Guerbati, K. and Mechab, M.
Osaka J. Math.
36 (1999), 935–948

PROBLÈME DE GOURSAT DANS DES CLASSES DE GEVREY ANISOTROPES

KADDOUR GUERBATI AND MUSTAPHA MECHAB

(Received December 15, 1997)

1. Introduction

Reprenant les résultats de plusieurs mathématiciens, notament ceux de Lednev [11], C. Wagschal [15] a donné une nouvelle démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution du problème de Goursat non linéaire dans differents espaces de fonctions, (holomorphes ou holomorphes par rapport aux variables normales et de classe Gevrey par rapport aux autres). Dans sa méthode, il applique des opérateurs de Gevrey à certaines séries majorantes, qui majorent leurs carrés, pour définir certaines algèbres de Banach où le problème est réduit à la recheche du point fixe d'une certaine application. Reprenant un problème posé par J. L. Lions [14], D. Gourdin et le deuxième auteur [7] étendent les résultats de [15] au problème de Goursat pour des équations de Kirchhoff généralisées du type

$$D_x^\alpha u(x,y) = f\Big(x, y, D^B u(x,y), \int_\Omega \big|D^B u(x,y)\big|^2 dy\Big)$$

Ces équations généralisent les équations de Carrier-Kirchhoff ([1], [9]), modèlisant les déplacements d'une corde élastique vibrante, qui sont du type

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (\frac{P_0}{\rho.h} + \frac{E}{2L\rho}\int_0^L |\frac{\partial u}{\partial s}(s,t)|^2 ds)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

où L est la longueur de la corde, $u(x,t)$ est le déplacement vertical du point x à l'instant t, ρ la densité de la matière, h l'aire de la section de la corde, P_0 la tension initiale de la corde et E le module de Young de la matière (voir [5]).

Le but de notre travail est l'étude du problème de Goursat associé à la famille d'équations utilisée dans [7]. On établit l'existence et l'unicité de la solution dans les espaces de fonctions de classe Gevrey, avec des indices différents pour les variables normales et les variables co-normales suivant la terminologie de [11] et [7]. A l'aide des espaces $\mathbf{G}_R^{0,d}(\Omega_R)$ introduits dans [15], on définit des algèbres de Banach, dont la construction des normes est inspirée des définitions des quasi-normes introduites dans les travaux de J. Leray et L. Waelbroek [13] et J. Leray et Y. Ohya [12], et nous réduisons alors notre problème à la recherche des points fixes d'une certaine application qu'on construit.

Dans [4], A. Friedman étudie le problème dans une classe de fonctions analytiques réelles qui coincide avec la classe des fonctions de classe Gevrey d'indice un; notre travail est alors une généralisation de ces résultats au cas des fonctions de classe Gevrey, et signalons enfin que nos résultats étendent aussi ceux de K. Kajitani [8] qui, pour des systèmes de Leray-Volevich, a établi l'existence et l'unicité locale, par rapport à toutes les variables, de la solution du problème dans les espaces de fonctions de classe Gevrey avec un même indice. De même, ces résultats peuvent aussi être pris comme des améliorations des exemples donnés par P. Duchateau dans [3], où son étude est faite dans des échelles de Banach abstraites.

2. Définitions-Résultats

Soient p, $q \in \mathbb{N}^*$. Les points génériques de $\mathbb{R}^p$ et de $\mathbb{R}^q$ sont respectivement notés $x = (x_1, \ldots, x_p)$ et $y = (y_1, \ldots, y_p)$ et pour une fonction continue $u(x,y)$, $D_{x_i}^{-1}u$ désigne la primitive de u par rapport à x_i s'annulant avec x_i.
Soient α un multi-indice et B une partie finie de l'ensemble

$$\left\{(\gamma, \delta) \in \mathbf{Z}^p \times \mathbb{N}^q, \quad |\gamma| + |\delta| \leq |\alpha| \quad et \quad \gamma < \alpha\right\}$$

où $|\alpha|$ désigne la longueur de α et $\gamma < \alpha$ si pour tout i, $\gamma_i \leq \alpha_i$ et $\gamma \neq \alpha$. On notera r le cardinal de B, $d = \inf\left\{s \geq 1;\ |\gamma| + s|\delta| \leq |\alpha|\right\}$ et Ω un voisinage ouvert borné de l'origine de $\mathbb{R}^q$. On considère le problème de Goursat

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{rcl} D_x^\alpha u(x,y) & = & f\Big(x, y, D^B u(x,y), \displaystyle\int_\Omega |D^B u(x,y)|^2 dy\Big) \\ u(x,y) & = & O(x^\alpha) \end{array}\right.$$

où $D^B u(x,y) = \left(D_x^\gamma D_y^\delta u\right)_{(\gamma,\delta)\in B}$.
Pour tout ouvert $\mathcal{U} \times \Omega$ de $\mathbb{R}_x^p \times \mathbb{R}_y^q$, on note $C^{0,\infty}(\mathcal{U} \times \Omega)$ l'algèbre des fonctions $u : \mathcal{U} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles continues

$$D_y^\delta u : \mathcal{U} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \forall \delta \in \mathbb{N}^q$$

$G^{0,d}(\mathcal{U} \times \Omega)$ (voir [15] et [7]) désigne l'algèbre des fonctions $u \in C^{0,\infty}(\mathcal{U} \times \Omega)$ telles que :

$$(2) \qquad \exists C \geq 0;\ \forall \delta \in \mathbb{N}^q,\ \forall x \in \mathcal{U}, \quad \sup_{y\in\Omega} |D_y^\delta u(x,y)| \leq C^{|\delta|+1}\delta!^d$$

Étant donné un nombre $s \geq 1$, on notera $\mathcal{G}^{s,d}(\mathcal{U}\times\Omega)$ l'espace des fonctions $u \in C^\infty(\mathcal{U}\times\Omega)$ telle que : $\exists C > 0$; $\forall \delta \in \mathbb{N}^q$, $\forall \beta \in \mathbb{N}^p$, $\forall x \in \mathcal{U}$,

$$\sup_{y\in\Omega} |D_x^\beta D_y^\delta u(x,y)| \leq C^{|\beta|+|\delta|+1}\beta!^s\delta!^d \tag{3}$$

Pour $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ des voisinages ouverts de $\mathbb{R}^r$ et s, d et $\bar{s} \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{G}^{s,d,\bar{s},\bar{s}}(\mathcal{U}\times\Omega\times\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2)$ désigne l'ensemble des fonctions $f \in C^\infty(\mathcal{U}\times\Omega\times\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2)$ telles que:
$\exists C \geq 0$; $\forall \gamma \in \mathbb{N}^p$, $\forall \beta \in \mathbb{N}^q$, $\forall \epsilon$, $\delta \in \mathbb{N}^r$, $\forall (x,z,\tau) \in \mathcal{U}\times\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2$,

$$\sup_{y\in\Omega} |D_x^\gamma D_y^\beta D_z^\epsilon D_\tau^\delta f(x,y,z,\tau)| \leq C^{|\gamma|+|\beta|+|\epsilon|+|\delta|+1}\gamma!^s\beta!^d\epsilon!^{\bar{s}}\delta!^{\bar{s}} \tag{4}$$

En d'autres termes $\mathcal{G}^{s,d,s,s}(\mathcal{V}\times\Omega)$ est l'espace des fonctions de classe Gevrey d'indice s par rapport à x, d'indice d par rapport à y et d'indice $\bar{s}$ par rapport aux autres variables.

Théorème 2.1. *Pour tout $\bar{s} \leq s$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{G}^{s,d,\bar{s},\bar{s}}(\mathcal{U}\times\Omega\times\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2)$, le problème de Goursat* (1) *admet une solution de classe $\mathcal{G}^{s,d}(\mathcal{U}'\times\Omega)$ unique au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}_x^p$.*

Avant de démontrer ce théorème nous allons introduire de nouvelles algèbres de Banach qu'on construira à l'aide des algèbres $G_R^{0,d}$, définies dans [15] et utilisées dans [7], en nous inspirant de la construction des semi-normes de [12].

3. Résultats préliminaires

3.1. Les espaces $G_R^{0,d}(\Omega_R)$ [15]

Soient $\xi \in (\mathbb{R}_*^+)^p$, $\zeta \in (\mathbb{R}_*^+)^q$ et $R > 0$, on note

$$\Omega_R = \mathcal{U}_R \times \Omega = \Big\{x \in \mathbb{R}^p, \quad \xi\cdot|x| = \sum_{i=0}^p \xi_i|x_i| \leq R\Big\} \times \Omega$$

et on pose $\varphi_R(t) = K^{-1}\theta\Big(\dfrac{t}{R}\Big)$, où $\theta(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{(n+1)^2}$ est la fonction de Lax [10] et K une constante positive pour laquelle on a $\theta^2 \ll K\theta$ au sens des séries majorantes.

DÉFINITION 3.1. On note $G_R^{0,d}(\Omega_R)$ l'espace des fonctions $u \in C^{0,\infty}(\Omega_R)$ telles que pour une constante $C > 0$,

$$\forall \delta \in \mathbb{N}^q, \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad \sup_{y\in\Omega} |D_y^\delta u(x,y)| \leq C\zeta^\delta|\delta|!^{d-1}D^{|\delta|}\varphi_R(\xi\cdot|x|). \tag{5}$$

Si on prend $||u||_0$ la borne inférieure des constantes $C > 0$ vérifiant (5), alors $G_R^{0,d}(\Omega_R)$ muni de la norme $||.|| = ||.||_0$ est une algèbre de Banach et on a les propriétés suivantes.

Proposition 3.1 ([7], [15]).

•*Pour tout* $\zeta \in (\mathbb{R}_+^*)^q$ *et tout* $u \in G^{0,d}(\Omega_R)$, *il existe* $R_0 > 0$ *telle que:*

$$\forall R' \in]0, R_0], \forall \xi \in (\mathbb{R}_+^*)^p, \quad u \in G_{R'}^{0,d}(\Omega_{R'}).$$

•*Pour tout* $0 < R' < R$, $G_R^{0,d}(\Omega_R) \subset G^{0,d}(\Omega_{R'})$.

Proposition 3.2 ([15]). *Pour tout* $(\gamma, \delta) \in (-\mathbb{N})^p \times \mathbb{N}^q$ *tel que* $|\gamma| + d|\delta| \leq 0$, *il existe une constante* $C_{\gamma,\delta} \geq 0$ *telle que l'opérateur* $D_x^\gamma D_y^\delta$ *est continu de* $G_R^{0,d}(\Omega_R)$ *dans* $G_R^{0,d}(\Omega_R)$ *et de norme inférieure ou égale à* $C_{\gamma,\delta}\xi^\gamma\zeta^\delta R^{-|\gamma|-|\delta|}$.

3.2. Les algèbres $\mathcal{G}_{R,\xi}^{s,d}(\Omega_R)$

Considérons le sous espace $\mathcal{G}_{R,\xi}^{s,d}(\Omega_R)$ des fonctions $u \in C^\infty(\Omega_R)$ telles que

$$\exists C \geq 0; \forall \beta \in \mathbb{N}^p, \quad D_x^\beta u \in G_R^{0,d}(\Omega_R) \quad et \quad ||D_x^\beta u||_0 \leq C^{|\beta|+1}|\beta|!^s$$

Donc $u \in \mathcal{G}_{R,\xi}^{s,d}(\Omega_R)$ signifie que : $\exists C \geq 0$; $\forall \beta \in \mathbb{N}^p$, $\forall \delta \in \mathbb{N}^q$, $\forall x \in \mathcal{U}_R$,

$$\sup_{y\in\Omega} |D_x^\beta D_y^\delta u(x,y)| \leq C^{|\beta|+1}|\beta|!^s\zeta^\delta|\delta|!^{d-1}D^{|\delta|}\varphi_R(\xi \cdot |x|) \tag{6}$$

On définit sur $\mathcal{G}_{R,\xi}^{s,d}(\Omega_R)$ l'application $|||.|||$ par

$$\forall u \in \mathcal{G}_{R,\xi}^{s,d}(\Omega_R), \quad |||u||| = \sum_{\beta\in\mathbb{N}^p} \frac{||D_x^\beta u||_0}{\beta!^{s+1}}$$

Proposition 3.3. *Muni de cette application,* $\mathcal{G}_{R,\xi}^{s,d}(\Omega_R)$ *est une algèbre de Banach.*

Preuve.

a./ Pour Montrer que $\mathcal{G}_{R,\xi}^{s,d}(\Omega_R)$ est une algèbre, on utilise la formule de Leibnitz et le fait que $\displaystyle\sum_{\mu\leq\beta}\binom{\mu}{\beta} \leq 2^{|\beta|}$.

b./ Pour montrer que l'application $|||.|||$ est une norme sur $\mathcal{G}^{s,d}_{R,\xi}(\Omega_R)$, on utilise la relation (6) et le fait que $||.||_0$ est une norme.

c./ Pour montrer que $|||.|||$ est une norme d'algèbre, on utilise le fait que $\beta! \geq (\beta-\mu)!\mu!$ et les formules du produit de séries.

d./ Montrons dans ce qui suit, que $\mathcal{G}^{s,d}_{R,\xi}(\Omega_R)$ muni de cette norme est complet.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{G}^{s,d}_{R,\xi}(\Omega_R)$, alors d'après la définition de $|||.|||$, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^p$ la suite $(D^\beta_x u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $G^{0,d}_R(\Omega_R)$ qui est complet, donc pour tout $\beta \in (\mathbb{N}^p)^*$, il existe $u_\beta \in G^{0,d}_R(\Omega_R)$ telle que:

$$\lim_{n\to\infty} D^\beta_x u_n = u_\beta \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = v \quad \text{dans} \quad G^{0,d}_R(\Omega_R)$$

Pour terminer la preuve de la proposition 3.3, on démontre les lemmes qui vont suivre.

Lemme 3.1. *Pour tout $\beta \in \mathbb{N}^p$, $D^\beta_x v = u_\beta$.*

Preuve. D'après la proposition 3.2, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^p$ l'opérateur $D^{-\beta}_x$ est continu de $G^{0,d}_R(\Omega_R)$ dans $G^{0,d}_R(\Omega_R)$, donc

$$\lim_{n\to\infty} D^{-\beta}_x D^\beta_x u_n = D^{-\beta}_x(u_\beta) \quad \text{dans} \quad G^{0,d}_R(\Omega_R)$$

Comme

$$D^{-\beta}_x \left(D^\beta_x u_n(x,y)\right) = u_n(x,y) - \sum_{|\mu|<|\beta|} C_\mu(y) x^\mu D^{\beta-\mu}_x u_n(0,y)$$

et $\lim_{n\to\infty} D^\beta_x u_n = u_\beta$ dans $G^{0,d}_R(\Omega_R)$, de la définition de la norme $||.||_0$ on déduit que:

$$\forall\ \mu, \quad \lim_{n\longrightarrow 0} C_\mu x^\mu D^{\beta-\mu}_x u_n(0,y) = C_\mu x^\mu u_{\beta-\mu}(0,y) \quad \text{dans} \quad G^{0,d}_R(\Omega_R)$$

par suite

$$\lim_{n\to\infty} u_n = D^{-\beta}_x u_\beta + \sum_{|\mu|<|\beta|} C_\mu x^\mu u_{\beta-\mu}(0,y)$$

et comme $\lim_{n\to\infty} u_n = v$ dans $G^{0,d}_R(\Omega_R)$, de l'unicité de la limite on obtient

$$v = D^{-\beta}_x u_\beta + \sum_{|\mu|<|\beta|} C_\mu x^\mu u_{\beta-\mu}(0,y)$$

En appliquant l'opérateur D_x^β, sachant que $D_x^\beta x^\mu = 0$ pour tout $|\mu| < |\beta|$, on obtient

$$D_x^\beta v = u_\beta$$

ce qui achève la preuve du lemme 3.1. $\square$

Lemme 3.2. $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = v$ *dans* $\mathcal{G}_{R,\xi}^{s,d}(\Omega_R)$.

Preuve. $(u_n)_n$ étant une suite de Cauchy dans $\mathcal{G}_{R,\xi}^{s,d}(\Omega_R)$, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N};\ \forall n,\ n' \geq N_\varepsilon, \quad |||u_n - u_{n'}||| \leq \varepsilon$$

et comme pour tout $\beta \in \mathbb{N}^p$ $\lim_{n \longrightarrow +\infty} D_x^\beta u_n = D_x^\beta v = u_\beta$ dans $G_R^{0,d}(\Omega_R)$, alors:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall \beta \in \mathbb{N}^p,\ \exists N_{\beta,\varepsilon} \geq N_\varepsilon;\ \forall n \geq N_{\beta,\varepsilon}, \quad \|D_x^\beta u_n - D_x^\beta v\|_0 \leq \varepsilon$$

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ et $n \geq N_\varepsilon$,

$$\begin{aligned}
|||u_n - v||| &= \sum_{\beta \in \mathbb{N}^p} \frac{\|D_x^\beta u_n - D_x^\beta v\|_0}{\beta!^{s+1}} \\
&= \sum_{\beta \in \mathbb{N}^p} \frac{\|D_x^\beta u_n - D_x^\beta u_{N_{\beta,\varepsilon}} + D_x^\beta u_{N_{\beta,\varepsilon}} - D_x^\beta v\|_0}{\beta!^{s+1}} \\
&\leq \sum_{\beta \in \mathbb{N}^p} \frac{\|D_x^\beta u_n - D_x^\beta u_{N_{\beta,\varepsilon}}\|_0}{\beta!^{s+1}} + \frac{\|D_x^\beta u_{N_{\beta,\varepsilon}} - D_x^\beta v\|_0}{\beta!^{s+1}} \\
&\leq 2 \sum_{\beta \in \mathbb{N}^p} \frac{\varepsilon}{\beta!^{s+1}} = 2\varepsilon \sum_{\beta \in \mathbb{N}^p} \frac{1}{\beta!^{s+1}}
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du lemme 3.2 et de la même celle de la proposition 3.3. $\square$

3.3. Relations entre les espaces $\mathcal{G}^{s,d}(\Omega_R)$ et $\mathcal{G}_{R,\xi}^{s,d}(\Omega_R)$

Lemme 3.3. *Pour tout* $\zeta \in (\mathbb{R}_+^*)^q$ *et tout* $u \in \mathcal{G}^{s,d}(\Omega_R)$, *il existe* $R_0 > 0$ *tel que*

$$0 < R' < R_0 \Longrightarrow u \in \mathcal{G}_{R',\xi}^{s,d}(\Omega_{R'}), \quad \forall \xi \in (\mathbb{R}_+^*)^p.$$

Preuve. Soit $u \in \mathcal{G}^{s,d}(\Omega_R)$, donc: $\exists C \geq 0$; $\forall \beta \in \mathbb{N}^p$, $\forall \delta \in \mathbb{N}^q$, $\forall x \in \mathcal{U}_R$,

$$\sup_{y \in \Omega} |D_x^\beta D_y^\delta u(x,y)| \leq C^{|\beta|+|\delta|+1} \beta!^s |\delta|!^d$$

En posant $C_0 = (C + e^2)$ et en remarquant que

$$(C_0)^{|\delta|+1}|\delta|!^d \geq \frac{(C_0)^{|\delta|+1}|\delta|!^d}{D^{|\delta|}\varphi_R(\xi \cdot |x|)}\Big(\frac{1}{K}\Big(\frac{1}{R}\Big)^{|\delta|}\frac{|\delta|!}{(1+|\delta|)^2}\Big)$$

et

$$(C_0)^{|\delta|+1} \geq (1+|\delta|)^2$$

on trouve

$$\frac{(C_0)^{|\delta|+1}|\delta|!^d}{D^{|\delta|}\varphi_R(\xi \cdot |x|)} \leq (C_0^2 R)^{|\delta|}(C_0^2 K)|\delta|!^{d-1}$$

et pour R' assez petit, pour que $C^2 R' \leq \inf_{1\leq j\leq q} \zeta_j$, pour tout $\xi \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ on a

$$\forall x \in \mathcal{U}_{R'}, \quad \sup_{y\in\Omega} |D_x^\beta D_y^\delta u(x,y)| \leq C_0^{|\beta|}\beta!^s|\delta|!^{d-1}\zeta^\delta(C_0^2 K)D^{|\delta|}\varphi_{R'}(\xi \cdot |x|)$$

d'où on déduit que: $\exists C \geq 0; \forall \beta \in \mathbb{N}^p$, $\forall \delta \in \mathbb{N}^q$, $\forall x \in \mathcal{U}_R$,

$$\sup_{y\in\Omega} |D_x^\beta D_y^\delta u(x,y)| \leq C^{|\beta|+1}\beta!^s|\delta|!^{d-1}\zeta^\delta D^{|\delta|}\varphi_{R'}(\xi \cdot |x|)$$

ce qui implique, d'aprés (5), que $D_x^\beta u \in G_R^{0,d}(\Omega_{R'})$ pour tout $\beta \in \mathbb{N}^p$ et que $\|D_x^\beta u\|_0 \leq C^{|\beta|}\beta!^s$, donc $u \in \mathcal{G}_{R',\xi}^{s,d}(\Omega_{R'})$. □

Lemme 3.4. *Pour* $0 < R' < R$ *on a :*

$$\mathcal{G}_{R,\xi}^{s,d}(\Omega_R) \subset \mathcal{G}^{s,d}(\Omega_{R'})$$

Preuve. Soit $u \in \mathcal{G}_{R,\xi}^{s,d}(\Omega_R)$, d'aprés (6) on a: $\exists C \geq 0$; $\forall \beta \in \mathbb{N}^p$, $\forall \delta \in \mathbb{N}^q$,

$$\forall x \in \mathcal{U}_R, \quad \sup_{y\in\Omega} |D_x^\beta D_y^\delta u(x,y)| \leq C^{|\beta|+1}\beta!^s\zeta^\delta|\delta|!^{d-1}D^{|\delta|}\varphi_R(\xi \cdot |x|)$$

La fonction φ_R étant analytique sur $]-R, R[$, alors pour tout R' tel que $0 < R' < R$, il existe $C \geq 0$ telle que

$$\forall |t| < R', \quad |D^k\varphi_R(t)| \leq C^{k+1}k!$$

par suite

$$\forall x \in \mathcal{U}_R, \quad \sup_{y\in\Omega} |D_y^\delta u(x,y)| \leq C^{|\delta|+1}|\delta|!^d$$

d'où le lemme. □

4. Preuve du Théorème 2.1

En faisant le changement d'inconnue $v = D^\alpha u$, sachant que $D_{x_i}^{-1}u(x,y)_{|x_i} = 0$ $= 0$, le problème (1) est équivalent à

$$u(x,y) = f(x,y,D^A u(x,y), \int_{\Omega} |D^A u(x,y)|^2 dy) \tag{7}$$

où A est une partie finie de l'ensemble

$$\{(\gamma,\delta) \in (-\mathbb{N})^p \times \mathbb{N}^q; \quad |\gamma| + d|\delta| \leq 0, \quad et\ \gamma \neq 0\}$$

Le developpement de Taylor d'ordre un nous donne

$$f(x,y,z,\tau) = f(x,y,0,0) + \sum_{\sigma\in B} z_\sigma F_\sigma(x,y,z,\tau) + \sum_{\sigma\in B} \tau_\sigma G_\sigma(x,y,z,\tau) \tag{8}$$

et

$$\begin{aligned} f(x,y,z,\tau) &= f(x,y,z',\tau') + \sum_{\sigma\in B}(z_\sigma - z'_\sigma)\bar{F}_\sigma(x,y,z,z',\tau,\tau') \\ &\quad + \sum_{\sigma\in B}(\tau_\sigma - \tau'_\sigma)\bar{G}_\sigma(x,y,z,z',\tau,\tau') \end{aligned} \tag{9}$$

où les fonctions F_σ, G_σ, $\bar{F}_\sigma$ et $\bar{G}_\sigma$ sont de classe Gevrey d'indice s par rapport à x, d'indice d par rapport à $y \in \Omega$ et d'indice $\bar{s}$ par rapport aux autres variables au voisinage de l'origine.

Proposition 4.1 ([6] p.138, [12] p.136, [13] p.146). *La composée de deux fonctions de classe Gevrey d'indice s est une fonction de classe Gevrey d'indice s.*

Corollaire 4.1. *Pour tout $a > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toutes fonctions u et u' dans la boule $\mathcal{B}(0,a) \subset \mathcal{G}^{s,d}_{R,\xi}(\Omega_R)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^p$ et pour tout $(x,y) \in \Omega_R$, on a les quatres inégalités suivantes:*

$$\left| D_x^\alpha \left[F_\sigma\Big(x,y,D^A u(x,y), \int_\Omega |D^A u(x,y)|^2 dy\Big)\right]\right| \leq C^{|\alpha|+1}\alpha!^s$$

$$\left| D_x^\alpha \left[G_\sigma\Big(x,y,D^A u(x,y), \int_\Omega |D^A u(x,y)|^2 dy\Big)\right]\right| \leq C^{|\alpha|+1}\alpha!^s$$

$$\left| D_x^\alpha \left[\bar{F}_\sigma\Big(x,y,D^A u(x,y), D^A u'(x,y), \int_\Omega |D^A u(x,y)|^2 dy, \int_\Omega |D^A u'(x,y)|^2 dy\Big)\right]\right|$$

$$\leq C^{|\alpha|+1}\alpha!^s$$

$$\left|D_x^\alpha\left[\bar{G}_\sigma\left(x,y,D^Au(x,y),D^Au'(x,y),\int_\Omega |D^Au(x,y)|^2dy,\int_\Omega |D^Au'(x,y)|^2dy\right)\right]\right|$$

$$\leq C^{|\alpha|+1}\alpha!^s$$

Preuve. $f(x,y,z,\tau)$ étant de classe Gevrey d'indice $\bar{s} \leq s$, les inégalités de ce corollaire sont une conséquence directe de la proposition 4.1, et l'indépendance de la constante C par rapport aux fonctions u et u' provient du fait que (voir [2]) la dérivée $D_x^\alpha[f\left(x,v(x)\right)]$ de la fonction composée $g(x) = f\left(x,v(x)\right)$ est une combinaison linéaire à coefficients constants par rapport à f et v de termes :

$$g_{\beta,\gamma,\lambda}(x) = \left[D_x^\beta D_y^\gamma f(x,y)\right]_{y=v(x)} \cdot \prod_{k,\rho} D_x^{\lambda(k,\rho)} v_k(x)$$

où k parcourt l'ensemble $\{1,\ldots,r\}$, pour lesquelles $\gamma_k > 0$, ρ parcourt l'ensemble des valeurs $1,\ldots,\gamma_k$, $\lambda(k,\rho)$ est le multi-indice $(\lambda_1(k,\rho),\ldots,\lambda_r(k,\rho))$ vérifiant la relation

$$\beta + \sum_{k,\rho} \lambda(k,\rho) = \alpha.$$

Tenant compte du fait que les dérivées $D_x^{\lambda(k,\rho)} v_k(x)$ sont majorées en norme par une fonction de a, on trouve le résultat. $\square$

REMARQUE 4.1. Il est claire que les normes de ces fonctions dans $\mathbf{G}_R^{0,d}(\Omega_R)$ sont inférieures ou égales aux mêmes constantes respectives.

Proposition 4.2. *Pour tout $(\gamma,\delta) \in (-\mathbb{N})^p \times \mathbb{N}^q$ tel que $|\gamma| + d|\delta| \leq 0$, il existe une constante $C_{\gamma,\delta} \geq 0$ telle que :*

$$D_x^\gamma D_y^\delta : \mathcal{G}_{R,\xi}^{s,d}(\Omega_R) \longrightarrow \mathcal{G}_{R,\xi}^{s,d}(\Omega_R)$$

soit linéaire continue et de norme inférieure ou égale à $C_{\gamma,\delta}\xi^\gamma\zeta^\delta R^{-|\gamma|-|\delta|}$.

(C'est une conséquence de la proposition 3.2.)

Posons

$$\mathcal{L}u = f\left(x,y,D^Au(x,y),\int_\Omega |D^Au(x,y)|^2dy\right)$$

Il est alors claire que la recherche des solutions de (1) revient à la recherche des points fixes de l'application $\mathcal{L}$, ce qui nous amène à essayer d'établir que l'application $\mathcal{L}$ est une contraction.

Proposition 4.3. *Pour toute fonction* $f \in \mathcal{G}^{s,d,\bar{s},\bar{s}}(\mathcal{U} \times \Omega \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2)$ *et pour tout* $\zeta \in (R_+^*)^q$ *fixé, il existe* $R_0 > 0$ *et* $a_0 > 0$ *tels que:* $\forall\ R \in]0, R_0[,\ \forall a > a_0,\ \exists \xi_a \in (\mathbb{R}_+^*)^p;\ \ \forall \xi \geq \xi_a,$

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}(0,a)) \subset \mathcal{B}(0,a) \subset \mathcal{G}^{s,d}_{R,\xi}(\Omega_R)$$

et

$$\exists C \in]0,1[,\ \forall u, u' \in \mathcal{B}(0,a), \quad |||\mathcal{L}u - \mathcal{L}u'||| \leq C|||u - u'|||$$

Preuve. [1] Soient $\zeta \in (\mathbb{R}_+^*)^q$ et $R > 0$ tels que $\mathcal{U}_R \subset \mathcal{U}$ et soient $a > 0$ et $u \in \mathcal{B}(0,a) \subset \mathcal{G}^{s,d}_{R,\xi}(\Omega_R)$. Pour tout $\sigma = (\gamma, \delta) \in A$ on pose $z_\sigma = D_x^\gamma D_y^\delta u$ et $\tau_\sigma = \displaystyle\int_\Omega |D_x^\gamma D_y^\delta u(x,y)|^2 dy.$
En utilisant la proposition 4.2 on obtient

$$||z_\sigma||_0 \leq \varepsilon(\xi)||u||_0$$

$$||\tau_\sigma||_0 \leq \varepsilon(\xi)||u||_0^2$$

et pour tout $\beta \in \mathbb{N}^p$ on a:

$$||D_x^\beta z_\sigma||_0 \leq \varepsilon(\xi)||D_x^\beta u||_0 \tag{10}$$

Par ailleurs, en utilisant la formule de Leibnitz on obtient

$$D_x^\beta \tau_\sigma = \sum_{\mu \leq \beta} \binom{\mu}{\beta} \int_\Omega (D_x^{\gamma+\mu} D_y^\delta u(x,y))(D_x^{\beta-\mu+\gamma} D_y^\delta u(x,y))dy$$

et comme $||.||_0$ est une norme d'algèbre, à l'aide de la proposition 4.2 on obtient aussi

$$||D_x^\beta \tau_\sigma||_0 \leq \varepsilon(\xi) \sum_{\mu \leq \beta} \binom{\mu}{\beta} ||D_x^\mu u||_0 \ ||D_x^{\beta-\mu} u||_0 \tag{11}$$

Majorons dans ce qui suit la norme de $\mathcal{L}u$.

[1] Toute fonction de ξ tendant vers 0 quand ξ tend vers l'infini sera notée $\varepsilon(\xi)$.

De (7) on a :

$$
\begin{aligned}
|||\mathcal{L}u||| \quad \leq \quad & |||f(x,y,0,0)||| \\
& + \Big|\Big|\Big| \sum_{\sigma \in A} z_\sigma F_\sigma(x,y,D_x^\gamma D_y^\delta u(x,y), \int_\Omega |D_x^\gamma D_y^\delta u(x,y)|^2 dy) \Big|\Big|\Big| \\
& + \Big|\Big|\Big| \sum_{\sigma \in A} \tau_\sigma G_\sigma(x,y,D_x^\gamma D_y^\delta u(x,y), \int_\Omega |D_x^\gamma D_y^\delta u(x,y)|^2 dy) \Big|\Big|\Big|
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
|||\mathcal{L}u||| \quad \leq & \sum_{\beta \in \mathbb{N}^p} \frac{\left|\left|D_x^\beta f(x,y,0,0)\right|\right|_0}{\beta!^{s+1}} \\
& + \sum_{\sigma \in A} \sum_{\beta \in \mathbb{N}^p} \frac{\left|\left| \sum_{\mu \leq \beta} \binom{\mu}{\beta} (D_x^\mu z_\sigma)\Big(D_x^{\beta-\mu} F_\sigma(x,y,D^B u, \int_\Omega |D^A u(x,y)|^2)\Big) \right|\right|_0}{\beta!^{s+1}} \\
& + \sum_{\sigma \in A} \sum_{\beta \in \mathbb{N}^p} \frac{\left|\left| \sum_{\mu \leq \beta} \binom{\mu}{\beta} (D_x^\mu \tau_\sigma)\Big(D_x^{\beta-\mu} G_\sigma(x,y,D^B u, \int_\Omega |D^A u(x,y)|^2)\Big) \right|\right|_0}{\beta!^{s+1}}
\end{aligned}
$$

Du corollaire 4.1 et de sa remarque on déduit que:

$$
\begin{aligned}
|||\mathcal{L}u||| \quad \leq \quad & \sum_{\beta \in \mathbb{N}^p} \frac{C^{|\beta|+1} \beta!^s}{\beta!^{s+1}} \\
& + \textstyle\sum_{\sigma \in A} \sum_{\beta \in \mathbb{N}^p} \sum_{\mu \leq \beta} \frac{\beta!}{\mu!(\beta-\mu)!} \frac{||D_x^\mu z_\sigma||_0 C'^{|\beta-\mu|+1} (\beta-\mu)!^s}{\beta!^{s+1}} \\
& + \sum_{\sigma \in A} \sum_{\beta \in \mathbb{N}^p} \sum_{\mu \leq \beta} \frac{\beta!}{\mu!(\beta-\mu)!} \frac{||D_x^\mu \tau_\sigma||_0 C'^{|\beta-\mu|+1} (\beta-\mu)!^s}{\beta!^{s+1}}
\end{aligned}
$$

et comme $\displaystyle\sum_{\beta \in \mathbb{N}^p} \frac{C^{|\beta|+1} \beta!^s}{\beta!^{s+1}} = Ce^{pC}$ et $\beta! \geq \mu!(\beta-\mu)!$ pour tout $\mu \leq \beta$, à l'aide des majorations (10) et (11) on trouve

$$|||\mathcal{L}u||| \leq Ce^{pC} + \sum_{\sigma\in A} C_{\gamma,\delta}\xi^{\gamma}\zeta^{\delta}R^{-|\gamma|-|\delta|} \sum_{\beta\in\mathbb{N}^p}\sum_{\mu\leq\beta} \frac{||D_x^{\mu}u||_0}{\mu!^{s+1}}\frac{C'^{|\beta-\mu|+1}}{(\beta-\mu)!}$$

$$+\sum_{\sigma\in A}\sum_{\beta\in\mathbb{N}^p}\left((C_{\gamma,\delta}\xi^{\gamma}\zeta^{\delta}R^{-|\gamma|-|\delta|})^2\mu(\Omega)\sum_{\mu\leq\beta}\frac{\sum_{\eta\leq\mu}\binom{\eta}{\mu}||D_x^{\mu}u||_0\;||D_x^{\beta-\mu}u||_0}{\mu!^{s+1}}\frac{C'^{|\beta-\mu|+1}}{(\beta-\mu)!}\right)$$

donc

$$\begin{aligned}|||\mathcal{L}u||| \quad &\leq \quad Ce^{pC} + \sum_{\sigma\in A}\varepsilon(\xi)\sum_{\beta\in\mathbb{N}^p}\sum_{\mu\leq\beta}\frac{||D_x^{\mu}u||_0}{\mu!^{s+1}}\frac{C'^{|\beta-\mu|+1}}{(\beta-\mu)!}\\ &\quad +\sum_{\sigma\in A}\varepsilon(\xi)\sum_{\beta\in\mathbb{N}^p}\sum_{\eta\leq\mu\leq\beta}\frac{||D_x^{\eta}u||_0}{\eta!^{s+1}}\frac{||D_x^{\mu-\eta}u||_0}{(\mu-\eta)!^{s+1}}\frac{C'^{|\beta-\mu|+1}}{(\beta-\mu)!}\end{aligned}$$

et en utilisant l'expression du produit des séries on obtient

$$|||\mathcal{L}u||| \leq Ce^{pC} + C'e^{pC'}\sum_{\sigma\in A}\varepsilon(\xi)|||u||| + C'e^{pC'}\sum_{\sigma\in A}\varepsilon(\xi)|||u|||^2$$

Par suite $|||\mathcal{L}u||| \leq a$ pourvu que:

$$Ce^{pC} + C'e^{pC'}\sum_{\sigma\in B}\varepsilon(\xi)a + C'e^{pC'}\sum_{\sigma\in B}\varepsilon(\xi)a^2 \leq a$$

ce qui est vrai pour $a > Ce^{pC}$ et ξ assez grand.

Montrons la deuxième partie de la proposition 4.3.
Pour u et u' dans $\mathcal{B}(0,a)$, en utilisant (9), le corollaire 4.1 et les inégalités (10) et (11) on obtient

$$|||\mathcal{L}u-\mathcal{L}u'||| \leq C'e^{pC'}\sum_{\sigma\in A}\varepsilon(\xi)\sum_{\beta\in\mathbb{N}^p}\frac{||D_x^{\beta}(u-u')||_0}{\beta!^{s+1}}$$

$$+C'e^{pC'}\mu(\Omega)\sum_{\sigma\in A}\varepsilon(\xi)\Big(\sum_{\beta\in\mathbb{N}^p}\frac{||D_x^{\beta}(u-u')||_0}{\beta!^{s+1}}\sum_{\beta\in\mathbb{N}^p}\frac{||D_x^{\beta}u||_0+||D_x^{\beta}u'||_0}{\beta!^{s+1}}\Big)$$

donc:

$$|||\mathcal{L}u-\mathcal{L}u'||| \leq C'e^{pC'}\left[\sum_{\sigma\in A}\varepsilon(\xi)|||(u-u')||| + \sum_{\sigma\in A}\varepsilon(\xi)|||(u-u')|||\big(|||u|||+|||u'|||\big)\right]$$

d'où on déduit que l'application $\mathcal{L}$ est une contraction stricte dans la boule fermée $\mathcal{B}(0,a)$ dès que :

$$CardA.C'e^{pC'}\varepsilon(\xi)(1+2a) < 1$$

ce qui achève la démonstration de la deuxième partie de la proposition 4.3 . $\square$

Suite de la preuve du théorème 2.1.
Le théorème du point fixe assure l'existence de la solution de l'équation (7) dans $\mathcal{G}^{s,d}_{R,\xi}(\Omega_R)$, donc dans $\mathcal{G}^{s,d}(\Omega_{R'})$ d'après le lemme 3.4.
Pour l'unicité dans $\mathcal{G}^{s,d}(\Omega_R)$, si on suppose qu'on a deux solutions u et $u' \in \mathcal{G}^{s,d}(\Omega_R)$ alors d'après le lemme 3.3, il existe R_0 tel que pour $R < R_0$; u et u' sont dans $\mathcal{G}^{s,d}_{R,\xi}(\Omega_R)$ et on choisit R suffisament petit de telle sorte que u et u' soient deux points fixes de l'application contractante $\mathcal{L}$ dans une boule fermée de $\mathcal{G}^{s,d}_{R,\xi}(\Omega_R)$, donc $u \equiv u'$. $\square$

References

[1] G. F. Carrier: *On the non linear vibration problem of the elastic string,* Quart. Appl. Math. **3** (1945), 157-165.

[2] P. Dionne: *Sur les problèmes de Cauchy hyperboliques bien posés,* J. Analyse Math. **10** (1962), 1-90.

[3] P. Du chateau: *New proofs and Generalisations of theorems of existence and Uniqueness for the Goursat Problem,* Applicable Analysis, **2** (1972), 61-78.

[4] A. Friedman: *A new proof and generalisations of de Cauchy-Kowalevski theorem,* Trans. Amer. Math. Soc., **98** (1961), 1-20.

[5] C. L. Frota: *Non local solutions of a nonlinear hyperbolic partial differential equation,* Portugaliae Mathematica, **51** (1994), 455-473.

[6] M. Gevrey: *Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles,* Ann. Sci. école Norm. Sup. **35** (1917), 129-190.

[7] D. Gourdin, M. Mechab: *Problème de Goursat non linéaire dans les espaces de Gevrey pour les équations de Kirchhoff généralisées*, J. Math. Pures Appl., **75** (1996), 569-593.

[8] K. Kajitani: *Non-Linear Leray-Volevich Systems And Gevrey Class,* Comm. in Partial Differential Equations, **6** (1981), 1137-1162.

[9] G. Kirchhoff: Vorlesungen Über Mechanik, 1883 Leipzig, Teubner.

[10] P. D. Lax: *Non linear Hyperbolic equations,* Comm. Pure Appl. Math., **6** (1953), 231-258.

[11] N. A. Lednev: *A New Method for Solving Partial Differential Equations,* Mat. Sbornik, T. 22, **64** (1948), 205-266.

[12] J. Leray, Y. Ohya: *Systèmes linéaires hyperboliques non stricts,* Colloque de Liège, CBRM, (1964), 105-144.

[13] J. Leray, L. Waelbroek: *Norme formelle d'une fonction composée (Préliminaire à l'étude des systèmes non linéaires, hyperboliques non stricts),* Colloque de Liège, CBRM (1964), 145-152.

[14] J. L. Lions: *On some questions in boundary value problem of mathematical physics,* in Contemporary Developments in Cont. Mech. and Partial Differential Equations, North Holland, Math. Studies, (L. A. Medeiros G. M. de la Penha edts) (1978), 284-346.

[15] C. Wagschal: *Le problème de Goursat non linéaire,* J. Math. Pures et Appl. **58** (1979), 309-337.

GUERBATI K. & MECHAB M.
Université Djilali Liabès
BP 89, 22000 Sidi Bel Abbès (ALGERIE)