c\{v\})$ 中には $i \rightarrow C$ 有向道が存在しないので、 $G_A(c\{v\})$ 中で i より到達可能なシンクの一つを H とすれば、 $H \cap C = \emptyset$ となる。 (証明終)

(注意3.3) 定理3.6より、システムを $g-1$ 重識別可能とするためには、 G_A 中で自己ループを除いて出次数が1の節点は必ず観測しなければならない。また、定理3.6によると $g-1$ 重識別可能を達成する観測節点設計問題はクラス H を覆う集合 C を求める問題(被覆問題)に帰着される。

表3.1 一節点開放グラフのシンクの全体からなる系 H

シンク	一節点開放グラフ	節 点														
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
H ₁	$G_A(c\{1\})$		⊙													
H ₂	$G_A(c\{1\})$			⊙												
H ₃	$G_A(c\{1\})$				⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙
H ₄	$G_A(c\{2\})$	⊙		⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙
H ₅	$G_A(c\{3\})$	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙
H ₆	$G_A(c\{4\})$	⊙	⊙	⊙												
H ₇	$G_A(c\{5\})$	⊙	⊙	⊙	⊙									⊙		
H ₈	$G_A(c\{6\})$	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙								⊙		
H ₉	$G_A(c\{7\})$						⊙									
H ₁₀	$G_A(c\{8\})$							⊙								
H ₁₁	$G_A(c\{9\})$								⊙							
H ₁₂	$G_A(c\{9\})$													⊙	⊙	
H ₁₃	$G_A(c\{10\})$									⊙				⊙	⊙	
H ₁₄	$G_A(c\{11\})$										⊙					
H ₁₅	$G_A(c\{12\})$											⊙				
H ₁₆	$G_A(c\{13\})$												⊙			
H ₁₇	$G_A(c\{14\})$															⊙
H ₁₈	$G_A(c\{14\})$	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙
H ₁₉	$G_A(c\{15\})$	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙

(例) 定理3.6に従って、図3.1の Coates グラフをもつシステムを $g-1$ 重識別可能とするための観測節点の設計を行なう。表3.1に一節点開放グラフのシンクの全体からなる系 H を示す。注意3.3に従って出次数1の節点 $C = \{2, 3, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14\}$ を観測節点とする。このときには、表3.1の '◎' に示すように、任意の $H \in \mathcal{H}$ に対して、 $H \cap C \neq \emptyset$ となるので、定理3.6よりこのシステムはこの観測節点の選び方により $g-1$ 重識別可能となる。

(例終)

3.3 定常状態にあるコンパートメントシステム

ここでは、定常状態にあるコンパートメントシステムに対して故障診断問題を考察する。3.2の定常状態にある線形システムの場合と並行して故障の検出可能条件、識別可能条件を、代数的およびグラフ的に求める。このことにより、第2章で提案された故障診断アルゴリズムは、コンパートメントシステムに対しても適用することができる。

コンパートメントシステムは、コンパートメントと呼ばれる区画に物質が存在し、コンパートメント間を物質が保存則を満たしながら移行すると考えるダイナミカルモデルである。特にトレーサの生体内での動態から生体機能を診断するトレーサカイネティクスの解析モデルとして、医学、生物学の分野に広く応用されている。

コンパートメントシステムに関しては、解の性質、システムの可制御性、可観測性や可同定性について多くの研究がなされてきた。しかし故障診断問題に関しては同定問題以外の手法で考察された例は見当たらないようである。ここでは、コンパートメントシステムの定常状態に着目し、第2章で考察した故障診断手法を定常状態にあるコンパートメントシステムに適用することを考える。

まず、コンパートメントシステムの記述、およびその定常状態について述べたあと、故障観測部分空間を具体的に与える。またこの部分空間の次元を決定

する代数的な条件を与えることにより、故障の識別可能条件を導く。つぎに、システム内の物質の流れによって決められるコンパートメント間の結合構造を表現するためにコンパートメントグラフを導入し、さきを与えた代数的な条件をグラフ条件に置き換える。また単一故障の仮定のもとでは、これらの条件は検証のより容易な有向道条件に置き換えられる。

3.3.1 コンパートメントシステムの記述・その定常状態

ここでは、まずコンパートメントシステムの記述を与え、後述する二種類のシステムについてその定常状態を記述する線形方程式を与える。このことにより、定常状態にあるコンパートメントシステムの故障診断は、第2章と同じ枠組みでできることがわかる。

コンパートメントシステムは、

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times r} \quad (3.12)$$

$$y = Cx, \quad y \in \mathbb{R}^m, C \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (3.13)$$

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = k_{ij}, \quad (i \neq j), \quad i, j \in n := \{1, \dots, n\}$$

$$a_{jj} = -k_{0j} - \sum_{i \neq j} k_{ij} \quad (3.14)$$

と記述される。A をコンパートメント行列という。ここで k_{ij} ($i \in n_0 := \{0, \dots, n\}$, $j \in n$) は、コンパートメント j からコンパートメント i ($i = 0$ のときは外界) への物質移行の比例定数で、移行係数と呼ばれる。コンパートメントシステムは、系内から外界への物質移行（これを漏れという）がない場合 ($k_{0j} = 0$, すべての $j \in n$) と、それがある場合（ある j について $k_{0j} \neq 0$ ）の二種類に大別される。前者の漏れのないシステムを閉コンパートメントシステム（以後閉システムと呼ぶ）、後者の漏れのあるシステムを開コンパートメントシステム（以後開システムと呼ぶ）という。

閉システムの場合、式(3.12)で入力を零としたとき、状態 x は、ある定常状態へと収束する。このとき物質は、3.3.3で述べるコンパートメントグラフの言葉を用いれば、他の強連結成分への移行を持たないシンクと呼ばれる強連結成分に集中する。従って、定常状態に関するかぎり閉システムは、単一のシンクだけから成り立っていると仮定して一般性を失わない。これは、コンパートメント行列 A が既約であることと等価である。以下では、閉システムに対しては常にこの仮定をおく。このとき定常状態 x は、全物質質量 ω を既知とすれば、

$$Ax = 0, \quad 1^T x = \omega, \quad 1^T = (1, \dots, 1) \quad (3.15)$$

によって唯一に定まる。移行係数の非負性により、状態量 $x > 0$ (すべての成分が非負であることを意味する) となる。

開システムの場合、漏れのないシンクがあれば、その部分だけを閉システムとして扱えばよいので、すべてのシンクに漏れがあるとす。このとき移行係数の非負性によりコンパートメント行列は正則となるので、式(3.12)において一定入力 u を加えた場合、定常状態 x は、

$$Ax + Bu = 0 \quad (3.16)$$

により一意的に定まる。この場合、3.3.3で述べるコンパートメントグラフ上で、任意の節点は入力節点から到達可能であるとすれば、移行係数の非負性により、状態量 $x > 0$ となる。

3.3.2 代数的な識別可能条件

ここでは、移行係数の一部が正常時と異なる値に変化する故障が発生したと

きの故障観測部分空間を求めることにより、第2章で述べた故障診断の原理が適用できることを示す。

移行係数の一部 k_{ji} , $(i, j) \in J \subset n \times n_0$ が正常時と異なる値 $k_{ji} + \Delta_{ji}$ に変化する故障を故障 J とよぶ。この故障により、コンパートメント行列、定常状態、その観測値がそれぞれ A' , x' , y' へと変化したとする。定常状態観測値の正常時との差、 $\Delta y := y' - y$ は、故障 J によって定まる故障観測部分空間に含まれることを以下で示す。

(a) 閉システムの場合

定常状態は式(3.15)で唯一に決定される。 $A^* := [A^T, 1]^T$ とおく。 A^* は A の既約性の仮定より行最大階数をもつので左逆行列が存在する。その一つを $[A^-, f]$ とおく。故障 J が発生したとすると、

$$\begin{aligned} \Delta y &= C(x' - x) & (3.17) \\ &= C[A^-, f]A^*(x' - x) \\ &= CA^- \sum_{(i, j) \in J} x'_i \Delta_{ji} \varepsilon_{ji} \end{aligned}$$

(ここで x'_i は x' の第 i 成分をさす)

$$\varepsilon_{ji} = e_i - e_j \quad (3.18)$$

となる。 ε_{ji} , $(i, j) \in J$ を横に並べた $n \times |J|$ 行列を F^J で表す。式(3.17)より、観測値の故障時と正常時の差、 Δy は、部分空間、 $R(CA^- F^J)$ に含まれている。 A^* の左逆行列は一意ではないが、(イ) f は、 $Af = 0$, $1^T f = 1$ より一意に決まること、(ロ) $x \in R(A)$ に対して A^-x は左逆行列の選び方に無関係に定まること、に注意しておく。 $R(F^J) \subset R(A)$ (これは、後述する接続行列 F を用いて、式(3.25)と $\text{rank } F = \text{rank } A = n - 1$ より示される)であるから、部分空間 $R(CA^- F^J)$ は J に対して一意に定まる。また、定常状態は正值であるから、故障 J が発生したとき Δy はこ

れより小さな部分空間に限定されることはない。従って、故障観測部分空間 $S(J)$ として $S(J) = R(CA^{-1}F^J)$ となる。

(b) 開システムの場合

定常状態は、式(3.16)によって唯一に決定される。故障 J が発生したとすると、

$$\Delta y = C(x' - x) \quad (3.19)$$

$$= CA^{-1} \sum_{(i,j) \in E} x'_i \Delta_{ji} \varepsilon_{ji}$$

$$\varepsilon_{ji} = e_i - e_j \quad (j \neq 0), \quad e_i \quad (j = 0) \quad (3.20)$$

となる。閉システムのとおり同様に F^J を定義すれば、式(3.19)より、観測値の故障時と正常時の差、 Δy は、部分空間、 $R(CA^{-1}F^J)$ に含まれている。また、定常状態は正值であるから、故障 J が発生したとき Δy はこれより小さな部分空間に限定されることはない。従って、故障観測部分空間 $S(J)$ として $S(J) = R(CA^{-1}F^J)$ となる。

さて以下では、故障観測部分空間の次元を代数的な条件で表現する。この代数的条件は、次節のグラフ的条件を導出するときにも有用である。

故障 J のうち $|J| = \text{rank } F^J$ を満たすものを基本故障という。任意の故障 J に対して $R(F^J) = R(F^{J'})$ となる基本故障 J' が存在する。基本故障のグラフ的特徴づけは後述する。

[補題3.3] (閉システムの故障観測部分空間の次元) 閉システムについて、 $\dim S(J) = k$ となる必要十分条件は、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & F^J \\ 1^T & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + k \quad (3.21)$$

である。

(証明) 式(3.21)の行列に行変換を施して、

$$\begin{bmatrix} I_{n+1} & 0 \\ C[A^-, f] & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & F^J \\ 1^T & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & F^J \\ 1^T & 0 \\ 0 & CA^-F^J \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

と変形する。ここで $R(F^J) \subset R(A)$ に注意すれば、適当な行列 P を用いて、 $F^J = AP$ と書けるので

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A \\ 1^T \end{bmatrix} A^-F^J &= \begin{bmatrix} A \\ 1^T \end{bmatrix} (I_n - f 1^T) P \\ &= \begin{bmatrix} A & - & 0 \\ 1^T & - & 1^T \end{bmatrix} P \\ &= \begin{bmatrix} F^J \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.23)$$

となる。式(3.22), (3.23)より、さらに式(3.22)の行列に列変換を施して、補題の結果を得る。 (証明終)

[補題3.4] (開システムの故障観測部分空間の次元) 開システムについ

て、 $\dim S(J) = k$ となる必要十分条件は、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & F^J \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + k \quad (3.24)$$

である。

(証明) これは、式(3.22)に類似の変形により示されるので、詳しい証明は、省略する。 (証明終)

3.3.3 識別可能グラフ条件

ここでは、3.3.2で求めた故障観測部分空間の次元に関する代数的条件をコンパートメント間の結合構造を表すコンパートメントグラフを用いてグラフ的な条件に置き換える。これにより、命題2.1からわかるようにシステムの $g-k$ 重識別可能条件を与えることができる。

コンパートメントグラフ $G_c(N_c, E_c)$ は、つぎのように定義される。 N_c は、 n 個のコンパートメントと外界に、つまり n_0 と一対一対応をもつ節点集合である。 E_c は $k_{ji} \neq 0$ に対応して書いた有向枝 (i, j) からなる枝集合である。以下では、非零移行係数が零でなくなる故障は考えないことにする。つまり、グラフの構造自体を変える故障は考えない。すると、3.3.2で述べた故障集合 J は、枝集合 E_c の部分集合と考えられる。また、3.2と同じくシステム観測は、 m 個のコンパートメント $C \subset N_c$ (観測行列 C と同じ文字で表す。どちらを表すかは文中で明らかであるのでこの書き方を用いる) の物質量を観測する。つまり、観測行列 C は、各行が単位ベクトルの行最大階数の行列とする。

グラフ G_c の接続行列を F で表す。ただし、外界節点 0 に対応した行

は省略して、 $n \times |E_c|$ 行列とする。コンパートメント行列 A は、

$$A = -FKF^+I \quad (3.25)$$

と表現できる [7]。ここで K は、非零移行係数を接続行列 F の列の順に並べた対角行列、 F^+ は、 F の -1 を 0 で置き換えた行列である。

接続行列 F と行列 F^+ の行はグラフの節点に、列は枝に対応しているので、行に対する添字集合と節点集合の部分集合 $N_{c0} := N_c \setminus \{0\}$ とを、列に対する添字集合と枝集合 E_c とをそれぞれ同一視する。 $I \subset N_{c0}$ に対して F_I は、 F の i 行め ($i \in I$) から成る $|I| \times |E_c|$ 行列、 $J \subset E_c$ に対して F^J は、 F の j 列め ($j \in J$) から成る $n \times |J|$ 行列とする。これらの行操作、列操作は、 F^+ に対しても定義する。また、操作の合成 $F^+I_J = F^JI$ も同様に定義される。3.3.2で定義した表記法 F^J は、この表記法と一致している。

故障集合 I, J に対して、これらが等価である必要十分条件は、部分グラフ $G_c(N_c, I)$ と $G_c(N_c, J)$ の節点集合の連結成分への分解が相等しいことである。 $\text{rank } F^J$ は、 $G_c(N_c, J)$ の階数に等しい。また故障 J が基本故障である必要十分条件は、 J の中に閉路（無向閉路をいう）をもたないことである。

まず、補題3.3, 補題3.4のグラフ表現を考える。ここで、コンパートメントグラフ $G_c(N_c, E_c)$ 中の M -根森 ($M \subset N_c$) とは、 M に含まれる節点を縮約したときに縮約節点を根とするグラフを張る内向木（グラフ中の任意の節点からその木の枝だけを通して根に到達可能となる木をいう）になるものをいう（図3.5参照）。 M -根森は、 M の節点を根とする内向木より構成される。

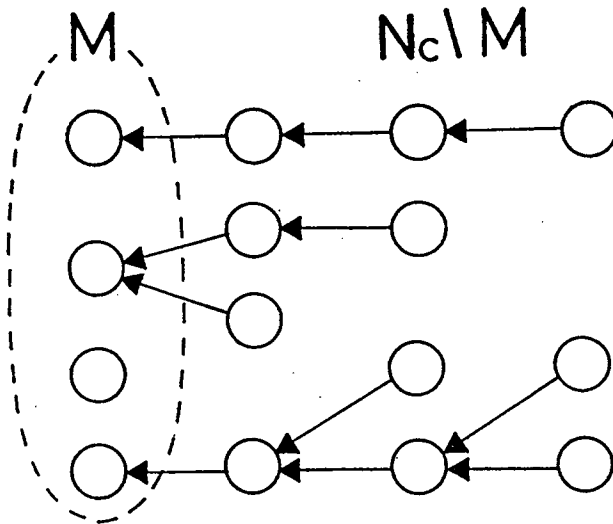


図3.5 M-根森

[定理3.7] 閉システム (A, C) を考える。基本故障 $J \subset E_c, |J| = k$ について、つぎの三条件は、等価である。

I) $g\text{-dim } S(J) = k$.

II) コンパートメントグラフ $G_c(N_c, E_c)$ の部分グラフ $G_c(N_c, E_c \setminus J)$ 中に、節点 $q \in N_{c0} \setminus C$ と $(C \cup \{q, 0\})$ -根森 W が存在して、 $W \cup J$ は閉路を含まない。

III) $J' \subset J, |J'| = k - 1$ が存在し、コンパートメントグラフ $G_c(N_c, E_c)$ の部分グラフ $G_c(N_c, E_c \setminus J')$ 中に $(C \cup \{0\})$ -根森 W' が存在して、 $W' \cup J'$ は閉路を含まない。

[定理3.8] 開システム (A, C) を考える。基本故障 $J \subset E_c, |J| = k$ について、つぎの三条件は、等価である。

I) $g\text{-dim } S(J) = k$.

II) コンパートメントグラフ $G_c(N_c, E_c)$ の部分グラフ $G_c(N_c, E_c \setminus J)$

中に、 $(C \cup \{0\})$ -根森 W が存在して、 $W \cup J$ は閉路を含まない。

Ⅲ) $N_c(J) \subset N_c$ を、 J の枝に接続する節点全体の集合とする。 $a := |N_c(J)|$ として、 $N_c(J)$ から $C \cup \{0\}$ の部分集合を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集り、 $\{P_1, \dots, P_a\}$ が存在して、 $P_1 \cup \dots \cup P_a \cup J$ は、閉路を含まない。

(注意3.4) 条件Ⅲでは表記法の簡単のため有向道 P に対して、 $E_c(P)$ を同じ文字 P で表している。

これらの定理の証明には、補題3.3, 3.4の行列条件をグラフ条件に結びつけるつぎの補題が有効である。

[補題3.5] $G_c(N_c, E_c)$ をコンパートメントグラフ、 F をその接続行列、 K, F^+ を式(3.25)のように定める。 $R \subset N_{c0}, J \subset E_c$ として、行列 $[FK(F^+R)^I, F^J]$ が generic に列最大階数をもつための必要十分条件は、 $G_c(N_c, E_c \setminus J)$ 中に $(N_c \setminus R)$ -根森 W が存在して、 $W \cup J$ は閉路を含まないことである。

(証明) $|R| + |J| = p$ とする。 S^I を $F^J = FS^I$ を満たす列選択行列とする。

必要性: 行列式に関する Cauchy Binet の公式より、 $[FK(F^+R)^I, F^J] = F[K(F^+R)^I, S^I]$ が、generic に列最大階数をもつためには、 $I \subset E_c, |I| = p$ となる枝集合が存在して、(イ) F^I は列最大階数を持ち、かつ(ロ) $[((F^+R)K)^I, (S^I)^I]$ は、generic に正則、であることが必要である。ここで、 S の列も枝に対応するので、 S^I も F に対すると同様に定義する。(イ)は、(ハ) $G_c(N_c, I)$ は閉路を含まない、と等価である。(ロ)は、

$[(F+r^I)^I, (S^I)^I]^I$ を接続行列としてもつグラフを考えることにより、(二) $I \setminus J$ の各枝が R の相異なる節点より出枝していること、に等価なことがわかる。このとき $|I| = |R| + |J|$ だから $I \supset J$ が成り立つことと、 R のどの節点からも $I \setminus J$ の枝が出ていることに注意する。従って、 $W = I \setminus J$ とすれば、(八)、(二)より、 W は、 $(N_c \setminus R)$ -根森であり、 $W \cup J = I$ は閉路を含まない

十分性： $I = W \cup J$ とする。 $|W| = |R|$ だから $|J| = p$ である。このとき(八)、(二)が成立している。 W に属する枝以外の移行係数を0に固定すれば、(八)すなわち(イ)が成立していることから、 $I' \subset N_{c0}$ 、 $|I'| = p$ を F^{J^I} が正則となるようにとることができる。このとき $\det(F^{I'} \cdot [K(F+r)^I, S])$ の Cauchy Binet の公式による展開は、ただ一つの非零項、 $\det F^{I'} \cdot \det [((F+rK)^I)^I, (S^I)^I]$ より成る。従って、 $[FK(F+r)^I, F^J]$ は、generic に列最大階数である。 (証明終)

(定理3.7の証明) J は、基本故障であるから、 F^J は列最大階数である。従って、補題3.3より、 $g\text{-dim } S(J) = k$ となる必要十分条件は、式(3.21)の行列が generic に列最大階数をもつことである。はじめに、このことが、a) 節点 $q \in N_{c0} \setminus C$ が存在して、 $R := N_{c0} \setminus (C \cup \{q\})$ とするとき、 $[FK(F+r)^I, F^J]$ が generic に列最大階数をもつこと、と等価であることを示す。まず、式(3.21)の行列が generic に列最大階数をもつことと、つぎの式(3.26)の行列が generic に列最大階数をもつこととは、等価である。

$$\begin{bmatrix} FK(F+c^{\cdot})^I & F^J \\ 1^I & 0 \end{bmatrix}, C' := N_{c0} \setminus C \quad (3.26)$$

これは行列 C の1を使って、その列の要素を0とする行変換を施せば明らか

である。式(3.26)の行列が generic に列最大階数をもてば、 $[FK(F+c\cdot)^T, F^J]$ の階数は、(列数-1)以上あるので、 F^J が列最大階数であることに注意すれば、a) が成立している。逆に a) が成立しているとすれば、 q より出る枝に対応する移行係数を 0 に固定することにより式(3.26)の行列が generic に列最大階数をもつことがわかる。

I \Leftrightarrow II : a) に補題3.5を適用すればよい。

II \Rightarrow III : T_qCW を、 q -根木 (q を根とする内向木) とする。 G_c 中の N_{c_0} は強連結だから、節点 q から T_q へ接続しない N_{c_0} の任意の節点へ到達可能である。そのような一つの有向道中で T_q へ接続しない最初の節点までの部分有向道を P 、 P の終点が接続している W 中の内向木を T_{c_1} ($c_1 \in C$) とする。 $T_q \cup T_{c_1}$ に接続する節点を張る c_1 -根木 $T'_{c_1} \subset T_q \cup T_{c_1} \cup P$ が存在する。 W 中の T_q, T_{c_1} 以外の内向木と T'_{c_1} とで $(C \cup \{0\})$ -根森 W' が構成される。 J 中に、 T_q, T_{c_1} の双方に隣接する枝があれば (II の条件より存在すれば唯一である) それを e 、なければ J 中の任意の枝を e として $J' := J \setminus \{e\}$ とおけば、III が満たされている。

III \Rightarrow II : $W' \cup J$ 中に閉路のない場合には、 N_{c_0} 中の任意の節点を q 、 q より出る W' 中の唯一の枝を b とする。 $W' \cup J$ 中に閉路を含む場合には、その閉路中の枝 $b \in W'$ をとり、その始点を q とする。 $\tilde{W} = W' \setminus \{b\}$ は、 $G_c(N_c, E_c \setminus J)$ 中の $(C \cup \{q, 0\})$ -根森であり、 $W \cup J$ は閉路を含まない。 (証明終)

(定理3.8の証明) I \Leftrightarrow II : J は、基本故障であるから、 F^J は列最大階数である。従って、補題3.4より、 $g\text{-dim } S(J) = k$ となる必要十分条件は、式(3.24)の行列が generic に列最大階数をもつことである。行列 C の 1 を使ってその列を 0 にする行変換を施せばこの条件は、 $[FK(F+c\cdot)^T, F^J]$, $C' := N_{c_0} \setminus C$, が generic に列最大階数をもつことと等価なこと

がわかる。この行列に補題3.5を適用することにより、IとIIの等価性を得る。

II \implies III : $N_c(J)$ の各節点より森 W を通って $(C \cup \{0\})$ に至る有向道の集りを $\{P_1, \dots, P_a\}$ とする。 $W \cup J$ は閉路を含まないので、 $P_1 \cup \dots \cup P_a \cup J \subset W \cup J$ も閉路を含まない。

III \implies II : G_c の任意の節点は0へ到達可能だから、 $E_c \setminus J$ の枝を通して0または P_1, \dots, P_a に接続する節点に到達可能である。それらの有向道と P_1, \dots, P_a とから $(C \cup \{0\})$ -根森 W を $W \cup J$ は閉路を含まないように作れる。 (証明終)

命題2.1とこれらの定理3.7, 定理3.8より、つぎの g - k 重識別可能条件は、直ちに導ける。

[定理3.9] (閉システム g - k 重識別可能条件) 閉システム (A, C) が、generic に k 重識別可能であるためには、つぎの等価な二条件のうちどちらかが成り立つことが必要十分である。以下では、故障 $J \subset E_c$ を $|J| = k + 1$ を満たす任意の基本故障とする。

1) コンパートメントグラフ $G_c(N_c, E_c)$ の部分グラフ $G_c(N_c, E_c \setminus J)$ 中に、節点 $q \in N_{c0} \setminus C$ と $(C \cup \{q, 0\})$ -根森 W が存在して、 $W \cup J$ は閉路を含まない。

2) $J' \subset J$, $|J'| = k - 1$ が存在し、コンパートメントグラフ $G_c(N_c, E_c)$ の部分グラフ $G_c(N_c, E_c \setminus J')$ 中に $(C \cup \{0\})$ -根森 W' が存在して、 $W' \cup J'$ は閉路を含まない。

[定理3.10] (開システム g - k 重識別可能条件) 開システム (A, C) が、generic に k 重識別可能であるためには、つぎの等価な二条件のうちどちらかが成り立つことが必要十分である。以下では、故障 $J \subset E_c$ を $|J| = k +$

1 を満たす任意の基本故障とする。

1) コンパートメントグラフ $G_c(N_c, E_c)$ の部分グラフ $G_c(N_c, E_c \setminus J)$ 中に、 $(C \cup \{0\})$ -根森 W が存在して、 $W \cup J$ は閉路を含まない。

2) $N_c(J) \subset N_c$ を、 J の枝に接続する節点全体の集合とする。 $a := |N_c(J)|$ として、 $N_c(J)$ から $C \cup \{0\}$ の部分集合を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集り、 $\{P_1, \dots, P_a\}$ が存在して、 $P_1 \cup \dots \cup P_a \cup J$ は、閉路を含まない。

最後に、単一故障を識別できるためのグラフ条件、 $g-1$ 重識別可能条件を導く。これらは、閉システム、開システムに対してそれぞれ定理3.9, 定理3.10の系として与えられるが、より検証の容易な有向道条件で与えられる。

[系3.2] (閉システム $g-1$ 重識別可能条件) 閉システム (A, C) が、generic に 1 重識別可能であるための必要十分条件は、任意の基本 2 重故障 $J \subset E_c$ に対して、枝 $b \in J$ があって G_c 中に b の両端点から C の部分集合を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りが存在することである。

(証明) 系3.2の条件が、 $k=1$ の場合の定理3.9の条件Ⅲに等価であることを示す。

必要性: $J' := \{b\}$ とする。 $W' \cup J'$ は閉路を含まないので、 b の両端点からそれぞれ W' を通って C へ至る有向道は、節点を共有しない。

十分性: それらの有向道を P_1, P_2 とする。 G_c 中で N_{c0} は強連結だから任意の N_{c0} の節点から $E_c \setminus \{b\}$ を通って C または、 P_1, P_2 中の節点へ到達可能である。従って、それらの有向道と P_1, P_2 から $(C \cup \{0\})$ -根森 W' を $W' \cup \{b\}$ は閉路を含まないように作れる。 (証明終)

[系3.3] (開システム $g-1$ 重識別可能条件) 開システム (A, C) が、generic に1重識別可能であるためには、つぎの等価な二条件のうちどちらかが成り立つことが必要十分である。

1) $G_c(N_c, E_c)$ の任意の三節点から $(C \cup \{0\})$ の部分集合を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りが存在する。

2) $G_c(N_c, E_c)$ の任意の二節点開放グラフ、 $G_c(N_c \setminus U, E_c(N_c \setminus U, N_c \setminus U))$ 、 $|U|=2$ 、上で任意の節点 $v \in N_c \setminus U$ から $C \cup \{0\} \setminus U$ へ到達可能である。

(証明) 系3.3の二条件が等価であることは、Menger の定理より直ちにわかる。

必要性： 条件2が不成立とする。 U ($|U|=2$) に対して $G_c(N_c \setminus U, E_c(N_c \setminus U, N_c \setminus U))$ 中に $C \cup \{0\} \setminus U$ へ到達不可能な節点があるとし、その節点集合を N' とする。 $E_u := E_c(N', U)$ とする。 N_c の任意の節点は、 $G_c(N_c, E_c)$ で0へ到達可能だから $E_u \neq \emptyset$ である。 $|E_u|=1$ ならば、 $E_u \subset J$ となる基本2重故障に対して、 $G_c(N_c, E_c \setminus J)$ 中には $(C \cup \{0\})$ -根森は存在しない。また、 $|E_u| \geq 2$ ならば $J \subset E_u$ となる基本2重故障をとる。 $G_c(N_c, E_c \setminus J)$ 中に $(C \cup \{0\})$ -根森 W が存在すると仮定する。 J の始点節点集合から W を通って $(C \cup \{0\})$ へ至る有向道は必ず U を通るので $W \cup J$ は閉路を含む。従って、定理3.10の条件IIが成り立たないので、システムは $g-1$ 重識別可能ではない。

十分性： 条件1が成立するとする。 J を任意の基本2重故障とする。 $|N_c(J)|=3$ ならば、条件1より $N_c(J)$ から $(C \cup \{0\})$ の部分集合を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りが存在する。これは、定理3.10の条件IIIを満たしている。 $|N_c(J)|=4$ ならば、 $J = \{j_1, j_2\}$ 、 $N_{c1} := N_c(\{j_1\})$ とする。条件1より N_{c1} から $(C \cup \{0\})$ の部分集合を結ぶ互いに

節点を共有しない有向道の集り、 $\{P_1, P_2\}$ と、 $N_{c2} \subset X \subset N_c(J)$, $|X|=3$ として X から $(C \cup \{0\})$ の部分集合を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集り、 $\{P_3, P_4, P_5\}$ が存在する。これらの有向道の切断、連鎖作用により定理3.10の条件Ⅲを満たす四つの有向道 P'_1, \dots, P'_4 を作れる。

(証明終)

(例) 閉システム、開システム共にグラフ条件は類似しているので、閉システムに対する定理3.9、系3.2の適用例を示す。図3.6で示されるコンパートメントグラフ $G_c(N_c, E_c)$ をもつ閉システムを考えることにする。

まず $g-1$ 重識別可能とするための観測節点を求めてみる。 $C_1 = \{1, 7\}$ と選ぶ。このとき例えば基本2重故障 $\{(3,4), (3,6)\}$ に対して枝 $(3,4)$ の両端点 $\{3,4\}$ から C_1 を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りが存在する。同様にして任意の基本2重故障に対して系3.2の条件を満たす有向道の集りが存在することが示されるので、系3.2よりこのシステムは観測節点 C_1 のもとで $g-1$ 重識別可能である。

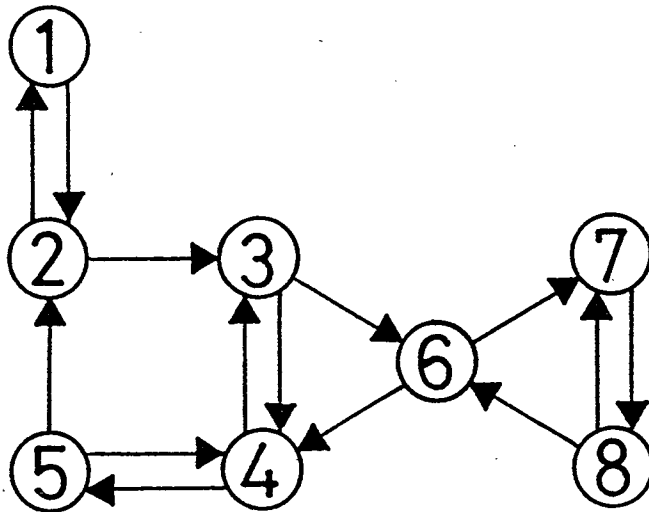


図3.6 例のコンパートメントグラフ

つぎに $g-2$ 重識別可能とするための観測節点を求めてみる。 $C_2 = \{1, 4, 7\}$ と選ぶ。このとき例えば基本3重故障 $\{(3, 4), (3, 6), (6, 7)\}$ に対して、それに含まれる基本2重故障 $E_1 = \{(3, 4), (3, 6)\}$, $E_2 = \{(3, 4), (6, 7)\}$, $E_3 = \{(3, 6), (6, 7)\}$ のいずれについても定理3.9の条件2を満たす根森は存在しないことが示される。従って、定理3.9よりこのシステムは観測節点 C_2 のもとで $g-2$ 重識別可能でない。 $C_3 = \{1, 4, 6, 7\}$ と選ぶ。このとき E_2 に対して、 $G_c(N_c, E_c \setminus E_2)$ 中に $(C \cup \{0\})$ -根森 W' が存在する(図3.7参照)。同様にして任意の基本3重故障に対して定理3.9の条件2を満足する根森の存在が示されるので、定理3.9よりこのシステムは観測節点 C_3 のもとで $g-2$ 重識別可能である。 (例終)

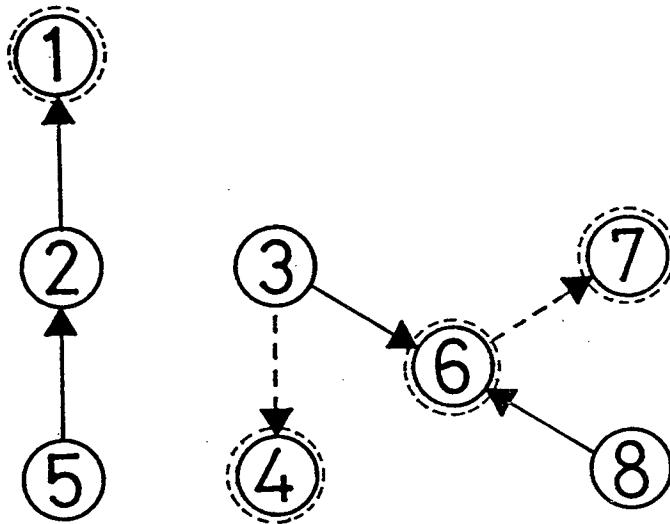


図3.7 $G_c(N_c, E_c \setminus E_2)$ 中の $(C \cup \{0\})$ -根森 W'

3.4 線形ダイナミカルシステムへの適用

ここでは、線形微分方程式で記述されるダイナミカルな線形システムに対して故障診断問題を考察する。ここで対象とする線形ダイナミカルシステムは、三つの形—状態方程式・中間標準形・複合システム—で記述される。まず、サ

システム間の結合関係を表現するために、システム構造とそのグラフ表現を導入する。つぎに、故障観測部分空間を具体的に求め、その次元のグラフ表現を与えることにより、故障の識別可能条件、故障診断アルゴリズムの中の被覆集合をグラフ的に特徴づける。

3.4.1 システム構造とその表現グラフ

ここで対象とする線形ダイナミカルシステムは、つぎの三つの形—状態方程式・中間標準形・複合システム—で記述される。

(1) 状態方程式

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.27)$$

$$y = Cx \quad (3.28)$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times r}, C \in \mathbb{R}^{m \times n}, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r, y \in \mathbb{R}^m$$

(2) 中間標準形

$$E \dot{x} = Ax + Bu \quad (3.29)$$

$$y = Cx \quad (3.30)$$

$$E \in \mathbb{R}^{n \times n}, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times r}, C \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

$$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r, y \in \mathbb{R}^m$$

中間標準形では、 $\det (sE - A) \neq 0$ を仮定する。

(3) 複合システム

n 個の一入力—出力サブシステムが結合した複合システムを考える。 i 番め ($i \in n = \{1, \dots, n\}$) のサブシステムの入出力特性が、

$$x_i(s) = g_i(s) u_i(s) \quad (3.31)$$

x_i : i 番めのサブシステムの出力

u_i : i 番めのサブシステムの入力

g_i : i 番めのサブシステムの伝達関数

で与えられるとする。システム全体の記述は $x(s) = (x_1(s), \dots, x_n(s))^T$, $u(s) = (u_1(s), \dots, u_n(s))^T$, $G(s) = \text{diag} \{g_1(s), \dots, g_n(s)\}$ として、

$$x(s) = G(s)u(s) \quad (3.32)$$

$$u(s) = Lx(s) + Bv(s) \quad (3.33)$$

$$y(s) = Cx(s) \quad (3.34)$$

$$L \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times r}, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

となる。行列 L がサブシステム間の結合を表している。複合システムでは、 $\det(I_n - G(s)L) \neq 0$ を仮定する。

ここで、それぞれのシステムのシステム構造について説明しておく。状態方程式では、状態変数 x の第 i 成分が i 番めのシステムの構成要素に対応していると考えれば、 $a_{ij} \neq 0$ ($A = (a_{ij})$) は、 j 番めのシステムの構成要素が i 番めのシステムの構成要素の状態変化に影響を与える係数を表している。

中間標準形では、 i 番めの式が i 番めのシステムの構成要素を記述する式であるとすれば、 $e_{ij} \neq 0$ ($E = (e_{ij})$) または $a_{ij} \neq 0$ ($A = (a_{ij})$) は、 j 番めのシステムの構成要素が i 番めのシステムの構成要素の状態変化に影響を与える係数を表している。複合システムでは、 $l_{ij} \neq 0$ ($L = (l_{ij})$) は、 j 番めのサブシステムの出力と i 番めのサブシステムの入力の間に結

合があること表している。以上のように、行列 A （または行列 E , A 、または行列 L ）の非零要素は、システムの構成要素間の結合関係を表していると考えられるので、その非零要素の配置のことをシステムの結合構造とよぶことにする。また、観測式(3.28), (3.30), (3.34)で観測行列 C は、各行が単位ベクトルからなる行フルランクの行列とする。このことは n 個の変数のうち m 個を観測することを意味する。行列 C の非零要素はシステムの観測構造を与える。システムの結合構造とシステムの観測構造をあわせてシステムの構造とよぶ。

これらのシステムの構造を表現するには、グラフを用いるのが便利である。状態方程式に対しては、つぎの二種類のグラフを用いる。つまり行列 $sI - A$ の Coates グラフ $G_A(N, E)$ と、行列 $sI - A$ の二部グラフ $G_b(N_r, N_c, E_b)$ である。Coates グラフ $G_A(N, E)$ の節点集合 $N = \{1, \dots, n\}$ は、変数 x の添字集合 $n := \{1, \dots, n\}$ と一対一に対応している。有向枝集合 E は、 $(i, j) \in E_A \iff a_{ji} \neq 0$ によって定められる A 枝集合 E_A と、各節点にある自己ループからなる s 枝集合 $E_s := \{(i, i) \mid i \in N\}$ の非共通和 $E = E_A \cup E_s$ からなる。二部グラフ $G_b(N_r, N_c, E_b)$ の節点集合は、 A の行添字集合 $\{1, \dots, n\}$ と一対一に対応した行節点集合 $N_r = \{\pi_r(1), \dots, \pi_r(n)\}$ （ここで π_r は $N \rightarrow N_r$ への自然な一対一対応を与える）、同様に定義された列節点集合 N_c (π_c も同様に定義される) からなる。枝集合 E_b は、 $(\pi_r(i), \pi_c(j)) \in E_{bA} \iff a_{ij} \neq 0$ によって定められる A 枝集合 E_{bA} と、 $(\pi_r(i), \pi_c(i))_s$ からなる s 枝集合 E_{bs} の非共通和 $E_b = E_{bA} \cup E_{bs}$ からなる。中間標準形に対しては、行列 $sE - A$ の二部グラフ $G_b(N_r, N_c, E_b)$ を用いる。節点集合は、 $A(E)$ の行添字集合 $\{1, \dots, n\}$ と一対一に対応した行節点集合 $N_r = \{\pi_r(1), \dots, \pi_r(n)\}$ （ここで π_r は $N \rightarrow N_r$ への自然な一対一対応を与える）と、同様に定義された列節点集合 N_c (π_c も同様に定義される) からなる。枝集合 E_b は、

$(\pi_r(i), \pi_c(j)) \in E_b \iff a_{ij} \neq 0$ または $e_{ij} \neq 0$, によって定められる。複合システムに対しては、行列 L の Coates グラフ $G_L(N, E)$ を用いる。節点集合 N は、 n 個のサブシステムに一対一に対応した大きさ n の集合である。有向枝集合 E は、 $(i, j) \in E \iff l_{ji} \neq 0$ によって定められる。なお、その他の用語および表記法は 3.2 に準じる。また、これらのグラフは、3.2 でのグラフまたは 3.4 での三つの形に対するグラフどうしてお互いに同じ記号を用いているが、文中よりどちらのグラフを用いているかは明らかなので、このことは問題にならない。

3.4.2 代数的な識別可能条件

3.4.1 で述べたように i 番めの式が i 番めのシステム構成要素に対応すると考えているので、 i 番めのシステム構成要素が故障したときの故障要素ベクトルは e_i である。このことから、故障集合は $\{1, \dots, n\}$ の部分集合、または 3.2 で説明したようにシステム表現グラフの節点集合の部分集合と考えられる。以下では、第 2 章で述べた故障診断アルゴリズムを線形ダイナミカルシステムに適用するために故障 $J \subset \{1, \dots, n\}$ が発生したときの故障観測部分空間を求める。

故障 J が発生したときシステム記述(3.27), (3.29), (3.32)は、それぞれ故障ベクトル ε を用いて、

$$\dot{x} = Ax + Bu + \varepsilon \quad (3.35)$$

$$E \dot{x} = Ax + Bu + \varepsilon \quad (3.36)$$

$$x = Gu + \varepsilon \quad (3.37)$$

となる。ここで、故障ベクトル ε は、第 i 要素、 $i \in J$, のみに非零要素をもつ。第 2 章の式(2.2)にあわせるため、式(3.35), (3.36)については、ラプ

ラス変換を施して、

$$(sI - A)x(s) = Bu(s) + x_0 + \varepsilon(s) \quad (3.38)$$

$$(sE - A)x(s) = Bu(s) + Ex_0 + \varepsilon(s) \quad (3.39)$$

$$(I - G(s)L)x(s) = G(s)Bv(s) + \varepsilon(s) \quad (3.40)$$

を得る。すなわち、第2章の式(2.2)の線形写像 A としてそれぞれ、 $sI - A$ 、 $sE - A$ 、 $I - G(s)L$ をとり、故障要素ベクトルとして単位ベクトル e_1, \dots, e_n をとるならば、第2章の以下の議論を適用できる。このとき、故障観測部分空間は、それぞれ

$$S(J) = \text{span} \{C(sI - A)^{-1}e_i, i \in J\} \quad (3.41)$$

$$S(J) = \text{span} \{C(sE - A)^{-1}e_i, i \in J\} \quad (3.42)$$

$$S(J) = \text{span} \{C(I - G(s)L)^{-1}e_i, i \in J\} \quad (3.43)$$

となる。ここで、係数体は、 ΛR 、すなわち実係数を持ち、最大巾をもつ $s = \infty$ での形式的なローラン級数を要素とする体とする。つまり、 $z, z', z'' \in \Lambda R$ として、 $z = \sum_{t=t_0}^{\infty} z_t s^{-t}$ 、 $z_t \in R$ とするとき、和は項別和、積 $z = z' \times z''$ はたたみこみ積、 $z_t = \sum_{j=t_0}^{t-t_0} z'_j z''_{t-j}$ で与えられる。k重識別可能条件は、この故障観測部分空間を用いて命題2.1で与えられる。次節では、システム構造表現グラフを用いて、3.2, 3.3と同様に g - k 重識別可能条件を導く。

3.4.3 グラフ的な識別可能条件

ここでは、システム構造表現グラフを用いて、グラフ的な k 重識別可能条件を導く。これらは、状態方程式と中間標準形の場合には、それぞれ行列 A

の非零要素、行列 E, A の非零要素に関する generic な性質として与えられる。そのためには、故障観測部分空間の次元を与えるつぎの定理が有用である。

[定理3.11] (状態方程式の故障観測部分空間の次元) $J \subset N, |J| = r$

とする。つぎの四条件は、等価である。

I) $k = g - \dim S(J)$

II) G_A 中に、 $J_1 \subset J$ から $C_1 \subset C, |J_1| = |C_1| = k$ 、を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りが存在し、 k は、この性質を満たす最大数である。

III) G_A 中に、 J から C を分離する集合 $D \subset N, |D| = k$ が存在し、 k は、この性質を満たす最小数である。

IV) G_b 中に、それによって飽和しない ${}^\circ C_c$ の節点数が $r - k$ である ${}^\circ J_r$ と ${}^\circ C_c$ の間のマッチングが存在し、 $r - k$ は、この性質を満たす最小数である。

(証明) 三つのグラフ条件 II・III・IVが、等価であることの証明は、定理3.1の証明と全く同じである。以下、IとIVの等価性のみを示す。これも、定理3.1の証明と同様に、式(3.6),(3.8)と類似の式を用いることにより、 $(sI - A)({}^\circ J_r, {}^\circ C_c)$ の t 次小行列式の一つが generic に零でない必要十分条件が G_b 中の大きさ t の ${}^\circ J_r$ と ${}^\circ C_c$ の間のマッチングの存在であることをいえばよい。必要性は、行列式の定義から明らかである。以下十分性を示す。 $N_0 \subset {}^\circ J, N_1 \subset {}^\circ C$ を $|N_0| = |N_1| = t, G_b$ 中に、 $\pi_r(N_0)$ と $\pi_c(N_1)$ の間の完全マッチングが存在するようにとる。 M_0 をそのような完全マッチングの中で s 枝の数が最大であるもののうちの一つとする。 $q := |M_0 \cap E_b|$ とおく。 M_0 中にない A 枝を開放除去し、それに対応する A の要素

を0に固定する。その結果得られたグラフを G_b' , 行列を A' とする。このとき、もし M_1 が、 G_b' 中の $\pi_r(N_0)$ と $\pi^c(N_1)$ の間の完全マッチングで s 枝の数が q であるとすれば、 $M_0 = M_1$ である。実際、 G_b' 中の A 枝は $(t - q)$ 本しかないので、 $M_0 \cap E_{bA} = M_1 \cap E_{bA}$ である。このことにより、 $M_0 \cap E_{bs}$ と $M_1 \cap E_{bs}$ とでそれぞれ飽和されるべき $\pi_r(N_0)$ ($\pi^c(N_1)$ についても) の節点は、一致している。これから、どの二本の s 枝も節点を共有しないので、 $M_0 \cap E_{bs} = M_1 \cap E_{bs}$ を得る。つまり $M_0 = M_1$ が得られる。従って、 $\det(sI - A')(\pi_r(N_0), \pi^c(N_1))$ を定義式に従って書き下せば、 s^q の係数は、 M_0 に対応する唯一の非零項からなるので generic に $\det(sI - A')(\pi_r(N_0), \pi^c(N_1)) \neq 0$ である。ゆえに generic に $\det(sI - A)(\pi_r(N_0), \pi^c(N_1)) \neq 0$ となる。 (証明終)

[定理3.12] (中間標準形の故障観測部分空間の次元) $J \subset N$, $|J| = r$ とする。 $k = g - \dim S(J)$ となる必要十分条件は、 G_b 中に、それによって飽和しない ${}^c C_c$ の節点数が $r - k$ である ${}^c J_r$ と ${}^c C_c$ の間のマッチングが存在し、 $r - k$ は、この性質を満たす最小数であることである。

(証明) 定理3.11の証明と同様にして、 $(sE - A)({}^c J_r, {}^c C_c)$ の t 次小行列式の一つが generic に零でない必要十分条件が、 G_b 中の大きさ t の ${}^c J_r$ と ${}^c C_c$ の間のマッチングの存在であることをいえばよい。必要性は、行列式の定義から明らかである。十分性には、マッチングに属さない枝の枝重みを零にすれば明らかである。 (証明終)

[定理3.13] (複合システムの故障観測部分空間の次元) $J \subset N$, $|J| = r$ とする。 $k = g - \dim S(J)$ となるためには、つぎの等価な二条件のいずれかを満たすことが必要である。

I) G_A 中に、 $J_1 \subset J$ から $C_1 \subset C$ 、 $|J_1| = |C_1| = k$ 、を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りが存在する。

II) G_A 中の J から C を分離する集合 $D \subset N$ は、 $|D| \geq k$ を満たす。

(証明) これは、定理3.1の証明と同じである。 (証明終)

これら定理3.11, 定理3.12, 定理3.13と命題2.1を組み合わせれば、つぎの g - k 重識別可能条件は明らかであろう。ここで証明は、省略する。

[定理3.14] (状態方程式の g - k 重識別可能条件) 状態方程式(3.27), (3.28)が、generic に k 重識別可能であるためには、つぎの等価な三条件のうち一つが成り立つことが必要十分である。以下では、故障 $J \subset N$ を $|J| = k + 1$ を満たす任意の故障とする。

1) G_A 中に、 J から $C_1 \subset C$ 、 $|J| = |C_1| = k + 1$ 、を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りが存在する。

2) G_A 中の J から C を分離する集合 $D \subset N$ は、 $|D| \geq k + 1$ を満たす。

3) G_b 中の ${}^{\circ}J_r$ と ${}^{\circ}C_c$ の間のあるマッチングによって ${}^{\circ}C_c$ の節点はすべて飽和される。

[定理3.15] (中間標準形の g - k 重識別可能条件) 中間標準形(3.29), (3.30)が、generic に k 重識別可能となる必要十分条件は $|J| = k + 1$ を満たす任意の故障 $J \subset \{1, \dots, n\}$ に対して、 G_b 中の ${}^{\circ}J_r$ と ${}^{\circ}C_c$ の間のあるマッチングによって ${}^{\circ}C_c$ が飽和することである。

[定理3.16] (複合システムの k 重識別可能条件) 複合システム(3.32),

(3.33), (3.34)が、 k 重識別可能であるためには、つぎの等価な二条件のうちどちらかが成り立つことが必要である。以下では、故障 $J \subset N$ を $|J| = k + 1$ を満たす任意の故障とする。

1) G_L 中に、 J から $C_1 \subset C$ 、 $|J| = |C_1| = k + 1$ 、を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りが存在する。

2) G_L 中の J から C を分離する集合 $D \subset N$ は、 $|D| \geq k + 1$ を満たす。

3.4.4 故障診断アルゴリズム

ここでは、定理2.1で与えた故障診断アルゴリズムを線形ダイナミカルシステムに適用することを考える。この適用にあたってステップ2で必要とした逆写像は微分操作に対応するが、故障ベクトル ε の推定量 μ が属する部分空間を見つけるためには、以下に示す左逆システムを構成すれば微分操作は不要である。以下、状態方程式の場合について述べる。

[定理3.17] (k 重故障診断アルゴリズム) 状態方程式(3.27), (3.28)は、 k 重識別可能とする。仮定2.1のもとでつぎのアルゴリズムは、 k 重故障診断法を与える。

アルゴリズム：

(ステップ1) k -被覆集合 K を求める。ここで k -被覆集合とは、つぎの二性質を満たす $N = \{1, \dots, n\}$ の部分集合の系である。

(イ) 任意の $J \in K$ について、 $|J| = m$ であり、 $\dim S(J) = m$ である。

(ロ) 任意の $J \subset N$ 、 $|J| \leq k$ に対して、 $I \in K$ が存在して、 $J \subset I$ となる。

(ステップ2) 各 $J \in K$ に対し、左逆システム $H_{L,J}(s)$ をつぎのように求める。

$$H_{L,J}(s)H_J(s) = \Lambda_J(s) \quad (3.44)$$

$\Lambda_J(s)$ は、正則な対角行列

$$H_J(s) = C(sI - A)^{-1}J$$

ただし J で $e_i, i \in J$ を横に並べた $n \times m$ 行列を表す。

そして $\mu_J(s)$ を

$$\mu_J(s) := H_{L,J}(s)\Delta y(s) \quad (3.45)$$

として求める。 μ_J の非零要素数 $\#_J$ が、 $\#_J \leq k$ を満たすならば、 $J' := \{i \mid \mu_J \text{ の第 } \rho(i) \text{ 要素} \neq 0\}$ として、故障 J' が発生している。ただし、 $\rho(i)$ は、 J の第 i 列めの単位ベクトルが $\rho(i)$ 成分に1をもつとして定められている。

(ステップ3) ステップ2でどの $J \in K$ についても $\#_J > k$ となるならば、 $(k+1)$ 重以上の故障が発生している。

(例) 以下に示す状態方程式で記述されるダイナミカルシステムを考える。図3.8にこのシステムの Coates グラフを表す。観測節点 C を $C = \{5, 9\}$ と選ぶ。このときシステムは定理3.14より $g=0$ 重識別可能であることがわかる。従って、定理2.1を定理2.2に修正したように定理3.17を若干修正した故障の同値類を判定するアルゴリズムが成立する。 g -故障同値類は、 $\{1, 2, 3, 6\}, \{4\}, \{5\}, \{7, 8\}, \{9\}$ となる。 g -故障同値類被覆 K は $K = \{K_1, K_2, K_3\}$, $K_1 = \{1, 4\}$, $K_2 = \{5, 8\}$, $K_3 = \{5, 9\}$ ととることができることが、定理3.4と同様の手法により確かめられる。

システムに故障が発生し、システム行列 A の $(5, 4)$ 要素 a_{54} が正常時の0.6倍になったとする。つまり故障 $\{5\}$ が発生したとする。このときのイン

パルス応答を図3.9,図3.10に示す。図3.11には、各左逆システムの出力を示す。
 $H_{L,k1}$ の出力は、非零要素を二つもつ。一方、 $H_{L,k2}$ の出力は、非零要素が一つであり、式番号5に対応した出力が非零となっているので、5を含む同値類の中に故障があることが正しく判定されている。 (例終)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2.27x_1 - 3.07x_2 + 2.98x_3 + x_6 - 0.599x_9 \\ \dot{x}_2 &= 26.8x_1 - 61.5x_2 + 0.524x_3 + 0.176x_6 - 0.0923x_8 - 32.1x_9 \\ \dot{x}_3 &= 30.0x_1 - 15.5x_2 - 32.3x_3 - 15.6x_9 \\ \dot{x}_4 &= 27.7x_4 - 0.0828x_8 - 5.32x_9 \\ \dot{x}_5 &= 44.0x_2 - 89.8x_4 - 100.0x_5 \\ \dot{x}_6 &= -3875.0x_5 - 100.3x_6 \\ \dot{x}_7 &= -5.0x_7 \\ \dot{x}_8 &= -223.0x_2 - 47.8x_4 + 55.4x_7 - 0.35x_8 - 222.0x_9 \\ \dot{x}_9 &= x_8 \end{aligned}$$

例の状態方程式

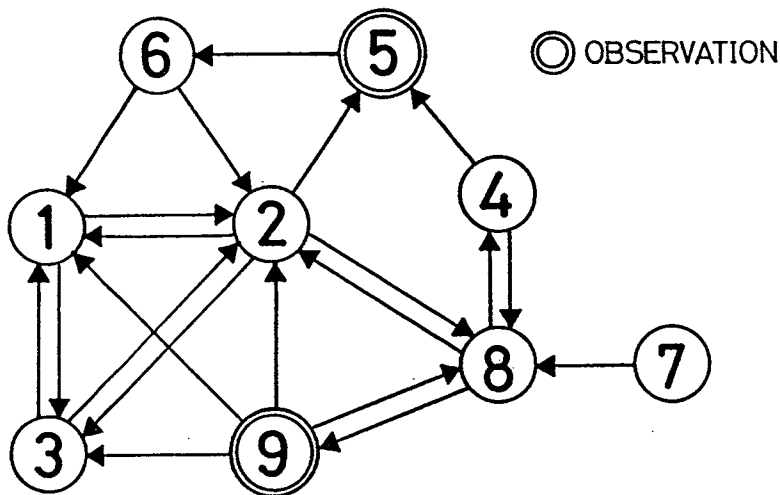


図3.8 例のシステムの Coates グラフ

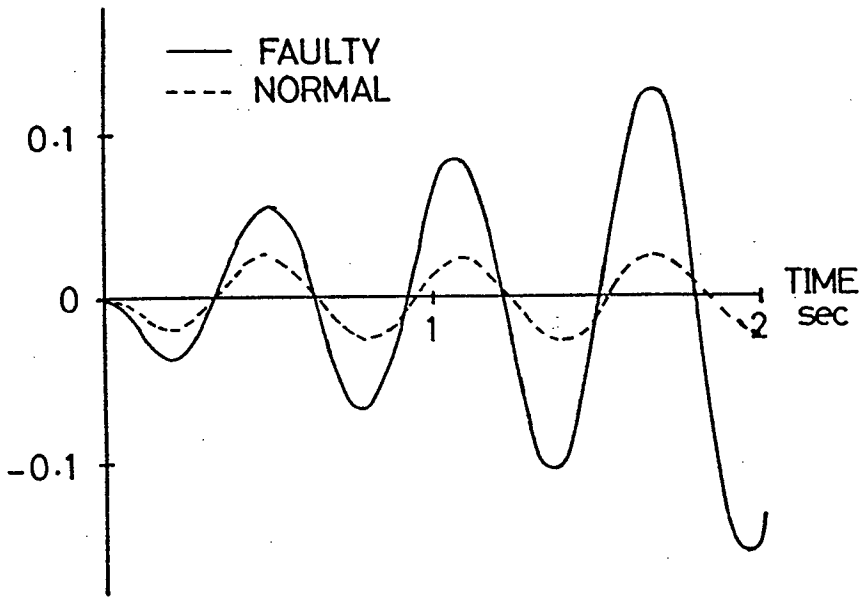


図3.9 インパルス応答 $\times 5$

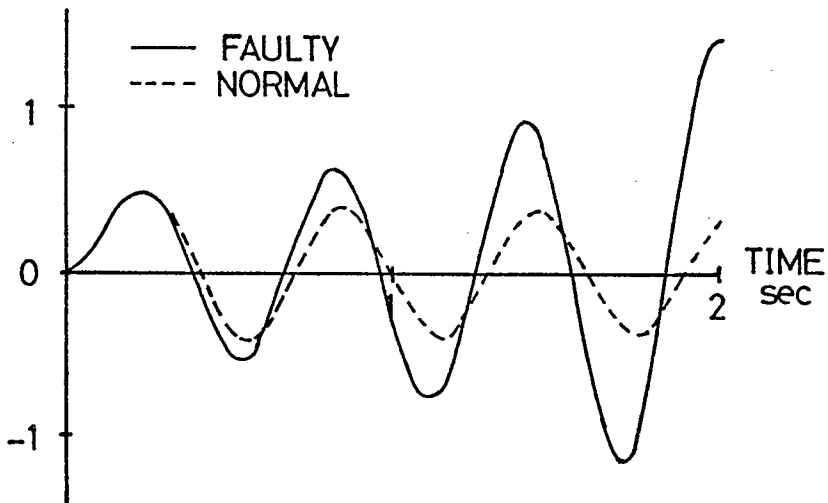


図3.10 インパルス応答 $\times 9$

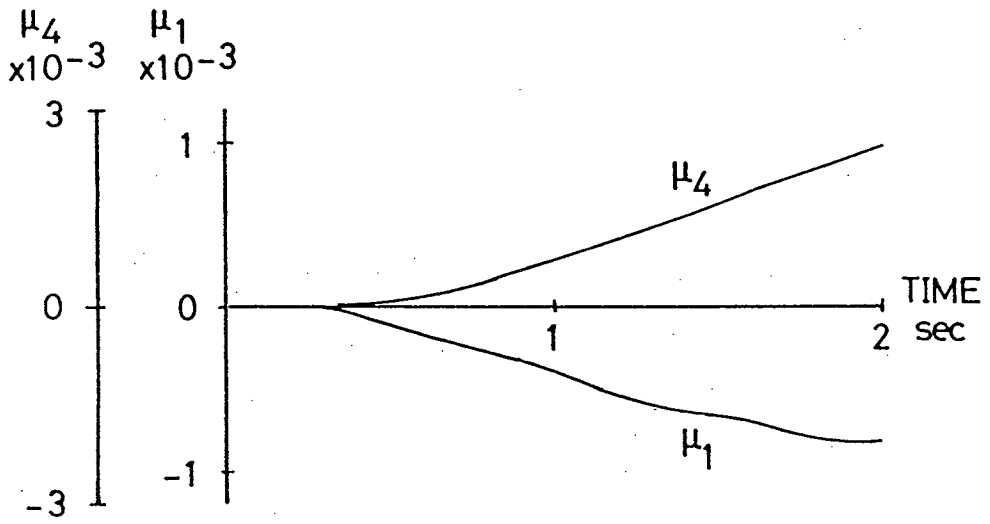


図3.11(a) 左逆システムHL.K1の出力

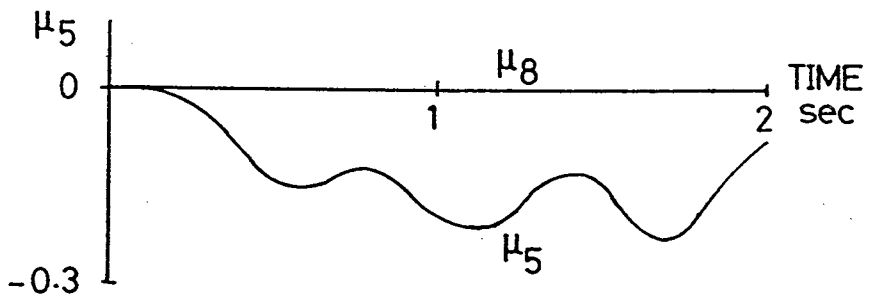


図3.11(b) 左逆システムHL.K2の出力

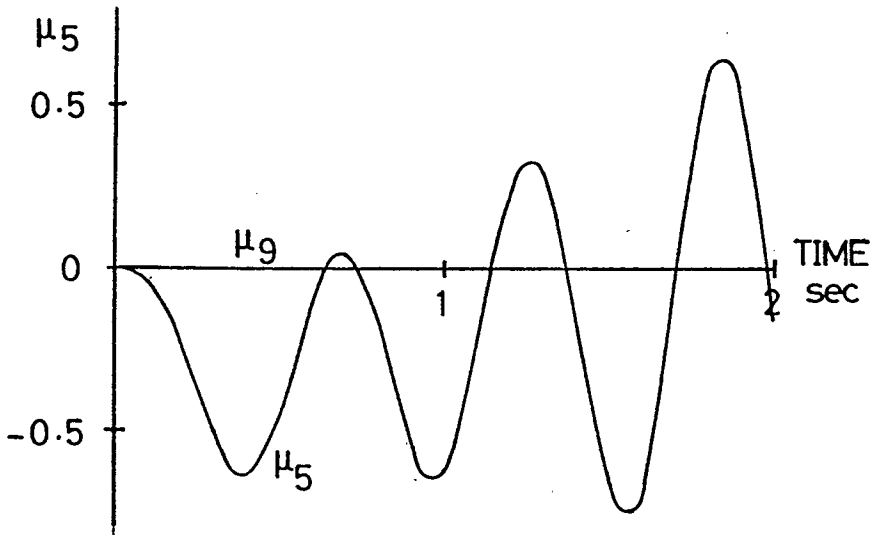


図3.11(c) 左逆システム H_L, K_3 の出力

3.5 結言

第2章で展開された不変性の原理に基づく故障診断法は、本章で示したように広いクラスの線形システム—定常状態にある線形システム・定常状態にあるコンパートメントシステム・線形ダイナミカルシステム—に適用することが可能なことが明らかにされた。さらにそれらのシステム内でのサブシステムの結合関係（システム構造）に基づいたグラフ的な故障の検出可能条件、識別可能条件を導くことにより三つの利点、①検出可能性、識別可能性がシステムの物理的な定数に依らずシステム構造に固有の性質として与えられること、②このことから観測位置の設計方法を与えることができること、③故障診断アルゴリズムを実行するにあたって、グラフ理論で既に得られているアルゴリズムを有効に利用できることが、挙げられる。

第4章

伝達関数の係数変化に基づいた線形 ダイナミカルシステムの故障診断

4.1 緒言

本章では、伝達関数の係数変化に基づいた線形ダイナミカルシステムの故障診断を考察する。ここで考察する故障診断問題は、第2章・第3章で考察したのと同じく、故障の検出可能性、識別可能性、故障診断アルゴリズムの三問題である。この章で用いる診断の原理は、故障が発生したとき、伝達関数の係数の変化は、その故障に応じて決まった仕方で変化することを用いるものである。これは、前章までで考察した不変性に基づいた故障診断法とは全く異なるものである。

不変性に基づいた故障診断法は、第2章・第3章で見てきたように広いクラスの線形システムに適用可能な故障診断アルゴリズムをもち、システム構造を表現するグラフを用いれば大きな利点があった。これらの利点は、第3章の結言に述べている。しかしダイナミカルなシステムに適用する場合、そのシステムの動的な挙動を十分に利用しつくしているとは言い難い。例えば、3.3で述べたコンパートメントシステムの場合、定常状態のみを観測しその動的な振舞いには着目していなかった。また、3.4で述べた線形ダイナミカルシステムの場合、故障がどのサブシステムに発生しているかを診断し得ても、故障ベクトルが同じパターンで変化する故障、つまり等価な故障はその原理上識別できない。このことが原因になって、①故障識別を細かくしようとするれば、必要な観測位置の数はかなり大きなものとなる。事実、いつでも原理上少なくとも二つの観測位置が必要である。②等価な故障はその原理上識別できないので、故障ベクトルの発生原因までを究明することができない。

そこで、本章では、対象とするシステムに試験信号を加え、その観測値への

伝達関数を正常時の伝達関数と比較することにより故障診断を実行する方法を考察する。また故障したシステムは、正常時のシステムからあまりにも大きく変化していないこと、つまり単一故障の仮定をおく。具体的には、コンパートメントシステムの場合、異常値をとる移行係数は高々一つであること、状態方程式で表せる線形ダイナミカルシステムの場合、システム行列の高々一ヶ所が異常値をとることを仮定する。これらのことにより、①少ない入出力位置の数で故障識別が可能になること、②異常値をとっている移行係数、またはシステム行列の要素の位置が決定できるという意味で、故障ベクトルの発生原因までを究明することができる。

まず、4.2でこの故障診断の原理について説明したあと、代数的な故障の検出条件、識別条件を導く。つぎに、この故障診断法を、4.3では状態方程式で記述される線形ダイナミカルシステムに、4.4ではコンパートメントシステムに、それぞれ適用する。このとき、第3章で考察したのと同様にシステム構造を表現するグラフを導入すれば、4.2で求めた代数的な条件は、そのグラフの上で表すことができる。

4.2 検出可能条件・識別可能条件

ここでは、伝達関数の係数変化に基づいた線形ダイナミカルシステムの故障診断の原理について述べたあと、その故障診断法を用いた場合、故障の検出可能条件、識別可能条件を代数的に表現することを考える。さらに、識別可能な故障についてどの故障が発生しているのかを決定するアルゴリズムについても述べる。

4.2.1 故障診断の原理

r 入力 m 出力のプロパーな伝達関数 $H(s) \in R(s)^{m \times r}$ を考える。 $B, |B| = r, C, |C| = m$ をそれぞれ入力集合、出力集合とよび、入出力組

$(b, c) \in B \times C$ に関する $H(s)$ の成分、つまり入力 b から出力 c への伝達関数を、

$$h_{cb}(s) = n_{cb}(s) / d_{cb}(s), \quad n_{cb}(s), d_{cb}(s) \in R[s] \quad (4.1)$$

とする。ここで、分子、分母への分解は一意ではないが以下に述べる仮定4.1を満たすものとする。システムに対する故障としては、故障 α が大きさ Δ で発生したときの伝達関数 $H(\alpha, \Delta; s)$ の (b, c) 成分、 $h_{cb}(\alpha, \Delta; s)$ が、

$$h_{cb}(\alpha, \Delta; s) = n_{cb}(\alpha, \Delta; s) / d_{cb}(\alpha, \Delta; s) \quad (4.2)$$

$$n_{cb}(\alpha, \Delta; s), d_{cb}(\alpha, \Delta; s) \in R[s]$$

$$n_{cb}(\alpha, \Delta; s) = n_{cb}(s) + \Delta n'_{cb}(\alpha; s) \quad (4.3)$$

$$d_{cb}(\alpha, \Delta; s) = d_{cb}(s) + \Delta d'_{cb}(\alpha; s) \quad (4.4)$$

$$n'_{cb}(\alpha; s), d'_{cb}(\alpha; s) \in R[s]$$

となるものを考える。ただし $H(\alpha, \Delta; s)$ はプロパーであり、 $d'_{cb}(\alpha; s)$ は、 $\deg d'_{cb}(\alpha) < \deg d_{cb}$ を満たすものとする。ここで注意しておきたいことは、式(4.3), (4.4)で故障が発生したときの分子多項式、分母多項式の変化は、故障の大きさ Δ に線形であることである。これは、4.3, 4.4で示されるように状態方程式で表せる線形ダイナミカルシステムの場合、システム行列の高ターケ所が異常値をとるとき、コンパートメントシステムの場合、異常値をとる移行係数は高ター一つであるときを想定している。システムに発生するこのような故障の集合を Γ で表す。このとき、式(4.1)で表される $H(s)$ の分子、分母への分解はつぎの仮定4.1を満たすものとする。

[仮定4.1] 式(4.1)で表される $H(s)$ の分子、分母への分解で、 $g_{cb}(s)$ を $n_{cb}(s)$ と $d_{cb}(s)$ の最大公約多項式とするとき、任意の入出力組 $(b, c) \in B \times C$ 、任意の $\alpha \in \Gamma$ について、 $g_{cb}(s) \mid n'_{cb}(\alpha; s)$ 、 $g_{cb}(s) \mid d'_{cb}(\alpha; s)$ である。

この仮定は、見たところ制限的であるように思えるが、以下4.3, 4.4で示されるように、ほとんど問題にならない制限である。

ここで、式(4.2)-(4.4)を見れば、故障 α が発生したとき伝達関数の係数の変化の仕方は、多項式 $n'_{cb}(\alpha; s)$ 、 $d'_{cb}(\alpha; s)$ によって与えられるので、これらが零でなければ故障が検出でき、これらが他の故障に対する多項式と異なっていれば、他の故障と識別できるのではないかと考えられる。事実、この考え方が正しいことが4.2.2で示される。

4.2.2 代数的な検出可能条件・識別可能条件

ここでは、前節の考察に基づいて代数的な故障の検出可能条件・識別可能条件を与える。このために、まず式(4.3), (4.4)で定義された多項式 $n'_{cb}(\alpha; s)$ 、 $d'_{cb}(\alpha; s)$ を用いて、写像 $\delta H : \Gamma \rightarrow R[s]^{2mr}$ をつぎのように定義する。

$$\delta H(\alpha) = [\dots, n'_{cb}(\alpha; s), d'_{cb}(\alpha; s), \dots] \quad (4.5)$$

つぎに、故障が検出可能、識別可能であることをつぎのように定義する。

[定義4.1] (検出可能) 故障 $\alpha \in \Gamma$ は検出可能である。 \Leftrightarrow 任意の故障の大きさ $\Delta \neq 0$ について、 $H(s) \neq H(\alpha, \Delta; s)$ である。

[定義4.2] (識別可能) 故障 $\alpha \in \Gamma$ と故障 $\beta \in \Gamma$ は識別可能である。
 \Leftrightarrow 故障 α と故障 β はともに検出可能であり、有限個の点を除いた任意の故障の大きさ変化量 Δ, Δ' について $H(\alpha, \Delta; s) \neq H(\beta, \Delta'; s)$ である。

(注意4.1) 定義4.1は、直ちに理解できる。定義4.2は、つぎの二点から支持される。①故障の大きさが、たまたまここで除外された有限個の点に一致することは稀である。なぜなら、これらの有限個の点は実数上で測度零だからである。②このような有限個の点を除外することにより、故障識別に関する見通しのよい条件が得られる(定理4.2を参照)。

写像 δH を用いて代数的な故障の検出可能条件、識別可能条件はつぎのように与えられる。ここで、 $R[s]^{2nr}$ は、実数体 R の上の線形空間であることを注意しておく。

[定理4.1] (検出可能条件) 仮定4.1のもとで故障 $\alpha \in \Gamma$ が検出可能であるための必要十分条件は、 $\delta H(\alpha) \neq 0$ である。

(証明) 必要性: $\delta H(\alpha) = 0$ ならば、どの入出力組 $(b, c) \in B \times C$ に対しても、 $n'_{cb}(\alpha; s) = d'_{cb}(\alpha; s) = 0$ となるので、任意の故障の大きさ Δ に対して、

$$\begin{aligned} h_{cb}(\alpha, \Delta; s) &= n_{cb}(\alpha, \Delta; s) / d_{cb}(\alpha, \Delta; s) & (4.6) \\ &= (n_{cb}(s) + \Delta \times 0) / (d_{cb}(s) + \Delta \times 0) \\ &= n_{cb}(s) / d_{cb}(s) \\ &= h_{cb}(s) \end{aligned}$$

となるので、 $H(s) = H(\alpha, \Delta; s)$ となる。

十分性： $\delta H(\alpha) \neq 0$ であるから、ある入出力組 $(b, c) \in B \times C$ に対して、 $n'_{cb}(\alpha; s) \neq 0$ または $d'_{cb}(\alpha; s) \neq 0$ である。この証明中で以下添字の cb を省略する。 g を n, d の最大公約多項式とする。 $n_0 := n/g, d_0 := d/g, n'_0 := n'(\alpha)/g, d'_0 := d'(\alpha)/g$ とすれば、仮定4.1より、これらは $R[s]$ の元である。まず第一に n_0 と d_0 は互いに素であることに注意する。第二に、 d と $d'(\alpha)$ に対する次数の条件から $\deg d'_0 < \deg d_0$ が成立していることに注意する。この二つのことから、 $n_0/d_0 = (n_0 + \Delta n'_0) / (d_0 + \Delta d'_0)$ ならば、 $\Delta n'_0 = \Delta d'_0 = 0$ となるので、 $n'_0 \neq 0$ または $d'_0 \neq 0$ より、 $\Delta = 0$ となる。ゆえに、 $\Delta \neq 0$ ならば、 $H(s) \neq H(\alpha, \Delta; s)$ となるので、故障 α は検出可能である。

(証明終)

[定理4.2] (識別可能条件) 仮定4.1のもとで故障 $\alpha \in \Gamma$ と故障 $\beta \in \Gamma$ が識別可能であるための必要十分条件は、 $\delta H(\alpha)$ と $\delta H(\beta)$ が一次独立であることである。

(証明) 必要性： $\delta H(\alpha)$ と $\delta H(\beta)$ が一次従属であるとする。故障 α 、故障 β とがともに検出可能なときだけを考えればよいので、定理4.1より、 $\delta H(\alpha)$ 、 $\delta H(\beta)$ はともに0でないとしてよい。従って定数 $r \neq 0$ が存在して $\delta H(\alpha) = r \delta H(\beta)$ となる。故障 α の大きさ Δ を故障 β の大きさ Δ' に対して $\Delta' = r\Delta$ と選ぶ。このとき任意の入出力組 $(b, c) \in B \times C$ に対して、以下添字の cb を省略して、

$$\begin{aligned} h(\alpha, \Delta; s) &= n(\alpha, \Delta; s) / d(\alpha, \Delta; s) & (4.7) \\ &= (n(s) + \Delta n'(\alpha; s)) / (d(s) + \Delta d'(\alpha; s)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (n(s) + \Delta r n'(\beta; s)) / (d(s) + \Delta r d'(\beta; s)) \\
&= (n(s) + \Delta' n'(\beta; s)) / (d(s) + \Delta' d'(\beta; s)) \\
&= n(\beta, \Delta'; s) / d(\beta, \Delta'; s) \\
&= h(\beta, \Delta'; s)
\end{aligned}$$

となるので、無限個の Δ に対して $H(\alpha, \Delta; s) = H(\beta, \Delta'; s)$ となる。ゆえに故障 α と故障 β は識別可能ではない。

十分性： 任意に入出力組 $(b, c) \in B \times C$ を固定し、以下添字 cb を省略する。 g を n, d の最大公約多項式とする。 $n_0 := n/g, d_0 := d/g, n'_0(\gamma) := n'(\gamma)/g, d'_0(\gamma) := d'(\gamma)/g, \gamma = \alpha, \beta$ とすれば、仮定4.1より、これらは $R[s]$ の元である。 d_0 と n_0 は互いに素であるから、有限個の Δ を除いて $d_0 + \Delta d'_0(\alpha)$ と $n_0 + \Delta d'_0(\alpha)$ も互いに素である。同様に、有限個の Δ' を除いて $d_0 + \Delta' d'_0(\beta)$ と $n_0 + \Delta' d'_0(\beta)$ も互いに素である。従ってこれら有限個の Δ, Δ' を除いて定理1の十分性の証明と同じ理由によって $(n + \Delta n'(\alpha)) / (d + \Delta d'(\alpha)) = (n + \Delta' n'(\beta)) / (d + \Delta' d'(\beta))$ ならば $\Delta n'(\alpha) = \Delta' n'(\beta), \Delta d'(\alpha) = \Delta' d'(\beta)$ である。これが任意の入出力組についていえるので、 $\Delta \delta H(\alpha) = \Delta' \delta H(\beta)$ である。ここで $\delta H(\alpha)$ と $\delta H(\beta)$ は一次独立ゆえ、 $\Delta = \Delta' = 0$ となる。従って素の条件を満たすために除いた有限個の Δ, Δ' と $\Delta = \Delta' = 0$ を除いて $H(\alpha, \Delta; s) \neq H(\beta, \Delta'; s)$ となるので、故障 α と故障 β は識別可能である。 (証明終)

4. 3 状態方程式で記述された線形ダイナミカルシステムへの適用

ここでは、4. 2で考察した故障診断の原理を状態方程式で記述された線形ダイナミカルシステムへ適用する。ここでシステムの故障は、システム行列の高々一箇所が異常値をとることと考える。試験信号の入出力応答を正常時の応

答と比較することによって、システム行列のどの要素が異常値をとっているかを診断する。この適用にあたって第3章で考察したようにシステム構造の概念を持ち込めば、4.2で与えた故障の検出可能条件、識別可能条件はそれぞれ等価なグラフ条件に置き換えることができる。

まず4.3.1では、システムの記述とシステム構造を表現するグラフについて説明する。4.3.2では、線形ダイナミカルシステムでシステム行列のどの要素が異常値をとっているかを診断することが、4.2で与えた故障診断の原理の枠内で可能なことを示す。4.3.3では、システムの結合構造を導入し、genericな意味での故障のグラフ的な検出可能条件、識別可能条件を導くために4.3.2で与えられた多項式、写像を定義しなおす。4.3.4では、グラフ条件を導くために必要となる、システム行列の特性行列の小行列式の素因子分解とシステム構造表現グラフの既約成分分解の関係について述べる。最後に4.3.5では、グラフ的な検出可能条件、識別可能条件を導く。

4.3.1 システムの記述

対象とする線形ダイナミカルシステムは

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.8)$$

$$y = Cx \quad (4.9)$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times r}, C \in \mathbb{R}^{m \times n}, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r, y \in \mathbb{R}^m$$

と状態方程式によって記述されるものとする。このシステムのことをシステム (A, B, C) とよぶ。ここで、システム行列 A は、構造を持った行列、すなわち要素のうちいくつかは固定された零であり、残りの要素は任意の値をとるものとする。この非零要素の配列のことをシステム結合構造という。入力行列 B (出力行列 C) は、各列が (各行が) 単位ベクトルの最大列階数

(最大行階数)の行列とする。このとき要素1の位置は、システム入力(観測)構造とよばれる。これらをあわせてシステム構造とよぶ。

システム(A, B, C)に故障が発生するとシステム行列Aの固定された零要素以外が異常値をとるものとする。ここで、システム行列の高々一箇所が異常値をとると仮定する。つまり4.1で述べたように故障したシステムは、正常時のシステムからあまりにも大きく変化していないこと、つまり単一故障の仮定をおいている。いいかえれば、4.2で述べた故障の集合 Γ はここでは以下で述べるCoatesグラフのA枝集合 E_A をもってくることになる。すると、故障診断問題は、試験信号の入出力伝達関数が利用可能であるとして、システム構造を表すグラフのみを用いて、検出可能となる故障はどの枝であるのか、互いに識別可能となる故障はどの枝であるのかを決定できるであろうか、ということである。以下では、これらの問題に肯定的な解答を与える。

まずシステム構造を表現するグラフについて説明する。システムの構造を表現するにはつぎの二種類のグラフを用いる。つまり行列 $sI - A$ のCoatesグラフ $G_A(N, E)$ と、行列 $sI - A$ の二部グラフ $G_b(N_r, N_c, E_b)$ である。Coatesグラフ $G_A(N, E)$ の節点集合 $N = \{1, \dots, n\}$ は、変数 x の添字集合 $n := \{1, \dots, n\}$ と一対一に対応している。有向枝集合 E は、 $(i, j) \in E_A \iff a_{ji} \neq 0$ によって定められるA枝集合 E_A と、各節点にある自己ループからなる s 枝集合 $E_s := \{(i, i) \mid i \in N\}$ の非共通和 $E = E_A \cup E_s$ からなる。二部グラフ $G_b(N_r, N_c, E_b)$ の節点集合は、Aの行添字集合 $\{1, \dots, n\}$ と一対一に対応した行節点集合 $N_r = \{\pi_r(1), \dots, \pi_r(n)\}$ (ここで π_r は $N \rightarrow N_r$ への自然な一対一対応を与える)、同様に定義された列節点集合 N_c (π_c も同様に定義される)からなる。枝集合 E_b は、 $(\pi_r(i), \pi_c(j)) \in E_{bA} \iff a_{ij} \neq 0$ によって定められるA枝集合 E_{bA} と、 $(\pi_r(i), \pi_c(i))_s$ からなる s 枝集合 E_{b_s} の非共通和 $E_b = E_{bA} \cup E_{b_s}$ からなる。また、入力行列B、観測行列Cに対する仮定が

ら同じ文字 B、C を用いて入力に加わる節点の部分集合、観測される変数に対応した節点の部分集合を表し、これらを入力節点、出力節点という。文中から行列を表すか節点の部分集合を表すかは明らかなのでこの表記法を用いる。これらのグラフは、3.4でのグラフと同じ記号を用いているが、文中よりどちらのグラフを用いているかは明らかなので、このことは問題にならない。

これらのグラフに関しては、以下に示す部分グラフ操作を与える。 $N_1, N_2 \subset N$ として、 $E(N_1, N_2) := \{(i, j)_z \in E \mid i \in N_1, j \in N_2, z = s \text{ または空白}\}$ と定義する。これらの節点集合の部分集合または、枝集合の部分集合によって決められる部分グラフを Coates グラフ G_A については、 $G_A(E(N_1, N_2)) := G_A(N, E(N_1, N_2))$ 、二部グラフ G_b については、 $G_b(\pi_r(N_2), \pi_c(N_1)) := G_b(\pi_r(N_2), \pi_c(N_1), \pi_E(E(N_1, N_2)))$ と定義する。これらの二つの部分グラフの間には自然な一対一対応、 π_r, π_c, π_E が存在するので、しばしば二つのグラフを同一視する。このことを念頭において部分グラフを添字 A, b を書かずに $G(\cdot)$ という表記法を用いる。ここで引数の役割はどの部分グラフかを明示するためであり、さきの節点集合の部分集合 N_1, N_2 または、枝集合の部分集合 $E(N_1, N_2)$ を指定する。

部分グラフ $G(\alpha) = G_b(\pi_r(N_2), \pi_c(N_1))$ (二部グラフの表現で) について、 $|N_1| = |N_2|$ ならば、このグラフは、正方な小行列 $(sI - A)(\pi_r(N_2), \pi_c(N_1))$ の表現グラフなので、小行列式 $\det(sI - A)(\pi_r(N_2), \pi_c(N_1))$ を対応させることができる。しかしここで注意しなくてはならないのは、この行列式は、節点集合 N と行 (または列) 添字集合 n の間の一対一対応に依存している。しかし、 $R[X, s]/\pm 1$ の元としては、この一対一対応に依らず確定するので、 $\det G(\alpha) := \det(sI - A)(\pi_r(N_2), \pi_c(N_1))$ ($R[X, s]/\pm 1$ の元として) と定義することができる。

用語および表記法は 3.2, 3.4 に準じる。それらに加えて以下の用語も使う。まず、二部グラフ G_b について。部分グラフの枝 e が有効枝である

とは、それを含むその部分グラフの完全マッチングが存在することをいう。そうでないとき e は無効枝という。部分グラフの枝被覆とは、節点集合の部分集合であり、その部分グラフの任意の枝は、その部分集合中の少なくとも一つの節点と接続しているものをいう。枝被覆を行節点集合と列節点集合の部分にわけ、 $[\pi_r(N_2), \pi_c(N_1)]$ で $\pi_r(N_2) \cup \pi_c(N_1)$ を表す。部分グラフの枝被覆が最小であるとは、要素数とその部分グラフのあらゆる枝被覆中で最小であることをさす。部分グラフ $G_b(\pi_r(N_2), \pi_c(N_1))$ が既約であるとは、最小被覆が $[\phi, \pi_c(N_1)]$ と $[\pi_r(N_2), \phi]$ 以外にないことをいう。これら二つの枝被覆を自明であるという。既約でないとき可約という。つぎに、Coates グラフ G_A について。部分グラフ $G_A(E(N_1, N_2))$, $|{}^{\circ}N_1| = |{}^{\circ}N_2| = k$, の k -因子接続とは、 ${}^{\circ}N_2$ から ${}^{\circ}N_1$ を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りと、それらの有向道と互いに節点を共有せず、かつ互いに節点を共有しない有向閉路の集りの和集合であり、任意の節点は、その中のいずれかに含まれているものをいう。 $Q, R \subset N$ について、 $Q \rightarrow R$ 有向道が存在するとき、単に $Q \rightarrow R$ と書き、 Q は R から到達可能と読む。 Q (または R) が単一の要素からなるときには、中括弧を省略して書く。 $Q \rightarrow R$ でないことを $Q \nrightarrow R$ と書く。 $M \subset N$ として、 $w \rightarrow v$ 有向道 P が $N(P) \subset M$ を満たすとき P を M を通る有向道という。 $N(P) \setminus \{w\} \subset M$ ($N(P) \setminus \{v\} \subset M$) を満たすとき P を $*M$ を通る有向道 (M^* を通る有向道) という。 $*M$ を通って $Q \rightarrow R$ などの意味は明らかであろう。さきに述べた一対一対応により、Coates グラフ G_A の部分グラフにも二部グラフでの概念、例えば、既約、可約が定義されていることに注意する。

4.3.2 故障診断の原理

ここでは、線形ダイナミカルシステムでシステム行列のどの要素が異常値をとっているかを診断することが、4.2で与えた故障診断の原理の枠内で可能

なことを示す。まず、故障の集合 Γ は、4.3.1で定義された Coates グラフの A 枝集合 E_A とみなされていることに注意する。

システム (A, B, C) の正常時の伝達関数 $H(s)$ は、式(4.8), (4.9)より、

$$H(s) = C (sI - A)^{-1} B \quad (4.10)$$

である。システムに故障が発生し、システム行列の (i, j) 要素 a_{ij} が $a_{ij} + \Delta$ と変化したとする。このことを故障 $\alpha = (j, i) \in E_A$ が大きさ Δ で発生したという。このときの伝達関数 $H(\alpha, \Delta; s)$ は、

$$H(\alpha, \Delta; s) = C (sI - A - \Delta i j^T)^{-1} B \quad (4.11)$$

となる。ここで、表記法上の都合上、節点 $v \in N$ と同じ文字で節点 v に対応する位置に1をもつ単位ベクトルを表す。入出力組 $(b, c) \in B \times C$ に関する $H(s)$ の成分、つまり入力 b から出力 c への伝達関数 $h_{cb}(s)$ をまず求める。 $N_{cb} \subset N$ を $N_{cb} := \{v \mid b \rightarrow v \text{ かつ } v \rightarrow c\}$ として、 $N_{cb} = \emptyset$ ならば明らかに $h_{cb}(s) = 0$ である。 $N_{cb} \neq \emptyset$ ならば、行列 A の N_{cb} に対応した行、列からなる小行列を A_{cb} 、 $b, c \in N_{cb}$ より定義可能な単位ベクトル b, c を用いて、

$$h_{cb}(s) = n_{cb}(s) / d_{cb}(s), \quad (4.12)$$

$$n_{cb}(s) = c^T \text{adj}(sI - A_{cb}) b, \quad (4.13)$$

$$d_{cb}(s) = \det(sI - A_{cb}) \quad (4.14)$$

となる。伝達関数 $H(\alpha, \Delta; s)$ の (b, c) 成分、 $h_{cb}(\alpha, \Delta; s)$ は、

$$h_{cb}(\alpha, \Delta; s) = n_{cb}(\alpha, \Delta; s) / d_{cb}(\alpha, \Delta; s) \quad (4.15)$$

$$n_{cb}(\alpha, \Delta; s) = c^T \text{adj}(sI - A_{cb} - \Delta i j^T) b \quad (4.16)$$

$$d_{cb}(\alpha, \Delta; s) = \det(sI - A_{cb} - \Delta i j^T) \quad (4.17)$$

となる。ここで恒等式

$$(sI - A - \Delta i j^T)^{-1} = (sI - A)^{-1} \quad (4.18)$$

$$+ \Delta (sI - A)^{-1} i (1 - \Delta j^T (sI - A)^{-1} i)^{-1} (sI - A)^{-1}$$

を用いれば、

$$n_{cb}(\alpha, \Delta; s) = n_{cb}(s) + \Delta n'_{cb}(\alpha; s) \quad (4.19)$$

$$d_{cb}(\alpha, \Delta; s) = d_{cb}(s) + \Delta d'_{cb}(\alpha; s) \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} n'_{cb}(\alpha; s) = & - [c^T \text{adj}(sI - A_{cb}) b j^T \text{adj}(sI - A_{cb}) i \\ & - c^T \text{adj}(sI - A_{cb}) i j^T \text{adj}(sI - A_{cb}) b] / d_{cb}(s) \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$d'_{cb}(\alpha; s) = -j^T \text{adj}(sI - A_{cb}) i \quad (4.22)$$

となる。ここで、 $H(\alpha, \Delta; s)$ はプロパーであり、 $d'_{cb}(\alpha; s)$ は、 $\deg d'_{cb}(\alpha) < \deg d_{cb}$ を満たすことに注意しておく。式(4.21), (4.22)で与えられる $n'_{cb}(\alpha; s)$, $d'_{cb}(\alpha; s)$ は、故障 α が発生したときの伝達関数の係数変位を与えるので変位多項式とよぶことにする。実際に $n'_{cb}(\alpha; s) \in \mathbb{R}[s]$ であることがつぎのようにして確かめられる。以下添字の cb を省略する。式(4.21)の括弧中の多項式を $r(s)$ とする。このとき任意のシステム行列 A に対して $d \mid r$ を示せばよい。まず A が重複固有値を持たない場合を考える。すると、 d の零点、つまり A の固有値は、同時に r の

零点でもあることをいえばよい。 λ を d の零点の一つとする。 A が重複固有値を持たないことから $\text{rank adj}(\lambda I - A) = 1$ となり、ある $p, q \in C^n$ によって、 $\text{adj}(\lambda I - A) = p q^T$ と書ける。すると、

$$\begin{aligned} r(\lambda) &= c^T p q^T b j^T p q^T i - c^T p q^T i j^T p q^T b \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

となるので、 $d \mid r$ である。一般の A については、システム構造についてしばらく考えないことにし、 r, d の係数は、 n^2 個の変数 a_{ij} の多項式であるとする。このときこれらの変数の多項式であって、その零点に相当する行列 A に対しては、 $d \mid r$ となるものが存在する（例えば、 r を d で Euclid のアルゴリズムを用いて割ったときの剰余多項式の係数の自乗和）。しかし $R^{n \times n}$ 中でほとんどすべての A は重複固有値を持たないので、ほとんどすべての $R^{n \times n}$ の値に対してこの多項式は零となる。従って、この多項式は零多項式であり、ゆえに任意の A に対して、 $d \mid r$ である。これで、 $n'_{cb}(\alpha; s)$ が多項式であることが示された。仮定4.1については、4.3.5でほとんどすべてのシステム行列に対して満たされることが示されるので、この仮定は制限的なものではない。

つぎに代数的な故障の検出可能条件・識別可能条件を与える。このために、まず式(4.21), (4.22)で定義された変位多項式 $n'_{cb}(\alpha; s), d'_{cb}(\alpha; s)$ を用いて、写像 $\delta H: E_A \rightarrow R[s]^{2nr}$ をつぎのように定義する。

$$\delta H(\alpha) = [\dots, n'_{cb}(\alpha; s), d'_{cb}(\alpha; s), \dots] \quad (4.24)$$

すると変位多項式は、4.2で与えた注意を満たしているので、写像 δH を用いて代数的な故障の検出可能条件、識別可能条件はそれぞれ定理4.1, 定理4.

2と同じ形で与えられる。つまり、

[定理4.3] (検出可能条件) 仮定4.1のもとで故障 $\alpha \in E_A$ が検出可能であるための必要十分条件は、 $\delta H(\alpha) \neq 0$ である。

[定理4.4] (識別可能条件) 仮定4.1のもとで故障 $\alpha \in E_A$ と故障 $\beta \in E_A$ が識別可能であるための必要十分条件は、 $\delta H(\alpha)$ と $\delta H(\beta)$ が一次独立であることである。

4.3.3 システム構造を考慮に入れた変位多項式

ここでは、4.3.5でシステム構造を表現するグラフを用いた故障の検出可能条件、識別可能条件を導くために必要となる準備として、式(4.21), (4.22)で定義した変位多項式 $n'_{cb}(\alpha; s)$, $d'_{cb}(\alpha; s)$ と、式(4.24)で定義した関数 δH を以下の都合のよいように変形する。

特性行列 $sI - A$ の小行列式、 $\det [F](sI - A)$, $F \in N_r \times N_c$ をつぎのように定義する。 $[F](sI - A)$ は、もし $(\pi_r(i), \pi_c(j)) \in F$ ならば、第 i 行と第 j 列を (i, j) 成分を除いて零で置き換え、 (i, j) 成分は1で置き換えた行列とする。この定義が意味をもつために F は独立集合であること、つまり $(\pi_r(i), \pi_c(j)), (\pi_r(i'), \pi_c(j')) \in F$ ならば、 $i = i'$, $j = j'$ であることを仮定する。 F が独立集合でないときには、小行列式 $\det [F](sI - A)$ は零と約束する。

これを用いて式(4.16), (4.17), (4.22), (4.23)で定義されていた多項式 n_{cb} , d_{cb} , $n'_{cb}(\alpha)$, $d'_{cb}(\alpha)$ はそれぞれ $R[X, s]$ ($R[s]$ ではなく) の元として、 $\alpha = (j, i) \in E_A$ について、

$$n_{cb} = \det [\{ (\pi_r(b), \pi_c(c)) \}] (sI - A_{cb}) \quad (4.25)$$

$$d_{cb} = \det (s I - A_{cb}) \quad (4.26)$$

$$n'_{cb}(\alpha) \quad (4.27)$$

$$= - \det [\{(\pi r(b), \pi c(c), (\pi r(i), \pi c(j))\}] (s I - A_{cb})$$

$$d'_{cb}(\alpha) = - \det [\{(\pi r(i), \pi c(j))\}] (s I - A_{cb}) \quad (4.28)$$

と定義する。ここで、式(4.25)-(4.28)で定義上零と約束する場合は、つぎの三つである。① $N_{cb} = \emptyset$ の場合：式(4.25)-(4.28)はすべて零と約束する。② $\alpha \in E(N_{cb}, N_{cb})$ の場合：式(4.27), (4.28)は零と約束する。③ $i = b$ または $j = c$ の場合：式(4.27)は零と約束する。

これらの定義がそれぞれ式(4.16), (4.17), (4.22), (4.23)と一致していることを確かめる。式(4.25)は、余因子の定義に他ならない。式(4.26)は式(4.17)と同じである。式(4.27), (4.28)については、 $n'_{cb}(\alpha)$, $d'_{cb}(\alpha)$ がそれぞれ n_{cb} , d_{cb} の枝 $\alpha \in E_A$ の枝重みに関する形式的な偏微分であることに注意すれば、行列式の定義から直ちに導かれる。

式(4.27), (4.28)を用いて、写像 $\delta H : E_A \rightarrow R[X, s]^{2mr}$ ($R[s]^{2mr}$ ではなく)を

$$\delta H(\alpha) = [\dots, n'_{cb}(\alpha), d'_{cb}(\alpha), \dots] \quad (4.29)$$

と定義する。

つぎに変位多項式 $n'_{cb}(\alpha)$, $d'_{cb}(\alpha)$ をグラフ表現することを考える。ここで δH の値域 $R[X, s]^{2mr}$ は $R[X, s]$ の直積だから、その成分を表すために添字集合 $\Lambda = \{d, n\} \times B \times C$ を用いて $\lambda \in \Lambda$ に対して $\delta H(\alpha, \lambda)$ で $\delta H(\alpha)$ の λ 成分、つまり $\lambda = (n, b, c)$ ならば、 $\delta H(\alpha, \lambda) = n'_{cb}(\alpha)$ 、 $\lambda = (d, b, c)$ ならば、 $\delta H(\alpha, \lambda) = d'_{cb}(\alpha)$ とする。 $\delta H(\alpha, \lambda)$ に対応して表現グラフの部分グラフ $G(\alpha, \lambda)$ を、

$\lambda = (n, b, c)$ のとき :

$$G(\alpha, \lambda) = G_b(\pi_r(N_{cb} \setminus \{i, b\}), \pi_c(N_{cb} \setminus \{j, c\})) \quad (4.30)$$

$\lambda = (d, b, c)$ のとき :

$$G(\alpha, \lambda) = G_b(\pi_r(N_{cb} \setminus \{i\}), \pi_c(N_{cb} \setminus \{j\})) \quad (4.31)$$

と定義する。ここで自然な一対一対応の存在より Coates グラフと二部グラフは区別しないことに注意し、式(4.30), (4.31)では、これらの二部グラフと同一視される Coates グラフで表現することも可能である。また式(4.25)-(4.28)を定義上零とおいたように、以下の三つの場合これらのグラフは定義しない。

① $N_{cb} = \emptyset$ の場合。② $\alpha \notin E(N_{cb}, N_{cb})$ の場合。③ $i = b$ または $j = c$ の場合 : 式(4.30)は定義しない。

これらの部分グラフを用いれば、式(4.27), (4.28)は $R[X, s] / \pm 1$ で、

$$\delta H(\alpha, \lambda) = \det G(\alpha, \lambda) \quad (4.32)$$

と書ける。ここで、定義されていない部分グラフに対する \det は零と約束する。

4.3.4 特性行列の小行列式の素因子分解とシステム表現グラフの既約成分分解

ここでは、4.3.5でのグラフ条件を導くために必要となる特性行列の小行列式の素因子分解とシステム表現グラフの既約成分分解の関係について述べる。

まず、特性行列の小行列式をシステム表現グラフで表現する公式を導く。この公式は、W.K.Chen が導いたものと同じであるが[1]、以下の議論の展開のためと、本論文では並行な枝を許していることが違うので、ここにもう一度書いておく。

$F \subset N_r \times N_c$ を独立な集合とする。F に対して $Q, R \subset N$ を

$$Q := \{i \mid \exists (\pi_r(i), \pi_c(j)) \in F\} \quad (4.33)$$

$$R := \{j \mid \exists (\pi_r(i), \pi_c(j)) \in F\} \quad (4.34)$$

と定義する。F が独立な集合であることから $|Q| = |R|$ である。

[補題4.1] (小行列式の二部グラフ上での評価式) $F \subset N_r \times N_c$ を独立な集合とする。Q, R $\subset N$ をそれぞれ式(4.33), (4.34)のように定義する。このとき、

$$\det [F](sI - A) = \sum_{M \in \mathcal{M}} \text{sgn}(F \cup M)(-1)^{\pi(M)} \quad (4.35)$$

が成り立つ。ただし、

$$\mathcal{M} = \{M \mid M \text{ は } G_b(\pi_r({}^cQ), \pi_c({}^cR)) \text{ の完全マッチング}\} \quad (4.36)$$

$$z = |\mathcal{M} \cap E_{bA}| \quad (4.37)$$

であり、式(4.35)中の sgn は、 $F \cup M$ を $N \rightarrow N$ の置換とみなしたときの置換の符号、 $\Pi(\cdot)$ は、枝重み積を表す。

(証明) $G_b(\pi_r({}^cQ), \pi_c({}^cR))$ の任意の完全マッチング M に対して、 $F \cup M \subset N_r \times N_c$ が独立な集合となることは簡単に示せるのでそのことの詳細は省略する。すると $(\pi_r(i), \pi_c(j)) \in F \cup M$ ならば、i に j を対応させることにより $F \cup M$ は、 $N \rightarrow N$ の置換とみなせる。逆に、 $N \rightarrow N$ の任意の置換 P に対して、すべての $(\pi_r(i), \pi_c(j)) \in P$ について $[F](sI$

$-A)$ の (i, j) 要素が零でないならば、 $F \subset P$ であり、 $P \setminus F \in M$ であることは、明らかである。従って、行列式の定義を $\det [F](sI - A)$ にあてはめれば、式(4.35)を得る。 (証明終)

[補題4.2] (小行列式の Coates グラフ上での評価式) $F \subset N_r \times N_c$ を独立な集合とする。 $Q, R \subset N$ をそれぞれ式(4.33), (4.34)のように定義する。 $|F| = k$ とする。このとき、

$$\det [F](sI - A) = \sum_{M_c \in M_c} \text{sgn}(F \cup M_c) (-1)^{z} \Pi(M_c) \quad (4.38)$$

が成り立つ。ただし、

$$M_c = \{M_c \mid M_c \text{ は } G_A(E({}^cR, {}^cQ)) \text{ の } k\text{-因子接続}\} \quad (4.39)$$

$$z = |M_c \cap E_A| \quad (4.40)$$

であり、式(4.38)中の sgn は、 $F \cup M_c$ を $N \rightarrow N$ の置換とみなしたときの置換の符号、 $\Pi(\cdot)$ は、枝重み積を表す。

(証明) $M_c \in M_c$ となる必要十分条件が、 $\pi_E(M_c) \in M$ であることを示せば、補題4.1より補題4.2は明らかである。しかしこれは、定理3.1の証明と同様にしてできるので詳細は省略する。 (証明終)

[補題4.3] 補題4.1 (補題4.2) で式(4.35) (式(4.38)) の右辺でどの項も打ち消されない。

(証明) M と M_c の間には一対一対応が存在するので (補題4.2の証明

参照) 式(4.35)についてのみ示せばよい。これを示すには、式(4.35)でどの二つの項も同じ変数の集合を持たないことをいえば十分である。 $M \in \mathcal{M}$ とし、 $M_A := M \cap E_{bA}$, $M_s := M \cap E_{bs}$ とおく。 $G_b(\pi_r({}^cQ), \pi_c({}^cR))$ の任意の節点は高々一つの s 枝としか接続しないので、 M_A によって飽和されない節点が M_s を唯一に決め、従って、 M に M_A を対応させる写像は一对一であることがわかる。 M に対応した項の変数の集合は、 M_A に属する枝の枝重みと s ($M_s \neq \emptyset$ ならば) からなり M_A は M を決定するので、他の項の変数の集合と一致しない。 (証明終)

[補題4.4] $F \subset N_r \times N_c$, $Q, R \subset N$ をそれぞれ補題4.1と同様とする。 $(i, j) \in E({}^cR, {}^cQ)$ とする。このとき、

$$\deg(a_{ij}) \det [F](sI - A) = 1 \quad (4.41)$$

$\Leftrightarrow (i, j)$ は $G_b(\pi_r({}^cQ), \pi_c({}^cR))$ の有効枝

$$\deg(a_{ij}) \det [F](sI - A) = 0 \quad (4.42)$$

$\Leftrightarrow (i, j)$ は $G_b(\pi_r({}^cQ), \pi_c({}^cR))$ の無効枝

が成り立つ。ただし、 $\deg(\alpha)$ は、多項式に対して変数 α の次数をわりあてる関数である。

(証明) 式(4.35)より、 $\deg(a_{ij}) \det [F](sI - A) \leq 1$ である。もし枝 (i, j) が無効枝であれば、 (i, j) を含む完全マッチング $M \in \mathcal{M}$ は存在しないので、式(4.35)より、 $\deg(a_{ij}) \det [F](sI - A) = 0$ である。逆に枝 (i, j) が有効枝であれば、 (i, j) を含む完全マッチング $M \in \mathcal{M}$ が存在する。補題4.3より M に対応した項は打ち消されないので $\deg(a_{ij}) \det [F](sI - A) \geq 1$ である。 (証明終)

つぎに、 $G_b(\pi_r({}^\circ Q), \pi_c({}^\circ R))$, $|Q| = |R| = k$, の既約成分分解について考察する。この既約成分分解をDM分解ともいう[2] (また[3, pp.158-170]を参照)。この二部グラフは Coates グラフ $G_A(E({}^\circ R, {}^\circ Q))$ と自然な対応が存在することは前に述べた。以下では、DM分解をこの Coates グラフ $G_A(E({}^\circ R, {}^\circ Q))$ 上で解釈することにする。

ここで、 $G_b(\pi_r({}^\circ Q), \pi_c({}^\circ R))$ は、完全マッチングを持つことを仮定する。完全マッチングを持たないときには対応する小行列式は零となり素因子分解は自明であるからである。このことは、 $G_A(E({}^\circ R, {}^\circ Q))$ 中に k -因子接続が存在することと等価であるが(補題4.2の証明参照)、 ${}^\circ R \cap {}^\circ Q$ の任意の節点には s 枝による自己閉路が存在することに注意すれば、これは Q から R を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りが存在することと等価である。さらに $Q \cap R = \emptyset$ を仮定する。これは緩い仮定である。なぜならそうでないときにはいつでも特性行列 $sI - A$ の代りに大きさの小さな特性行列 $(sI - A)(\pi_r({}^\circ(Q \cap R)), \pi_c({}^\circ(Q \cap R)))$ を考えればよいからである。

まず、 $G_b(\pi_r({}^\circ Q), \pi_c({}^\circ R))$ 自体が既約であるための $G_A(E({}^\circ R, {}^\circ Q))$ に関する条件を導く。

[補題4.5] ($G_b(\pi_r({}^\circ Q), \pi_c({}^\circ R))$ 既約条件) $G_b(\pi_r({}^\circ Q), \pi_c({}^\circ R))$ が既約であるための必要十分条件は $G_A(E({}^\circ R, {}^\circ Q))$ がつぎの三つの条件を共に満たすことである。

I) $D \subset N$ を $|D| = k (=|Q|)$ を満たす $Q \rightarrow R$ 分離集合とすれば、 $D = Q$ または $D = R$ である。

II) $v \in N$ を任意にとる。そのとき、 $G_A(E({}^\circ R, {}^\circ Q))$ 上で $Q \rightarrow v$ である。

III) $v \in N$ を任意にとる。そのとき、 $G_A(E({}^\circ R, {}^\circ Q))$ 上で $v \rightarrow R$ である。

(証明) この証明中では、簡単のため $G_b(\pi_r({}^\circ Q), \pi_c({}^\circ R))$ を G_b 、 $G_A(E({}^\circ R, {}^\circ Q))$ を G_A と書く。

必要性： これらの三条件のいずれかが成り立たないとすれば、 G_b 中に非自明な最小枝被覆が存在することをしめす。

①条件Iが不成立の場合： $D \subset N$ を $|D|=k (=|Q|)$ 、 $D \neq Q$ かつ $D \neq R$ を満たす $Q \rightarrow R$ 分離集合とする。 $N_0, N_1, N_2 \subset N$ を以下のように定義する。 $N_0 := \{v \in N \mid \text{どの } v \rightarrow R \text{ 有向道も } D \text{ 中に節点を持つ}\}$ 、 $N_1 := N_0 \setminus Q$ 、 $N_2 := ({}^\circ N_0 \cup D) \setminus R$ 。このとき $[\pi_r(N_1), \pi_c(N_2)]$ が、非自明な最小枝被覆であることがつぎのように示される。a) 非自明であること： $D \subset N_0$ より $N_1 \neq \emptyset$ である。 $|D|=|R|$ かつ $D \neq R$ だから $N_2 \neq \emptyset$ である。b) 枝被覆であること： 逆に枝被覆でないとする。つまり、枝 $(w, v) \in E({}^\circ R, {}^\circ Q)$ 、 $v \in N_1$ 、 $w \in N_2$ が存在するとする。 $w \in {}^\circ N_2 \cap {}^\circ R \subset N_0 \cap {}^\circ D$ と、 $v \in {}^\circ N_1 \cap {}^\circ Q \subset {}^\circ N_0$ に注意する。後者から ${}^\circ D$ を通る $v \rightarrow R$ 有向道 P_1 が存在することになるが、すると $(w, (w, v), v) \cdot P_1$ は ${}^\circ D$ を通る $w \rightarrow R$ 有向道となるので、 $w \in {}^\circ N_0$ となるが、これは $w \in N_0$ に矛盾する。c) 最小であること： G_b は完全マッチングを持つので König の定理[4]より最小枝被覆の大きさは $|N_1| - k$ である。まず、 $N_1 \cup N_2 = D \cup ({}^\circ R \cap {}^\circ Q)$ 、 $N_1 \cap N_2 = D \cap ({}^\circ R \cap {}^\circ Q)$ に注意する。すると、 $|\pi_r(N_1) \cup \pi_c(N_2)| = |N_1| + |N_2| = |N_1 \cup N_2| + |N_1 \cap N_2| = |D \cup ({}^\circ R \cap {}^\circ Q)| + |D \cap ({}^\circ R \cap {}^\circ Q)| = |{}^\circ R \cap {}^\circ Q| + |D| = |N_1| - k$ となる。ここで仮定 $R \cap Q = \emptyset$ を用いた。②条件IIが不成立の場合： このときには、 $Q \neq d$ となる $d \in N$ が存在する。 G_A 中に Q から R を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りが存在するので、 $d \in R$ であることに注意する。 $N_0, N_1, N_2 \subset N$ を以下のように定義する。 $N_0 := \{v \in N \mid Q \rightarrow v\}$ 、 $N_1 := (N_0 \cup R) \setminus Q$ 、 $N_2 := {}^\circ N_0 \cap {}^\circ R$ 。このとき $[\pi_r(N_1), \pi_c(N_2)]$ が、非自明な最小枝被覆であることがつぎのように示される。a) 非自明であること： 仮定より

$Q \cap R = \emptyset$ だから $N_1 \supset R$ となって $N_1 \neq \emptyset$ である。 $d \in N_2$ だから $N_2 \neq \emptyset$ である。b) 枝被覆であること：逆に枝被覆でないとする。つまり、枝 $(w, v) \in E({}^\circ R, {}^\circ Q)$, $v \in N_1, w \notin N_2$ が存在するとする。 $w \in {}^\circ N_2 \cap {}^\circ R = N_0 \cap {}^\circ R$ と、 $v \in {}^\circ N_1 \cap {}^\circ Q = {}^\circ N_0 \cap {}^\circ R \cap {}^\circ Q$ に注意する。 $w \in N_0$ より $Q \rightarrow w$ 有向道 P が存在するが、すると有向道 $P \cdot (w, (w, v), v)$ によって $Q \rightarrow v$ となるので、 $v \in N_0$ だが、これは $v \in {}^\circ N_0$ に矛盾する。c) 最小であること： $N_1 \cup N_2 = {}^\circ Q$ と $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ に注意する。すると $|N_1| + |N_2| = |{}^\circ Q| = |N| - k$ となる。

③条件Ⅲが不成立の場合：非自明な最小枝被覆の存在は②と全く同様に証明される。

十分性：まずつぎの補題4.6を必要とする。

[補題4.6] $G_A(E({}^\circ R, {}^\circ Q))$ が補題4.5の三条件を共に満たすとする。任意に $(w, v) \in E({}^\circ R, {}^\circ Q)$ をとる。このとき (w, v) は、有効枝であり、(a) (w, v) を含む有向道を含んで Q と R を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りが存在する、または(b) (w, v) を含む有向閉路とそれと互いに節点を共有しない有向道からなる Q と R を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りが存在する。

(注意4.1) Coates グラフ $G_A(E({}^\circ R, {}^\circ Q))$ と、二部グラフ $G_b(\pi_r({}^\circ Q), \pi_c({}^\circ R))$ の間の一対一対応の存在からこれらのグラフは互いに同一視されることがある。特に、 $G_A(E({}^\circ R, {}^\circ Q))$ の枝 (w, v) が有効枝であるとは、 $G_b(\pi_r({}^\circ Q), \pi_c({}^\circ R))$ 中で $(\pi_r(v), \pi_c(w))$ が有効枝であることを意味する。

(証明) (a)または(b)の部分グラフは、それに含まれない節点に s 枝

の自己閉路を付け加えることにより k -因子接続 ($k = |Q|$) に拡張することができるので、後半だけを証明すれば十分である。 $N_1 := Q \cup \{v\}$, $N_2 := R \cup \{w\}$ とおく。 $w \in R$, $v \in Q$ より $|N_1| = |N_2| = k + 1$ である。まず、 G_A 中に N_1 と N_2 を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りが存在することを証明する。そのために逆にそのような有向道の集りは存在しないと仮定する。すると Menger の定理 [4] より $|D| = k$ となる $N_1 \rightarrow N_2$ 分離集合が存在する。 $Q \subset N_1$, $R \subset N_2$ より、 D は $Q \rightarrow R$ 分離集合でもある。すると補題 4.5 の条件 I より $D = Q$ または $D = R$ である。 $D = Q$ と仮定する。 $D = R$ のときの証明は全く同様である。 $v \in N_1$, $R \subset N_2$ より D は $v \rightarrow R$ 分離集合でもあるので、任意の $v \rightarrow R$ 有向道は $D (= Q)$ 中に節点をもつ。このことと $v \in Q$, G_A の枝集合は $E({}^cR, {}^cQ)$ であることから、 $v \rightarrow R$ 有向道は存在しない。つまり $v \nrightarrow R$ となって、補題 4.5 の条件 III に矛盾する。これで N_1 と N_2 を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りが存在することがわかった。その一つを、 $P = \{P_1, \dots, P_{k+1}\}$ とする。(c) P 中の有向道で $v \rightarrow w$ となる場合と、(d) そうでない場合にわけて考える。(c) の場合には、 P_1 が $v \rightarrow w$ 有向道であるとする。すると有向閉路 $(w, (w, v), v) \cdot P_1$ と Q と R を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集り $P \setminus \{P_1\}$ は (b) の条件を満たす。(d) の場合には、 v は P_1 の始点、 w は P_2 の終点とする。 $P := P_2 \cdot (w, (w, v), v) \cdot P_1$ とおく。すると有向道の集り $\{P, P_3, \dots, P_{k+1}\}$ は (a) の条件を満たす。 (証明終)

(補題 4.5 の証明・続) 補題 4.5 の三条件が満たされるとき、 G_b の最小枝被覆は自明であることを示す。 $[\pi_r(N_1), \pi_c(N_2)]$ を G_b の最小枝被覆とする。 $N_3 := {}^cQ \setminus N_1$, $N_4 := {}^cR \setminus N_2$ とおく。枝被覆の定義より、 $E(N_4, N_3) = \emptyset$ である。 $E(N_2, N_1)$ の任意の枝は無効枝なので、補題 4.6 より $E(N_2, N_1) = \emptyset$ である。従って、 $(i, j) \in E({}^cR, {}^cQ)$ とすれば、 $i \in N_2$

と $j \in N_3$ は等価であり、 $i \in N_4$ と $j \in N_1$ は等価である。 $i \in {}^cR \cap {}^cQ$ とすれば、 G_A は節点 i に自己閉路を持つので、先に述べたことの特種な場合として、 $i \in N_2$ と $i \in N_3$ は等価であり、 $i \in N_4$ と $i \in N_1$ は等価である。これらの事実を遷移的に用いることにより、 $a \rightarrow b$ とすれば、 $a \in N_2$ と $b \in N_3$ は等価であり、 $a \in N_4$ と $b \in N_1$ は等価である。このことから $X := (Q \cap N_4) \cup (R \cap N_3)$ と、 $Y := (Q \cap N_2) \cup (R \cap N_1)$ は、共に $Q \rightarrow R$ 分離集合である。しかし Menger の定理より、 $|X| \geq k, |Y| \geq k$ であり、 $|X| + |Y| = |Q| + |R| = 2k$ だから、 $|X| = |Y| = k$ となる。すると条件 I より $X = Q$ または $X = R$ となる。 $X = Q$ と仮定する。 $X = R$ の場合は全く同様に証明できる。まず $Q \cap R = \emptyset$ だから $Q \subset N_4$ である。 $v \in {}^cR$ を任意にとる。条件 II より $Q \rightarrow v$ だが、これと $Q \subset N_4$ より $v \in N_1$ である。従って $v \notin Q$ ならば $v \in N_4$ となる。 $v \in Q$ のときは $Q \subset N_4$ より $v \in N_4$ となる。ゆえに ${}^cR \subset N_4$ であり、 ${}^cR \supset N_4$ は明らかなので、 ${}^cR = N_4$ 、つまり $N_2 = \emptyset$ となり、 $[\pi_r(N_1), \pi_c(N_2)]$ は自明である。

(補題4.5証明終)

補題4.5より $G_b(\pi_r({}^cQ), \pi_c({}^cR))$ のDM分解に当っては、 $G_A(E({}^cR, {}^cQ))$ 中の $Q \rightarrow R$ 分離集合が重要な役割を果たしていると思われる。そこで D を要素数最小の $Q \rightarrow R$ 分離集合の系、つまり $D := \{D \mid |D| = k, D \text{ は } G_A(E({}^cR, {}^cQ)) \text{ 中の } Q \rightarrow R \text{ 分離集合}\}$ とおく。明らかに $Q, R \in D$ なので $D \neq \emptyset$ である。 D 中の二項関係 \leq をつぎのように定義する。 $D_1, D_2 \in D$ として、 D_1 が $Q \rightarrow D_2$ 分離集合ならば $D_1 \leq D_2$ と定義する。

[補題4.7] D は二項関係 \leq によって半順序集合となる。さらに D は分配束である。

補題4.7の証明には以下の補題4.8から補題4.14までを必要とする。

[補題4.8] $P = \{P_1, \dots, P_k\}$ を Q から R を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りとし、 $D \in \mathcal{D}$ とする。このとき写像 $\xi(P, D; \cdot) : P \rightarrow \mathcal{D}$ を、 P_i に対して D 中の P_i の節点を対応させる ($i = 1, \dots, k$) とすれば、これは矛盾なく定義され、さらに対一対応である。

(証明) P_i は $Q \rightarrow R$ 有向道であり、 D は $Q \rightarrow R$ 分離集合だから、 P_i 中には D の節点が少なくとも一つはある。ところが、 P は互いに節点を共有しない有向道の集りであり、 $|P_i| = |D_i| = k$ なので P_i 上の D の節点は唯一である。従って、写像は矛盾なく定義され、対一対応である。

(証明終)

二項関係 \leq の定義では D_1 と D_2 の役割 (または Q と R の役割) が対称ではなかったが、つぎの補題4.9により対称であることが示される。

[補題4.9] $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ とする。 D_1 が $Q \rightarrow D_2$ 分離集合である必要十分条件は D_2 が $D_1 \rightarrow R$ 分離集合であることである。

(証明) 必要性: 逆に D_2 が $D_1 \rightarrow R$ 分離集合でないとする。すると、ある $d \in D_1$ に対して、 ${}^{\circ}D_2$ を通る $d \rightarrow R$ 有向道 P が存在する。 $P_i = \xi^{-1}(P, D_1; d)$ とおき、 P' を P_i 中の $Q \rightarrow d$ 部分有向道とする。 P' は、節点 $d' \in D_2$ をもつ。なぜなら、もしそうでないとするならば、 $P' \cdot P$ は、 ${}^{\circ}D_2$ を通る $Q \rightarrow R$ 有向道となり、 $D_2 \in \mathcal{D}$ に反するからである。 $d \notin D_2$ だから $d \neq d'$ に注意しておく。すると、 P' 中の $Q \rightarrow d'$ 部分有向道は、 d は補題4.8より P' に含まれる唯一の D_1 の節点なので、

$\circ D_1$ を通る有向道である。しかし、このことは D_1 が $Q \rightarrow D_2$ 分離集合であることに矛盾する。 十分性： これは必要性と同様にして証明される。

(証明終)

[補題4.10] 二項関係 \leq は、半順序関係である。

(証明) 反射律： 定義より明らか。

反対称律： $D_1 \leq D_2$ かつ $D_2 \leq D_1$ とする。定義より D_2 は $Q \rightarrow D_1$ 分離集合であり、補題4.9より D_2 は $D_1 \rightarrow R$ 分離集合である。 $d \in D_1$ を任意にとる。 Q から R を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集り P を一つ選び固定する。 $P = \xi^{-1}(P, D_1; d)$ とおく。仮定より P の中の $Q \rightarrow d$ 部分有向道も $d \rightarrow R$ 部分有向道も共に D_2 中に節点をもつ。補題4.8より P は D_2 中に唯一の節点をもつので、 d がその節点でなければならず、従って $d \in D_2$ である。ゆえに、 $D_1 \subset D_2$ である。逆の包含関係は同様に証明される。

推移律： $D_1 \leq D_2, D_2 \leq D_3$ とする。 P を任意の $Q \rightarrow D_3$ 有向道とする。 $D_2 \leq D_3$ より P は D_2 中に節点をもつので、 P の中に $Q \rightarrow D_2$ 部分有向道をもつ。すると、 $D_1 \leq D_2$ よりその有向道は D_1 中に節点をもつ。従って、 P は D_1 中に節点をもつので、 $D_1 \leq D_3$ である。 (証明終)

P を初等的な有向道とし、 $X \subset N$ を、 $X \subset N(P)$ 、 $X \neq \emptyset$ とする。このとき

$\text{tail}(X; P) := v$, v は任意の $w \in X$ について P 上で $w \rightarrow v$ を満たす。 (4.43)

$\text{head}(X; P) := v$, v は任意の $w \in X$ について P 上で $v \rightarrow w$ を

満たす。

(4.44)

と定義する。これらの定義が意味をもつことは P が初等的な有向道であることからわかる。

[補題4.11] D は束である。

(証明) Q から R を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集り P を一つ選び固定する。 $D_1, D_2 \in D$ に対して、 $D_0, D_i \in CN$ を

$$D_0 := \{\text{tail}(\{\xi(P, D_1; P_i), \xi(P, D_2; P_i)\}; P_i), P_i \in P\}$$

(4.45)

$$D_i := \{\text{head}(\{\xi(P, D_1; P_i), \xi(P, D_2; P_i)\}; P_i), P_i \in P\}$$

(4.46)

と定義する。以下では、 $\sup \{D_1, D_2\} = D_0$, $\inf \{D_1, D_2\} = D_i$ を示す。これら二つの証明は同様にできるので上限についてのみ示す。

(1) D_0 は $Q \rightarrow R$ 分離集合である。: P を任意の $Q \rightarrow R$ 有向道とし、 $X := (D_1 \cup D_2) \cap N(P)$ とおく。 $D_1, D_2 \in D$ より $X \neq \emptyset$ である。 $d_0 = \text{tail}(X; P)$ とおく。まず $d_0 \in D_1$ である場合を考える。 $P_i = \xi^{-1}(P, D_1; d_0)$ とおく。もし $d_0 \neq \text{tail}(\{\xi(P, D_1; P_i), \xi(P, D_2; P_i)\}; P_i)$ ならば、有向道 (P_i 中の $Q \rightarrow d_0$ 部分有向道) \cdot (P 中の $d_0 \rightarrow R$ 部分有向道) は、 D_2 を通る $Q \rightarrow R$ 有向道であり、これは $D_2 \in D$ に矛盾する。従って、 $d_0 \in D_0$ である。 $d_0 \in D_2$ である場合も同様に $d_0 \in D_0$ となるので、 D_0 は $Q \rightarrow R$ 分離集合である。

(2) $|D_0| = k$: (1)と Menger の定理より $|D_0| \geq k$ である。一方、式

(4.45)より $|D_0| \leq k$ である。(1)と(2)より $D_0 \in D$ が示された。

(3) $D_1 \leq D_0, D_2 \leq D_0$: P を任意の $D_1 \rightarrow R$ 有向道とし $d \in D_1$ を P の始点とする。 P' を $\xi^{-1}(P, D_1; d)$ の中の $Q \rightarrow d$ 部分有向道とする。式(4.45)より P' は d は別として、それ以外の節点は D_0 に含まれない。 $P' \cdot P$ は $Q \rightarrow R$ 有向道なので(1)より D_0 の節点を含む。従って、 P は D_0 の節点を含む。ゆえに補題4.9より $D_1 \leq D_0$ となる。 $D_2 \leq D_0$ は全く同様に導かれる。

(4) $D \in D, D_1 \leq D, D_2 \leq D$ ならば $D_0 \leq D$ である。: 補題4.9より D は $D_1 \rightarrow R$ 分離集合かつ $D_2 \rightarrow R$ 分離集合であることに注意する。すると式(4.45)より $D_0 \subset D_1 \cup D_2$ であるから、 D は $D_0 \rightarrow R$ 分離集合でもある。ゆえに、ふたたび補題4.9より $D_0 \leq D$ となる。(1)-(4)より実際に D_0 が $\{D_1, D_2\}$ の上限であることが示された。 (証明終)

(注意4.2) 式(4.45) (式(4.46)) の $D_0 (D_i)$ の定義で Q から R を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りを用いたが、上限、下限はもし存在するとすれば唯一なので、 $D_0 (D_i)$ 自体はそれに無関係である。これは直接に確かめることができる。実際つぎの補題4.12が成り立つ。

[補題4.12]

$$D_0 = (D_1 \cap D_2) \cup \{v \in D_1 \mid \circ D_2 \text{ を通って } v \rightarrow R\} \\ \cup \{v \in D_2 \mid \circ D_1 \text{ を通って } v \rightarrow R\} \quad (4.47)$$

$$D_i = (D_1 \cap D_2) \cup \{v \in D_1 \mid \circ D_2 \text{ を通って } Q \rightarrow v\} \\ \cup \{v \in D_2 \mid \circ D_1 \text{ を通って } Q \rightarrow v\} \quad (4.48)$$

(証明) P を式(4.45) (式(4.46)) の $D_0 (D_i)$ の定義で用いた Q か

ら R を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りとする。 D_1 については全く同様に証明できるので D_0 についてのみ証明する。 $N_1 := \{v \in D_1 \mid {}^\circ D_2$ を通って $v \rightarrow R\}$ 、 $N_2 := \{v \in D_2 \mid {}^\circ D_1$ を通って $v \rightarrow R\}$ とおく。 $N_1 \subset D_1 \setminus D_2$ 、 $N_2 \subset D_2 \setminus D_1$ だから、式(4.47)の右辺は非共通和であることに注意しておく。

$D_0 \subset$ 式(4.47)の右辺: $v \in D_0$ を任意にとる。 $v \in D_1 \setminus D_2$ とすれば、 $P = \xi^{-1}(P, D_1; v)$ として、tail の定義より P の部分有向道で ${}^\circ D_2$ を通って $v \rightarrow R$ となるので、 $v \in N_1$ である。 $v \in D_2 \setminus D_1$ の場合には同様にして $v \in N_2$ であることが示される。

$D_0 \supset$ 式(4.47)の右辺: $v \in D_1 \cap D_2$ とする。このときは $\xi^{-1}(P, D_1; v) = \xi^{-1}(P, D_2; v) =: P$ だから、 $\text{tail}(\{\xi(P, D_1; P), \xi(P, D_2; P)\}; P) = \text{tail}(\{v\}; P) = v$ となるので、 $v \in D_0$ である。つぎに $v \in N_1$ とする。このとき、 ${}^\circ D_2$ を通って $v \rightarrow R$ となる有向道を P' とする。 $P := \xi^{-1}(P, D_1; v)$ 、 $w := \xi(P, D_2; P)$ とおく。 $\text{tail}(\{w, v\}; P) \neq v$ とすれば、有向道 (P 中の $Q \rightarrow v$ 部分有向道) $\cdot P'$ は ${}^\circ D_2$ を通る $Q \rightarrow R$ 有向道となり $D_2 \in D$ に反する。従って、 $v = \text{tail}(\{w, v\}; P)$ となるので、 $v \in D_0$ である。 $v \in N_2$ の場合も同様にして $v \in D_0$ となる。
(証明終)

補題4.7の証明を完結するためには D が N のある部分集合の集合束に束同型であることを示せばよい。このために N の部分集合 $N_0 \subset N$ を

$$N_0 := \bigcap_{D \in \mathcal{D}} [\{v \mid {}^\circ D \text{ を通って } Q \rightarrow v\} \cup \{v \mid {}^\circ D \text{ を通って } v \rightarrow R\} \cup D] \quad (4.49)$$

と定義する。

(注意4.3) 任意の $D \in \mathcal{D}$ について $D \subset N_0$ である。これを確かめるために任意に $d \in D$ をとり、 Q から R を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集り P を一つ選び、 $P := \xi^{-1}(P, D; d)$ とおく。 $D' \in \mathcal{D}$ を任意に選ぶとき P は D' 中に唯一の節点をもつので、 D' に対して d は式(4.49)の右辺の三条件のいずれかを満たす。

写像 $\psi : D \rightarrow P(N_0)$ を

$$\psi(D) := \{v \in N_0 \mid \circ D \text{ を通って } Q \rightarrow v\} \cup D \quad (4.50)$$

と定義する。ここで $P(\cdot)$ は、巾集合を表す。注意4.3より ψ は D を $P(N_0)$ の中に写す。

【補題4.13】

$$\psi(D) = N_0 \setminus \{v \in N_0 \mid \circ D \text{ を通って } v \rightarrow R\} \quad (4.51)$$

(証明) $v \in \psi(D)$ を任意にとる。 P を任意の $v \rightarrow R$ 有向道とする。 $v \in \psi(D)$ より、 $\circ D$ を通る $Q \rightarrow v$ 有向道 P' が存在するか $v \in D$ のいずれかである。いずれにしても P は D 中に節点をもつ。なぜなら前者とすれば $P' \cdot P$ は $Q \rightarrow R$ 有向道だからである。従って、 $v \notin \{v \in N_0 \mid \circ D \text{ を通って } v \rightarrow R\}$ である。逆の包含関係は式(4.49)より明らかである。

(証明終)

【補題4.14】 $\psi : D \rightarrow \text{Im}(\psi) \subset P(N_0)$ は束同型である。ここで $\text{Im}(\psi)$ の半順序は包含関係によって与えられるものとする。

(証明) (1) $\psi(D_1) \cup \psi(D_2) = \psi(\sup\{D_1, D_2\})$: (1-1) $v \in \psi(D_1)$ を任意にとる。つまり、 ${}^\circ D_1$ を通る $Q \rightarrow v$ 有向道 P_1 が存在するか、 $v \in D_1$ のいずれかである。 P_2 を任意の $v \rightarrow R$ 有向道とする。前者の場合、 $P_1 \cdot P_2$ は $Q \rightarrow R$ 有向道となるので、 P_2 は D_1 の中に節点をもつ。従って、いずれにしても P_2 は D_1 の中に節点をもつ。つまり P_2 は、 $D_1 \leq \sup\{D_1, D_2\}$ だから、 $\sup\{D_1, D_2\}$ の中に節点をもつ(補題4.9参照)。ゆえに補題4.13より $v \in \psi(\sup\{D_1, D_2\})$ である。 $v \in \psi(D_2)$ の場合も全く同様にして $v \in \psi(\sup\{D_1, D_2\})$ となる。(1-2) $v \in \psi(\sup\{D_1, D_2\})$ を任意にとる。まず最初に ${}^\circ(\sup\{D_1, D_2\})$ を通る $Q \rightarrow v$ 有向道 P_1 が存在する場合を考える。 $X := (Q \cup D_1 \cup D_2) \cap N(P_1)$ とおく。 P_1 の始点は X に属するので $X \neq \emptyset$ である。 $z := \text{tail}(X; P_1)$ とおく。 $z \in Q$ ならば、 P_1 は ${}^\circ D_1$ を通る $Q \rightarrow v$ 有向道となるので $v \in \psi(D_1)$ である。 $z \in D_1$ ならば、式(4.45)より ${}^\circ D_2$ を通る $Q \rightarrow z$ 有向道 P_2 が存在する。すると有向道 $P_2 \cdot (P_1 \text{ の中の } z \rightarrow v \text{ 部分有向道})$ は ${}^\circ D_2$ を通る $Q \rightarrow v$ 有向道となるので、 $v \in \psi(D_2)$ である。 $z \in D_2$ の場合には全く同様にして $v \in \psi(D_1)$ となる。つぎに $v \in \sup\{D_1, D_2\}$ の場合を考える。このときには、 $v \in \sup\{D_1, D_2\} \subset D_1 \cup D_2 \subset \psi(D_1) \cup \psi(D_2)$ となる。

(2) $\psi(D_1) \cap \psi(D_2) = \psi(\inf\{D_1, D_2\})$: これは、(1)と同様にして証明できるので省略する。

(3) ψ は一対一である。: $\psi(D_1) = \psi(D_2)$ とする。つまり、 $\psi(\sup\{D_1, D_2\}) = \psi(D_1) \cup \psi(D_2) = \psi(D_1) \cap \psi(D_2) = \psi(\inf\{D_1, D_2\})$ が成り立つ。ここで $\sup\{D_1, D_2\} \neq \inf\{D_1, D_2\}$ であると仮定してみる。すると $|\sup\{D_1, D_2\}| = |\inf\{D_1, D_2\}|$ だから、 $x \in \sup\{D_1, D_2\} \setminus \inf\{D_1, D_2\}$ が存在する。 ψ の定義から ${}^\circ(\inf\{D_1, D_2\})$ を通る $Q \rightarrow x$ 有向道 P_1 が存在する。一方 $\sup\{D_1, D_2\} = \sup\{\sup\{D_1, D_2\}, \inf\{D_1,$

$D_2\}$ だから、式(4.47)より $\circ(\inf \{D_1, D_2\})$ を通る $x \rightarrow R$ 有向道 P_2 が存在する。これが求めていた矛盾である。なぜならもしそうでなければ $P_1 \cdot P_2$ は $\circ(\inf \{D_1, D_2\})$ を通る $Q \rightarrow R$ 有向道となるからである。従って、 $\sup \{D_1, D_2\} = \inf \{D_1, D_2\}$ となるので $D_1 = D_2$ である。(証明終)

(補題4.7の証明) 補題4.8から補題4.14を証明したので、上限と下限が分配法則を満たすことを示せばよい。しかしこれは $\text{Im}(\psi)$ が集合束であることから明らかである。(証明終)

(注意4.4) D は分配束だから Jordan-Hölder の定理 [5, p. 74] が成立する。この定理をここで述べると、 $\{D_i, i=0, \dots, h\}$ を D の組生列、つまり、 $Q = D_0 \mid D_1 \mid \dots \mid D_h = R$ とする。ただしここで $D_1 \mid D_2$ は D_1 は D_2 の直前 (D_2 は D_1 の直後) であることを表す。定理によると、集合 $\{\psi(D_i) \setminus \psi(D_{i-1}) \mid i=1, \dots, h\}$ は組生列に無関係である。

つぎの補題4.15により、この集合 $\{\psi(D_i) \setminus \psi(D_{i-1}) \mid i=1, \dots, h\}$ を Coates グラフ上で特徴づけることができる。これは Shreier の細分定理 [5, p. 72] より任意の $D_1, D_2, D_1 \mid D_2$ に対して、それらを含む組生列が存在するからである。

[補題4.15] $D_1, D_2 \in D, D_1 \mid D_2$ とする。このとき次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \psi(D_2) \setminus \psi(D_1) = & (\{v \mid \circ D_2 \text{ を通って、かつ } * \circ D_1 \text{ を通って } D_1 \rightarrow \\ & v \} \cap \{v \mid \circ D_1 \text{ を通って、かつ } \circ D_2 * \text{ を通って} \\ & v \rightarrow D_2 \}) \cup (D_2 \setminus D_1) \end{aligned} \quad (4.52)$$

(証明) (1) $v \in \psi(D_2) \setminus \psi(D_1)$ を任意にとる。まず、 $v \in \psi(D_2)$ より $v \in N_0$ であること、 $v \notin \psi(D_1)$ より $v \notin D_1$ であること、及び $v \in \psi(D_1)$, $v \in N_0$ より任意の $Q \rightarrow v$ 有向道は D_1 の中に節点をもつことに注意する。もし $v \in D_2$ とすれば、 $v \in D_2 \setminus D_1$ より v は式(4.52)の右辺に含まれる。従って、以降 $v \in D_2$ と仮定する。 ψ の定義より、 ${}^c D$ を通る $Q \rightarrow v$ 有向道 P_1 が存在する。 $X := D_1 \cap N(P_1)$ とおく。任意の $Q \rightarrow v$ 有向道は D_1 の中に節点をもつので $X \neq \emptyset$ である。 $d_1 := \text{tail}(X; P_1)$ とおく。 P_1 の中の $d_1 \rightarrow v$ 部分有向道は、 $d_1 \in D_2$ だから、 ${}^c D_2$ を通り、かつ ${}^c D_1$ を通る $D_1 \rightarrow v$ 有向道である。一方 $v \in N_0$, $v \in \psi(D_1)$ より、補題4.13を用いると、 ${}^c D_1$ を通る $v \rightarrow R$ 有向道 P_2 が存在する。 $Y := D_2 \cap N(P_2)$ とおく。 $v \in \psi(D_2) \setminus D_2$ だから $Y \neq \emptyset$ である。 $d_2 := \text{head}(Y; P_2)$ とおく。 P_2 の中の $v \rightarrow d_2$ 部分有向道は、 $d_2 \in D_2$ だから、 ${}^c D_1$ を通り、かつ ${}^c D_1^*$ を通る $v \rightarrow D_2$ 有向道である。従って、 v は式(4.52)の右辺に含まれる。

(2) v を任意に式(4.52)の右辺からとる。(2-1) $v \in D_2 \setminus D_1$ の場合：
 Q から R を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集り P を一つ固定し、 $P := \xi^{-1}(P, D_2; v)$, $d := \xi(P, D_1; P)$ とおく。 $v \in D_1$ より $v \neq d$ である。 $D_1 \leq D_2$ だから $d = \text{head}(\{d, v\}; P)$ である。すると、 P の中の $v \rightarrow R$ 部分有向道は ${}^c D_1$ を通る。ゆえに、補題4.13より $v \in \psi(D_1)$ であるが、 $v \in D_2 \subset \psi(D_2)$ を用いると、 $v \in \psi(D_2) \setminus \psi(D_1)$ となる。
(2-2) $v \in (\{v \mid {}^c D_2$ を通って、かつ ${}^c D_1$ を通って $D_1 \rightarrow v\} \cap \{v \mid {}^c D_1$ を通って、かつ ${}^c D_2^*$ を通って $v \rightarrow D_2\})$ の場合：
 P_1, P_2 をそれぞれ括弧の中の条件を満たす $x \rightarrow v$ 有向道、 $v \rightarrow y$ 有向道とする。式(4.46)を用いると、 $x \in D_1 \setminus D_2$, $D_1 \leq D_2$ より、 ${}^c D_2$ を通る $Q \rightarrow x$ 有向道 P_3 が存在する。同様にして、 ${}^c D_1$ を通る $y \rightarrow R$ 有向道 P_4 が存在する。 $P_3 \cdot P_1$ は ${}^c D_2$ を通る $Q \rightarrow v$ 有向道、 $P_2 \cdot P_4$ は ${}^c D_1$ を通

る $v \rightarrow R$ 有向道であることを注意する。従って、 $v \in N_0$ を示すことができたなら、 ψ の定義と補題4.13より $v \in \psi(D_2) \setminus \psi(D_1)$ となる。以下これを示す。 $D \in \mathcal{D}$ を任意にとる。 $v \in D$ のときは式(4.49)の一つの条件を満たしているので、以下 $v \notin D$ として、 ${}^\circ D$ を通って $Q \rightarrow v$ 、または ${}^\circ D$ を通って $v \rightarrow R$ であることを示す。 P_1, \dots, P_4, x, y を前と同じとする。つまり、 P_1 は ${}^\circ D_2$ を通り、かつ $*{}^\circ D_1$ を通る $x \rightarrow v$ 有向道など。(場合 a) $D \leq D_1$ または $D \leq D_2$ の場合: $D \leq D_1$ とする。 $D \leq D_2$ の場合も同様に扱える。 $P_2 \cdot P_4$ は ${}^\circ D_1$ を通る有向道だから、 $D \leq D_1$ よりそれは ${}^\circ D$ を通る $v \rightarrow R$ 有向道である。(場合 b) aでない場合: 逆に任意の $Q \rightarrow v$ 有向道は D 中に節点をもち、かつ任意の $v \rightarrow R$ 有向道は D 中に節点をもつと仮定しよう。このとき矛盾を生じることがつぎのようにしてわかる。その前につぎの補題4.16を必要とする。

[補題4.16] $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, $D_1 < D_2$, $v \in N$ とする。もし、 ${}^\circ D_2$ を通り、かつ $*{}^\circ D_1$ を通る $D_1 \rightarrow v$ 有向道と、 ${}^\circ D_1$ を通り、かつ ${}^\circ D_2^*$ を通る $v \rightarrow D_2$ 有向道が共に存在するならば、任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して、 $v \in D$ である。

(証明) (場合 a) $D \leq D_1$ または $D \leq D_2$ の場合: $D \leq D_1$ とする。 $D \leq D_2$ の場合も同様に扱える。 P_1 を補題の条件を満たす $v \rightarrow D_2$ 有向道とする。 Q から R を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集り P を一つ固定する。 w を P_1 の終点とし、 P_2 を $\xi^{-1}(P, D_2; w)$ 中の $w \rightarrow R$ 部分有向道とする。 $w \in D_2 \setminus D_1$, $D_1 \leq D_2$ だから、 P_2 は ${}^\circ D_1$ を通る有向道であることを注意する。すると、 $P_1 \cdot P_2$ は ${}^\circ D_1$ を通る $v \rightarrow R$ 有向道だから、 $D \leq D_1$ より、それは ${}^\circ D$ を通る $v \rightarrow R$ 有向道である。(場合 b) aでない場合: 逆に $v \in D$ と仮定する。補題4.16の条件より、 $v \in D_1$

$U D_2$, ${}^{\circ}D_2$ を通って $Q \rightarrow v$, ${}^{\circ}D_1$ を通って $v \rightarrow R$ である。すると、補題 4.12 より、 $v \in \sup \{D, D_1\}$ かつ $v \in D_3 := \inf \{D_2, \sup \{D, D_1\}\}$ となる。 D は分配束だから、 $D_3 = \sup \{D_1, \inf \{D, D_2\}\}$ である。このことから $D_1 \leq D_3 \leq D_2$ となる。一方、 $v \in D_3$, $v \in D_1 \cup D_2$ より $D_1 \neq D_3$ かつ $D_2 \neq D_3$ となるが、これは $D_1 < D_2$ に矛盾する。 (証明終)

(補題 4.15 証明・続) 補題 4.16 より P_1 は ${}^*{}^{\circ}D$ を通る有向道であり、 P_2 は ${}^{\circ}D^*$ を通る有向道である。このことと、任意の $Q \rightarrow v$ 有向道は D 中に節点をもつという条件から、任意の $Q \rightarrow x$ 有向道は D 中に節点をもつ。同様にして、任意の $y \rightarrow R$ 有向道は D 中に節点をもつ。すると、式(4.45), (4.46) より、 $x \in \sup \{D, D_1\}$ であり、 $y \in \inf \{D, D_2\}$ である。 P_3 , P_4 はそれぞれ式(4.48), (4.47)中の条件を満たすので、 $x \in D_3 := \inf \{D_2, \sup \{D, D_1\}\}$ であり、 $y \in D_4 := \sup \{D_1, \inf \{D, D_2\}\}$ である。分配法則から $D_3 = D_4$ であり、また $D_1 \leq D_3 \leq D_2$ が成立している。しかし、 $x \in D_3 \setminus D_2$, $y \in D_3 \setminus D_1$ より、 $D_1 \neq D_3$ かつ $D_2 \neq D_3$ となるが、これは $D_1 < D_2$ に矛盾する。 (証明終)

補題 4.5 の既約条件と分配束 D の性質 (補題 4.7 - 補題 4.16) を用いることにより、二部グラフの DM 分解は、それに対応した Coates グラフの既約分解を生じさせる。そのことからこの Coates グラフの既約分解をも DM 分解とよぶことにする。つぎの補題 4.17 では、Coates グラフの DM 分解を分配束 D を用いて特徴づける。

[補題 4.17] (Coates グラフの DM 分解) 二部グラフ $G_b(\pi_r({}^{\circ}Q), \pi_o({}^{\circ}R))$ の DM 分解は、それに対応した Coates グラフ $G_A(E({}^{\circ}R, {}^{\circ}Q))$ の上で次のような分解を生じる。ここで、 $|Q| = |R| = k$, $Q \cap R = \emptyset$ とす

る。まず、つぎのような概念を用意する。

$$D: \text{ 大きさ } k \text{ の } Q \rightarrow R \text{ 分離集合の系} \quad (4.53)$$

$$N_0 := \bigcap_{v \in Q} [\{v \mid {}^\circ D \text{ を通って } Q \rightarrow v\} \cup \{v \mid {}^\circ D \text{ を通って } v \rightarrow R\} \cup D] \quad (4.54)$$

$$\psi: D \rightarrow P(N_0), \quad \psi(D) = \{v \in N_0 \mid {}^\circ D \text{ を通って } Q \rightarrow v\} \cup D \quad (4.55)$$

$$\zeta: D \rightarrow P(N_0), \quad \zeta(D) = \{v \in N_0 \mid {}^\circ D \text{ を通って } v \rightarrow R\} \cup D \quad (4.56)$$

$$Q = D_0 \mid \langle D_1 \mid \langle \dots \mid \langle D_h = R: \quad D \text{ のある組生列} \quad (4.57)$$

さらに、つぎのような N の部分集合を定義する。

$$N_{ri} := \psi(D_i) \setminus \psi(D_{i-1}), \quad i = 1, \dots, h \quad (4.58)$$

$$N_{ci} := \zeta(D_{i-1}) \setminus \zeta(D_i), \quad i = 1, \dots, h \quad (4.59)$$

$$M_i, \quad i = 1, \dots, t: G_A({}^\circ N_0, E({}^\circ N_0, {}^\circ N_0)) \text{ の強連結成分の節点集合} \quad (4.60)$$

$$N_{ri} = N_{ci} = M_{i-h}, \quad i = h+1, \dots, h+t \quad (4.61)$$

このとき $G_b(\pi_r(N_{ri}), \pi_c(N_{ci})), \quad i = 1, \dots, h+t$, は $G_b(\pi_r({}^\circ Q), \pi_c({}^\circ R))$ のDM分解である。

(注意4.5) 写像 ζ は D と $\text{Im}(\zeta)$ の間の双対束同型であり、その意味で写像 ψ の双対写像と考えられる。実際に補題4.13、補題4.14、補題4.15の双対な命題が成立するが、以下ではそれらを証明なしで用いる。

(注意4.6) 式(4.57)で D の組生列は唯一ではないが、式(4.58), (4.59)で部分集合 N_{ri} , N_{ci} は番号の付け替えを除いて唯一である(注意4.4参照)。このことは、DM分解は唯一だから、補題4.17の中では暗黙に述べられている。

(証明) 以下の四点が確かめられなければならない[3, p.165]。

(A)(A_r) $\{N_{ri}, i = 1, \dots, h+t\}$ は、 ${}^{\circ}Q$ の分割である。つまり、 $\cup N_{ri} = {}^{\circ}Q$, $N_{ri} \cap N_{rj} = \emptyset (i \neq j)$ が成り立つ。

(A_c) $\{N_{ci}, i = 1, \dots, h+t\}$ は、 ${}^{\circ}R$ の分割である。

(B) $|N_{ri}| = |N_{ci}|, i = 1, \dots, h+t$

(C) $G_b(\pi_r(N_{ri}), \pi_c(N_{ci})), i = 1, \dots, h+t$, は既約である。

(D)(D_r) $\{N_{ri}, i = 1, \dots, h+t\}$ の間の二項関係 \leq をつぎのように定める。

$$(規則) E(N_{cj}, N_{ri}) \neq \emptyset (i \neq j) \text{ ならば、} N_{ri} \leq N_{rj} \quad (4.62)$$

この(規則)と反射律、推移律から二項関係 \leq を生成すると、それは半順序関係である。

(D_c) $\{N_{ci}, i = 1, \dots, h+t\}$ に対して、同様の記述。

(Aの証明) 双対性から(A_r)のみを証明すればよい(注意4.5参照)。まず、

$$\begin{aligned} \cup_{i=1}^h N_{ri} &= \cup_{i=1}^h [\psi(D_i) \setminus \psi(D_{i-1})] & (4.63) \\ &= \psi(D_h) \setminus \psi(D_0) \\ &= \psi(R) \setminus \psi(Q) \end{aligned}$$

となる。ただしここで単調性、 $\psi(D_{i-1}) \subset \psi(D_i), i = 1, \dots, h$ を用いた。

ψ と N_0 の定義から、 $\psi(R) = N_0$, $\psi(Q) = Q$ となることも明らかである。
 一方、定義式(4.60)より、

$$U_{i=h+1}^{h+t} N_{ri} = {}^c N_0 \tag{4.64}$$

である。従って、 $Q \subset N_0$ を用いると、

$$U_{i=1}^{h+t} N_{ri} = (N_0 \setminus Q) \cup {}^c N_0 = {}^c Q \tag{4.65}$$

である。つぎに N_{ri}, N_{rj} ($i \neq j$) を任意にとる。ここで $i < j$ と考えてよい。もし $i > h$ ならば、強連結成分の定義より、 $N_{ri} \cap N_{rj} = \emptyset$ である。つぎに $i \leq h < j$ の場合、 $N_{ri} \subset N_0, N_{rj} \subset {}^c N_0$ だから、 $N_{ri} \cap N_{rj} = \emptyset$ である。もし $j \leq h$ ならば、 $N_{ri} \subset \psi(D_i) \subset \dots \subset \psi(D_{j-1}), N_{rj} = \psi(D_j) \setminus \psi(D_{j-1})$ だから、 $N_{ri} \cap N_{rj} = \emptyset$ である。 (Aの証明終)

(Bの証明) $i = h+1, \dots, h+t$: 式(4.61)より明らかな。 $i = 1, \dots, h$: まず、

$$W(D_{i-1}, D_i) := \{v \mid {}^c D_i \text{ を通り、かつ } {}^* D_{i-1} \text{ を通って、} D_{i-1} \rightarrow v\} \cap \{v \mid {}^c D_{i-1} \text{ を通り、かつ } {}^c D_i^* \text{ を通って、} v \rightarrow D_i\} \tag{4.66}$$

とおく。すると、補題4.15とそれに双対な命題より

$$N_{ri} = W(D_{i-1}, D_i) \cup (D_i \setminus D_{i-1}) \tag{4.67}$$

$$N_{ci} = W(D_{i-1}, D_i) \cup (D_{i-1} \setminus D_i) \tag{4.68}$$

が成り立つ。W の定義より、式(4.67), (4.68)は共に非共通和であることに注意する。すると、

$$\begin{aligned}
 |N_{ri}| &= |W(D_{i-1}, D_i)| + |(D_i \setminus D_{i-1})| & (4.69) \\
 &= |W(D_{i-1}, D_i)| + |D_i| - |D_{i-1} \cap D_i| \\
 &= |W(D_{i-1}, D_i)| + |D_{i-1}| - |D_{i-1} \cap D_i| \\
 &= |W(D_{i-1}, D_i)| + |(D_{i-1} \setminus D_i)| \\
 &= |N_{ci}|
 \end{aligned}$$

が成り立つ。

(Bの証明終)

(Cの証明) $i = h+1, \dots, h+t$: $G_A(M_{i-h}, E(M_{i-h}, M_{i-h}))$ は強連結だから、 $G_b(\pi_r(N_{ri}), \pi_c(N_{ci}))$ は既約である [3, p.166]。 $i = 1, \dots, h$: $N_i := N_{ri} \cup N_{ci}$ とおく。すると補題4.5より $G_b(\pi_r(N_{ri}), \pi_c(N_{ci}))$ が既約であるための必要十分条件は、 $G_A(N_i, E(N_{ci}, N_{ri}))$ がつぎの三条件を共に満たすことである。

I) $D' \subset N_i$ を $|D'| = |D_{i-1} \setminus D_i| = |D_i \setminus D_{i-1}|$ を満たす、 $G_A(N_i, E(N_{ci}, N_{ri}))$ の中の $D_{i-1} \setminus D_i \rightarrow D_i \setminus D_{i-1}$ 分離集合とすれば、 $D' = D_{i-1} \setminus D_i$ または $D' = D_i \setminus D_{i-1}$ である。

II) $v \in N_i$ を任意にとる。そのとき $G_A(N_i, E(N_{ci}, N_{ri}))$ 上で $D_{i-1} \setminus D_i \rightarrow v$ である。

III) $v \in N_i$ を任意にとる。そのとき $G_A(N_i, E(N_{ci}, N_{ri}))$ 上で $v \rightarrow D_i \setminus D_{i-1}$ である。

以下では、これらの三条件が満たされていることを示す。まず、条件Iについて。 $D' \subset N_i$ を $|D'| = |D_{i-1} \setminus D_i| = |D_i \setminus D_{i-1}|$ を満たす $G_A(N_i, E(N_{ci}, N_{ri}))$ の中の $D_{i-1} \setminus D_i \rightarrow D_i \setminus D_{i-1}$ 分離集合とする。 $D := D' \cup (D_{i-1} \cap D_i)$ とおく。 $D \in \mathcal{D}$ であることを示す。 P を任意の $G_A(E(\circ R,$

$\circ Q)$ 中の $Q \rightarrow R$ 有向道とし、 $Z := (D_{i-1} \cup D_i) \cap N(P)$ とおく。 D_{i-1} 、 $D_i \in D$ だから、 $Z \neq \emptyset$ である。まず、 $Z \cap D_{i-1} \cap D_i \neq \emptyset$ である場合を考える。つまり、 P は $D_{i-1} \cap D_i$ の中に、従って D の中に節点をもつ。つぎに $Z \cap D_{i-1} \cap D_i = \emptyset$ である場合を考える。このときは、 $D_{i-1} \leq D_i$ だから、 $\text{head}(Z; P) \in D_{i-1} \setminus D_i$ 、 $\text{tail}(Z; P) \in D_i \setminus D_{i-1}$ となる。このことから、 $z_1 \in Z \cap (D_{i-1} \setminus D_i)$ 、 $z_2 \in Z \cap (D_i \setminus D_{i-1})$ を、有向道 $P' := (P \text{ 中の } z_1 \rightarrow z_2 \text{ 部分有向道})$ が z_1 と z_2 を除いて $D_{i-1} \cup D_i$ に節点をもたないように選ぶことができる。すると、 $N(P') \setminus \{z_1, z_2\} \subset W(D_{i-1}, D_i)$ である。なぜなら、 P' の部分有向道が $N(P') \setminus \{z_1, z_2\}$ の任意の節点に対して、 W の条件を満たすからである。従って、 P' は $G_A(N_i, E(N_{ci}, N_{ri}))$ 中の $D_{i-1} \setminus D_i \rightarrow D_i \setminus D_{i-1}$ 有向道である。このことから P' は D' の中に節点をもつ。いずれにしても、 P は D の中に節点をもつ。ゆえに D は $Q \rightarrow R$ 分離集合である。つぎに D の大きさを考えると、 $|D| = |D' \cup (D_{i-1} \cap D_i)| = |D'| + |D_{i-1} \cap D_i| = |D_{i-1} \setminus D_i| + |D_{i-1} \cap D_i| = |D_{i-1}| = k$ となる。これで $D \in D$ であることが示された。つぎに $D_{i-1} \leq D \leq D_i$ であることを示す。 $v \in D \setminus D_{i-1}$ を任意にとる。補題4.15より、 $\circ D_{i-1}$ を通って、 $v \rightarrow D_i$ である。このことと $D_{i-1} \leq D_i$ より、式(4.45)を用いると、 $\circ D_{i-1}$ を通って $v \rightarrow R$ である。従って、任意の $Q \rightarrow v$ 有向道は D_{i-1} の中に節点をもつので、 $D_{i-1} \leq D$ である。 $D \leq D_i$ は全く同様に証明できる。これで、 $D_{i-1} \leq D \leq D_i$ であることが示された。このことと、 $D_{i-1} \leq D_i$ より、 $D = D_{i-1}$ または $D = D_i$ となるが、 $D = D_{i-1}$ ならば $D' = D_{i-1} \setminus D_i$ 、 $D = D_i$ ならば $D' = D_i \setminus D_{i-1}$ となる。これで、条件 I が満たされていることが示された。条件 II・IIIについては補題4.15より明らかに成り立っている。

(Cの証明終)

(Dの証明) 双対性より (D_r) のみを示せばよい。そのために、逆に (D_r) が成り立たないと仮定する。このことは、反対称律がある連鎖

$$Nri_1 \leq Nri_2 \leq \dots \leq Nri_g \leq Nri_1, \quad g \geq 2 \quad (4.70)$$

によって、破られていることを意味する。式(4.70)で、それぞれの関係 \leq は式(4.62)の(規則)によって成り立っていることと、 i_1, \dots, i_g は相異なることを仮定してもよいのは明らかである。式(4.62)より、

$$E(Nci_{j+1}, Nri_j) \neq \emptyset, \quad (j = 1, \dots, g, \text{ただし } i_{g+1} \text{ は } i_1 \text{ と読む}) \quad (4.71)$$

である。矛盾を導くために三つに場合わけする。

(場合1) $i_j > h, j = 1, \dots, g$: まず節点集合 Mi_{j-h} は強連結であることに注意する。このことと式(4.71)より、 $Mi_{g-h} \rightarrow Mi_{1-h}$ かつ $Mi_{1-h} \rightarrow Mi_{g-h}$ となる。これは、各 Mi が強連結成分であることに矛盾する。

(場合2) $|\{i_j \leq h, j = 1, \dots, g\}| = 1$: 必要ならば連鎖、式(4.70)を回転させることにより、 $i_1 \leq h, i_j > h, j = 2, \dots, g$ と仮定してよい。 $Mi_{j-h} (j = 2, \dots, g)$ は強連結であることに注意する。このことと式(4.71)より、 Mi_{g-h} の任意の節点を始点とし Mi_{2-h} の任意の節点を終点とする $\circ N_0$ を通る有向道が存在する。また式(4.71)より、 $u \in Nci_1, v \in Mi_{g-h}, w \in Mi_{2-h}, x \in Nri_1$ となる枝 $(u, v), (w, x) \in E$ が存在する。 P を $\circ N_0$ を通る $v \rightarrow w$ 有向道とする。すると、注意4.3より、 P は任意の $D \in D$ に対して D 中に節点をもたないので、有向道 $(u, (u, v), v)$ と $P \cdot (w, (w, x), x)$ は節点 v に対して補題4.15の条件を満たす。すると、 $v \in Nri_1 \cap N_0$ となるが、これは $v \in Mi_{g-h} \cap \circ N_0$ に矛盾する。

(場合3) $|\{i_j \leq h, j = 1, \dots, g\}| = 2$: 必要ならば連鎖、式(4.70)を回転させることにより、 $h \geq i_1 > i_m (2 \leq m \leq g), i_j > h (j = 2, \dots, m-1)$ と仮定してよい。(場合2)のときと全く同じ理由により、 $u \in$

N_{cim} , $v \in N_{ri1}$ を選んで、 u, v 以外には N_0 に節点をもたない有向道 P が存在するようにできる。補題4.15 (またはその双対な命題) を用いることにより、 $u \in N_{cim}$ から ${}^{\circ}D_{im}$ を通る $Q \rightarrow u$ 有向道 P_1 が存在する。同様に、 $v \in N_{ri1}$ から ${}^{\circ}D_{i1-1}$ を通る $v \rightarrow R$ 有向道 P_2 が存在する。そうすると、 $D_{im} \leq D_{i1-1}$ だから、 $P_1 \cdot P \cdot P_2$ は、 ${}^{\circ}D_{i1}$ を通る $Q \rightarrow R$ 有向道となるが、これは $D_{i1} \in D$ に矛盾する。これで補題4.17が証明された。

(証明終)

(注意4.7) このことから、二部グラフ、Coates グラフの区別なしに DM 分解が定義できる。4.3.1 で用いた表記法 $G(\alpha)$ を用いて、このグラフの DM 分解を $G(\alpha; t)$, $t \in T(\alpha)$ と表すことにする。ここで、半順序をもった添字集合 $T(\alpha)$ の役割は、証明 D でできた既約成分間の半順序を表すことにある。

さてここで再びもとの問題に戻り、 $F \subset N_r \times N_c$ を独立な集合として、 $Q, R \subset N$ を式(4.33), (4.34) で定義するとき、 $\det [F](sI - A)$ の $R[X, s] / \pm 1$ での素因子分解を、表現グラフ $G_b(\pi_r({}^{\circ}Q), \pi_c({}^{\circ}R))$ または $G_R(E({}^{\circ}R, {}^{\circ}Q))$ の DM 分解を用いて表現することにする。以降、この二つのグラフを単に G と書く。なお、変数 $\alpha \in X \cup \{s\}$ が多項式 $p \in R[X, s] / \pm 1$ に含まれるとは、 $\deg(\alpha)p \geq 1$ となることをいう。また枝 e に対して、 $\deg(e)$ で e の枝重みの次数を与える関数を表す。

[補題4.18] E_0 を有効枝である A 枝全体の集合とする。 E_0 の関係 \sim を、 $\det [F](sI - A)$ の素因子分解で e_1, e_2 の枝重みを同時に含む素因子が存在すれば、 $e_1 \sim e_2$ と定義する。このとき \sim は同値関係である。

(証明) 補題4.4より、任意の $e \in E_0$ について $\deg(e) \det [F](sI - A) = 1$ である。また任意の $p, q \in R[X, s] / \pm 1$ について、 $\deg(\alpha) p q = \deg(\alpha) p + \deg(\alpha) q$ であるから、 e の枝重みを含む素因子は唯一に存在する。従って、 \sim は同値関係である。 (証明終)

[補題4.19] E_0 , \sim を補題4.18と同じとする。 $e_1, e_2 \in E_0$ として、 $e_1 \sim e_2$ となる必要十分条件は、 e_1 と e_2 が、 G のDM分解で同じ既約成分に含まれることである。

この証明のために、補題を三つ必要とする。

[補題4.20] X を変数の集合、 $p \in R[X]$, $\alpha, \beta \in X$, p は α, β を共に含むとする。このときもし、 p が α, β を同時に含む項をもたないとすれば、 α, β は p の素因子分解で同じ素因子に含まれる。

(証明) このことは、 $Y = X \setminus \{\alpha, \beta\}$ として、 $R[Y]$ が整域であることから直ちに導かれる。 (証明終)

[補題4.21] $X, Y, X \cap Y = \emptyset$ を変数の集合とする。 $\theta : R[X \cup Y] \rightarrow R[X]$ を変数 Y にある実数を代入する写像とする。 $p \in R[X \cup Y]$, $\alpha, \beta \in X$ を $\deg(\alpha)p = \deg(\beta)p = \deg(\alpha)\theta(p) = \deg(\beta)\theta(p) = 1$ を満たすとする。このとき、 α, β が $\theta(p)$ の素因子分解で同じ素因子に含まれるならば、それらは p の素因子分解でも同じ素因子に含まれる。

(証明) 次数の条件から変数 $\alpha (\beta)$ を含む素因子は唯一である。 $p = \prod p_j$ を p の素因子分解とする。 θ は準同型射だから、 $\theta(p) = \prod \theta(p_j)$

である。ここで、 α, β が p の素因子分解で異なる素因子 p_1, p_2 にそれぞれ含まれていたとする。 θ は代入操作なので、次数の条件より $\theta(p_1), \theta(p_2)$ がそれぞれ α, β を含んでいなければならない。 $\theta(p)$ の素因子分解は、必要ならば $\theta(p_i)$ をさらに分解して得られるので、 α, β は $\theta(p)$ の素因子分解でも異なった素因子に含まれる。 (証明終)

【補題4.22】 X を変数の集合、 $p \in R[X], \alpha, \beta \in X, \deg(\alpha)p = \deg(\beta)p = 1$ とする。つぎの二点が成り立つとする。① p のどの項も α を含むならば β を含み、 β を含むならば α を含むとする。② p は α, β を共に含む項も α, β を共に含まない項も共にもつ。このとき α, β は p の素因子分解で同じ素因子に含まれる。

(証明) 逆に結論が成り立たないとする。すると次数の条件から、ある $q, r \in R[X], \deg(\alpha)q = \deg(\beta)r = 1, \deg(\alpha)r = \deg(\beta)q = 0$ を用いて、 $p = qr$ と書ける。 q を α を含む項と含まない項にわけて、 $q = q_1 + q_0, \deg(\alpha)q_1 = 1, \deg(\alpha)q_0 = 0$ と書く。同様に、 $r = r_1 + r_0$ と書く。すると、 $p = q_1r_1 + q_1r_0 + q_0r_1 + q_0r_0$ となる。ここで次数の条件より、 q_1r_1 は α, β を共に含む項からなり、 q_1r_0 は α は含むが β は含まない項からなる、等々が成り立っている。すると条件①より $q_1r_0 + q_0r_1 = 0$ となるが、 α は前の項、 β は後の項にしか含まれないので、 $q_1r_0 = q_0r_1 = 0$ である。すると $q_1 \neq 0, r_1 \neq 0$ より $q_0 = r_0 = 0$ となる。ゆえに、 $p = q_1r_1$ となるが、これは条件②に矛盾する。

(証明終)

(補題4.19の証明) 注意4.7で述べたように、 $G = G_b(\pi_r({}^\circ Q), \pi_c({}^\circ R))$ または $G_A(E({}^\circ R, {}^\circ Q))$ のDM分解を $G(t), t \in T$ と表すことにする。

ここでまず、 $R[X, s]/\pm 1$ の中で、

$$\det G = \prod_t \det G(t) \quad (4.72)$$

が成り立っている。式(4.72)で $\det G(t)$ 自体、補題4.1よりグラフ上の評価式、つまり完全マッチングの枝重み積和、式(4.35)で評価できることに注意しておく。また、有効枝の全体 E_a は、DM分解の各既約成分の A 枝の和集合であることにも注意しておく [3, p.165]。このことは、ある既約成分に属している A 枝のみに注目していればよいことを言っている。

必要性： $e_1, e_2 \in E_a$ が相異なる既約成分に属していれば、式(4.72)より $e_1 \sim e_2$ でない。

十分性： 各既約成分の \det は同一の評価式、式(4.35)をもつので、 G 自体が既約なときに、任意の二本の枝、 $e_1, e_2 \in E_a$ が $e_1 \sim e_2$ を満たすことを示せばよい。 G 自体が既約だから、 $E_a = E({}^cR, {}^cQ) \cap E_A$ である。 $E_a = \emptyset$ のときは結論は自明だから、 $E_a \neq \emptyset$ と仮定する。証明はいくつかの段階からなる。

(1) $e_1 := (u, v), e_2 := (w, x) \in E_a$ が $u = w$ または $v = x$ を満たせば、 $e_1 \sim e_2$ である。： G の二部グラフ表現で e_1, e_2 は節点を共有するので、 G の任意のマッチングは、 e_1, e_2 を同時に含み得ない。式(4.35)より $\det G$ のどの項も e_1, e_2 の枝重みを同時に含み得ない。ゆえに補題4.20より、 $e_1 \sim e_2$ である。

(2) $v \in {}^cR \cap {}^cQ$ を任意にとる。このとき $e_1 := (u, v), e_2 := (v, w) \in E_a$ が存在して、 $e_1 \sim e_2$ となる。： G は既約だから、 $Q \neq \emptyset$ ならば補題4.5より $Q \rightarrow v$ となるので、 $e_1 := (u, v) \in E_a$ が存在する。 $Q = \emptyset$ ならば G は強連結なので $E_a \neq \emptyset$ だから、 $e_1 := (u, v) \in E_a$ が存在する。すると、補題4.6より、① e_1 を含む有向道を含んで、 Q から R を結ぶ互

いに節点を共有しない有向道の集りが存在する、かまたは、② e_1 を含む有向閉路と、それと互いに節点を共有しない有向道からなる、 Q から R を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りが存在する。 $e_2 := (v, w) \in E$ 。を①または②の有向道または有向閉路に含まれる枝とする。最初に①が成立する場合を考える。 P をそのような有向道の集りとする。まず、 v を通ることなく別の Q から R を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集り P' が存在することを示す。これを示すために、逆にそのような有向道の集りが存在しないと仮定する。すると Menger の定理より G の節点 v 開放グラフに大きさ $|Q| - 1$ の $Q \rightarrow R$ 分離集合 X' が存在する。 $X := X' \cup \{v\}$ とおく。すると、 X は G の大きさ $|Q|$ の $Q \rightarrow R$ 分離集合であり、 $v \in X$, $v \in {}^{\circ}R \cap {}^{\circ}Q$ より、 $X \neq Q$ かつ $X \neq R$ となるが、これは補題4.5より、 G の既約性に反する。従って、上記の P' が存在する。 θ を $P \cup P'$ に含まれない A 枝重みに零を代入する写像とする。このときグラフは G' となったとする。 G' の Coates グラフ表現では e_1 と e_2 のみが v に接続する枝であることに注意する。したがって、 G' の任意の k -因子接続は、 e_1, e_2 を共に含むか、共に含まないかのいずれかである。さらにこれら二つの型が存在する ($P (P')$ と適当な s 枝からなる k -因子接続を考えればよい)。従って、補題4.2より、 $\theta(\det G)$ は補題4.22の条件を満たす。ゆえに補題4.22、補題4.21をつづけて用いることにより、 $e_1 \sim e_2$ となる。つぎに②が成立する場合を考える。 L と P をそれぞれ②の条件を満足する有向閉路と有向道の集りとする。 $P \cup \{L\}$ に含まれない A 枝重みに零を代入する写像とする。このときグラフは G' となったとする。 G' には二つの k -因子接続 ($P \cup \{L\}$ と残りの節点の s 枝自己閉路、 P と残りの節点の s 枝自己閉路) しかない。従って、先程と同様に、補題4.2、補題4.22、補題4.21をつづけて用いることにより、 $e_1 \sim e_2$ となる。

(3) $e_1, e_2 \in E$ 。が G の Coates グラフ表現で節点を共有すれば、 e_1

$\sim e_2$ である。： これは、 \sim は同値関係なので(1), (2)を組み合わせれば直ちにわかる。

(4) N の二項関係 $\sim(N)$, $a, b \in N$, $a \sim b(N)$ を、 a に接続する $e_1 \in E_a$, b に接続する $e_2 \in E_b$ が存在して、 $e_1 \sim e_2$ となる、で定義すればこれは、同値関係である。さらに、Coates グラフ上で $a, b \in N$ が $a \rightarrow b$ ならば、 $a \sim b(N)$ である。： これは(3)より明らかである。

(5) $Q \neq \emptyset$ とする。 Q の二項関係 $\sim(Q)$, $a, b \in Q$, $a \sim b(Q)$ を、 $c \in R$ が存在して、Coates グラフ上で $a \rightarrow c$ かつ $b \rightarrow c$ であると定義し、推移律を用いてこれを同値関係に拡大しておく。 $a \in Q$ を適当に選び、 Q_1 を a と関係 $\sim(Q)$ で同値な Q の節点全体とする。 R_1 を Coates グラフ上で Q_1 より到達可能な R の節点全体とする。 $Q_2 := Q \setminus Q_1$, $R_2 := R \setminus R_1$ とおく。このとき、 $Q_2 = R_2 = \emptyset$ である。： R_2 の定義と $\sim(Q)$ の定義から、それぞれ $Q_1 \rightarrow R_2$, $Q_2 \rightarrow R_1$ である。これは、 $Q_1 \cup R_2$, $Q_2 \cup R_1$ は共に $Q \rightarrow R$ 分離集合であることを意味している。 $|Q| = |Q_1| + |Q_2| = |R_1| + |R_2|$ より $|Q_1 \cup R_2| \leq |Q|$ または $|Q_2 \cup R_1| \leq |Q|$ であるが、Menger の定理より逆の不等号が成立するので、これらは等号で成り立つ。すると既約条件、補題4.5より、 $Q_1 \cup R_2 = Q$ または R となる。 $Q_1 \neq \emptyset$, $Q \cap R = \emptyset$ だから、 $Q_1 = Q$, $R_2 = \emptyset$ となり、 $Q_2 = R_2 = \emptyset$ である。ここで、任意の $a, b \in Q \cup R$ について、(4)より、 $a \sim b(N)$ が示せたことになる。

(6) 任意の $a, b \in N$ について、 $a \sim b(N)$ である。： $Q = \emptyset$ ならば、 G は強連結なので $a \rightarrow b$ より、(4)を用いれば、 $a \sim b(N)$ となる。 $Q \neq \emptyset$ の場合。補題4.5より、 $Q \rightarrow a$, $Q \rightarrow b$ だから、(4), (5)と推移律より、 $a \sim b(N)$ となる。(3), (6)より、任意の二本の枝、 $e_1, e_2 \in E$ は $e_1 \sim e_2$ を満たす。 (証明終)

(注意4.8) 補題4.19より、既約成分 $G(t)$ の $\det G(t)$ がさらに分解

されたとしても、 $R[s]/\pm 1$ の元が括り出せるだけである。さらに $\det G(t)$ は、補題4.1または補題4.2より、 $R[X, s]/\pm 1$ の斉次式だから、この括り出される $R[s]/\pm 1$ の元は s の中である。

[補題4.23] ($\det G(\alpha)$ の素因子分解) $G(\alpha)$ のDM分解を $G(\alpha; t)$, $t \in T(\alpha)$ とする。このとき $R[X, s]/\pm 1$ での $\det G(\alpha)$ の素因子分解は、

$$\det G(\alpha) = s^{\#s(G(\alpha))} \prod_{t \in T(\alpha)} q(\alpha; t) \quad (4.73)$$

$$\#s(G(\alpha)) = \min_{M \in \mathcal{M}} |M \cap E_e| \quad (4.74)$$

ただし \min は $G(\alpha)$ の完全マッチングについてとる。

$$q(\alpha; t) = \det G(\alpha; t) / s^{\#s(G(\alpha; t))} \in R[X, s]/\pm 1 \quad (4.75)$$

で与えられる。

(証明) 式(4.72)より、補題4.23を証明するためには、① $\det G(\alpha; t) = q(\alpha; t) s^{\#s(G(\alpha; t))}$ が素因子分解であること、② $\#s(G(\alpha)) = \sum \#s(G(\alpha; t))$ 、の二点を確かめればよい。②は $G(\alpha)$ の完全マッチングは各既約成分 $G(\alpha; t)$ の完全マッチングの和集合であり、その逆も成り立つこと [3, p.165] から明らかである。①は $\det G(\alpha; t)$ で括り出される s の最大中は、補題4.1より、 $s^{\#s(G(\alpha; t))}$ であることを用いれば、注意4.8より、 $q(\alpha; t)$ が既約多項式であることがわかる。 (証明終)

[補題4.24] $G_R(N, E)$ の二つの既約な部分グラフ $G(\alpha)$, $G(\beta)$ を考える。これらはどちらも一本のみの s 枝だけで成り立っているのではないとする。 $\det G(\alpha) = s^{\#s(G(\alpha))} q(\alpha)$, $\det G(\beta) = s^{\#s(G(\beta))} q(\beta)$

をそれぞれ素因子分解とすると、 $q(\alpha) = q(\beta)$ となる必要十分条件は、 $G(\alpha) = G(\beta)$ である。

(証明) 十分性は自明である。必要性を示す。そのために、逆に $G(\alpha) \neq G(\beta)$ と仮定する。 $N_r(G(\cdot))$, $N_c(G(\cdot))$ をそれぞれ $G(\cdot)$ の N_r , N_c の中の節点集合とする。一般性を失わずに、 $N_r(G(\alpha)) \setminus N_r(G(\beta)) \neq \emptyset$ と仮定してよい。 $\pi_r(v) \in N_r(G(\alpha)) \setminus N_r(G(\beta))$ とする。 $G(\alpha)$ は既約であり、一本のみの s 枝だけで成り立っているのではないので、 A 枝 (w, v) が $G(\alpha)$ 中に存在する(補題4.5参照)。 $v \in N_r(G(\beta))$ だから、 (w, v) は $G(\beta)$ の枝ではない。すると、補題4.4より、 (w, v) の枝重みは $q(\alpha)$ に含まれ、 $q(\beta)$ に含まれない。ゆえに $q(\alpha) \neq q(\beta)$ である。

(証明終)

(注意4.9) この証明から明らかのように、 $q(\alpha)$ が $R[X, s]/\pm 1$ の可逆元となるのは、 $G(\alpha)$ が一本のみの s 枝だけで成り立っているとき、またそのときにかぎる。またこの場合 $q(\alpha) = 1$ となる。

4.3.5 グラフ的な検出可能条件・識別可能条件

ここでは、4.3.2で導いた代数的な検出可能条件、定理4.3、識別可能条件、定理4.4、を等価的なグラフ条件に置き換える。以下では、システム行列 A は構造をもった行列とし、多項式、写像 δH の値域などは、4.3.3で述べたように、 $R[X, s]$ 、または $R[X, s]/\pm 1$ とする。

まず、最初に、4.3.3で考察したように、故障 $\alpha \in E_A$ が発生した時の伝達関数の係数の変位多項式 $n'_{cb}(\alpha)$, $d'_{cb}(\alpha)$ (それぞれ式(4.27), (4.28)で定義される) が零多項式とならないための条件をまとめておく。これは4.3.3より明らかなので証明は省略する。

[補題4.25] $\alpha = (j, i) \in E_A$, $\lambda \in \Lambda$, $\lambda = (d, c, b)$ または (n, c, b) とする。 $N_{cb} \subset N$ を、 $N_{cb} = \{v \mid b \rightarrow v, v \rightarrow c\}$ とする。このとき、 $\delta H(\alpha, \lambda) \neq 0$ となる必要十分条件は、次の三条件が共に成り立つことである。

I) $N_{cb} \neq \emptyset$

II) $\alpha \in E(N_{cb}, N_{cb})$

III) III-d) $\lambda = (d, c, b)$ のとき: $G(E(N_{cb}, N_{cb}))$ の中で $i \rightarrow j$ 。

III-n) $\lambda = (n, c, b)$ のとき: $G(E(N_{cb}, N_{cb}))$ の中に $\{b, i\}$ から $\{c, j\}$ を結ぶ互いに節点を共有しない有向道の集りが存在する。

つぎの補題4.26により、4.2で仮定した仮定4.1は、状態方程式で記述された線形ダイナミカルシステムへの適用に当っては、殆ど制限にならないことがわかる。

[補題4.26] $d_{cb}, n_{cb}, d'_{cb}, n'_{cb} \in R[X, s]$ をそれぞれ式(4.25) - (4.28)で定義する。このとき generic に仮定4.1は成立する。

証明には、つぎの三つの補題を必要とする。なお、 $x \in R^{1 \times 1}$ に対し、 $\theta_x : R[X, s] / \pm 1 \rightarrow R[s] / \pm 1$ または $R[X, s] \rightarrow R[s]$ を変数 X に実数値 x を代入する写像とする。また、 $p \in R[X, s] = R[X][s]$ について、 $p = c p_0$, $c \in R[X]$, p_0 は $R[X][s]$ の原始多項式、と書けるときの、 p_0 を p の原始部分という。原始部分は互いに同等な多項式を除いて、唯一に決まる。

[補題4.27] $d, n \in R[X, s]$ とする。このとき、つぎのI - IIIは等価である。

- I) $\theta_x(d), \theta_x(n)$ は、generic に $R[s]$ の元として互いに素である。
- II) d, n は $R(X)[s]$ の元として互いに素である。
- III) d, n のそれぞれの原始部分は $R[X, s]$ の元として互いに素である。

(証明) 代数学の基本的な結果から、 d, n が $R(X)[s]$ の元として互いに素である必要十分条件は、それらの終結式 $z \in R(X)$ が零でないことである。この場合 $z \in R[X]$ であることにも注意しておく。

I \iff II : $d_h, n_h \in R[X]$ をそれぞれ d, n の最高次の係数とする。ここで、 $\deg(s) d = \deg \theta_x(d)$ となる必要十分条件は、 $\theta_x(d_h) \neq 0$ であることに注意する (n に対しても同様なことが成り立つ)。代入によって次数が変化しないとき、 $\theta_x(d), \theta_x(n)$ の $R[s]$ の元としての終結式は $\theta_x(z)$ であることに注意する。従って、 $\theta_x(d), \theta_x(n)$ が、代入操作によって次数が変化せずに $R[s]$ の元として互いに素である必要十分条件は、 $\theta_x(d_h) \theta_x(n_h) \theta_x(z) = \theta_x(d_h n_h z) \neq 0$ であることに注意しておく。 II \implies I : $z \neq 0$ だから $d_h n_h z \neq 0$ である。ゆえに、generic に $\theta_x(d_h n_h z) \neq 0$ である。 I \implies II : $\theta_x(d), \theta_x(n)$ は、 $d_h \neq 0, n_h \neq 0$ だから、generic に次数は代入によって変化しない。従って $\theta_x(d), \theta_x(n)$ が、generic に $R[s]$ の元として互いに素であることから、generic に $\theta_x(d_h n_h z) \neq 0$ である。ゆえに $z \neq 0$ となる。

II \implies III : 逆に、 d, n のそれぞれの原始部分は $R[X, s]$ の元として互いに素でなく、共通因子 $e \in R[X, s]$, e は非可逆元、をもつと仮定する。 e は原始多項式の共通因子だから、 $\deg(s)e \geq 1$ である。従って e は d, n の $R(X)[s]$ での共通因子でもある。

III \implies II : 逆に d, n が、 $R(X)[s]$ の元として互いに素でないとする。 d_0, n_0 をそれぞれ d, n の原始部分とする。すると、 d_0, n_0 は、それぞれ $R(X)[s]$ の中では d, n に同等なので、それらは $R(X)[s]$

の元として互いに素でない。すると、共通因子 $c \in R(X)[s]$, $\deg(s)c \geq 1$, を用いて、 $d_0 = cd_1$, $n_0 = cn_1$, $d_1, n_1 \in R(X)[s]$ と書ける。このとき $\alpha, \beta \in R(X)$ が存在して、 $\alpha c, \beta d_1$ は原始多項式であり、 $d_0 = (\alpha c)(\beta d_1)$ となる [6, p.183]。つぎに述べる補題4.28を、 $n_0 = (\alpha c)(\alpha^{-1}n_1)$ に当てはめれば、 $\alpha^{-1}n_1 \in R[X][s]$ となる。ゆえに、 d, n のそれぞれの原始部分は、共通因子 $\alpha c \in R[X][s]$, $\deg(s)\alpha c \geq 1$, をもつ。 (証明終)

[補題4.28] P を一意分解整域、 Q をその商体とする。 $f \in P[s]$ を原始多項式、 $g \in Q[s]$ とする。このとき $fg \in P[s]$ ならば、 $g \in P[s]$ である。

(証明) $\alpha \in P$ を、 g の係数の分母の最小公倍数とする。つまり $\alpha g \in P[s]$ である。 $\beta \in P$ を αg の係数の最大公約元とする。つまり $\beta^{-1}\alpha g \in P[s]$ は原始多項式である。すると $f(\beta^{-1}\alpha g) = \beta^{-1}\alpha fg$ は、原始多項式の積だから、原始多項式である (Gauss の補題 [6, p.182])。 $\gamma \in P$ を fg の係数の最大公約元とする。つまり $\gamma^{-1}fg \in P[s]$ は原始多項式である。原始部分は同等な元を除いて唯一だから、 $\alpha fg = \alpha\gamma(\gamma^{-1}fg) = \beta(\beta^{-1}\alpha fg)$ より、可逆元 $\varepsilon \in P$ が存在して、 $\alpha\gamma\varepsilon = \beta$ が成り立つ。従って $\beta\alpha^{-1} = \gamma\varepsilon \in P$ となるので、 $g = \beta\alpha^{-1}(\beta^{-1}\alpha g) \in P[s]$ である。 (証明終)

[補題4.29] $n_{cb}, d_{cb} \in R[X, s]$ をそれぞれ式(4.25), (4.26)で定義する。 $n_{cb} = s^a n_0$, $d_{cb} = s^b d_0$, $n_0, d_0 \in R[X, s]$ は s を因子にもたない、とする。このとき、 n_0, d_0 は $R[X, s]$ の元として互いに素である。

(証明) この証明の中では、素因子分解はどちらの環で考えても同じであるので、 $R[X, s]$ の多項式を $R[X, s]/\pm 1$ の多項式として取り扱う。 $G(n)$, $G(d)$ をそれぞれ n_{cb} , d_{cb} に付随した表現グラフ、つまり、 $G(n) = G_b(\pi_r(N_{cb} \setminus \{b\}), \pi_c(N_{cb} \setminus \{c\}))$, $G(d) = G_b(\pi_r(N_{cb}), \pi_c(N_{cb}))$ と二部グラフの表現では書くものとする。 $G(n)$, $G(d)$ のDM分解、 $G(n; t)$, $t \in T(n)$, $G(d; t)$, $t \in T(d)$ を用いれば、補題4.23より、

$$n_{cb} = \det G(n) \tag{4.76}$$

$$= s^{\#s(G(n))} \prod_{t \in T(n)} q(n; t)$$

$$d_{cb} = \det G(d) \tag{4.77}$$

$$= s^{\#s(G(d))} \prod_{t \in T(d)} q(d; t)$$

と素因子分解される。ここで、多項式 $q \in R[X, s]/\pm 1$ は、式(4.75)のように決められる。式(4.76), (4.77)より、 $q(n; t) = q(d; t') \neq 1$ となる $t \in T(n)$, $t' \in T(d)$ が存在しないことを示せばよい(注意4.9参照)。これを示すために、逆にそのような t, t' が存在すると仮定する。注意4.9より、 $G(n; t)$, $G(d; t')$ のいずれも一本の s 枝だけで成り立っているのではない。ゆえに補題4.24より $G(n; t) = G(d; t')$ となる。 $G(d; t')$ は $G(d)$ のDM分解の一つの既約成分だから、 $G(d)$ の一つの強連結成分である。すると、補題4.17を $G(n)$ のDM分解に当てはめることにより、 $G(n; t)$ が式(4.60)で決められる強連結成分であることから、 $b \rightarrow c$ 分離節点 $w \in N_{cb}$ が存在して、任意の $G(n; t)$ の節点 v に対して、任意の $b \rightarrow v$ 有向道(任意の $v \rightarrow c$ 有向道)は w を含む。同じく補題4.17より、 w は $G(n; t)$ の節点ではないことに注意しておく。ここで $v \in N_{cb}$ より、 $b \rightarrow v$ 有向道も $v \rightarrow c$ 有向道も存在することに注意すれば、 $w \rightarrow v$ かつ

$v \rightarrow w$ となり、 v と w は同一の強連結成分 $G(n; t)$ に属する。これは矛盾である。 (証明終)

(補題4.26の証明) $\theta_x(n_{cb}), \theta_x(d_{cb})$ の最大公約多項式を $g_{x,cb} \in R[s]/\pm 1$ とすれば、補題4.27から補題4.29より、generic に $\theta_x(n_0)$ と $\theta_x(d_0)$ は互いに素なので、generic に $g_{x,cb} = s^{\min\{a,b\}}$ が成り立つ。一方、 $\alpha \in E_A$ として、同じ文字 α でその枝重みを表すことにすれば、 $n'_{cb}(\alpha) = s^a \alpha n_{cb} = s^a \alpha n_0$, $d'_{cb}(\alpha) = s^b \alpha d_{cb} = s^b \alpha d_0$ となる。従って generic に仮定4.1, つまり、 $g_{x,cb} \mid \theta_x(n'_{cb}(\alpha))$, $g_{x,cb} \mid \theta_x(d'_{cb}(\alpha))$, が成立する。 (証明終)

[定理4.5] (g-検出可能条件) $\alpha = (j, i) \in E_A$ とする。故障 α が generic に検出可能であるための必要十分条件は、ある入出力組 $(b, c) \in B \times C$ に対して、つぎの二条件が成立することである。

I) $\alpha \in E(N_{cb}, N_{cb})$

II) II-a) $G(E(N_{cb}, N_{cb}))$ 中で $i \rightarrow j$ 。

または II-b) $G(E(N_{cb}, N_{cb}))$ 中に互いに節点を共有しない $b \rightarrow j$ 有向道と $i \rightarrow c$ 有向道が存在する。

(証明) 補題4.26より、仮定4.1は generic に成立するので、定理4.3より、定理4.5の条件が $R[X, s]^{2mr}$ で $\delta H(\alpha) \neq 0$ となる必要十分条件であることをいえばよい。補題4.25より、 $\delta H(\alpha, (d, b, c)) \neq 0$ となる必要十分条件は I かつ II-a が成立することであり、II-a が不成立となる条件のもとで、 $\delta H(\alpha, (n, b, c)) \neq 0$ となる必要十分条件は I かつ II-b が成立することである。 (証明終)

(例) 定理3.2の例で与えた原子力発電所の蒸気発生系のモデルを考える。このシステムの Coates グラフ表現を図4.1に再掲する。入力節点 $B = \{15\}$ 、観測節点 $C = \{4\}$ とする。このときすべての故障 $\alpha \in E_A$ は g -検出可能である。例えば、 $\alpha = (11, 12)$ とする。15→11、12→4 より条件 I は満たされている。12→11 より条件 II-a が満たされている。他の故障についても定理4.5の条件が成立することが容易に確かめられる。(例終)

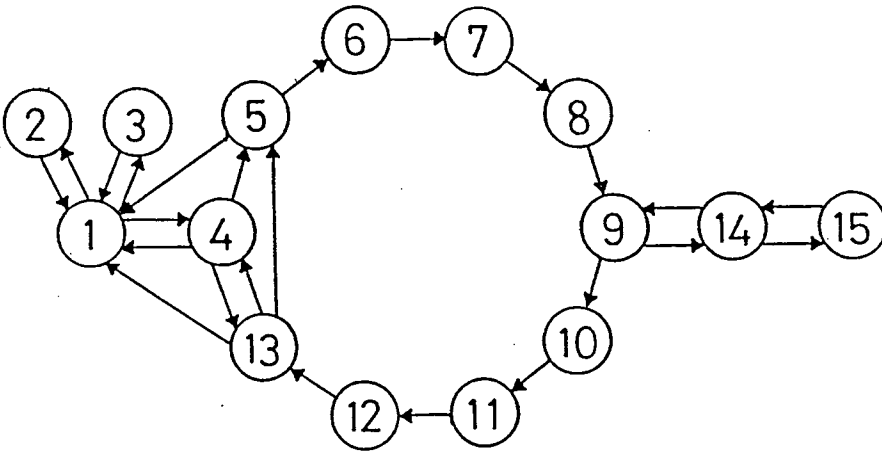


図4.1 例の Coates グラフ

つぎに線形空間の直積空間で二つのベクトルが一次独立となる条件を求めておく。この条件を定理4.4に当てはめることにより g -識別可能条件、定理4.6 が得られる。

[補題4.30] K を体とする。 K -線形空間、 $Z_i, i \in I$ の直積 K -線形空間を $Z = \prod Z_i$ とする。 $y = (\dots, y_i, \dots), z = (\dots, z_i, \dots) \in Z$ とする。このとき y, z が K -一次独立であるための必要十分条件は、 $y \neq 0, z \neq 0$ かつ、つぎの三条件のいずれかが成り立つことである。

I) ある $i \in I$ について、 y_i, z_i は K -一次独立である。

II) ある $i \in I$ について、 $y_i = 0, z_i \neq 0$ または $y_i \neq 0, z_i = 0$ のいずれかが成り立つ。

III) 条件 I・II が共に不成立とする。 $I' := \{i \in I \mid y_i \neq 0, z_i \neq 0\}$ とおく。 $c_i \in K, i \in I'$ を $c_i = a_i b_i^{-1}, a_i y_i = b_i z_i \neq 0, a_i, b_i \in K$ によって定義する。このとき、ある $i, j \in I'$ について $c_i \neq c_j$ である。

(証明) 十分性: $ay = bz, a, b \in K$ とする。 $a = b = 0$ を示す。

I が成立する場合: $ay_i = bz_i, y_i, z_i$ は K -一次独立だから $a = b = 0$ となる。

II が成立する場合: $i \in I$ について、 $y_i = 0, z_i \neq 0$ とする。もう一つの場合も同様に扱える。 $0 = ay_i = bz_i$ であり、 $z_i \neq 0$ より、 $b = 0$ となる。一方 $y \neq 0$ より、ある $j \in I$ について $y_j \neq 0$ である。すると、 $ay_j = bz_j = 0$ より、 $a = 0$ となる。

III が成立する場合: まず、 $i \in I'$ について c_i が定義可能なことはあきらかである。 $i, j \in I$ を補題の条件のように選ぶ。 $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ とすれば、 $ay_i = bz_i \neq 0, ay_j = bz_j \neq 0$ より $c_i = ab^{-1} = c_j$ となり、 $c_i \neq c_j$ に反する。従って $a = 0$ または $b = 0$ であるが、 $a = 0$ とすれば、 $0 = ay = bz, z \neq 0$ より、 $b = 0$ となり、 $b = 0$ とすれば、 $ay = bz = 0, y \neq 0$ より $a = 0$ となる。

必要性: $y = 0$ または $z = 0$ とすれば、 y, z は K -一次従属だから、以下、 $y \neq 0$ かつ $z \neq 0$ とする。条件 I・II・III が共に不成立として、そのとき y, z が K -一次従属であることを示す。まず条件 I が不成立だから、任意の $i \in I$ について、 y_i と z_i は K -一次従属である。条件 II が不成立だから、 $y_i = 0$ と $z_i = 0$ は等価、つまり $I \setminus I' = \{i \mid y_i = 0, z_i = 0\}$ である。条件 III が不成立だから、任意の I' について、 c_i は一定な

ので、これを $c \in K$ とおく。 $cy - z$ について各成分を調べると、 $i \in I \setminus I'$ とすれば、 $cy_i - z_i = c \times 0 - 0 = 0$ 、 $i \in I'$ とすれば、 $cy_i - z_i = b_i^{-1}(a_i y_i - b_i z_i) = b_i^{-1} \times 0 = 0$ である。ゆえに $cy - z = 0$ となるので、 y, z は K -一次従属である。 (証明終)

$G(\alpha)$ を完全マッチングをもつ G の部分グラフとする。 $\#s(G(\alpha))$ を式(4.74)で定義する。つまり完全マッチングの中の s 枝の最小数である。どの部分グラフを扱っているか明らかな場合には、 $\#s(\alpha)$ とも書く。

[定義4.3] (s -A分離条件) $G(\alpha)$ を完全マッチングをもつ G の部分グラフ、 $G(\alpha; t)$, $t \in T(\alpha)$ をそのDM分解とする。 $G(\alpha; t)$ (または部分グラフが明らかなきときは、単に $t \in T(\alpha)$) が s -A分離条件を満たすとは、 $G(\alpha; t)$ の任意の完全マッチング M に対して、 $|M \cap E_{\alpha}|$ がマッチングの選び方に無関係に一定であることをいう。

(注意4.10) もし $t \in T(\alpha)$ が s -A分離条件を満たせば、 $\#s(\alpha; t) = |M \cap E_{\alpha}|$ が任意の完全マッチングに対して成り立つ。

[定理4.6] (g -識別可能条件) $\alpha = (j, i), \beta = (j', i') \in E_A$ とし、故障 α, β は共に generic に検出可能とする。 $\Lambda' \subset \Lambda = \{d, n\} \times B \times C$ を、 $\Lambda' := \{\lambda \mid (\alpha, \lambda), (\beta, \lambda) \text{ は共に補題4.25の条件を満たす}\}$ とおく。このとき故障 α, β が generic に識別可能であるための必要十分条件は、つぎの三条件のいずれか一つが成り立つことである。

I) I-a) $\lambda \in \Lambda'$, $t \in T(\alpha, \lambda)$, $t' \in T(\beta, \lambda)$ が存在して、 t, t' は共に s -A分離条件を満たさずに、 $G(\alpha, \lambda; t) \neq G(\beta, \lambda; t')$ となる。

または、I-b) ある $\lambda \in \Lambda'$ について、 $\sum_t \#s(\alpha, \lambda; t) \neq \sum_t \#s$

$(\beta, \lambda; t)$ (ただし和は s - A 分離条件を満たすすべての t についてとる) となる。

II) ある $\lambda \in \Lambda$ について、 (α, λ) , は補題4.25の条件を満たし、 (β, λ) は条件を満たさない、またはこの逆が成り立つ。

III) 条件 I・IIが共に不成立とする。

III-a) $T_1(\gamma, \lambda) \subset T(\gamma, \lambda)$, $T_2(\gamma, \lambda) \subset T(\gamma, \lambda)$, $\gamma = \alpha, \beta$, $\lambda \in \Lambda'$ をつぎのように定義する。 $\{G(\alpha, \lambda; t), t \in T_1(\alpha, \lambda)\} = \{G(\beta, \lambda; t), t \in T_1(\beta, \lambda)\}$ であり、かつ $T_1(\alpha, \lambda)$, $T_1(\beta, \lambda)$ はこの性質を満たす極大集合である。 $T_2(\gamma, \lambda) := \{t \in T_1(\gamma, \lambda) \mid G(\gamma, \lambda; t) \text{ は一本の } s \text{ 枝のみでできていない}\}$ 。すると、ある $\lambda, \lambda' \in \Lambda'$, $\gamma = \alpha$ または β , について、 $\{G(\gamma, \lambda; t), t \in T_2(\gamma, \lambda)\} \neq \{G(\gamma, \lambda'; t), t \in T_2(\gamma, \lambda')\}$ である。

または、III-b) 加えてIII-aも不成立とする。 $\cup_{t \in T_2(\gamma, \lambda)} G(\gamma, \lambda; t)$ の完全マッチング $M_0(\gamma)$, $\gamma = \alpha, \beta$ を固定する。ここで条件III-aが不成立だから部分グラフの和は $\lambda \in \Lambda'$ に無関係に一定である。これらの $M_0(\alpha)$, $M_0(\beta)$ を用いて、写像 $\kappa : \Lambda' \rightarrow \{1, -1\}$ をつぎのように定義する。 $\cup_{t \in T(\gamma, \lambda) \setminus T_1(\gamma, \lambda)} G(\gamma, \lambda; t)$, $\gamma = \alpha, \beta$, の完全マッチング $M_1(\gamma, \lambda)$ を $M_0(\gamma) \subset M_1(\gamma, \lambda)$ を満たすように選ぶ。 $N_r(\lambda) \subset N_r$, $N_c(\lambda) \subset N_c$ を、 $N_r(\lambda) := \cup_{t \in T_1(\alpha, \lambda)} N_r(G(\alpha, \lambda; t)) = \cup_{t \in T_1(\beta, \lambda)} N_r(G(\beta, \lambda; t))$ とおく。 $N_c(\lambda)$ も同様に定義する。ここで、 T_1 の定義から後の等式が成立している。 $\lambda \in \Lambda'$ に対して、一対一対応、 $\sigma(\alpha, \lambda)$, $\sigma(\beta, \lambda) : \pi_r(N_{cb}) \setminus N_r(\lambda) \rightarrow \pi_c(N_{cb}) \setminus N_c(\lambda)$ をつぎのように定義する。 $\pi_r(v) \in \pi_r(N_{cb}) \setminus N_r(\lambda)$ に対して、(1) $\lambda = (d, b, c) : (1-1) v = i : \sigma(\alpha, \lambda)(\pi_r(v)) = \pi_c(j)$. (1-2) その他の場合 : $(\pi_r(v), \pi_c(w)) \in M_1(\alpha, \lambda)$ を用いて、 $\sigma(\alpha, \lambda)(\pi_r(v)) = \pi_c(w)$ とおく。(2) $\lambda = (n, b, c) : (2-1) v = i : \sigma(\alpha, \lambda)(\pi_r(v)) = \pi_c(j)$. (2-2) $v = b$

: $\sigma(\alpha, \lambda)(\pi_r(v)) = \pi_c(c)$. (2-3)その他の場合: $(\pi_r(v), \pi_c(w)) \in M_1(\alpha, \lambda)$ を用いて、 $\sigma(\alpha, \lambda)(\pi_r(v)) = \pi_c(w)$ とおく。 $\sigma(\beta, \lambda)$ も同様に定義する。 $\kappa(\lambda) := \text{sgn}(\sigma(\beta, \lambda)^{-1} \sigma(\alpha, \lambda))$ と定義する。ただし sgn は、 $\pi_r(N_{cb}) \setminus N_r(\lambda) \rightarrow \pi_r(N_{cb}) \setminus N_r(\lambda)$ の置換の元としての符号である。このときに、ある $\lambda, \lambda' \in \Lambda'$ に対して、 $\kappa(\lambda) \neq \kappa(\lambda')$ となる。

(証明) 故障 α, β は generic に検出可能だから $\delta H(\alpha) \neq 0$ かつ $\delta H(\beta) \neq 0$ である。補題4.26より、仮定4.1は generic に成立するので、定理4.4より、定理4.6の三条件がそれぞれ、 $\theta_x(\cdot)$ を自然にベクトルに拡張して、 $\theta_x(\delta H(\alpha)), \theta_x(\delta H(\beta)) \in R[s]^{2nr}$ が generic に補題4.30の三条件を満たすための必要十分条件であることを示せばよい。この定理4.6の証明に当っては、 $R[X, s]/\pm 1$ での素因子分解(補題4.23)が有用である。これを以下の証明に便利な形に変形しておく。 $T_3(\gamma, \lambda) := T(\gamma, \lambda) \setminus T_1(\gamma, \lambda) \setminus T_2(\gamma, \lambda)$, $\gamma = \alpha, \beta$, $\lambda \in \Lambda'$ とおく。

$$\delta H(\gamma, \lambda) = \det G(\gamma, \lambda) \quad (4.78)$$

$$= s^{\#s_1(\gamma, \lambda) + \#s_2(\gamma, \lambda) + \#s_3(\gamma, \lambda)} p_1(\gamma, \lambda) p_2(\gamma, \lambda)$$

$$\#s_i(\gamma, \lambda) = \sum_{t \in T_i(\gamma, \lambda)} \#s(G(\gamma, \lambda; t)), \quad i=1, \dots, 3 \quad (4.79)$$

$$p_i(\gamma, \lambda) = \prod_{t \in T_i(\gamma, \lambda)} q(\gamma, \lambda; t), \quad i=1, 2 \quad (4.80)$$

ただし、 $\delta H(\gamma, \lambda)$ は $R[X, s]/\pm 1$ の元とみなしている。また $q(\gamma, \lambda; t)$ は、式(4.75)で定義されている。

(注意4.11) T_1 の定義から $p_1(\alpha, \lambda) = p_2(\beta, \lambda)$ であり、 T_1, T_2 の定義から $p_2(\alpha, \lambda)$ と $p_2(\beta, \lambda)$ は互いに素である。また、 $\#s_1(\gamma,$

$\lambda) + \#s_2(\gamma, \lambda) + \#s_3(\gamma, \lambda) = \#s(G(\gamma, \lambda))$ である。

(1)条件 I とうしの等価性： これを証明するためにつぎの補題を必要とする。

[補題4.31] $\lambda \in \Lambda'$ とする。 $\theta_*(\delta H(\alpha, \lambda)), \theta_*(\delta H(\beta, \lambda))$ が generic に R -一次独立である必要十分条件は、① ある $t \in T(\alpha, \lambda)$ と $t' \in T(\beta, \lambda)$ について、 t と t' は共に s - A 分離条件を満たさず、かつ $G(\alpha, \lambda; t) \neq G(\beta, \lambda; t')$ となる、または、② $\sum_t \#s(\alpha, \lambda; t) \neq \sum_t \#s(\beta, \lambda; t)$ (ただし和は s - A 分離条件を満たすすべての t についてとる) となる、ことである。

この証明にはつぎの補題を用いる。

[補題4.32] $f, g \in R[X, s], f \neq 0, g \neq 0$ とする。このときつぎの四条件は等価である。

- I) $\theta_*(f), \theta_*(g)$ は generic に R -一次独立である。
- II) f, g は $R(X)$ -一次独立である。
- III) f と g のそれぞれの原始部分は同等でない。
- IV) f と g のそれぞれの s を含む素因子は一致しない。

(注意4.12) Iでは $R[s]$ を R -線形空間と、IIでは $R[X, s]$ を $R(X)$ -線形空間である $R(X)[s]$ の部分集合と、IIIでは $R[X, s]$ を $R[X][s]$ とそれぞれみなしている。

(補題4.32の証明) I \Leftrightarrow II : 写像 $\zeta : R(X)[s]^2 \rightarrow R(X), \psi :$

$R[s]^2 \rightarrow R$ を

$$\zeta(f, g) = \sum_{i < j} (f_i g_j - f_j g_i)^2 \quad (4.81)$$

$$\psi(a, b) = \sum_{i < j} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \quad (4.82)$$

で定義する。ただし、 $f_i (g_i) \in R(X)$ は $f (g)$ の s^i の係数、 $a_i (b_i) \in R$ は $a (b)$ の s^i の係数とする。ここで、式(4.81), (4.82)の和は有限項からなるので、これらの写像は定義可能である。 $f, g \in R(X)[s]$ が $R(X)$ -一次独立であるための必要十分条件は、 $\zeta(f, g) \neq 0$ となることであり、 $a, b \in R[s]$ が R -一次独立であるための必要十分条件は、 $\psi(a, b) \neq 0$ となることである。また $\psi(\theta_*(f), \theta_*(g)) = \theta_*(\zeta(f, g))$ に注意する。このことから、generic に $\psi(\theta_*(f), \theta_*(g)) \neq 0$ となる必要十分条件が、 $\zeta(f, g) \neq 0$ であることになるので、I, IIの等価性がわかる。

II \Leftrightarrow III: 最初にIIが不成立であるとする。つまりある $u, v \in R(X)$ を用いて、 $uf = vg$ となっている。 $c \in R[X]$ を選んで、 $cu, cv \in R[X]$ とする。 $cu (cv) \in R[X]$ から、 $f (g)$ と $cuf (cvg)$ の原始部分は同等である。 $cuf = cvg$ より cuf と cvg の原始部分は同等である。従って、 f と g の原始部分は同等である。逆を証明するためにIIIが不成立であるとする。 $f = \alpha f_0, g = \beta g_0, \alpha, \beta \in R[X]$ を f_0, g_0 が原始多項式になるようにとる。 f_0, g_0 は同等だから、可逆元 $r \in R[X][s]$ (つまり r は非零実数) が存在して、 $f_0 = r g_0$ となる。すると、 $\beta f = \alpha r g$ となり、 f, g は $R(X)$ -一次従属である。

III \Leftrightarrow IV: 最初にIIIが不成立とする。 $f = \alpha f_0, g = \beta g_0, \alpha, \beta \in R[X], f_0 = r g_0$ をまえと同じとする。まず $r \neq 0, r \in R$ より、 f_0 と g_0 の素因子は一致する。 $f (g)$ の素因子分解は $\alpha (\beta)$ の素因子分解と $f_0 (g_0)$ の素因子分解の積であり、 $\alpha (\beta) \in R[X]$ だから $\alpha (\beta)$

の素因子は s を含まない。ゆえに f と g のそれぞれの s を含む素因子は一致する。逆を証明するために IV が不成立であるとする。 $f = \prod_{j \in J} f_j$, $g = \prod_{i \in I} g_i$ をそれぞれ f, g の素因子分解とする。 $J' \subset J$ ($I' \subset I$) を $j \in J'$ ($i \in I'$) $\Leftrightarrow f_j$ (g_i) は s を含む、として定義する。仮定より、一対一対応 $z: J' \rightarrow I'$ が存在して、 $f_j = g_{z(j)}$, $j \in J'$ となる。ここで、 $\prod_{j \in J'} f_j$ ($\prod_{i \in I'} g_i$) が f (g) の原始部分であることを示す。まず、これは原始多項式の積だから、原始多項式である。 $J'' := J \setminus J'$, $I'' := I \setminus I'$ とおく。 $\prod_{j \in J''} f_j$ ($\prod_{i \in I''} g_i$) $\in R[X]$ である。この二点から、 $\prod_{j \in J'} f_j$ ($\prod_{i \in I'} g_i$) が f (g) の原始部分であることが示された。すると、 $\prod_{j \in J'} f_j = \prod_{j \in J'} g_{z(j)} = \prod_{i \in I'} g_i$ であるから、 f, g のそれぞれの原始部分は同等である。(補題4.32の証明終)

(補題4.31の証明) 必要性: 逆に①, ②が共に不成立であるとする。まず、 T_1 の極大性から、 $\{t \in T(\gamma, \lambda) \mid t \text{ は } s\text{-}A\text{分離条件を満たさない}\} \subset T_1(\gamma, \lambda)$, $\gamma = \alpha, \beta$, であることに注意する。すると、 s を含む素因子は s の巾と $q(\gamma, \lambda; t)$, $t \in T_1(\gamma, \lambda)$, $\gamma = \alpha, \beta$ の一部分である。 T_1 の定義から、 $\{q(\alpha, \lambda; t), t \in T_1(\alpha, \lambda)\} = \{q(\beta, \lambda; t), t \in T_1(\beta, \lambda)\}$ と、 $\#s_1(\alpha, \lambda) = \#s_1(\beta, \lambda)$ が成り立っている。加えて、①, ②が不成立なので、 $\#s_2(\alpha, \lambda) + \#s_3(\alpha, \lambda) = \#s_2(\beta, \lambda) + \#s_3(\beta, \lambda)$ が成り立つ。すると、 $\delta H(\alpha, \lambda)$ と $\delta H(\beta, \lambda)$ の s を含む素因子は一致するので、補題4.32を用いれば必要性が導かれる。

十分性: まず①が成り立つとする。 t と t' を条件のように選ぶ。 t, t' は s - A 分離条件を満たさないので、 $q(\alpha, \lambda; t)$ も $q(\beta, \lambda; t')$ も、共に s を含むことに注意しておく。①の条件から、補題4.24より、 $q(\alpha, \lambda; t) \neq q(\beta, \lambda; t')$ である。つぎに①は成立せず、②が成立する場合を考える。すると、 $\sum_{i=1}^3 \#s_i(\alpha, \lambda) = \sum_{i=1}^3 \#s_i(\beta, \lambda)$ となる。いずれの場

合も、補題4.32を適用することにより、十分性が成り立つ。

(補題4.31の証明終)

(2)条件Ⅱどうしの等価性： これは、補題4.25より明らかである。

(3)条件Ⅲどうしの等価性： これを示すには、以下の補題を必要とする。

[補題4.33] $\lambda \in \Lambda'$ は補題4.31の条件①, ②を共に満たさないとする。このときは、式(4.80)で、 $p_2(\gamma, \lambda) \in R[X] / \pm 1$ ($\gamma = \alpha, \beta$)であり、かつ

$$p_2(\beta, \lambda) \delta H(\alpha, \lambda) = p_2(\alpha, \lambda) \delta H(\beta, \lambda) \quad (4.83)$$

が $R[X, s] / \pm 1$ で成り立つ。

(証明) 仮定より、補題4.31の十分性の証明と同じく、 $\#s(G(\alpha, \lambda)) = \#s(G(\beta, \lambda))$ が成り立つ。また $t \in T_2(\gamma, \lambda)$ は s -A分離条件を満たすので、 $p_2(\gamma, \lambda) \in R[X] / \pm 1$ ($\gamma = \alpha, \beta$)である。注意4.11を用いると、式(4.78)より、式(4.83)を得る。(補題4.33の証明終)

[補題4.34] 定理4.6の条件Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ-aが共に不成立であるとする。このときには、 $p'(\alpha), p'(\beta) \in R[X]$, と写像 $\varepsilon : \Lambda' \rightarrow \{1, -1\}$ が存在して、以下が成立する。任意の $\lambda \in \Lambda'$ に対して $R[X] / \pm 1$ の元として、 $p'(\gamma) = p_2(\gamma, \lambda)$ ($\gamma = \alpha, \beta$)であり、また任意の $\lambda \in \Lambda'$ に対して $R[X, s]$ の元として、 $p'(\beta) \delta H(\alpha, \lambda) = \varepsilon(\lambda) p'(\alpha) \delta H(\beta, \lambda)$ である。さらに κ を定理4.6の条件Ⅲ-bの中で定義したようにとると、 $\kappa(\lambda)$ が $\lambda \in \Lambda'$ に無関係であるための必要十分条件は、 $\varepsilon(\lambda)$ が $\lambda \in \Lambda'$ に無

関係であることである。

(証明) 補題4.24を参照すれば、 $p_2(\gamma, \lambda)$ が $\lambda \in \Lambda'$ に無関係であるための必要十分条件は、定理4.6の条件Ⅲ-aが不成立であることである。従ってこの条件Ⅲ-aが不成立であることから、任意の $\lambda \in \Lambda'$ に対して $R[X]/\pm 1$ の元として、 $p'(\gamma) = p_2(\gamma, \lambda)$ ($\gamma = \alpha, \beta$) であるように、 $p'(\gamma) \in R[X]$ を選ぶことができる。すると式(4.83)を用いて、写像 $\varepsilon : \Lambda' \rightarrow \{1, -1\}$ を、 $R[X, s]$ の元として、 $p'(\beta)\delta H(\alpha, \lambda) = p'(\alpha)\delta H(\beta, \lambda)$ ならば $\varepsilon(\lambda) = 1$ 、 $p'(\beta)\delta H(\alpha, \lambda) = -p'(\alpha)\delta H(\beta, \lambda)$ ならば $\varepsilon(\lambda) = -1$ と定義すれば、任意の $\lambda \in \Lambda'$ に対して $R[X, s]$ の元として、 $p'(\beta)\delta H(\alpha, \lambda) = \varepsilon(\lambda)p'(\alpha)\delta H(\beta, \lambda)$ が成り立つ。残りを証明するためには、まず、一対一対応 $\sigma(\gamma, \lambda)$, $\gamma = \alpha, \beta$, $\lambda \in \Lambda'$ が矛盾なく定義でき、従って、写像 κ が定義できることを示す。このためには、①完全マッチング、 $M_1(\gamma, \lambda)$ を $M_0(\gamma) \subset M_1(\gamma, \lambda)$ を満たすように選べること、② $\sigma(\gamma, \lambda)$ はその $M_1(\gamma, \lambda)$ の選び方に無関係であること、をいえばよい。①は、二部グラフの完全マッチングは、そのグラフのDM分解の各既約成分の完全マッチングの非共通和であり、その逆も成り立つこと [3, p.165] から導かれる。②は、 $M_1(\gamma, \lambda)$ は、 $G(\gamma, \lambda; t)$, $t \in T_3(\gamma, \lambda)$ がただ一本の s 枝からのみで成り立っていることから、唯一であることからわかる。 $\lambda = (d, b, c)$ については、これにより、 $\lambda = (n, b, c)$ については、これに加えて $\lambda \in \Lambda'$ より $i \neq b$ かつ $j \neq c$ より、 $\sigma(\gamma, \lambda)$ は一対一対応である。つぎに、 $\varepsilon_1(\varepsilon_2)$ を $p'(\alpha)$ 中で $M_0(\alpha) \cap E_A$ ($p'(\beta)$ 中で $M_0(\beta) \cap E_A$) の枝重み積の項の符号と定めるとき、任意の $\lambda \in \Lambda'$ に対して、 $\kappa(\lambda) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon(\lambda)$ であることを示す。まず、 $\varepsilon_1(\varepsilon_2)$ が定義可能なことについて。これは、この枝重み積の項が定理3.11の証明と同様にして、 $M_0(\alpha) \cap E_A$ が $M_0(\alpha)$ ($M_0(\beta) \cap E_A$ が $M_0(\beta)$) を唯一に決めることから、

一つしか存在しないことを用いてわかる。 $\cup_{t \in T_1(\alpha, \lambda)} G(\alpha, \lambda; t) = \cup_{t \in T_1(\beta, \lambda)} G(\beta, \lambda; t)$ (この二つのグラフは、 T_1 の定義より等しい) の完全マッチング $M'(\lambda)$ を一つ固定する。 $M_2(\gamma, \lambda) := M_1(\gamma, \lambda) \cup M'(\lambda)$ とおく ($\gamma = \alpha, \beta$)。これは、 $G(\gamma, \lambda)$ の完全マッチングである。 $\sigma(\gamma, \lambda)$ と同様にして $M_2(\gamma, \lambda)$ は、一対一対応 $\sigma'(\gamma, \lambda) : \pi_r(N_{cb}) \rightarrow \pi_c(N_{cb})$ を引き起こす。自然な一対一対応 π_r, π_c を持ち込むことにより、 $\sigma'(\gamma, \lambda)$ は、 N_{cb} の上の置換とみなせる。すると、 $\delta H(\gamma, \lambda)$ 中の $M_2(\gamma, \lambda)$ の枝重み積の項の符号は、 $\text{sgn}(\sigma'(\gamma, \lambda))$ である ($\gamma = \alpha, \beta$)。従って、これら二つの項の符号の比は、 $\text{sgn}(\sigma'(\alpha, \lambda)) \text{sgn}(\sigma'(\beta, \lambda)) = \text{sgn}(\sigma'(\alpha, \lambda)^{-1} \sigma'(\beta, \lambda)) = \text{sgn}(\sigma(\alpha, \lambda)^{-1} \sigma(\beta, \lambda)) = \kappa(\lambda)$ である。一方、式(4.78)を $R[X, s]$ の中で表して、

$$\delta H(\alpha, \lambda) = p'_2(\alpha, \lambda) p'_1(\alpha, \lambda) s^{\#s(G(\alpha, \lambda))} \quad (4.84)$$

$$\delta H(\beta, \lambda) = \varepsilon(\lambda) p'_2(\beta, \lambda) p'_1(\beta, \lambda) s^{\#s(G(\beta, \lambda))} \quad (4.85)$$

を得る。ただし、 $R[X, s] / \pm 1$ 中で $p'_i(\gamma, \lambda) = p_i(\gamma, \lambda)$ ($i = 1, 2, \gamma = \alpha, \beta$) である。条件 I が不成立であるから、 $p'_1(\alpha, \lambda) = p'_1(\beta, \lambda)$ 、 $\#s(G(\alpha, \lambda)) = \#s(G(\beta, \lambda))$ である。従って、任意の $\lambda \in \Lambda'$ に対して、

$$p'_2(\beta, \lambda) \delta H(\alpha, \lambda) = \varepsilon(\lambda) p'_2(\alpha, \lambda) \delta H(\beta, \lambda) \quad (4.86)$$

が成り立つ。このことから、任意の $\lambda \in \Lambda'$ に対して、 $\kappa(\lambda) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon(\lambda)$ となるので、補題が証明された。 (補題4.34の証明終)

(定理4.6の証明・続) 定理の条件 I・II が不成立であるとする。定理4.6

の条件Ⅲが補題4.30の条件Ⅲが generic に成り立つための必要十分条件であることを示す。まず条件Ⅰが不成立だから、補題4.32より $\delta H(\alpha, \lambda)$ と $\delta H(\beta, \lambda)$ は $R(X)$ -一次従属であり、従って同じく補題4.32より、generic に $c_x(\lambda) \in R$ を、 $a_x(\lambda)\theta_x(\delta H(\alpha, \lambda)) = b_x(\lambda)\theta_x(\delta H(\beta, \lambda)) \neq 0$ 、 $c_x(\lambda) = a_x(\lambda)b_x(\lambda)^{-1}$ 、 $\lambda \in \Lambda'$ と定義できる。ここで、式(4.86)より、generic に $a_x(\lambda) = \theta_x(p'_2(\beta, \lambda)) \neq 0$ 、 $b_x(\lambda) = \theta_x(\varepsilon(\lambda)p'_2(\alpha, \lambda)) \neq 0$ と定義できることに注意しておく。

必要性： 逆に定理4.6の条件Ⅲが不成立であるとする。すると補題4.34より、 $\theta_x(p'_2(\beta, \lambda))$ 、 $\theta_x(\varepsilon(\lambda)p'_2(\alpha, \lambda))$ は $\lambda \in \Lambda'$ に無関係である。

十分性： まず定理4.6の条件Ⅲ-aが成立する場合を考える。 $\lambda, \lambda' \in \Lambda'$ を条件で決められたようにとる。注意4.11より、 $p'_2(\alpha, \lambda)$ と $p'_2(\beta, \lambda)$ は互いに素であり、 $p'_2(\alpha, \lambda)$ と $p'_2(\alpha, \lambda')$ 、 $p'_2(\beta, \lambda)$ と $p'_2(\beta, \lambda')$ はそれぞれ、素因子分解が一致しないので、 $R(X)/\pm 1$ の中で、 $p'_2(\beta, \lambda)/p'_2(\alpha, \lambda) \neq p'_2(\beta, \lambda')/p'_2(\alpha, \lambda')$ である。つまり、 $R/\pm 1$ の中で generic に $c_x(\lambda) \neq c_x(\lambda')$ となり、 R の中でも、 $c_x(\lambda) \neq c_x(\lambda')$ である。つぎに条件Ⅲ-bが成立する場合を考える。 $\lambda, \lambda' \in \Lambda'$ を条件で決められたようにとる。すると、generic に $c_x(\lambda) = -c_x(\lambda') \neq 0$ となるので、 $c_x(\lambda) \neq c_x(\lambda')$ である。これで定理4.6が証明された。

(定理4.6証明終)

(例) 再び定理3.2の例で与えたモデルを用いる。入力節点 $B = \{15\}$ 、観測節点 $C = \{4\}$ ととる。故障として $\alpha = (4, 5)$ 、 $\beta = (5, 6)$ 、 $\gamma = (6, 7)$ を考える。まず α, β, γ のいずれについても補題4.25の条件を満たす Λ の部分集合は $\{\lambda\}$ 、 $\lambda = (d, 15, 4)$ である。 $|\{\lambda\}| = 1$ だから、定理の条件Ⅱ、Ⅲ-bが不成立であることがわかる。図4.2に部分グラフ $G(\alpha, \lambda)$ 、 $G(\beta, \lambda)$ 、 $G(\gamma, \lambda)$ のDM分解を示す。この分解より、 α, β に対して、定理の条件Ⅰが

成立していること、 β, γ に対して、定理の条件 I、III-a が不成立であることがわかる。従って、故障 α と故障 β は g -識別可能であり、故障 β と故障 γ は g -識別可能でないことが定理 4.6 を用いてわかる。 (例終)

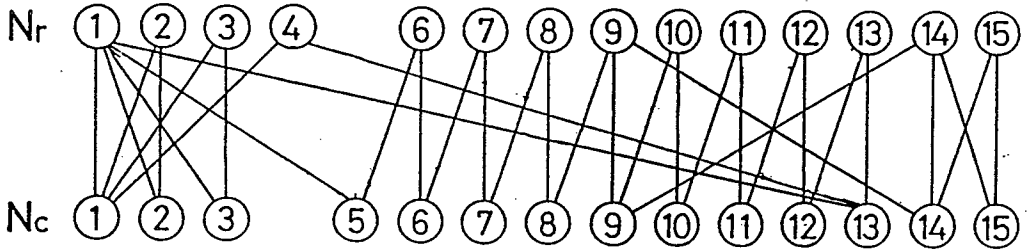


図4.2(a) $G(\alpha, \lambda)$ のDM分解

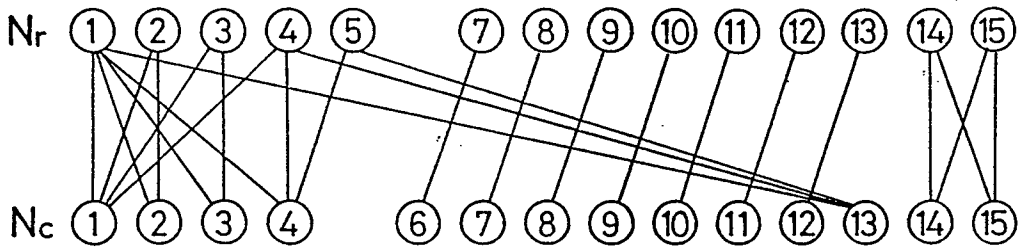


図4.2(b) $G(\beta, \lambda)$ のDM分解

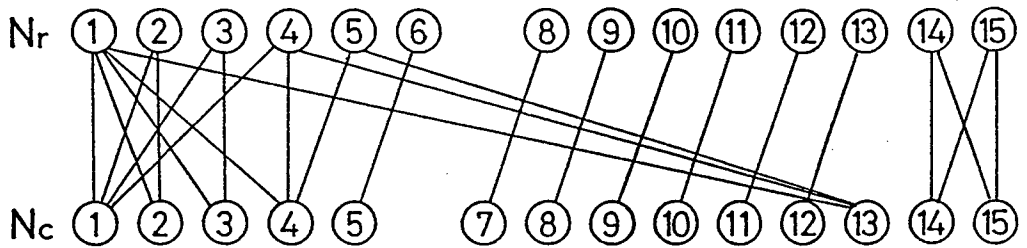


図4.2(c) $G(\gamma, \lambda)$ のDM分解

4.4 動的なコンパートメントシステムへの適用

ここでは、4.2で考察した故障診断の原理を動的なコンパートメントシステムへ適用する。ここでシステムの故障は、移行係数の高々一つが異常値をとることと考える。ここでも4.3と同じくコンパートメント間の結合を表すコンパートメントグラフを持ち込めば、4.2で与えた故障の検出可能条件、識別可能条件はそれぞれ等価なグラフ条件に置き換えることができる。

まず4.4.1で、コンパートメントシステムの記述およびコンパートメント間の結合を表現するコンパートメントグラフを説明する。4.4.2では、コンパートメントシステムでどの移行係数が異常値をとっているかを診断することが、4.2で与えた故障診断の原理の枠内で可能なことを示す。4.4.3では、4.2で導いた代数的な検出可能条件、識別可能条件をコンパートメントグラフ上で表現する。4.4.4では、今までの原理に基づいて、実際の観測値から故障を診断するアルゴリズムについて述べる。

4.4.1 システムの記述

コンパートメントシステムは、3.3で述べたように、

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times r} \quad (4.87)$$

$$y = Cx, \quad y \in \mathbb{R}^m, C \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (4.88)$$

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = k_{ij}, \quad (i \neq j), \quad i, j \in n := \{1, \dots, n\} \\ a_{jj} = -k_{0j} - \sum_{i \neq j} k_{ij} \quad (4.89)$$

と記述される。A をコンパートメント行列という。ここで k_{ij} ($i \in n_0 := \{0, \dots, n\}$, $j \in n$) は、コンパートメント j からコンパートメント i ($i = 0$ のときは外界) への物質移行の比例定数で、移行係数と呼ばれる。またこのシステムのことをシステム (A, B, C) ともいう。

コンパートメント間の結合を表すコンパートメントグラフを用いる。コンパートメントグラフ $G_c(N_c, E_c)$ は、つぎのように定義される。 N_c は、 n 個のコンパートメントと外界に、つまり n_0 と一対一対応をもつ節点集合である。 $N_c' := N_c \setminus \{0\}$ とする。 E_c は $k_{ji} \neq 0$ に対応して書いた有向枝 (i, j) からなる枝集合 E_{ck} (これを k 枝という) と各節点 $i \in N_c$ から外界へ向かう枝 $(i, 0)$ からなる枝集合 E_{cs} (これを s 枝という) の非共通和からなる。以下では、非零移行係数が零でなくなる故障は考えないことにする。つまり、グラフの構造自体を変える故障は考えない。すると、4.2で述べた故障の集合 Γ としては、 $\Gamma = E_{ck}$ ととっていることになる。システム入力は、 r 個のコンパートメント $B \subset N_c$ 、システム観測は、 m 個のコンパートメント $C \subset N_c$ (それぞれ、入力行列 B 、観測行列 C と同じ文字で表す。どちらを表すかは文中で明らかであるのでこの書き方を用いる) の物質量を観測する。このことは、入力行列 B (観測行列 C) は、各列 (行) が単位ベクトルの列 (行) 最大階数の行列であることを意味する。

グラフ $G_c(N_c, E_{ck})$ の接続行列を F で表す。ただし、外界節点 0 に対応した行は省略して、 $n \times |E_{ck}|$ 行列とする。コンパートメント行列 A は、

$$A = -FKF^+ \quad (4.90)$$

と表現できる [7]。ここで K は、非零移行係数を接続行列 F の列の順に並べた対角行列、 F^+ は、 F の -1 を 0 で置き換えた行列である。

4.4.2 故障診断の原理

ここでは、動的な線形コンパートメントシステムでどの移行係数が異常値をとっているかを診断することが、4.2で与えた故障診断の原理の枠内で可能なことを示す。まず、故障の集合 Γ は、4.3.1で定義されたコンパートメン

トグラフの k 枝集合 E_{ck} とみなされていることに注意する。

システム (A, B, C) の正常時の伝達関数 $H(s)$ は、式(4.87), (4.88)より、

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (4.91)$$

である。システムに故障が発生し、コンパートメント j からコンパートメント i への移行係数 ($i=0$ の場合は外界) k_{ij} が $k_{ij} + \Delta$ と変化したとする。このことを故障 $\alpha = (j, i) \in E_{ck}$ が大きさ Δ で発生したという。このときの伝達関数 $H(\alpha, \Delta; s)$ は、

$$H(\alpha, \Delta; s) = C(sI - A - \Delta(i-j)j^T)^{-1}B \quad (4.92)$$

となる。ここで、表記法上の都合上、コンパートメント $v \in N$ と同じ文字でコンパートメント v に対応する位置に1をもつ単位ベクトルを表す。入出力組 $(b, c) \in B \times C$ に関する $H(s)$ の成分、つまり入力 b から出力 c への伝達関数 $h_{cb}(s)$ をまず求める。 $N_{cb} \subset N_C$ を $N_{cb} := \{v \mid b \rightarrow v \text{ かつ } v \rightarrow c\}$ として、 $N_{cb} = \emptyset$ ならば明らかに $h_{cb}(s) = 0$ である。 $N_{cb} \neq \emptyset$ ならばつぎのようなコンパートメントグラフの変形を考える。写像 $\omega_{cb}: N_C \rightarrow N_{cb} \cup \{0\}$ を、 $\omega_{cb}(v) = v$ ($v \in N_{cb}$) , 0 ($v \notin N_{cb}$) と定める。写像 ω_{cb} を自然に枝集合に対しても拡張して、 $\omega_{cb}(G_C(N_C, E_C)) := G_C(N_{cb} \cup \{0\}, \omega_{cb}(E_C))$ と定義する。このグラフ $\omega_{cb}(G_C(N_C, E_C))$ を用いて、行列 A の N_{cb} に対応した行、列からなる小行列 A_{cb} と、 $b, c \in N_{cb}$ より定義可能な単位ベクトル b, c を用いて、

$$h_{cb}(s) = n_{cb}(s) / d_{cb}(s), \quad (4.93)$$

$$n_{cb}(s) = c^T \text{adj}(sI - A_{cb}) b, \quad (4.94)$$

$$d_{cb}(s) = \det(sI - A_{cb}) \quad (4.95)$$

となる。伝達関数 $H(\alpha, \Delta; s)$ の (b, c) 成分、 $h_{cb}(\alpha, \Delta; s)$ は、

$$h_{cb}(\alpha, \Delta; s) = n_{cb}(\alpha, \Delta; s) / d_{cb}(\alpha, \Delta; s) \quad (4.96)$$

$$n_{cb}(\alpha, \Delta; s) = c^T \text{adj}(sI - A_{cb} - \Delta(i-j)j^T) b \quad (4.97)$$

$$d_{cb}(\alpha, \Delta; s) = \det(sI - A_{cb} - \Delta(i-j)j^T) \quad (4.98)$$

となる。さらに式(4.97), (4.98)に行展開、列展開を施すことにより、

$$n_{cb}(\alpha, \Delta; s) = n_{cb}(s) + \Delta n'_{cb}(\alpha; s) \quad (4.99)$$

$$d_{cb}(\alpha, \Delta; s) = d_{cb}(s) + \Delta d'_{cb}(\alpha; s) \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned} & n'_{cb}(\alpha; s) \\ &= -\text{sgn}(j, b; i, c) \det[(sI - A_{cb}) ({}^c\{j, b\}, {}^c\{i, c\})] \quad (4.101) \\ & \quad + \text{sgn}(i, b; i, c) \det[(sI - A_{cb}) ({}^c\{i, b\}, {}^c\{i, c\})] \end{aligned}$$

$$d'_{cb}(\alpha; s) = -j^T \text{adj}(sI - A_{cb}) (i-j) \quad (4.102)$$

を得る。ただし、式(4.101)で \det は、正方行列以外に対しては不定とする。また、 $\text{sgn}(j, b; i, c) = 0$, $j = b$ または $i = c$, $(-1)^{j+b+i+c}$, $j < b$, $i < c$ または $j > b$, $i > c$, $(-1)^{j+b+i+c}$, $j < b$, $i > c$ または $j > b$, $i < c$ とする。 (-1) の指数の中、および不等式の中で、 j 等はコンパートメントの番号(整数)である。ここで、 $H(\alpha, \Delta; s)$ はプロパーであり、 $d'_{cb}(\alpha; s)$ は、 $\deg d'_{cb}(\alpha) < \deg d_{cb}$ を満たすことに注意しておく。式(4.101), (4.102)で与えられる $n'_{cb}(\alpha; s)$, $d'_{cb}(\alpha; s)$ は、故障 α が発生したときの伝達関数の係数変位を与えるので変位多項式とよぶ

ことにする。

つぎに代数的な故障の検出可能条件・識別可能条件を与える。このために、まず式(4.101), (4.102)で定義された変位多項式 $n'_{cb}(\alpha; s)$, $d'_{cb}(\alpha; s)$ を用いて、写像 $\delta H: E_{ck} \rightarrow R[s]^{2mr}$ をつぎのように定義する。

$$\delta H(\alpha) = [\dots, n'_{cb}(\alpha; s), d'_{cb}(\alpha; s), \dots] \quad (4.103)$$

すると変位多項式は、4.2で与えた注意を満たしているので、写像 δH を用いて代数的な故障の検出可能条件、識別可能条件は、それぞれ定理4.1, 定理4.2と同じ形で与えられる。つまり、

[定理4.7] (検出可能条件) 仮定4.1のもとで故障 $\alpha \in E_{ck}$ が検出可能であるための必要十分条件は、 $\delta H(\alpha) \neq 0$ である。

[定理4.8] (識別可能条件) 仮定4.1のもとで故障 $\alpha \in E_{ck}$ と故障 $\beta \in E_{ck}$ が識別可能であるための必要十分条件は、 $\delta H(\alpha)$ と $\delta H(\beta)$ が一次独立であることである。

4.4.3 グラフ的な検出可能条件・識別可能条件

ここでは、故障の検出可能条件・識別可能条件をコンパートメント間の結合関係を表現したコンパートメントグラフの上の条件として導出する。

4.4.2で与えた代数的条件、定理4.7, 定理4.8は、正常時の移行係数に依存している。しかし、式(4.101), (4.102)で定義される、伝達関数の分子多項式の変位多項式 $n'_{cb}(\alpha; s)$ 、分母多項式の変位多項式 $d'_{cb}(\alpha; s)$ を、移行係数 $\{k_{ij}\}$ を変数とする多項式を係数に持つ変数 s の多項式環、つまり $R[X][s]$, $X = \{k_{ij}\}$ の要素とみなせば、定理4.7, 定理4.8が不成立となる

移行係数 k_{ij} は、 k_{ij} を変数とするある多項式の零点である。本章では、その多項式が零多項式でないための、つまり定理4.7, 定理4.8が generic に成立するためのコンパートメントグラフ上の条件を導出する。

まず、仮定4.1は、generic に成立していることに注意する。このことは、システム (A_{cb}, b, c) は構造可制御かつ構造可観測である [7] ことから、移行係数を代入したときに (この代入操作を $\theta_x(\cdot)$ で表して)、generic $\theta_x(n_{cb})$ と $\theta_x(d_{cb})$ は互いに素となることからわかる。すると定理4.7, 定理4.8は、それぞれ定理4.9, 定理4.10で表現される。

【定理4.9】 (g -検出可能条件) 故障 $(i, j) \in E_{ck}$ が generic に検出可能であるための必要十分条件は、コンパートメントグラフ G_c 上で節点 i は、 $B \rightarrow i$ かつ $i \rightarrow C$ を満たすことである。

【定理4.10】 (g -識別可能条件) 故障 $(i, j) \in E_{ck}$ と故障 $(i', j') \in E_{ck}$ が generic に識別可能であるための必要十分条件は、コンパートメントグラフ G_c 上で節点 i, i' はともに $B \rightarrow i, i \rightarrow C, B \rightarrow i', i' \rightarrow C$ を満たし、かつ① $i \neq i'$, または② $j \rightarrow C$ または $j' \rightarrow C$ を満たすことである。

(注意4.13) 上記の二条件は、ゆるい条件であり少ない入力数、観測数で達成できる。たとえばコンパートメントシステムが構造可制御かつ構造可観測の場合には定理4.10の条件は自動的に満たされる。

定理4.9, 定理4.10の証明には、次の補題を用いる。ここで、コンパートメントグラフ $G_c(N_c, E_c)$ 中の M -根森 ($M \subset N_c$) は、3.3.3で定義されていることに注意しておく。

[補題4.35] A をコンパートメント行列、 $G_c(N_c, E_c)$ をそのシステムのコンパートメントグラフとするととき特性多項式

$$\begin{aligned} d(s) &= \det(sI - A) \\ &= s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_0 \end{aligned} \quad (4.104)$$

の係数 α_k は、コンパートメントグラフを用いて

$$\alpha_k = \sum_{W \in \mathcal{O}(k)} \Pi(W) \quad (4.105)$$

$$D(k) = \{W \mid \exists N_k \subset N_c', |N_k| = k, W \text{ は } N_k \cup \{0\}\text{-根森}\} \quad (4.106)$$

で与えられる。ただし、 $\Pi(\cdot)$ は、部分グラフ中の枝重み積を表す。

(証明) 式(4.90)より、

$$\begin{aligned} d(s) &= \det(sI - A) \\ &= \det(sI + FK F^T) \\ &= \det\{[I : F] \text{ block diag}\{sI, K\} [I : F^T]^T\} \end{aligned} \quad (4.107)$$

となる。 $[I : F]$ は $G_c(N_c, E_c)$ の接続行列であることに注意する。ここで、式(4.107)に行列式に関するコーシー・ビネーの公式を適用すれば、

$$\begin{aligned} d(s) &= \sum_{E_s' \in \mathcal{O}} \det [I : F](N_c', E_s') \\ &\quad \times \Pi(E_s') \det [I : F^T](N_c', E_s') \\ &= \sum_{E_s' \in \mathcal{O}} \Pi(E_s') \end{aligned} \quad (4.108)$$

$$D = \{E_s' \subset E_c \mid |E_s'| = n, [I : F](N_c', E_s'), \\ [I : F^+](N_c', E_s') \text{ は共に正則} \} \quad (4.109)$$

となる。ここで、 $[I : F](N_c', E_s')$ が正則であるための必要十分条件は、 E_s' が G_c の木であることであり、 $[I : F^+](N_c', E_s')$ が正則であるための必要十分条件は、 G_c 中で E_s' の始点が互いに相異なることである。つまり、 D の内包定義が成立するための必要十分条件は、 E_s' が 0 を根とする内向木であることである。従って $D_k := \{E_s' \in D \mid |E_s' \cap E_{c_k}| = k\}$ から $D(k)$ への全単射 ψ が存在して、 $\Pi(E_s') = \Pi(\psi(E_s')) s^k$ が成り立つことを示せば補題4.35が示されたことになる。このために、 $E_s' \in D_k$ に対して、 $\psi(E_s') := E_s' \cap E_{c_k}$ と定義する。 ψ が D_k から $D(k)$ への写像であることは明らかである。 ψ は全射： $\forall W \in D(k)$ 、 W は $N_k \cup \{0\}$ -根森に対し N_k から 0 への s 枝 k 本を W に加えたグラフ E_s' は、 $E_s' \in D_k$ 、 $\psi(E_s') = W$ を満たす。 ψ は単射： $E_{s_1'}, E_{s_2'} \in D_k$ 、 $\psi(E_{s_1'}) = \psi(E_{s_2'})$ ($N_k \cup \{0\}$ -根森) とする。 $v \in N_k$ から 0 へは $E_{s_1'}, E_{s_2}'$ で到達可能だから v から 0 への s 枝が存在する。一方 s 枝の数は $k = N_k$ だから、 E_{s_1}' と E_{s_2}' の s 枝は以上の形のものだけであり、両者は一致している。ゆえに $E_{s_1}' = E_{s_2}'$ 。 $\Pi(E_s') = \Pi(\psi(E_s')) s^k$ は明らかである。

(補題4.35証明終)

【補題4.36】 A をコンパートメント行列、 $G_c(N_c, E_c)$ をそのシステムのコンパートメントグラフとする。 b, c を単位ベクトル、単位ベクトルと同じ文字 b, c を用いて対応するコンパートメントを表す。このとき、多項式

$$n(s) = c^T \text{adj}(sI - A) b \quad (4.110)$$

$$= \beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_0$$

の係数 β_k は、コンパートメントグラフを用いて

$$\beta_k = \sum_{W \in N(k)} \Pi(W) \quad (4.111)$$

$$N(k) = \{W \mid \exists N_k \subset Nc' \setminus \{c\}, |N_k| = k, W \text{ は } N_k \cup \{c, 0\} \\ \text{-根森, } W \text{ 中で } b \text{ は } c \text{ を根とする内向木に含まれる}\} \quad (4.112)$$

で与えられる。

(証明) 式(4.90)より、

$$\begin{aligned} n(s) &= c^T \text{adj}(sI - A) b \quad (4.113) \\ &= c^T \text{adj}(sI + FK F^T) b \\ &= (-1)^{b+c} \det\{[I : F](Nc' \setminus \{b\} : Ec) \\ &\quad \times \text{block diag}\{sI, K\} [I : F^T](Nc' \setminus \{c\} : Ec)^T\} \end{aligned}$$

である。式(4.113)に行列式に関するコーシー・ビネーの公式を適用すれば、

$$\begin{aligned} n(s) &= \sum_{E_s' \in N} (-1)^{b+c} \det [I : F](Nc' \setminus \{b\}, E_s') \\ &\quad \times \Pi(E_s') \det [I : F^T](Nc' \setminus \{c\}, E_s') \quad (4.114) \\ &= \sum_{E_s' \in N} \Pi(E_s') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= \{E_s' \subset Ec \mid |E_s'| = n-1, [I : F](Nc' \setminus \{b\}, E_s'), \\ &\quad [I : F^T](Nc' \setminus \{c\}, E_s') \text{ は共に正則}\} \quad (4.115) \end{aligned}$$

となる。ここで $[I : F](Nc' \setminus \{b\}, E_s')$ が正則であるための必要十分条

件は、 $E_{s'}$ が G_c の $\{b, 0\}$ -二木であることである。ただし $\{b, 0\}$ -二木とは、枝 $(b, 0)$ を加えたとき G_c の木になる部分グラフをいう。また、 $[I : F^+](N_c \setminus \{c\}, E_{s'})$ が正則であるための必要十分条件は、 G_c 中で $E_{s'}$ の始点が $N_c \setminus \{c, 0\}$ に属して、かつ互いに相異なることである。つまり N の内包定義が成立するための必要十分条件は、 $E_{s'}$ が $\{c, 0\}$ -根森であり、かつ b は c を根とする内向木に含まれることである。従って $N_k := \{E_{s'} \in N \mid |E_{s'} \cap E_{c,s}| = k\}$ から $N(k)$ への全単射 ψ が存在して、 $\Pi(E_{s'}) = \Pi(\psi(E_{s'}))s^k$ が成り立つことを示せば補題4.36が示されたことになる。これは補題4.35と同様の方法で示すことができる。

(補題4.35証明終)

(定理4.9の証明) 故障 $f = (i, j) \in E_{ck}$ を考える。定理4.7より generic に $\delta H(f) \neq 0$ が成立するかを確かめればよい。

必要性: 節点 i は定理の条件を満たさないとする。どの入出力組 $(b, c) \in B \times C$ に対しても $\omega_{cb}(i) = 0$ となるので f は $\omega_{cb}(G_c(N_c, E_c))$ に現れない。従って f の枝重みは A_{cb} に現れないので、式(4.101), (4.102)より、 $\delta H(f) = 0$ となる。

十分性: 入出力組 $(b, c) \in B \times C$ に対して、 $b \rightarrow i$ かつ $i \rightarrow c$ とする。以下添字 cb を省略し、 $\omega_{cb}(G_c(N_c, E_c))$ を $G_c(N_c, E_c)$ のように書く。 $G_c(N_c, E_c)$ に補題4.34を適用して、 $\alpha_{n-1} = \sum_{W \in D(n-1)} \Pi(W)$ である。 $D(n-1) = \{e \mid e \in E_{ck}\}$ であるから、 α_{n-1} はグラフ中の k 枝重みの総和である。以下、枝重みを枝と同じ文字で表すことにする。すると、 $(\%f)(\alpha_{n-1}) = 1 \neq 0$ となり、generic に $\delta H(f) \neq 0$ である。

(定理4.9の証明終)

(定理4.10の証明) 故障 $f = (i, j), f' = (i', j') \in E_{ck}$ について考

える。 f, f' は共に generic に検出可能であることを仮定してよい。定理4.8より generic に $\delta H(f)$ と $\delta H(f')$ が一次独立であるかを調べればよい。

必要性: $i = i'$ かつ $j \rightarrow c, j' \rightarrow c$ とする。ただし $j \rightarrow c$ は、 $j \rightarrow c$ でないことを表す。入出力組 $(b, c) \in B \times C$ を考える。以下、添字 cb を省略し、 $\omega_{cb}(G_c(N_c, E_c))$ を単に $G_c(N_c, E_c)$ 等と書く。 $G_c(N_c, E_c)$ 中で f と f' は、 i から $\omega(j) = \omega(j') = 0$ へ向かう並行な枝であるので、 $W \in D(k), f \in W$ ならば、 $W \cup \{f'\} \setminus \{f\} \in D(k)$ 、また $W \in N(k), f \in W$ ならば $W \cup \{f'\} \setminus \{f\} \in N(k)$ である。ここで f と f' の役割をかえた命題も成立する。従って、補題4.34と補題4.35より、 $(\partial_a f) \alpha_k = (\partial_a f') \alpha_k, (\partial_a f) \beta_k = (\partial_a f') \beta_k$ が成り立つので、generic に $\delta H(f) = \delta H(f')$ 、つまり generic に一次従属である。

十分性: まず、 $C(i) := \{c \in C \mid i \rightarrow c\}, B(i) := \{b \in B \mid b \rightarrow i\}$ として、 $C(i) \neq C(i')$ または $B(i) \neq B(i')$ である場合を考える。このとき、ある入出力組 (b, c) に対して、 $b \rightarrow i, i \rightarrow c$ かつ $b \rightarrow i', i' \rightarrow c$ でないか、または $b \rightarrow i', i' \rightarrow c$ かつ $b \rightarrow i, i \rightarrow c$ でない。前者が成立するとすれば、式(4.94), (4.95)より、 f は n_{cb}, d_{cb} に含まれ、 f' は n_{cb}, d_{cb} に含まれないので、 $\delta H(f)$ と $\delta H(f')$ は generic に一次独立である。後者が成立する場合も同様である。

次に、 $C(i) = C(i'), B(i) = B(i')$ として入出力組 $(b, c) \in B(i) \times C(i)$ を一つ固定すると、 f, f' はともに $\omega_{cb}(G_c(N_c, E_c))$ に含まれている。以下添字 cb を省略する。

① $i \neq i'$ の場合: (a) f と f' は閉路をなさない場合と、(b) f と f' は閉路をなす場合にわける。(a): f と f' 以外の枝を開放除去する。 $D(n-1) = \{\{f\}, \{f'\}\}, D(n-2) = \{\{f, f'\}\}$ であるから、補題4.34より、 $((\partial_a f) \alpha_{n-1}, (\partial_a f) \alpha_{n-2}) = (1, f'), ((\partial_a f') \alpha_{n-1}, (\partial_a f') \alpha_{n-2})$

$= (1, f)$ となって、 $\delta H(f)$ と $\delta H(f')$ は generic に一次独立である。
 (b): i または i' のいずれか一方からは他方を通らずに c へ到達可能である。
 i を通らずに $i' \rightarrow c$ と仮定する。その有向道と f, f' で作られる部分グラフを G_1 として b から G_1 へ至る有向道を考える。その有向道中で b からみてはじめて G_1 へ達する部分道と G_1 を併せたグラフを $G_2(N_2, E_2)$ とする。 $G_c(N_c, E_c)$ で E_2 以外の枝を開放除去する。 $k = n - |N_2|$, $W = E_2 \setminus \{f'\}$ として、 $N(k) = \{W\}$ であるから、補題4.34, 補題4.35より、 $((\%f)\alpha_{n-1}, (\%f)\beta_k) = (1, \Pi(W)/f)$, $((\%f')\alpha_{n-1}, (\%f')\beta_k) = (1, 0)$ となるので、 $\delta H(f)$ と $\delta H(f')$ は generic に一次独立である。

② $i = i'$ で j または j' から観測節点へ到達可能な場合: (c) j を通らずに $j' \rightarrow i$ または j' を通らずに $j \rightarrow i$ の場合と、(d) (c) でない場合に分ける。(c): j を通らずに $j' \rightarrow i$ と仮定してよい。その有向道 p と f, f' を併せて $G_1(N_1, E_1)$ として E_1 以外の枝を開放除去する。 p は $b \rightarrow i$, $i \rightarrow c$ だから G に含まれていることに注意する。 $k = n - |N_1|$, $W = p \cup \{f\}$ として、 $D(k) = \{W\}$ であるから、補題4.34より、 $((\%f)\alpha_{n-1}, (\%f)\alpha_k) = (1, \Pi(W)/f)$, $((\%f')\alpha_{n-1}, (\%f')\alpha_k) = (1, 0)$ となるので、 $\delta H(f)$ と $\delta H(f')$ は generic に一次独立である。(d): この場合、 $j' \rightarrow i$ かつ $j \rightarrow i$ であることに注意する。 j' を通らずに $j \rightarrow c$ と仮定してよい。その有向道を p とする。 $b \rightarrow i$, $j' \rightarrow i$, $j \rightarrow i$ より p 中の節点および j' を通らずに $b \rightarrow i$ である。その有向道を p' として、 p', p, f, f' を併せて $G_1(N_1, E_1)$ として E_1 以外の枝を開放除去する。 $k = n - |N_1| + 1$, $W = p' \cup \{f\} \cup p$ として、 $N(k) = \{W\}$ であるから補題4.34, 補題4.35より、 $((\%f)\alpha_{n-1}, (\%f)\beta_k) = (1, \Pi(W)/f)$, $((\%f')\alpha_{n-1}, (\%f')\beta_k) = (1, 0)$ となるので、 $\delta H(f)$ と $\delta H(f')$ は generic に一次独立である。 (定理4.10の証明終)

4.4.4 故障診断アルゴリズム

ここでは、前節までの考察に基づいて、故障発生時に観測値から故障位置を決定するアルゴリズムについて述べる。簡単のために以下では一入力一出力システムについて考える。

故障 $\alpha \in E_{ck}$ が大きさ Δ で発生したとする。そのときの異常時、正常時の観測値をそれぞれ y_f, y_n とすれば

$$y_f(s) = H(\alpha, \Delta; s)u(s) \quad (4.116)$$

$$y_n(s) = H(s)u(s) \quad (4.117)$$

となる。ここで式(4.93) - (4.102)より、

$$H(\alpha, \Delta; s) = (n(s) + \Delta n'(\alpha; s)) / (d(s) + \Delta d'(\alpha; s)) \quad (4.118)$$

$$H(s) = n(s) / d(s) \quad (4.119)$$

となる。従って、入力 u に対して y_f が式(4.116)を満たす必要十分条件は、

$$y_f(s) - y_n(s) = \Delta (H_n(\alpha; s)u(s) - H_d(\alpha; s)y_f(s)) \quad (4.120)$$

$$H_n(\alpha; s) = n'(\alpha; s) / d(s) \quad (4.121)$$

$$H_d(\alpha; s) = d'(\alpha; s) / d(s) \quad (4.122)$$

が成立することである。つまり $y_f(t) - y_n(t)$ と $H_n * u(t) - H_d * y_f(t)$ (ここで*は、たたみこみ積を表す) の波形が相似となることである。以上のことから次のアルゴリズムを得る。

〔アルゴリズム〕コンパートメントシステム式(4.87), (4.88)でどの相異なる二つの故障も識別可能とする。このとき次の故障診断アルゴリズムが成立する。

故障 $\alpha = (i, j) \in E_{ck}$ について

(ステップ1) 式(4.101), (4.102)より伝達関数の分子多項式、分母多項式の変位多項式 $n'(\alpha; s)$, $d'(\alpha; s)$ を求め、 $H_n(\alpha; s) = n'(\alpha; s) / d(s)$, $H_d(\alpha; s) = d'(\alpha; s) / d(s)$ を構成する。

(ステップ2) $y_f(t) - y_n(t)$ と $H_n * u(t) - H_d * y_f(t)$ が相似ならば故障 α が発生している。相似でなければ他の故障が発生している。

(ステップ3) 他の故障 $\alpha \in E_{ck}$ についてステップ1以降をくり返す。

(アルゴリズム終)

(例) 図4.3で表現されるコンパートメントシステムを考える。定理4.10よりこのシステムはどの相異なる二つの故障もg-識別可能である。正常時の移行係数は、 $k_{23} = 0.4$, $k_{13} = 0.3$, $k_{03} = 1.2$, $k_{21} = 0.5$, $k_{32} = 0.2$ とする。故障が発生し、 k_{32} が0.2 から0.4 へと変化したとする。入力として、 $u(t) = 5 \delta(t)$ (δ はインパルス)を加えたときの故障時と正常時の観測値差 $y_f - y_n$ および各枝についての比較波形、 $r(t) = H_n * u(t) - H_d y_f(t)$ をそれぞれ図4.4, 図4.5に示す。 $C[0, 30]$ ($0 \leq t \leq 30$ での連続関数のつくる線形空間)での各波形間の内積および角度を表4.1に与える。この結果から r_{32} と $y_f - y_n$ が相似であることがわかり、正しく故障が判定されていることがわかる。

(例終)

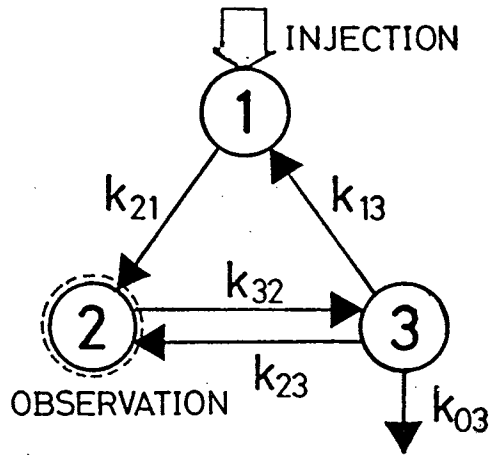


図4.3 例のコンパートメントグラフ

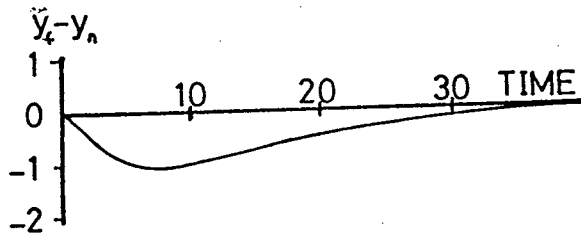


図4.4 故障時と正常時の観測値差 $y_t - y_n$

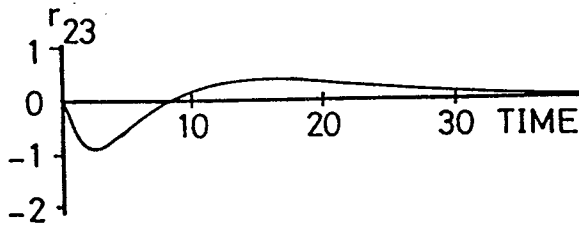


図4.5(a) 比較波形 r_{23}

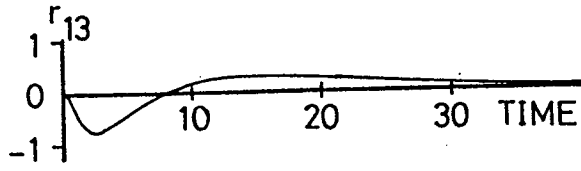


圖4.5(b) 比較波形 r_{13}

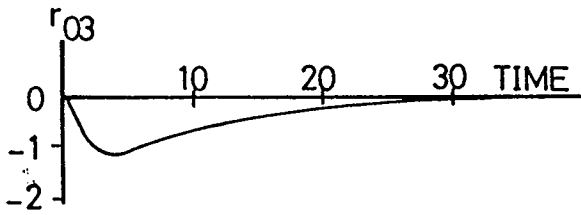


圖4.5(c) 比較波形 r_{03}

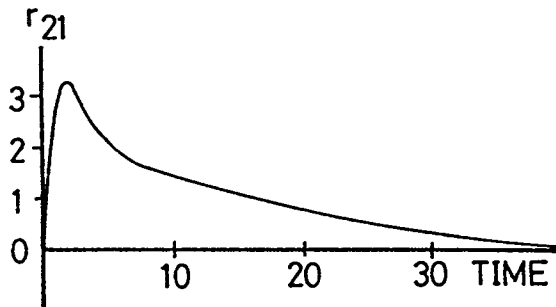


圖4.5(d) 比較波形 r_{21}

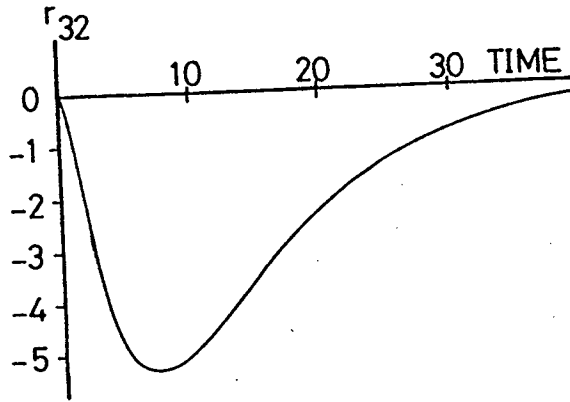


図4.5(e) 比較波形 r_{32}

表4.1 各波形間の内積と角度

(j, i)	$\ r_{ij}\ $	$\langle r_{ij}, y_t - y_n \rangle$	$\frac{\langle r_{ij}, y_t - y_n \rangle}{\ r_{ij}\ \ y_t - y_n\ }$
(3,2)	1.61 E 0	-6.18 E-2	-0.014
(3,1)	1.23 E 0	-5.25 E-1	-0.156
(3,0)	2.20 E 0	5.46 E 0	0.907
(1,2)	5.67 E 0	-1.32 E 1	-0.854
(2,3)	1.31 E 1	3.61 E 1	1.000

4.5 結言

4.2で展開された伝達関数の係数変化に基づく故障診断法は、4.3, 4.4で示したように広いクラスの線形システム—線形ダイナミカルシステム・動的なコンパートメントシステム—に適用することが可能なことが明らかにされた。さらにそれらのシステム内でのサブシステムの結合関係（システム構造）に基づいたグラフ的な故障の検出可能条件、識別可能条件を導くことにより二つの利点、①検出可能性、識別可能性がシステムの物理的な定数に依らずシステム構造に固有の性質として与えられること、②このことから試験信号の入力位置、観測位置の設計方法を与えることができること、が挙げられる。

第5章 結論

本論文では、線形システムの故障診断問題に対して、理論的検討を加えた。ここで、その成果を総括しておく。

本論文で取り扱った故障診断問題は、故障の検出可能性、識別可能性、故障診断アルゴリズムの考察の三問題である。ここで線形システムとしては、代数方程式で記述される定常状態にある線形システム、定常状態にあるコンパートメントシステム、動的なコンパートメントシステム、状態方程式で記述される線形ダイナミカルシステムと、広範な線形システムを対象としている。ここで用いた故障診断の手法は、大きくわけて二つの原理—不変性に基づいた故障診断法・伝達関数の係数変化に基づいた故障診断法—に基づいている。いずれの手法に対しても、まず故障の検出可能性、識別可能性について考察し、故障の検出可能条件、識別可能条件を導いた。つぎにシステム内のサブシステムの結合関係（これをシステム構造とよんだ）を表現するグラフを用いて、この代数的な条件を等価なグラフ条件に置き換えた。

不変性の原理に基づいた故障診断法は、第2章・第3章で考察された。代数的な識別可能条件は、第2章で定義された故障観測部分空間の次元を用いて表現された。この代数的な条件に基づいて、第2章では、システムの観測値からシステムに発生している故障を決定する故障診断アルゴリズムを提案した。このときに識別可能条件は、このアルゴリズムの実行可能性と、診断結果の正当性を保証するので、必須的なものである。第3章では、第2章の不変性にに基づいた故障診断の原理を三つの線形システムのクラス—代数方程式で記述される定常状態にある線形システム、定常状態にあるコンパートメントシステム、状態方程式で記述される線形ダイナミカルシステム—に適用した。この適用により、第2章の故障診断法は十分に広いクラスに適用できることがわかる。さらにもう一つの重要な点は、この適用に当って、システム内のサブシステムの結

合関係（システム構造）を表現するグラフを用いて、代数的な識別可能条件がグラフ的な条件へ置き換えられることである。このグラフ的な条件を導く利点としては、①検出可能性、識別可能性がシステムの物理的な定数に依らずシステム構造に固有の性質として与えられること、②このことから観測位置の設計方法を与えることができること、③故障診断アルゴリズムを実行するにあたって、グラフ理論で既に得られているアルゴリズムを有効に利用できること、が挙げられる。

伝達関数の係数変化に基づいた故障診断法は、第4章で考察された。まず故障診断の原理と代数的な故障診断条件が導かれた。この故障診断の原理を二つの線形システムのクラス—状態方程式で記述される線形ダイナミカルシステム、動的なコンパートメントシステム—に適用した。不変性の原理に基づいた故障診断法の場合と同じく、システム構造を表現するグラフを用いて、代数的な識別可能条件がグラフ的な条件へ置き換えられた。第3章と同様、グラフ的な故障の検出可能条件、識別可能条件を導くことにより二つの利点、①検出可能性、識別可能性がシステムの物理的な定数に依らずシステム構造に固有の性質として与えられること、②このことから試験信号の入力位置、観測位置の設計方法を与えることができること、が挙げられる。

謝 辞

本研究を遂行するにあたり、終始御指導御助言を頂きました大阪大学工学部電子工学科児玉慎三教授に心からの感謝の意を表します。また、終始直接の御指導御助言を頂きました大阪大学工学部電子工学科前田肇助教授に厚く感謝いたします。

本研究をまとめるにあたり貴重な御意見を頂きました大阪大学工学部通信工学科中西義郎教授、電気工学科鈴木胖教授、電子工学科寺田浩詔教授に衷心感謝の意を表します。

また、本研究の途上、故障診断問題に関して御討論、御意見を頂きました三菱電機(株)中央研究所システム研究部武田捷一博士、有益な御討論、御助言を頂きました大阪大学工学部電子工学科熊谷貞俊助手、コンパートメントシステムの医学的な問題とその応用に関して御意見を頂きました大阪大学医学部第一内科楠岡英雄助手、動的なコンパートメントシステムの故障診断に関して御意見を頂きました(株)東芝情報通信システム研究所伊藤隆文氏に深く感謝いたします。

関連発表論文

第2章

学会論文誌

- (2.1) 太田快人, 前田肇, 児玉慎三, 武田捷一: 線形システムの故障診断アルゴリズム, 計測自動制御学会論文誌, Vol.21, No.10, pp.1092-1097, 1985.

口頭発表

- (2.1) 太田快人, 前田肇, 児玉慎三, 武田捷一: 線形システムの故障診断法とその判定アルゴリズム, J A A C E 第28回システムと制御研究発表講演会, pp.73-74, 1984.

第3章

学会論文誌

- (3.1) 太田快人, 前田肇, 児玉慎三, 伊藤隆文: コンパートメントシステムの故障診断, 電子通信学会論文誌, Vol.J67-A, No.8, pp.833-840, 1984.
- (3.2) 太田快人, 前田肇, 児玉慎三: 線形ダイナミカルシステムの故障診断, 計測自動制御学会論文誌, Vol.22, No.4, pp.390-396, 1986.
- (3.3) H.Maeda, Y.Ohta, S.Kodama and S.Takeda, "Fault diagnosis of non-linear systems: Graphical approach to detectability, distinguishability and diagnosis algorithm," International Journal of Circuits Theory and Application, to appear.
- (3.4) Y.Ohta and S.Kodama, "Structural invertibility of transfer functions," IEEE Trans. on Automatic Contr., Vol.AC-30, No.8, pp.818

-819, 1985.

口頭発表

- (3.1) 太田快人, 前田肇, 児玉慎三, 武田捷一: 線形システムの故障診断, 電子通信学会研究技術報告, Vol.CAS82, No.143, pp.25-30, 1983.
- (3.2) 前田肇, 太田快人: 多変数制御系の故障診断, SICEシンポジウム「制御理論と実システムへの応用」, pp.161-169, 1983.
- (3.3) Y.Ohta, H.Maeda, S.Kodama and S.Takeda, "Faults diagnosis and design of measuring set of linear systems," 日米セミナー—代数的システム理論の最近の発展, 1983.
- (3.4) 太田快人, 楠岡英雄, 井上通敏: コンパートメントシステムの故障診断について, 第23回日本ME学会大会, pp.854-855, 1984.
- (3.5) 太田快人, 前田肇, 児玉慎三, 武田捷一: 線形ダイナミカルシステムの故障診断法について, SICE第7回 Dynamical System Theory シンポジウム, pp.221-226, 1984.
- (3.6) 太田快人, 前田肇, 児玉慎三, "Fault diagnosis of linear systems: Graph theoretical approach," 京都大学数理解析研究所 Mathematical Theory of Control and Systems 研究集会, 数理解析研究所講究録562, pp.1-18, 1985.

第4章

学会論文誌

- (4.1) 伊藤隆文, 太田快人, 前田肇, 児玉慎三: コンパートメントシステムの動特性に基づく故障診断, 電子通信学会論文誌, Vol.J69-A, No.2, pp.186-193, 1986.

(4.2) Y.Ohta, H.Maeda and S.Kodama,"Factorization of the minors of the characteristic matrix $sI-A$ and DM decomposition of its representation graph," submitted for publication.

(4.3) Y.Ohta, H.Maeda and S.Kodama,"Fault diagnosis of linear systems based on transfer function sensitivity," submitted for publication.

口頭発表

(4.1) 伊藤隆文, 太田快人, 前田肇, 児玉慎三: コンパートメントシステムの動特性に基づく故障診断, 第24回SICE学術講演会, pp.637-638, 1985.

その他の発表論文

学会論文誌

(1) Y.Ohta, H.Maeda and S.Kodama," Reachability, observability, and realizability of continuous-time positive systems, SIAM J. Control and Optimization, Vol.22, No.2, pp.171-180, 1984.

口頭発表

(1) 太田快人, 前田肇, 楠岡英雄, 児玉慎三: 非負入力による可到達集合の性質, JAACE第24回システムと制御研究発表講演会, pp.169-170, 1980.

(2) 太田快人, 前田肇, 楠岡英雄, 児玉慎三: 伝達関数の正実現条件, 第19回SICE学術講演会, pp.9-10, 1980.

(3) 太田快人, 前田肇, 楠岡英雄, 児玉慎三: コンパートメントシステムの固有値設定問題, SICE第4回 Dynamical System Theory シンポジウム, pp.21-24, 1981.

参考文献

第1章

- [1] A.S.Willsky, "A survey of design methods for failure detection systems," *Automatica*, vol.12, pp.601-611, 1976.
- [2] *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Special Issue on Automatic Analog Fault Diagnosis, vol.CAS-26, 1979.
- [3] J.W.Bandler and A.E.Salama, "Fault diagnosis of analog circuits," *Proc. IEEE*, vol.73, pp.1279-1325, 1985.
- [4] R.Saeks and S.R.Liberty ed., *Rational Fault Analysis*. New York: Marcel Dekker, 1977.
- [5] W.Mayeda and C.V.Ramamoorthy, "Distinguishability criteria in oriented graphs and their application to computer diagnosis -I," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol.CT-16, pp.448-454, 1969.
- [6] M.Iri, K.Aoki, E.O'Shima and H.Matsuyama, "A graphical approach to the problem of locating the origin of the system failure," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, vol.23, pp.295-311, 1980.
- [7] Z.F.Huang, C.S.Lin and R.W.Liu, "Node-fault diagnosis and a design of testability," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol.CAS-30, pp.257-265, 1983.
- [8] C.S.Lin, Z.F.Huang and R.W.Liu, "Topological condition for single-branch-fault," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol.CAS-30, pp.376-381, 1983.

第2章

- [1] R.M.Biernacki and J.W.Bandler,"Multiple-fault location of analog circuits," IEEE Trans. Circuits and Systems, vol.CAS-28, pp.361-367, 1981.
- [2] Z.F.Huang, C.S.Lin and R.W.Liu,"Node-fault diagnosis and a design of testability," IEEE Trans. Circuits and Systems, vol.CAS-30, pp.257-265, 1983.
- [3] C.S.Lin, Z.F.Huang and R.W.Liu,"Topological condition for single-branch-fault," IEEE Trans. Circuits and Systems, vol.CAS-30, pp.376-381, 1983.

第3章

- [1] W.Mayeda and C.V.Ramamoorthy,"Distinguishability criteria in oriented graphs and their application to computer diagnosis -I," IEEE Trans. Circuit Theory, vol.CT-16, pp.448-454, 1969.
- [2] M.Iri, K.Aoki, E.O'Shima and H.Matsuyama,"A graphical approach to the problem of locating the origin of the system failure," Journal of the Operations Research Society of Japan, vol.23, pp.295-311, 1980.
- [3] IEEE Trans. Circuits and Systems, Special Issue on Automatic Analog Fault Diagnosis, vol.CAS-26, 1979.
- [4] J.W.Bandler and A.E.Salama,"Fault diagnosis of analog circuits," Proc. IEEE, vol.73, pp.1279-1325, 1985.
- [5] R.W.Shields and J.B.Pearson,"Structural controllability of multiinput linear systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.AC-21, pp.203-212, 1976.

- [6] D.R.Woodall, "Minimax theorems in graph theory," in Selected Topics in Graph Theory, ed. by L.W.Beineke and R.J.Wilson. Academic Press, London: 1978.
- [7] R.Zazworsky and H.K.Knudsen, "Controllability and observability of linear time-invariant compartmental models," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.AC-23, pp.872-877, 1978.

第4章

- [1] W.K.Chen, "Flow graphs: some properties and methods of simplification," IEEE Trans. Circuit Theory, vol.CT-12, pp.128-130, 1965.
- [2] A.L.Dulmage and N.S.Mendelsohn, "Coverings of bipartite graphs," Canad. J. Math., vol.10, pp.517-534, 1958.
- [3] 伊理正夫, 韓太舜, 「線形代数」. 教育出版, 1977.
- [4] D.R.Woodall, "Minimax theorems in graph theory," in Selected Topics in Graph Theory, ed. by L.W.Beineke and R.J.Wilson. Academic Press, London: 1978.
- [5] 小野寛晰, 「関係の代数」. 教育出版, 1974.
- [6] 西村孟, 「代数」. 岩波出版, 1976.
- [7] R.Zazworsky and H.K.Knudsen, "Controllability and observability of linear time-invariant compartmental models," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.AC-23, pp.872-877, 1978.

