



Title	粘弾性流体の非定常流動に関する研究
Author(s)	山本, 剛宏
Citation	大阪大学, 1999, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.11501/3161902
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

粘弾性流体の非定常流動に関する研究

平成 11 年 6 月

山 本 剛 宏

粘弾性流体の非定常流動に関する研究

平成 11 年 6 月

山 本 剛 宏

目次

第1章 序論	1
1.1 研究の背景	1
1.2 粘弾性流体の非定常流動	2
1.3 研究の目的と論文構成	3
第2章 理論	5
2.1 粘弾性流体の流動解析と構成方程式	5
2.1.1 一般化ニュートン流体	5
2.1.2 線形粘弾性モデル	6
2.1.3 非線形粘弾性モデル	7
2.1.4 その他	13
2.2 レオノフモデル	14
2.3 基礎方程式	20
第3章 数値計算スキーム	22
3.1 離散式の導出	22
3.1.1 空間に関する離散化	22
3.1.2 時間に関する離散化	25
3.2 スタートアップ流れの数値計算の手順	27
第4章 単純な流れ場における粘弾性流体の非定常流動挙動の数値解析	28
4.1 緒言	28
4.2 単純せん断流れ	28
4.2.1 基礎方程式	28
4.2.2 計算結果と考察	30
4.3 一軸伸長流れ	32
4.3.1 基礎方程式	32

4.3.2	計算結果と考察	34
4.4	平行平板間のスタートアップ流れ	37
4.4.1	基礎方程式	37
4.4.2	計算結果	40
4.5	結 言	43
第 5 章	急縮小流路における粘弾性流体の非定常流れの数値解析	46
5.1	緒 言	46
5.2	解析に用いる諸量について	47
5.2.1	物理量	47
5.2.2	無次元量の定義	48
5.3	試料流体	49
5.4	計算条件	50
5.5	計算結果と考察	51
5.5.1	速度場	51
5.5.2	応力場	58
5.6	結 言	69
第 6 章	急拡大流路における粘弾性流体の非定常流れの数値解析	72
6.1	緒 言	72
6.2	計算条件	72
6.3	計算結果と考察	73
6.3.1	速度場	73
6.3.2	応力場	82
6.4	結 言	89
第 7 章	急縮小急拡大流路における粘弾性流体の非定常流れの数値解析	90
7.1	緒 言	90
7.2	計算条件	91
7.3	計算結果と考察	92
7.3.1	ワイセンベルグ数の影響	92
7.3.2	スリット長の影響	103
7.4	結 言	124

第 8 章 急縮小流路における高分子水溶液のスタートアップ流れの実験	126
8.1 緒 言	126
8.2 実験装置および実験方法	126
8.3 試料流体	129
8.4 実験結果および考察	130
8.5 計算結果および実験結果との比較	140
8.6 結 言	143
第 9 章 結 論	144
参考文献	146
関連発表論文	155
謝 辞	157
付 録 A 有限要素式の導出	158
A.1 内挿関数	158
A.2 具体的な式展開	159

第1章 序 論

1.1 研究の背景

現在、高分子材料は工業用材料として、広範囲の分野で使用されている。そして、化学合成技術の発達にともない、種々の機能をもった新素材の開発が続けられており、高分子材料の重要性はますます高まっている。

高分子材料を使用した工業製品の多くは、高分子成形加工 (polymer processing) によって製造される。高分子成形加工では、一般に高分子材料は成形機の中で流動状態にされ、流路内を流れ、変形を受けて最終形状へと成形される。高分子材料は流動下で、せん断や伸長あるいはそれらを組み合わせた変形を受ける。そして、このときの流体の流動挙動は製品の品質に大きな影響を及ぼす。したがって、製品の品質の向上やプロセスの効率化のためには、高分子液体の流動のメカニズムを知ることが重要となる。

ほとんどの高分子液体は、非ニュートン粘性と弾性的性質をもつ粘弾性流体である。粘弾性流体の流動挙動はニュートン流体に比べて複雑なものとなり、流体力学的見地からも興味深い現象が現れる⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾。粘弾性流体の流動挙動は、流体のレオロジー特性や流動条件によって大きく異なる。したがって、適切な成形条件の選択のためには、粘弾性流体の流動特性の解明が望まれる。近年では、高分子成形加工品の高精度化やプロセスの高速化が求められており、粘弾性流体の流動挙動の理解がより重要になっている。高分子材料を成形加工する際に使用される成形方法や成形機について、あるいは成形加工の際に現れる高分子液体の流れに関連する諸現象については、例えば Brydson⁽⁴⁾ や White⁽⁵⁾ の著書に述べられている。

射出成形や押出成形などの成形加工においては、粘弾性流体の非定常流れが問題となる。例えば、熱可塑性樹脂の射出成形の場合、ペレット状の樹脂を加熱して熔融状態にしたものに高圧をかけて、金型内に射出する。その後、保圧、冷却、固化のプロセスを経て、成形品ができる。金型内を充填するまでの間に、圧力や流速の急激な時間的変動が生じる。また、通常、成形に要するプロセス時間は流体のもつ緩和時間に比べて短いため、流れが定常になる前にプロセスが完了することも珍しくない。したがって、非定常な流れ場における粘弾性流体の挙動が、製品の品質に影響を及ぼすと予想できる。

さらに、高分子成形加工では流路の形状や断面積が変化するような流路（例えば縮小流路や拡大流路など）内の流れがしばしば現れるため、このような流れ場における粘弾性流体の流動挙動を知ることが重要となる。しかし、縮小流れや拡大流れでは、せん断流れと伸長流れが混在するために、粘弾性流体の流動挙動は複雑なものとなり、このような複雑な流れ場における粘弾性流体の非定常流動特性は十分には解明されていない。

したがって、複雑な流れ場における粘弾性流体の非定常流れのメカニズムの解明は、工業的にも重要な問題であるとともに、非ニュートン流体力学にとっても興味深い問題である。

1.2 粘弾性流体の非定常流動

粘弾性流体は緩和時間や記憶効果といった時間依存特性を有する。そのために、粘弾性流体の非定常流動挙動は非常に複雑であり、ニュートン流体との流動挙動の違いが顕著に現れる⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾。前述のように、粘弾性流体の非定常流れは工業的な応用面でも重要な問題であり、非ニュートン流体力学的にも興味深い問題である。

本研究では非定常流れとしてスタートアップ流れを取り上げ、粘弾性流体の非定常流動挙動の解析を行った。スタートアップ流れでは流速や応力のオーバーシュートといった粘弾性流体の特徴的な現象が現れる。また、射出成形などの成形加工の過程では、静止状態の流体を急激に流動させるような流れがしばしば現れるため、高分子成形加工との関連性からも、スタートアップ流れにおける粘弾性流体の非定常流動特性を調べることは意義深い。

ここで、これまでに行われている粘弾性流体の非定常流れに関する研究について、スタートアップ流れに関するものを中心に、簡単に述べる。粘弾性流体の非定常流動挙動に関する研究で最もよく扱われている流れは、粘弾性流体のレオロジー特性を評価するための測定器内の流れ (rheometric flow) である。このような研究では、主として単純せん断流れや一軸伸長流れのような単純な流れを対象としている。静止している流体に急にせん断をかけたり、伸長変形を加えたりするスタートアップ流れや振動流れ、流動停止後の応力緩和現象、などがよく調べられている。これらの流れを解析することによって、応力や粘度の成長関数や緩和時間などの流体のレオロジー特性を求めることができる。また、このような単純な流れ場における粘弾性流体の非定常流れの実験結果は、構成方程式の試験のためにも使用される。

高分子成形加工においてみられるような流れを考えた場合、流路内の流れの非定常流動挙動に興味がある。特に縮小流路や拡大流路、あるいはそれらを組み合わせたような流路

を流れるときの粘弾性流体の流動挙動を調べることが必要となる．このような流路中の流れはせん断流れと伸長流れが組み合わされた複雑な流れ場になっている．

縮小流路や拡大流路における粘弾性流体の流れは，成形機のダイ入口付近の流れや金型内の流れなどとの関連性が強く，これまでに多くの研究がなされている．しかし，定常流れを扱ったものに比べて，非定常流れに関する研究は少ない．

スタートアップ流れに関する研究に関しては，実験では，矩形管内の高分子融液のスタートアップ流れにおける流速や圧力の時間変化や複屈折の測定⁽⁶⁾，円管⁽⁷⁾や矩形管急縮小流路⁽⁸⁾における高分子水溶液のスタートアップ流れの流速測定などが行われている．非定常流れの数値計算は計算負荷が大きいため，数値計算による非定常流れの解析は定常流れに関するものに比べてあまり行われていない．特に，複雑な流れ場を対象としたものは少ない．粘弾性流体のスタートアップ流れの数値計算による研究では，円管内流れ⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾や平行平板間流れ⁽⁶⁾⁽¹¹⁾のような単純な流れについて，解析が行われている．最近，複雑な流れ場に関する計算も行われるようになり，例えば，円管急縮小急拡大流れ⁽¹²⁾におけるスタートアップ流れの研究などがある．

その他の非定常流れに関する研究としては，円管急縮小流路⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾，矩形管急縮小流路⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾，合流流路⁽¹⁸⁾において，流れが不安定流れに遷移する際にみられる流れ場の時間的変動に関する研究や，管内の脈動流⁽¹⁹⁾⁽²⁰⁾に関する研究などが行われている．

1.3 研究の目的と論文構成

本研究の目的は，粘弾性流体の非定常流動挙動の数値解析を行い，そのメカニズムを調べることである．高分子成形加工において現れる粘弾性流体の流れ現象を理解するためには，せん断流れや伸長流れが混在するような複雑な流れ場を考える必要がある．本研究では，そのような複雑な流れ場における粘弾性流体の非定常流動挙動のメカニズムを解明するための基礎的研究として，急縮小流路，急拡大流路，急縮小急拡大流路におけるスタートアップ流れの解析を行う．

本論文は全 9 章から構成される．本章以降の構成は次のようなものである．第 2 章で粘弾性流体の流動解析の理論について述べる．ここでは，粘弾性流体の流れの数値解析において，特に重要な役割をはたす構成方程式について，その発展の経緯と現在よく使用されている構成方程式の特徴などを述べる．そして，本研究で構成方程式に使用した，レオノフモデルの特徴について述べる．さらに，数値解析のための基礎方程式を示す．第 3 章では数値計算スキームについて述べる．本研究では有限要素法を用いて数値計算を行った．ここでは，基礎式の離散化の方法や，離散化によって得られた有限要素式を示す．さらに，

スタートアップ流れのモデル化の方法について述べる。第 4 章で単純な流れ場における粘弾性流体の非定常流動挙動の数値解析を行う。本研究では、単純せん断流れ、一軸伸長流れ、平行平板間流れのスタートアップ流れの数値計算を行った。これらの結果は、次章以降で行う複雑な流れ場における粘弾性流体の挙動の解析の際にも参考にする。第 5 章から第 7 章では、複雑な流れ場における粘弾性流体の非定常流れの数値解析を行う。章の順に、急縮小流れ、急拡大流れ、急縮小急拡大流れについて考察する。第 8 章では、粘弾性流体として高分子水溶液を用いて行ったスタートアップ流れの実験結果を示し、数値計算結果との比較を行う。最後に、第 9 章で、これらの結果をもとに本研究の結論を述べる。

第2章 理 論

2.1 粘弾性流体の流動解析と構成方程式

粘弾性流れに限らず，連続体力学に基づく流れの解析は，連続の式（質量の保存則），運動方程式（運動量の保存則），エネルギー式（エネルギーの保存則）などの保存則と構成方程式 (constitutive equation) からなる基礎方程式を，適当な初期条件と境界条件のもとで解くことによって行われる．

構成方程式は物質の変形，流動による幾何学的な変数と力学変数の関係を記述する式である．粘弾性流体を含む非ニュートン流動の理論的解析において，現象を連続体力学的に取り扱う際には，どのような構成方程式を使用するかは重要な問題である．

現在のところ，広範囲のせん断速度および伸長速度の領域にわたって，粘弾性流体のあらゆる挙動を定量的に表現できるような構成方程式は提案されていない．したがって，粘弾性流体の流動解析を行う際には，解析の目的に応じて適当な構成方程式を選択する．その構成方程式が，解析対象となる流れを支配すると予測される因子を記述できるかどうか，あるいは数値シミュレーションの際の計算コストなどが構成方程式の選択の基準となる．したがって，これまでに提案されている粘弾性流体の構成方程式の特徴を知ることが重要となる．

本節では，非ニュートン流体の構成方程式の発展の過程と現在よく使用されている構成方程式の特徴⁽²¹⁾⁽²²⁾⁽²³⁾について簡単に述べる．

2.1.1 一般化ニュートン流体

応力テンソル σ は，等方圧力 p に関する成分とそれ以外の成分とに分けて， $\sigma = -p\mathbf{I} + \tau$ のように書ける．このとき， τ は偏差応力テンソルと呼ばれる．ニュートン流体の構成方程式は，ニュートンの粘性則で，非圧縮性流体の場合には， τ は次式のように表される．

$$\tau = 2\eta\mathbf{D} \quad (2.1)$$

ここで， η は粘性係数， $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)$ はひずみ速度テンソル (rate of strain tensor) である．水や空気などの低分子流体は，ニュートンの粘性則にしたがうニュートン流体で

ある。

一方、非ニュートン流体に対してはこれまでに多くの構成方程式が提案されている。粘弾性流体などの非ニュートン流体が示す種々の特異な現象のなかで、化学産業の分野のエンジニアたちによって最も重要視された特性は、非ニュートン粘性であった。そこで、ニュートンの粘性則を修正し、粘性係数を変形速度テンソル $\mathbf{D}$ の関数となるような式で表すことによって、非ニュートン粘性を表現するモデルが提案された。この流体は一般化ニュートン流体 (generalized Newtonian fluid) と呼ばれ、次のような式で表される。

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta(I_{\mathbf{D}}, II_{\mathbf{D}}, III_{\mathbf{D}})\mathbf{D} \quad (2.2)$$

ここで、 $I_{\mathbf{D}}$, $II_{\mathbf{D}}$, $III_{\mathbf{D}}$ はそれぞれ $\mathbf{D}$ の第 1, 2, 3 不変量である。粘度 η は物質客観性の原理⁽²⁶⁾ から $\mathbf{D}$ の不変量の関数であることが要請される。非圧縮性流体の場合、 $I_{\mathbf{D}}$ は 0 であるから、 η は $II_{\mathbf{D}}$, $III_{\mathbf{D}}$ の関数になる。ただし、単純せん断流れにおいては $III_{\mathbf{D}} = 0$ となるために、せん断流れの支配的な流れ場では、 $III_{\mathbf{D}}$ の影響は $II_{\mathbf{D}}$ の影響に比べて小さいと考えて、 $II_{\mathbf{D}}$ のみの関数 $\eta(II_{\mathbf{D}})$ を用いることが多い。

一般化ニュートン流体による流動解析は、せん断流れが支配的な流れ場に関して、ある程度の成功がみられた。そして、後に述べる構成方程式に比べて式が単純であるために、計算負荷が少なくすむ。そのために、実際の高分子成形品のような複雑な形状の流路における流動解析では、現在でも使用されている。

しかし、一般化ニュートン流体の場合には、任意の点のある時刻における応力場は、その点の速度場が決まれば、過去の履歴に関係なく決定される。したがって、実際の高分子液体の流れにおいてみられる履歴の効果を記述することができない。さらに、流体の弾性的効果を表現できない。このことは、伸長流れが支配的な流れ場では特に問題となる。

2.1.2 線形粘弾性モデル

粘弾性流体の構成方程式の発展を、その歴史的流れにしたがって見ていくと、現在一般に使用されている非線形の構成方程式について述べる前に、線形粘弾性モデルについて触れておく必要がある。

線形粘弾性モデルは簡単な式でいくつかの粘弾性体の挙動を表現することができるため、粘弾性体の力学挙動の理解に役立つが、実用上の有用性は少ないと言える。しかし、線形粘弾性モデルは後述するように、いくつかの非線形粘弾性モデルの出発点にもなっているため、ここでその概要を簡単に述べておく。

Maxwell は粘弾性体の力学挙動を表現するために、弾性を表現するバネと、粘性を表現

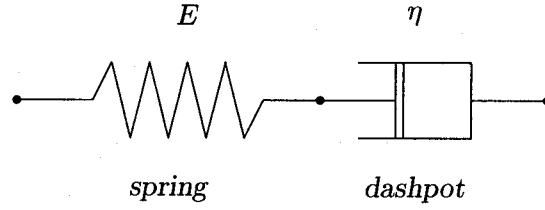


Fig.2.1: Mechanical model of the Maxwell model.

するダッシュポットを組み合わせた粘弾性体の力学モデル（図 2.1）を提案した．このモデルに働く応力を τ ，ひずみを ε とすると， τ と ε の関係は次式で表される．

$$\tau + \frac{\eta}{E} \frac{d\tau}{dt} = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.3)$$

ここで， η はニュートン流体の粘性係数， E はヤング率である．式 (2.3) は 1 次元のモデルであるが，これを 3 次元のモデルに一般化し，テンソル形式で表すと，

$$\tau + \lambda \frac{\partial \tau}{\partial t} = 2\eta \mathbf{D} \quad (2.4)$$

となる．ここで， λ は緩和時間， η は粘度である．この Maxwell モデルは積分形で表すこともでき，次式のようになる．

$$\tau(t) = \int_{-\infty}^t \frac{2\eta}{\lambda} \exp\left(-\frac{t-t'}{\lambda}\right) \mathbf{D}(t') dt' \quad (2.5)$$

Jeffreys モデルは，図 2.2 に示すような力学モデルに基づくモデルである．Maxwell モデルと同様に 3 次元のモデルに一般化したものは次式のようになる．

$$\tau + \lambda_1 \frac{\partial \tau}{\partial t} = 2\eta \left(\mathbf{D} + \lambda_2 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \quad (2.6)$$

ここで， λ_1 は緩和時間， λ_2 は遅延時間， η は粘度である．

これらのほかにも線形粘弾性モデルが提案されている．線形粘弾性体の力学挙動については他の文献⁽¹⁾⁽²⁴⁾⁽²⁵⁾を参照されたい．また，線形粘弾性モデルは物質客観性の原理を満たさないために，粘弾性流れの解析のための構成方程式としては不適當である．

2.1.3 非線形粘弾性モデル

ニュートン流体や一般化ニュートン流体のモデルでは，高分子流体の特性を十分に表現することが出来ないために，非線形粘弾性モデルが提案されるようになってきた．非線形

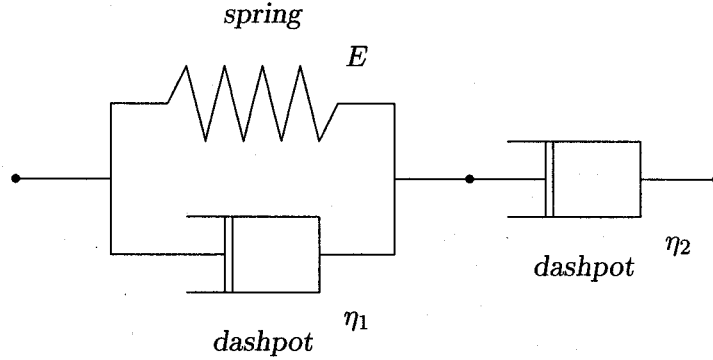


Fig.2.2: Mechanical model of the Jeffreys model.

粘弾性モデルの導出は主として, (a) Maxwell モデルの拡張, (b) 連続体理論からの導出, (c) 分子論に基づく方法⁽²⁷⁾ の 3 つの方法によって行われてきた.

ここで, 最近の粘弾性流体の流動解析でよく使用されている構成方程式について, その特徴について簡単に述べる. 微分型の構成方程式として, 上対流 Maxwell, Oldroyd-B, White-Metzner⁽²⁸⁾, Giesekus⁽²⁹⁾⁽³⁰⁾, Leonov⁽³¹⁾⁽³²⁾, Phan-Thien Tanner⁽³³⁾⁽³⁴⁾, Larson⁽³⁵⁾⁽³⁶⁾ の各モデル, 積分型の構成方程式として, Kaye-BKZ モデル⁽³⁷⁾⁽³⁸⁾ を取り上げた. 各モデルの名称の後の括弧内にモデルパラメータを示している.

(1) 上対流 Maxwell モデル (λ, η_0)

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = 2\eta_0 \mathbf{D} \quad (2.7)$$

λ : 緩和時間, η_0 : ゼロせん断粘度.

$[\overset{\nabla}{\cdot}]$ は上対流微分である. 任意の (反変) テンソル $\mathbf{T}$ の上対流微分は次式で定義される¹.

$$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} \equiv \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{T} - \nabla \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (2.8)$$

ここで, $\mathbf{v}$ は速度ベクトルである.

先に示した Maxwell モデル (2.4) は物質客観性の原理を満たさない. そこで, 物質客観性の原理を満たすように, 式 (2.4) の時間微分を上対流微分で置き換えたものが, 上対流 Maxwell (Upper Convected Maxwell; UCM) モデルである. UCM モデルの

¹成分表示すると次式のようになる. ここで, 総和規約を用いて, k について和をとる.

$$\overset{\nabla}{T}_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} + v_k \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} T_{kj} - \frac{\partial v_j}{\partial x_k} T_{ik}$$

定常せん断粘度と第 1 法線応力差係数は、せん断速度によらず一定値となり、それぞれ $\eta_0, 2\eta_0\lambda$ となる。また、定常一軸伸長粘度は伸長速度 $\dot{\epsilon} = \lambda/2$ で無限大となり、現実的ではない。

UCM モデルは積分形で表すことも可能で、次式のようになる。

$$\boldsymbol{\tau} = \int_{-\infty}^t \frac{\eta}{\lambda^2} \exp\left(-\frac{t-t'}{\lambda}\right) \mathbf{C}^{-1}(t') dt' \quad (2.9)$$

式 (2.9) は、Lodge の式⁽³⁹⁾とも呼ばれている。

(2) Oldroyd-B モデル ($\lambda_1, \lambda_2, \eta_0$)

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = 2\eta_0(\mathbf{D} + \lambda_2 \overset{\nabla}{\mathbf{D}}) \quad (2.10)$$

λ_1 : 緩和時間, λ_2 : 遅延時間, η_0 : ゼロせん断粘度。

Oldroyd-B モデルは先に示した Jeffreys モデル (2.6) の時間微分を、物質客観性の原理を満たす上対流微分で置き換えたものである。また、球を線形バネで結合したビーズ・スプリングモデル (bead-spring model) を考慮した分子論からも式 (2.10) と同じ式を導くことができる⁽²⁾。

Oldroyd-B モデルも UCM モデルと同様に、定常せん断粘度と第 1 法線応力差係数は、せん断速度によらず一定値をとり、それぞれ η_0 と $2\eta_0(\lambda_1 - \lambda_2)$ になる。定常一軸伸長粘度は伸長速度 $\dot{\epsilon} = \lambda/2$ で無限大となる。

Oldroyd-B モデルはせん断粘度のせん断速度依存性を示さないが、0 でない法線応力差をもつ、いわゆる Boger 流体⁽⁴⁰⁾の流れの数値解析のために使用される。Boger 流体は主に、非ニュートン粘性の影響と弾性的影響を分離して、流動現象の研究を行うために使用されている。

(3) White-Metzner モデル ($\lambda(I\mathbf{I}_D), \eta(I\mathbf{I}_D)$)

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda(I\mathbf{I}_D) \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = 2\eta(I\mathbf{I}_D)\mathbf{D} \quad (2.11)$$

λ : 緩和時間, η : 粘度。

UCM モデルのせん断粘度や第 1 法線応力差係数は、せん断速度によらず一定であった。しかし、実際の高分子液体の場合、それらはせん断速度依存性を示すものが多い。そこで、White-Metzner モデルでは UCM モデルの緩和時間と粘度を $\mathbf{D}$ の関数とす

ることによって、せん断速度依存性を取り入れた。 λ と η の関数形として種々のモデルが提案されている。

UCM モデル, Oldroyd-B モデル, White-Metsner モデルは、いずれも非線形の式であるが、 τ に関しては線形の形になっているために、準線形モデルとも呼ばれる。

(4) Giesekus モデル (α, λ, η)

$$\tau + \lambda \frac{\nabla}{\tau} + \alpha \frac{\lambda}{\eta} \tau \cdot \tau = 2\eta \mathbf{D} \quad (2.12)$$

α : 定数, λ : 緩和時間, η : 粘度。

Giesekus モデルは、分子をバネと球の組み合わせで表現する、ビーズ・スプリングモデルを用いた分子論的なアプローチから導かれたモデルである。球の抗力に等方性の抗力を考えた場合、分子論的な方法によっても UCM モデルが導かれる⁽²⁾。Giesekus モデルでは、高分子の配置に依存する移動度テンソルを導入することによって非等方抗力を取り入れた。式 (2.12) は UCM モデルに $\tau \cdot \tau$ を含む非線形項を加えた形になっている。

Giesekus モデルは実際の高分子液体のレオロジー特性をよく表し、近年の粘弾性流体の流れの数値シミュレーションにおいて最もよく使用されているモデルのひとつである。定常せん断粘度の shear-thinning 性や第 1 法線応力差がせん断速度とともに増大する現象を表現できる。第 1 法線応力差係数は shear-thinning 性を示す。そして、定常一軸伸長粘度は stretch-thickening 性を示し、伸長速度の増大とともに単調増加し、定常値に達する。

(5) Leonov モデル (λ, η, s)

$$\tau = 2\eta_0 s \mathbf{D} + \frac{\eta}{\lambda} \mathbf{C}_e^{-1} \quad (2.13)$$

$$\frac{\nabla}{\mathbf{C}} + \frac{1}{2\lambda} \left\{ \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \mathbf{C}_e^{-1} - \frac{1}{3} (\text{tr } \mathbf{C}_e^{-1} - \text{tr } \mathbf{C}_e) \mathbf{I} \right\} = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

λ : 緩和時間, η : 粘度, s : 定数, $\eta_0 = \eta s / (1 - s)$ 。

ここで $\mathbf{C}_e^{-1}$ は弾性フィンガーひずみテンソル, $\mathbf{I}$ は単位テンソルである。

Leonov モデルは、ゴム弾性理論と不可逆熱力学を組み合わせ、それを連続体力学的に展

開することによって導き出された構成方程式である。式 (2.13) は Leonov モデルの一般形において、ポテンシャル関数 W として古典的なポテンシャル関数 $W = \eta/(2\lambda)(I_1 - 3)$ が適用できると仮定し、さらにひずみ硬化パラメータを 0 として導き出されたものである⁽³²⁾。ここで、 $I_1 = \text{tr } \mathbf{C}_e^{-1}$ は $\mathbf{C}_e^{-1}$ の第 1 不変量である。他の微分型の構成方程式は、応力に関する偏微分方程式で表されるが、Leonov モデルはフィンガーひずみに関する微分方程式で表されている。この点で Leonov モデルは特徴的であり、後述の積分型の構成方程式に近いといえる。

Leonov モデルは、定常せん断粘度の shear-thinning 性、せん断速度の増大による第 1 法線応力差の増大、定常一軸伸長粘度の stretch-thickening 性などを表すことができる。また、Leonov モデルは 2 次元のせん断流れ場において、 $\alpha=0.5$ の場合の Giesekus モデルと一致する。本モデルの特徴については 2.2 節で詳しく述べる。

(6) Phan-Thien Tanner (PTT) モデル ($\xi, \lambda, \eta_0, \varepsilon$)

$$g\boldsymbol{\tau} + \lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} + \lambda\xi(\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}) = 2\eta_0\mathbf{D} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} g &= \exp \left\{ \frac{\varepsilon\lambda}{\eta_0} \text{tr } \boldsymbol{\tau} \right\} \\ &\approx 1 + \frac{\varepsilon\lambda}{\eta_0} \text{tr } \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (2.16)$$

ξ : 定数, λ : 緩和時間, η_0 : ゼロせん断粘度, ε : 定数。

PTT モデルは高分子液体の網目理論 (network theory) に基づく構成方程式である。Yamamoto⁽⁴¹⁾⁽⁴²⁾⁽⁴³⁾ の網目モデルでは、分子の末端間ベクトル (end-to-end vector), $\mathbf{R}$, の確率密度関数の時間発展方程式に含まれる分子鎖の生成と消滅を表す関数が、 $\mathbf{R}$ の大きさ R^2 の関数である。そのために、導かれた構成方程式が閉じた形ではなくなり、複雑な流れ場の数値計算への適用が困難であった。Phan-Thien と Tanner⁽³³⁾⁽³⁴⁾ は、確率密度関数が R^2 ではなく、 R^2 の平均 $\langle R^2 \rangle$ の関数であると近似することによって、閉じた形のモデルを導き出した。

PTT モデルは定常せん断粘度の shear-thinning 性や、せん断速度とともに増加する第 1 法線応力差を表現できる。第 1 法線応力差係数は shear-thinning 性を示す。式 (2.16)₁ の形の g を用いたとき、定常一軸伸長粘度は伸長速度の増大とともに大きくなり最大値をとった後、減少傾向を示す。この傾向は低密度ポリエチレン (LDPE) や高密度ポリエチレン (HDPE) のような実際の高分子融液の伸長粘度特性とよく一致

する⁽²¹⁾. g として式 (2.16)₁ の形の関数を用いた場合, 式が複雑になるため, 数値計算では式 (2.16)₂ の近似式が使われることが多い.

(7) Larson モデル (ξ, λ, G)

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda \frac{\nabla}{\tau} + \frac{2\xi\lambda}{3G} \mathbf{D} : \boldsymbol{\tau} (\boldsymbol{\tau} + G\mathbf{I}) = 2\lambda G \mathbf{D} \quad (2.17)$$

ξ : 定数, λ : 緩和時間, G : 緩和弾性率

Larson モデルは, de Gennes⁽⁴⁴⁾⁽⁴⁵⁾ が提案したレプテイション理論を発展させた Doi-Edwards 理論⁽⁴⁶⁾ を拡張したモデルである. Larson⁽³⁵⁾⁽³⁶⁾ は, 溶液中の分子鎖の移流に対して *partially extending convection* という概念を導入することによってこのモデルを導いた. パラメータ ξ は分子鎖の伸長性を表す. ξ が 3/5 のときに Doi-Edwards モデルの近似となり, 0 のときに UCM モデルと一致する.

Larson モデルは, 他の非線形粘弾性モデルと同様に, 定常せん断粘度の shear-thinning 性や, せん断速度の増大にともなう第 1 法線応力差の増大などの実在の高分子液体のせん断特性を表現することができる. また, 第 1 法線応力差係数は shear-thinning 性を示す. PTT モデルと同様に, 定常一軸伸長粘度 η_E は伸長速度 $\dot{\epsilon}$ の増大とともに大きくなり, 最大値をとった後, 高伸長速度領域では, $\dot{\epsilon}$ の増大とともに η_E は小さくなる.

(8) Kaye-BKZ モデル

$$\boldsymbol{\tau} = \int_{-\infty}^t 2 \left\{ \frac{\partial U}{\partial I_1} \mathbf{C}^{-1}(t') - \frac{\partial U}{\partial I_2} \mathbf{C}(t') \right\} dt' \quad (2.18)$$

ここで, 核関数 U は $I_1, I_2, t - t'$ の関数である. I_1, I_2 はフィンガーひずみテンソルの第 1, 第 2 不変量である. t, t' はそれぞれ現在と過去の時刻を表す.

U が $U(t - t', I_1, I_2) = m(t - t')V(I_1, I_2)$ のように, 時間とひずみの関数に分離できると仮定すると, 式 (2.18) は次のようになる.

$$\boldsymbol{\tau} = \int_{-\infty}^t 2m(t - t') \left\{ \frac{\partial V}{\partial I_1} \mathbf{C}^{-1}(t') - \frac{\partial V}{\partial I_2} \mathbf{C}(t') \right\} dt' \quad (2.19)$$

ここで, m は記憶関数と呼ばれる.

U の与え方によって, 種々の Kaye-BKZ 型の構成方程式が提案されている. 例えば, 以下の式で表される Papanastasiou ら⁽⁴⁷⁾ が提案したモデルは最もよく用いられて

いるモデルのひとつである。

$$\tau = \int_{-\infty}^t m(t-t')h(I_1, I_2)\mathbf{C}^{-1}(t')dt' \quad (2.20)$$

$$h(I_1, I_2) = \frac{\alpha}{(\alpha-3) + \beta I_1 + (1-\beta)I_2} \quad (2.21)$$

ここで、 α, β は定数である。

Kaye-BKZ モデルは高分子融液のレオロジー特性をよく記述する。しかし、積分型の構成方程式は微分型の構成方程式に比べて、複雑な流れ場の数値計算への適用が難しく、積分型の構成方程式を用いた数値計算例は微分型の構成方程式を用いたものに比べて少ない。近年は積分型の構成方程式に適した計算方法も提案され、ダイスウェルの解析の数値計算などに適用されて良好な結果を得ている（例えば、Luo ら⁽⁴⁸⁾）。

Kaye-BKZ 型の構成方程式の発展の歴史は Tanner のレビュー⁽⁴⁹⁾ に詳しい。

ここでは、単一の緩和時間をもつ構成方程式を示したが、実際の高分子液体では緩和時間に分布をもつものが多い。したがって、実際の流体の特性を記述するために、複数の緩和時間をもつマルチモードモデルに拡張された構成方程式が使用されることが多い。

2.1.4 その他

非等温系の構成方程式

前述の構成方程式はいずれも等温系に対するものであった。しかし、高分子成形加工における流れの数値解析を想定した場合、非等温流れの解析を行う必要が生じてくる。通常、時間-温度重ね合わせの原理⁽⁵⁰⁾に基づいて、基準温度の粘度や緩和時間をシフト関数を用いて、目的の温度における値に変換して解析が行われる。シフト関数についてはいくつかの表現が提案されており、例えば、Williams-Landel-Ferry (WLF) 式⁽⁵¹⁾などがよく用いられている。

温度-時間重ね合わせの原理によって、種々の高分子液体のレオロジー特性の温度依存性を表現することができる。しかし、この原理は異なる温度における流体のレオロジー特性の関係を記述するものである。したがって、温度-時間重ね合わせの原理は、流れ中の時間的空間的な温度変化によって生じる流れの変化に関しては何ら情報を与えない。連続体力学的あるいは分子論的手法によって、非等温系の粘弾性流体の構成方程式を構築する試みもなされている⁽²³⁾。

分子動力学的アプローチ

近年の計算機の性能の向上にともない、分子論的な考え方に基づいて、モデル分子の運動をブラウン動力学法 (Brownian dynamics) や分子動力学法 (molecular dynamics) を用いて直接計算することによって、構成方程式を用いずに計算を行おうとする試みもなされるようになってきた。

例えば、Kröger ら⁽⁵²⁾ は、球を有限伸長性を有する非線形バネ (Finitely Extensible Nonlinear Elastic Spring) で連結した FENE ダンベルモデルを用いて、非平衡分子動力学法により、高分子融液の定常せん断流れの計算を行っている。このような手法には、分子の配向や構造とレオロジー特性との関係を調べることができるという利点がある。ところが、計算負荷が非常に大きいため、これまでは単純せん断流れや一軸伸長流れなどの簡単な流れ場に関する研究がほとんどであった。しかし、近年、このような手法を用いて複雑な流れ場における数値解析⁽⁵³⁾⁽⁵⁴⁾ も行われるようになってきた。

2.2 レオノフモデル

本研究では構成方程式としてレオノフモデル²を使用する。本節ではレオノフモデルの導出過程と特徴について簡単に述べる。

Leonov は、ある瞬間の粘弾性流体の弾性による応力 σ は、等価な自由回復 (free recovery)⁽³⁹⁾ をもつゴムの平衡応力によって近似できると仮定した。このとき、 σ は次式のようにならされる。

$$\sigma = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{C}_e^{-1} - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{C}_e + \text{isotropic term} \quad (2.22)$$

ここで、 W は弾性ポテンシャルで、 $I_1 = \text{tr } \mathbf{C}_e^{-1}$ 、 $I_2 = \text{tr } \mathbf{C}_e$ の関数である。 $\mathbf{C}_e^{-1}$ は弾性フィンガーひずみテンソル³である。

物質が完全なゴムであれば、フィンガーひずみテンソル $\mathbf{C}^{-1}$ に対して、次の等式が成り立つ。

$$\mathbf{0} = \overset{\nabla}{\mathbf{C}^{-1}} = \overset{\circ}{\mathbf{C}^{-1}} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{D} \quad (2.23)$$

ここで、 $\mathbf{D}$ はひずみ速度テンソル、 $[\overset{\nabla}{\cdot}]$ は上対流微分、 $[\overset{\circ}{\cdot}]$ は Jauman 微分である。Leonov は散逸過程はひずみ速度の非可逆部分 $\mathbf{D}_p$ によって生じると考えた。このとき、

²2.1 節では、構成方程式の名称を記述する際に、モデル提案者の名前を英語表記したが、以後、Leonov モデルに関しては、レオノフモデルと表記する。

³Leonov の論文⁽³¹⁾⁽³²⁾ では、フィンガーひずみテンソルを $\mathbf{C}$ で表していたが、一般的な表記法では $\mathbf{C}^{-1}$ を使用する。本論文でも、フィンガーひずみテンソルを $\mathbf{C}^{-1}$ で表す。ただし、後述するように、成分表示する場合には、標記の簡単のために、 $\mathbf{C}^{-1}$ の第 ij 成分を C_{ij} のように書く。

弾性ひずみの変化はひずみ速度の弾性部分 $\mathbf{D}_e = \mathbf{D} - \mathbf{D}_p$ によって決定される．粘弾性流体の場合には，次の等式が成り立つと仮定する．

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \overset{\circ}{\mathbf{C}}_e^{-1} - \mathbf{D}_e \cdot \mathbf{C}_e^{-1} - \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \mathbf{D}_e \\ &= \overset{\circ}{\mathbf{C}}_e^{-1} - (\mathbf{D} - \mathbf{D}_p) \cdot \mathbf{C}_e^{-1} - \mathbf{C}_e^{-1} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{D}_p) \end{aligned} \quad (2.24)$$

式 (2.23), (2.24) より次式が成り立つ．

$$\mathbf{0} = \overset{\nabla}{\mathbf{C}}^{-1} + \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{C}_e^{-1} + \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \mathbf{D}_p \quad (2.25)$$

さらに，Leonov は式 (2.22) との類比により， $\mathbf{D}_p$ として以下のような形を仮定した．

$$\mathbf{D}_p = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \mathbf{C}_e^{-1} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \mathbf{C}_e - q \mathbf{I} \quad (2.26)$$

ここで $\Psi(I_1, I_2)$ は非平衡ポテンシャルと呼ばれる． $\mathbf{I}$ は単位テンソルである．等方成分 q は非圧縮の条件， $\text{tr } \mathbf{D}_p = 0$ ，から決定され，式 (2.26) は次式のようになる．

$$\mathbf{D}_p = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \left(\mathbf{C}_e^{-1} - \frac{I_1}{3} \mathbf{I} \right) - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \left(\mathbf{C}_e - \frac{I_2}{3} \mathbf{I} \right) \quad (2.27)$$

次に，Leonov は Ψ は対称な弾性ポテンシャル W_s の関数であると仮定し，次式のように W_s をおいた．

$$\Psi(I_1, I_2) = \Psi(W_s) \quad (2.28)$$

$$W_s = \frac{1}{2} \{W(I_1, I_2) + W(I_2, I_1)\} \quad (2.29)$$

Leonov は W として， $W = \mu(I_1 - 3)$ を仮定した⁽³¹⁾．ここで， $\mu = \eta/(2\theta)$ ， η は粘度， θ は緩和時間である．このとき， W_s は

$$W_s = \frac{\mu}{2} (I_1 + I_2 - 6) \quad (2.30)$$

となる．さらに，非平衡ポテンシャルとして， $\Psi = W_s/(2\mu\theta)$ を考えると， Ψ は次式で与えられる．

$$\Psi = \frac{1}{2\mu\theta} W_s = \frac{1}{8\theta} (I_1 + I_2 - 6) \quad (2.31)$$

式 (2.31) を式 (2.27) に代入すると，

$$\mathbf{D}_p = \frac{1}{4\theta} \left\{ \mathbf{C}_e^{-1} - \mathbf{C}_e - \frac{1}{3} \left(\text{tr } \mathbf{C}_e^{-1} - \text{tr } \mathbf{C}_e \right) \mathbf{I} \right\} \quad (2.32)$$

となる．そして，式 (2.32) を式 (2.25) に代入し，次式を得る．

$$\overset{\nabla}{\mathbf{C}}^{-1} + \frac{1}{2\theta} \left\{ \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \mathbf{C}_e^{-1} - \frac{1}{3} \left(\text{tr } \mathbf{C}_e^{-1} - \text{tr } \mathbf{C}_e \right) \mathbf{I} \right\} = \mathbf{0} \quad (2.33)$$

偏差応力テンソル τ は

$$\begin{aligned}\tau &= 2\eta_0 s \mathbf{D} + 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{C}_e^{-1} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{C}_e \right) \\ &= 2\eta_0 s \mathbf{D} + \frac{\eta}{\theta} \mathbf{C}_e^{-1}\end{aligned}\quad (2.34)$$

となる．ここで， η_0 はゼロせん断速度粘度で， $\eta_0 = \eta/(1-s)$ で定義される． s は 0 と 1 の間の値をとる定数である．

さらに，Leonov は θ と η が，次式で与えられるような指数関数の形のひずみポテンシャル依存性をもつと考えた．ここで Θ, H はそれぞれ基準の緩和時間と粘度である． β は $0 \leq \beta < 1$ の定数で，伸長粘度の stretch-thickening 性と関係するために，ひずみ硬化パラメータ (strain hardening parameter) と呼ばれる．

$$\theta = \Theta e^{\beta W_s/\mu} \quad (2.35)$$

$$\eta = H e^{\beta W_s/\mu} \quad (2.36)$$

このとき，式 (2.33), (2.34) は以下の形の式になる．

$$\mathbf{C}_e^{-1} + \frac{1}{2\theta} e^{-\beta W_s/\mu} \left\{ \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \mathbf{C}_e^{-1} - \frac{1}{3} (\text{tr } \mathbf{C}_e^{-1} - \text{tr } \mathbf{C}_e) \mathbf{I} \right\} = \mathbf{0} \quad (2.37)$$

$$\tau = 2\eta_0 s \mathbf{D} e^{\beta W_s/\mu} + \frac{\eta}{\theta} \mathbf{C}_e^{-1} \quad (2.38)$$

これらの式をマルチモードのモデルに拡張した式は次のようになる．

$$\mathbf{C}_k^{-1} + \frac{1}{2\theta_k} e^{-\beta W_s^1/\mu_1} \left\{ \mathbf{C}_k^{-1} \cdot \mathbf{C}_k^{-1} - \frac{1}{3} (\text{tr } \mathbf{C}_k^{-1} - \text{tr } \mathbf{C}_k) \mathbf{I} \right\} = \mathbf{0} \quad (2.39)$$

$$\tau = 2\eta_0 s \mathbf{D} e^{\beta W_s^1/\mu_1} + \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} \mathbf{C}_k^{-1} \quad (2.40)$$

$$\det \mathbf{C}_k^{-1} = 1 \quad (2.41)$$

ここで，添字 k は第 k モードの量であることを示す．そして， $\mu_1 = \eta_1/(2\theta_1)$ である．ゼロせん断粘度 η_0 は次式で定義される．

$$\eta_0 = \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{1-s} \quad (2.42)$$

式 (2.41) は非圧縮条件を表す式である．また，これ以降の式中では弾性フィンガーひずみテンソルの添え字 e を省略する．

Table 2.1: Material Functions of the Leonov Model

Steady shear viscosity, η_S	$\eta_S = \eta_0 s + \sum_{k=1}^N \frac{2\eta_k}{1 + X_k}$
First normal stress difference, N_1	$N_1 = \sqrt{2} \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} \frac{X_k - 1}{\sqrt{1 + X_k}}$
Steady uniaxial elongational viscosity, η_E	$\eta_E = 3\eta_0 s + \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\dot{\epsilon}\theta_k} (\lambda_k^2 - \lambda_k^{-1})$
where $X_k = \sqrt{1 + 4\dot{\gamma}^2\theta_k^2}$, $\lambda_k^4 + \lambda_k^3 - 6\dot{\epsilon}\theta_k\lambda_k^2 - \lambda_k - 1 = 0$	

2次元平面流れを考えた場合, $\text{tr } \mathbf{C}_k^{-1} - \text{tr } \mathbf{C}_k = 0$ である⁴. さらに $\beta=0$ とおくと, 以下のような構成方程式が得られる.

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta_0 s \mathbf{D} + \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} \mathbf{C}_k^{-1} \quad (2.43)$$

$$\mathbf{C}_k^{-1} + \frac{1}{2\theta_k} (\mathbf{C}_k^{-1} \cdot \mathbf{C}_k^{-1} - \mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad (2.44)$$

$$\det \mathbf{C}_k^{-1} = 1 \quad (2.45)$$

本研究の数値計算では, この式を使用する. なお, β がある限界値を超えると一軸伸長粘度が無量大となり, 数値計算ができなくなる. β の限界値は Upadhyay ら⁽⁵⁵⁾⁽⁵⁶⁾ によって調べられている.

続いて, レオノフモデルによって記述される粘弾性流体のレオロジー特性を示す. レオノフモデルの物質関数を表 2.1 に示す. 次に, これらの物質関数のグラフを示す. 整理し

⁴2次元平面流れを考えると, $\mathbf{C}^{-1}$ は次式のようにマトリックス表示できる.

$$[\mathbf{C}^{-1}] = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & 0 \\ C_{xy} & C_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

このとき, $\mathbf{C}$ は次のようになる.

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{yy} & -C_{xy} & 0 \\ -C_{xy} & C_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & C_{xx}C_{yy} - C_{xy}^2 \end{bmatrix}$$

したがって, $\text{tr } \mathbf{C}^{-1} = C_{xx} + C_{yy} + 1$, $\text{tr } \mathbf{C} = C_{xx} + C_{yy} + C_{xx}C_{yy} - C_{xy}^2$ となる. ここで, 非圧縮の条件より, $\det \mathbf{C}^{-1} = C_{xx}C_{yy} - C_{xy}^2 = 1$ であるから, $\text{tr } \mathbf{C} = C_{xx} + C_{yy} + 1$ となる. したがって, $\text{tr } \mathbf{C}^{-1} - \text{tr } \mathbf{C} = 0$ である.

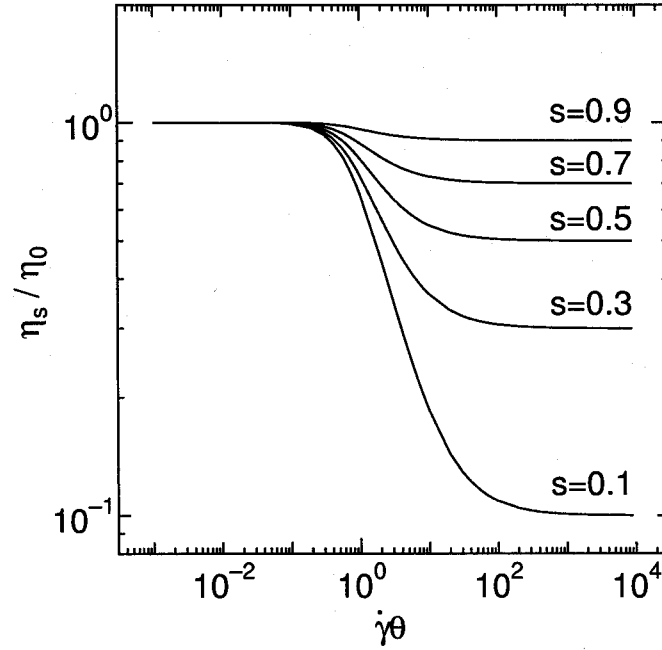


Fig.2.3: Dimensionless shear viscosity, η_s/η_0 , versus dimensionless shear rate, $\dot{\gamma}\theta$ for various values of s .

やすいように以下のように無次元化した式を用いる．さらに，特徴を理解しやすいようにシングルモード ($N=1$) で考える．添字 $k=1$ は省略する．

$$\frac{\eta_s}{\eta_0} = s + 2(1-s) \frac{1}{1+X} \quad (2.46)$$

$$\frac{N_1}{\eta/\theta} = \frac{\sqrt{2}(X-1)}{\sqrt{1+X}} \quad (2.47)$$

$$\frac{\eta_E}{\eta_0} = 3s + \frac{1-s}{\dot{\epsilon}\theta} (\lambda^2 - \lambda^{-1}) \quad (2.48)$$

無次元定常せん断粘度 η_s/η_0 ，無次元第 1 法線応力差 $N_1\theta/\eta$ ，無次元定常一軸伸長粘度 η_E/η_0 を，それぞれ図 2.3, 2.4, 2.5 に示す．図 2.3 から，レオノフモデルが，粘弾性流体の典型的なレオロジー特性である shear-thinning 粘性や，せん断速度 $\dot{\gamma}$ の増大とともに N_1 が大きくなる現象を記述することが分かる．また，図 2.4 から，レオノフモデルの一軸伸長粘度が stretch-thickening 性を示すことが分かる．

高分子流体のせん断流れ⁽⁵⁵⁾⁽⁵⁷⁾⁽⁵⁹⁾や伸長流れ⁽⁵⁶⁾⁽⁶⁰⁾の解析へのレオノフモデルの適用性については，これまでによく調べられており，その有効性が認められている．また，射出成形のシミュレーション⁽⁶¹⁾⁽⁶²⁾⁽⁶³⁾や 2 次元急縮小流れの数値解析⁽⁶⁴⁾においても，実験結果との比較的良好な一致が報告されている．したがって，レオノフモデルを複雑な

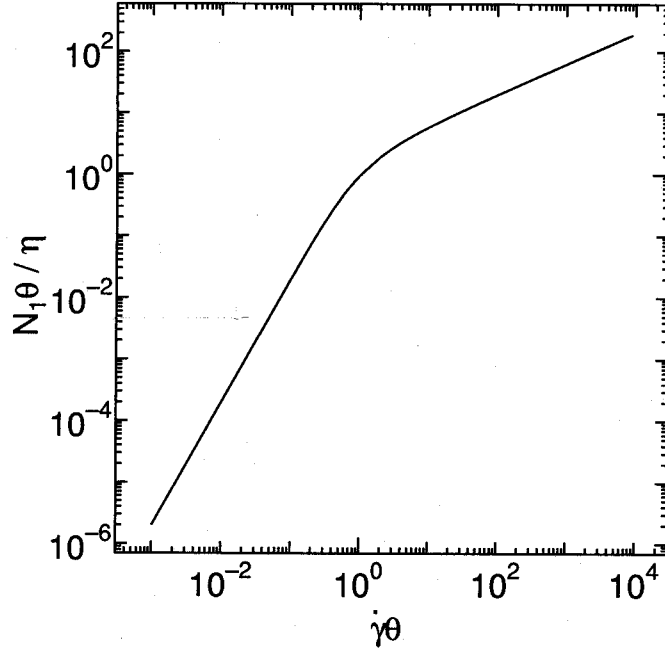


Fig.2.4: Dimensionless first normal stress difference, $N_1\theta/\eta$, versus dimensionless shear rate, $\dot{\gamma}\theta$.

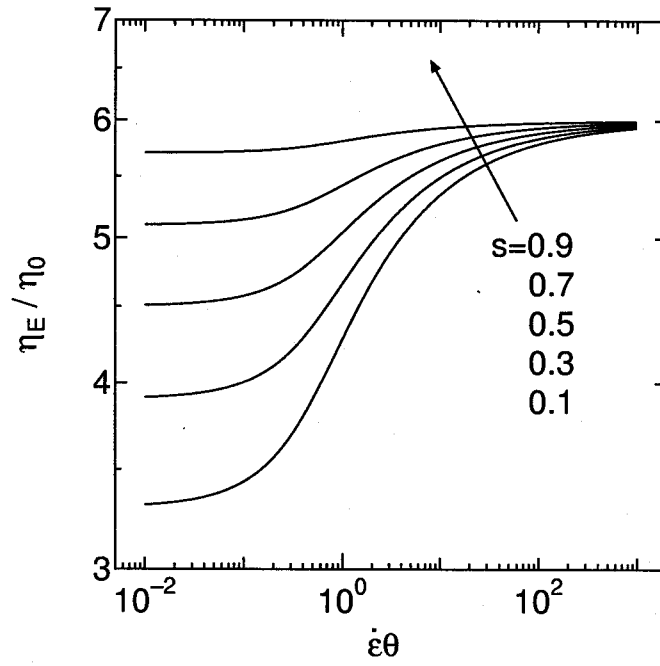


Fig.2.5: Dimensionless uniaxial elongational viscosity, η_E/η_0 , versus dimensionless elongational strain rate, $\dot{\epsilon}\theta$ for various values of s .

流れ場の粘弾性流体の流動挙動の解析に使用することは妥当であると判断する。また、レオノフモデルの導出の際の考え方やモデルの特性の解析については、Leonov 自身によるレビュー⁽⁶⁵⁾に詳しい。

2.3 基礎方程式

構成方程式にマルチモードのレオノフモデルを用いた粘弾性流体の流動解析の基礎方程式を以下に示す。本研究では非定常非圧縮流れを考える。基礎方程式は、連続の式 (2.49), コーシーの運動方程式 (2.50), 構成方程式 (2.51) ~ (2.54) からなる。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.49)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \nabla \cdot (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{0} \quad (2.50)$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta_0 s \mathbf{D} + \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} \mathbf{C}_k^{-1} \quad (2.51)$$

$$\mathbf{C}_k^{-1} + \frac{1}{2\theta_k} (\mathbf{C}_k^{-1} \cdot \mathbf{C}_k^{-1} - \mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad (2.52)$$

$$\det \mathbf{C}_k^{-1} = 1 \quad (2.53)$$

$$\eta_0 = \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{1-s} \quad (2.54)$$

ここで、 $\mathbf{v}$ は速度ベクトル、 $\boldsymbol{\tau}$ は偏差応力テンソル、 $\mathbf{I}$ は単位テンソル、 $\mathbf{C}_k^{-1}$ は第 k モードのフィンガーひずみテンソル、 p は圧力、 ρ は流体の密度である。 η_k, θ_k, s はレオノフモデルのパラメータで、それぞれ第 k モードの粘度、緩和時間、0 と 1 の間の値をとる定数である。

また非常に小さな緩和時間をもつモードに対しては quick adaptation 近似⁽⁶⁶⁾が適用できる。このとき $\mathbf{C}_k^{-1}$ は

$$\mathbf{C}_k^{-1} = \mathbf{I} + 2\theta_k \mathbf{D} \quad (2.55)$$

と表される。

式 (2.49) ~ (2.53) をデカルト座標系で成分表示すると以下ようになる。ただし、本研究では 2 次元流れを考えている。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \eta_0 s \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} \left(\frac{\partial C_{xx}^k}{\partial x} + \frac{\partial C_{xy}^k}{\partial y} \right) \\ + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \eta_0 s \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} \left(\frac{\partial C_{xy}^k}{\partial x} + \frac{\partial C_{yy}^k}{\partial y} \right) \\ + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{xx}^k}{\partial t} + u \frac{\partial C_{xx}^k}{\partial x} + v \frac{\partial C_{xx}^k}{\partial y} - 2 \left(C_{xx}^k \frac{\partial u}{\partial x} + C_{xy}^k \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ + \frac{1}{2\theta_k} \left(C_{xx}^{k2} + C_{xy}^{k2} - 1 \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{xy}^k}{\partial t} + u \frac{\partial C_{xy}^k}{\partial x} + v \frac{\partial C_{xy}^k}{\partial y} - C_{xx}^k \frac{\partial v}{\partial x} - C_{yy}^k \frac{\partial u}{\partial y} \\ + \frac{1}{2\theta_k} \left(C_{xx}^k C_{xy}^k + C_{xy}^k C_{yy}^k \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$C_{yy}^k = \frac{1 + C_{xy}^{k2}}{C_{xx}^k} \quad (2.61)$$

ここで u, v はそれぞれ x, y 方向の速度成分を, C_{ij}^k は $\mathbf{C}_k^{-1}$ の ij 成分を表す.

また, 式 (2.59), (2.60) に相当する C_{yy}^k の発展方程式が示されていない. それは, C_{yy}^k は非圧縮の条件を表す式 (2.61) より求められるために, C_{yy}^k に関しては, 発展方程式を解く必要はないからである. このことは数値計算のコストの低減になる.

数値計算の際の変数は, 速度 u, v と圧力 p とひずみテンソルの各成分 C_{ij}^k となる. しかし, 解析を行う際にはひずみ成分の代わりに, 応力を用いた方が便利である. 偏差応力テンソル τ の各成分は次式から求められる.

$$\tau_{xx} = 2\eta_0 s \frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} C_{xx}^k \quad (2.62)$$

$$\tau_{xy} = \eta_0 s \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} C_{xy}^k \quad (2.63)$$

$$\tau_{yy} = 2\eta_0 s \frac{\partial v}{\partial y} + \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} C_{yy}^k \quad (2.64)$$

第3章 数値計算スキーム

3.1 離散式の導出

デカルト座標系で成分表示した基礎方程式 (2.56) ～ (2.60) を離散化する．本研究では空間に関する離散化に有限要素法を，時間に関する離散化に有限差分法を適用した．本節では，離散式の導出過程を簡単に示す．

3.1.1 空間に関する離散化

基礎方程式 (2.56) ～ (2.60) を有限要素法に基づいて空間に関して離散化する．速度とひずみについては 2 次関数近似を，圧力については 1 次関数近似を行い，それぞれ 6 節点 P^2-C^0 三角形要素と 3 節点 P^1-C^0 三角形要素 (図 3.1) を使用する⁽⁶⁷⁾．

2 次の内挿関数を Φ_α ($\alpha=1 \sim 6$)，1 次の内挿関数を Ψ_λ ($\lambda=1, 2, 3$) で表すと， u ， v ， p ， C_{ij}^k は総和規約を用いて次のように書ける (内挿関数の具体的な形は付録 A.1 参照)．

$$u = \Phi_\alpha U_\alpha \quad (3.1)$$

$$v = \Phi_\alpha V_\alpha \quad (3.2)$$

$$p = \Psi_\lambda P_\lambda \quad (3.3)$$

$$C_{ij}^k = \Phi_\alpha (C_{ij}^k)_\alpha \quad (3.4)$$

ここで， U_α ， V_α ， P_λ ， $(C_{ij}^k)_\alpha$ はそれぞれ節点上の u ， v ， p ， C_{ij}^k の値を表す．本章の式では，特に記述のない限り，総和規約を用いて表記する．

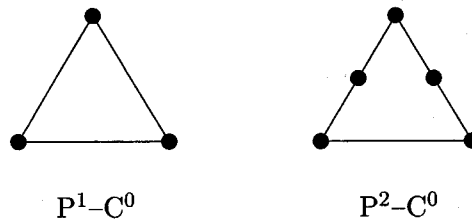


Fig.3.1: Triangular meshes with three nodes and six nodes.

ガラーキン有限要素法に基づいて基礎方程式を離散化し、各要素に関する有限要素式を作成する (具体的な式の展開については付録 A.2 参照). まず、連続の式 (2.56) と運動方程式 (2.57), (2.58) について有限要素式を導く.

式 (2.56) を離散化すると以下のようになる.

$$H_{\lambda\beta}^x U_\beta + H_{\lambda\beta}^y V_\beta = 0 \quad (3.5)$$

$$H_{\lambda\beta}^x \equiv \int_V \Psi_\lambda \Phi_{\beta,x} dx dy \quad (3.6)$$

$$H_{\lambda\beta}^y \equiv \int_V \Psi_\lambda \Phi_{\beta,y} dx dy \quad (3.7)$$

ここで, $\int_V \cdot dx dy$ は要素内の積分を表す. また, 表記の簡単のために, 本章では, Φ の x に関する偏微分を $\Phi_{,x}$ のように書く.

式 (2.57), (2.58) を離散化すると以下の式を得る.

$$\rho M_{\alpha\beta} \dot{U}_\beta + \eta_0 s K_{\alpha\beta} U_\beta - \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} (N_{\alpha\beta}^x C_{xx\beta}^k + N_{\alpha\beta}^y C_{xy\beta}^k) + G_{\alpha\lambda}^x P_\lambda = F_\alpha^x \quad (3.8)$$

$$\rho M_{\alpha\beta} \dot{V}_\beta + \eta_0 s K_{\alpha\beta} V_\beta - \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} (N_{\alpha\beta}^x C_{xy\beta}^k + N_{\alpha\beta}^y C_{yy\beta}^k) + G_{\alpha\lambda}^y P_\lambda = F_\alpha^y \quad (3.9)$$

ここで,

$$M_{\alpha\beta} \equiv \int_V \Phi_\alpha \Phi_\beta dx dy \quad (3.10)$$

$$K_{\alpha\beta} \equiv \int_V \Phi_{\alpha,x} \Phi_{\beta,x} dx dy + \int_V \Phi_{\alpha,y} \Phi_{\beta,y} dx dy \quad (3.11)$$

$$N_{\alpha\beta}^x \equiv \int_V \Phi_\alpha \Phi_{\beta,x} dx dy \quad (3.12)$$

$$N_{\alpha\beta}^y \equiv \int_V \Phi_\alpha \Phi_{\beta,y} dx dy \quad (3.13)$$

$$G_{\alpha\lambda}^x \equiv \int_V \Phi_\alpha \Psi_{\lambda,x} dx dy \quad (3.14)$$

$$F_\alpha^x \equiv \eta_0 s \left(\int_S \Phi_\alpha \frac{\partial u}{\partial x} n_x dS + \int_S \Phi_\alpha \frac{\partial u}{\partial y} n_y dS \right) \quad (3.15)$$

$$G_{\alpha\lambda}^y \equiv \int_V \Phi_\alpha \Psi_{\lambda,y} dx dy \quad (3.16)$$

$$F_\alpha^y \equiv \eta_0 s \left(\int_S \Phi_\alpha \frac{\partial v}{\partial x} n_x dS + \int_S \Phi_\alpha \frac{\partial v}{\partial y} n_y dS \right) \quad (3.17)$$

である。[$\dot{\cdot}$] は時間微分を表す。さらに整理して、次式を得る。

$$\rho M_{\alpha\beta} \dot{U}_\beta + \eta_0 s K_{\alpha\beta} U_\beta + G_{\alpha\lambda}^x P_\lambda = \Omega_\alpha^x \quad (3.18)$$

$$\rho M_{\alpha\beta} \dot{V}_\beta + \eta_0 s K_{\alpha\beta} V_\beta + G_{\alpha\lambda}^y P_\lambda = \Omega_\alpha^y \quad (3.19)$$

ここで、

$$\Omega_\alpha^x \equiv F_\alpha^x + \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} (N_{\alpha\beta}^x C_{xx\beta}^k + N_{\alpha\beta}^y C_{xy\beta}^k) \quad (3.20)$$

$$\Omega_\alpha^y \equiv F_\alpha^y + \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} (N_{\alpha\beta}^x C_{xx\beta}^k + N_{\alpha\beta}^y C_{xy\beta}^k) \quad (3.21)$$

である。

各要素について得られた有限要素式 (3.5), (3.18), (3.19) を、全要素について重ね合わせ、全体系の方程式として次式を得る。

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{P} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 & G^x \\ 0 & K & G^y \\ H^x & H^y & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega^x \\ \Omega^y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

$\{U\} \equiv \{u_1, u_2, \dots, u_N\}^T$, $\{V\} \equiv \{v_1, v_2, \dots, v_N\}^T$, $\{P\} \equiv \{p_1, p_2, \dots, p_M\}^T$ は、それぞれ各節点上の u, v, p から構成されるベクトルである。 N, M は全節点数と主節点の総数である。そして、 $M, K, G^x, G^y, H^x, H^y, \Omega^x, \Omega^y$ はそれぞれ各要素毎に作成した有限要素式の係数マトリックス、 $M_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}, G_{\alpha\lambda}^x, G_{\alpha\lambda}^y, H_{\lambda\beta}^x, H_{\lambda\beta}^y, \Omega_\alpha^x, \Omega_\alpha^y$ を全要素に関して足し合わせた係数マトリックスである。

続いて、構成方程式 (2.59), (2.60) の有限要素式を導く。ガラーキン有限要素法を適用すると、式 (2.59), (2.60) は次のようになる。

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} \dot{C}_{xx}^k &+ E_{\alpha\beta\gamma}^x u_\beta C_{xx\gamma}^k + E_{\alpha\beta\gamma}^y v_\beta C_{xx\gamma}^k \\ &- 2E_{\alpha\beta\gamma}^x C_{xx\beta}^k u_\gamma - 2E_{\alpha\beta\gamma}^y C_{xy\beta}^k u_\gamma \\ &+ \frac{1}{2\theta_k} [S_{\alpha\beta\gamma} C_{xx\beta}^k C_{xx\gamma}^k + S_{\alpha\beta\gamma} C_{xy\beta}^k C_{xy\gamma}^k] = R_\alpha^k \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} \dot{C}_{xy}^k &+ E_{\alpha\beta\gamma}^x u_\beta C_{xy\gamma}^k + E_{\alpha\beta\gamma}^y v_\beta C_{xy\gamma}^k \\ &- E_{\alpha\beta\gamma}^x C_{xx\beta}^k v_\gamma - E_{\alpha\beta\gamma}^y C_{yy\beta}^k u_\gamma \\ &+ \frac{1}{2\theta_k} [S_{\alpha\beta\gamma} C_{xx\beta}^k C_{xy\gamma}^k + S_{\alpha\beta\gamma} C_{xy\beta}^k C_{yy\gamma}^k] = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

ここで、

$$E_{\alpha\beta\gamma}^x \equiv \int_V \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_{\gamma,x} dx dy \quad (3.25)$$

$$E_{\alpha\beta\gamma}^y \equiv \int_V \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_{\gamma,y} dx dy \quad (3.26)$$

$$S_{\alpha\beta\gamma} \equiv \int_V \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_\gamma dx dy \quad (3.27)$$

$$R_\alpha^k \equiv \frac{1}{2\theta_k} \int_V \Phi_\alpha dx dy \quad (3.28)$$

である。

各要素について得られた有限要素式 (3.23), (3.24) を全要素について重ね合わせると、以下の形の全体系の方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{C}}_{xx}^k \\ \dot{\mathbf{C}}_{xy}^k \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 & \mathbf{E}_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_{xx}^k \\ \mathbf{C}_{xy}^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_1^k \\ \mathbf{R}_2^k \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

ここで、 $\mathbf{C}_{xx}^k \equiv \{C_{xx,1}^k, C_{xx,2}^k, \dots, C_{xx,N}^k\}^T$, $\mathbf{C}_{xy}^k \equiv \{C_{xy,1}^k, C_{xy,2}^k, \dots, C_{xy,N}^k\}^T$ は各節点上の C_{xx}^k, C_{xy}^k から構成されるベクトルである。そして、式 (3.29) 中の係数マトリックスは、以下のように定義される。ここで、 $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4$ はそれぞれ、各要素ごとに作成した有限要素式の係数マトリックス、 $E_{\alpha\beta\gamma}^x u_\beta + E_{\alpha\beta\gamma}^y v_\beta - 2E_{\alpha\beta\gamma}^x u_\gamma, -2E_{\alpha\beta\gamma}^y u_\gamma, -E_{\alpha\beta\gamma}^x v_\gamma, E_{\alpha\beta\gamma}^x u_\beta + E_{\alpha\beta\gamma}^y v_\beta - E_{\alpha\beta\gamma}^x u_\gamma$ を全要素に関して足し合わせた係数マトリックスである。そして、 $\mathbf{R}_1^k, \mathbf{R}_2^k$ はそれぞれ、各要素ごとに作成した有限要素式の $R_\alpha^k - (1/2\theta_k)(S_{\alpha\beta\gamma} C_{xx\beta}^k C_{xx\gamma}^k + S_{\alpha\beta\gamma} C_{xy\beta}^k C_{xy\gamma}^k), -(1/2\theta_k)(S_{\alpha\beta\gamma} C_{xx\beta}^k C_{xy\gamma}^k + S_{\alpha\beta\gamma} C_{xy\beta}^k C_{yy\gamma}^k)$ を全要素に関して足し合わせたベクトルである。

3.1.2 時間に関する離散化

まず、有限要素式 (3.22) を時間に関して離散化する。ここで、式の表記の簡単のために式 (3.22) を次のように書く。

$$[\mathbf{M}]\{\dot{\mathbf{V}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{V}\} = \{\mathbf{\Omega}\} \quad (3.30)$$

時刻 $t_n + \theta\Delta t_n$ ($0 \leq \theta \leq 1$) における釣り合い式、(3.31) を考える。

$$[\mathbf{M}]\{\dot{\mathbf{V}}\}_{n+\theta} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{V}\}_{n+\theta} = \{\mathbf{\Omega}\}_{n+\theta} \quad (3.31)$$

ここで、添字 $n + \theta$ は時刻 $t_n + \theta\Delta t_n$ における値であることを示す。いま、 $\{\dot{\mathbf{V}}\}_{n+\theta}$ と $\{\mathbf{V}\}_{n+\theta}$ を次のように近似する。

$$\{\dot{\mathbf{V}}\}_{n+\theta} = (\{\mathbf{V}\}_{n+1} - \{\mathbf{V}\}_n) / \Delta t_n \quad (3.32)$$

$$\{\mathbf{V}\}_{n+\theta} = (1 - \theta)\{\mathbf{V}\}_n + \theta\{\mathbf{V}\}_{n+1} \quad (3.33)$$

これらを式 (3.31) に代入し、整理すると次式を得る.

$$([M] + \theta \Delta t_n [K]) \{V\}_{n+1} = ([M] - (1 - \theta) \Delta t_n [K]) \{V\}_n + \Delta t_n \{\theta \{\Omega\}_{n+1} + (1 - \theta) \{\Omega\}_n\} \quad (3.34)$$

$$\{\Omega\}_{n+\theta} = (1 - \theta) \{\Omega\}_n + \theta \{\Omega\}_{n+1} \quad (3.35)$$

$\theta = 1$ のとき、完全陰解法、 $\theta = 1/2$ のとき、クランク–ニコルソン法、 $\theta = 0$ のとき、完全陽解法になる. ただし、式 (3.35) の場合には、 $\theta = 0$ とすると左辺の係数マトリックスが特異になるために、完全陽解法を適用することはできない. 本解析ではクランク–ニコルソン法を用いる. このとき、式 (3.35) は、

$$\begin{aligned} \left([M] + \frac{\Delta t}{2} [K]\right) \{V\}_{n+1} &= \left([M] - \frac{\Delta t}{2} [K]\right) \{V\}_n \\ &+ \frac{\Delta t (\{\Omega\}_{n+1} + \{\Omega\}_n)}{2} \end{aligned} \quad (3.36)$$

となる.

次に、構成方程式に関する有限要素式 (3.29) を時間に関して離散化する. 表記の簡単のために式 (3.29) を次のように書く.

$$[m] \{\dot{C}^k\} + [E] \{C^k\} = \{R^k\} \quad (3.37)$$

本研究では、構成方程式をオイラー前進差分法を用いて離散化する. オイラー前進差分法では $\dot{C}^k$ は次のように近似される.

$$\dot{C}_{n+1}^k = \frac{C_{n+1}^k - C_n^k}{\Delta t} \quad (3.38)$$

ここで、添字 n は第 n 時間ステップにおける値であることを示す. これを、式 (3.4) に代入して、

$$[m] \{C^k\}_{n+1} = \Delta t \{R^k\}_n + ([m] - \Delta t [E]) \{C^k\}_n \quad (3.39)$$

となる.

適当な初期条件と境界条件を設定し、式 (3.36), (3.39) を各時間ステップについて解くことにより、非定常解を得た. 初期条件や境界条件の与え方は次節で述べる.

3.2 スタートアップ流れの数値計算の手順

本研究では非定常流れとして、静止している流体を急激に流動させるスタートアップ流れを考える。そして、縮小部や拡大部を有する流路中の粘弾性流体の流れの数値計算を行うために、以下に示すようにスタートアップ流れをモデル化する。通常の時間進行型の解法と異なる点は、入り口境界条件の与え方である。(3) の入り口境界値を求めるための平行平板間のスタートアップ流れの計算方法は、4.4 節で述べる。

- (1) 初期状態として静止状態を考える。したがって、初期条件として、 $u=v=0$, $C_{xx}^k = C_{yy}^k = 1$, $C_{xy}^k = 0$ を与える。
- (2) 境界条件として、流路壁面にすべりなしの条件を、流路出口で発達条件を与える。
- (3) 流路入り口の境界条件として、平行平板間のスタートアップ流れ⁽⁶⁾の時刻 t における流速 ($u(y,t)$, $v=0$) とひずみ ($C_{ij}^k(y,t)$) の値を各時間ステップで更新しながら与える。
- (4) 式 (3.39) を解いて、 Δt 後のひずみ場を求める。
- (5) 式 (3.36) を解いて、 Δt 後の速度場・圧力場を求める。
- (6) 所定の時刻までの計算が終了するまで、(3) から (5) を繰り返す。

第4章 単純な流れ場における粘弾性流体の非定常流動挙動の数値解析

4.1 緒言

本章では，単純な流れ場における粘弾性流体の非定常流動の数値解析を行う．本研究では非定常流れとしてスタートアップ流れを考える．スタートアップ流れとは，静止している流体を急激に流動させる流れである．

ここでは，単純な流れ場として，単純せん断流れ，一軸伸長流れ，平行平板間流れを取り上げる．そして，それぞれの流れ場におけるスタートアップ流れについて数値計算を行い，その結果をもとに粘弾性流体の流動挙動を考察する．その結果は，次章以降で解析を行う複雑な流れ場における粘弾性流体の非定常流動挙動を考察する際にも使用する．

4.2 単純せん断流れ

4.2.1 基礎方程式

本節では，単純せん断流れのスタートアップ流れを考える．図 4.1 に示すように，流れ方向が x 方向で， y 方向に一定の速度勾配 $\dot{\gamma} = \partial u / \partial y$ をもつ単純せん断流れを考える．

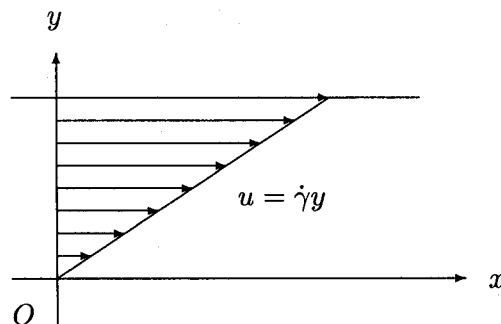


Fig.4.1: Simple shear flow.

このとき, x, y, z 方向の速度, u, v, w は次式で与えられる.

$$\begin{cases} u = \dot{\gamma}y \\ v = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

静止状態にある粘弾性流体に対して, 時刻 $t=0$ において, 式 (4.1) のような速度場を与えたときの応力場の時間変化を調べる. レオノフモデルのひずみ成分の時間変化の式 (2.59) ~ (2.61) に式 (4.1) を代入し, $\partial C_{ij}^k / \partial x = 0$ を考慮すると, 次式を得る.

$$\frac{\partial C_{xx}^k}{\partial t} - 2C_{xy}\dot{\gamma} + \frac{1}{2\theta_k} (C_{xx}^{k2} + C_{xy}^{k2} - 1) = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial C_{xy}^k}{\partial t} - 2C_{yy}\dot{\gamma} + \frac{1}{2\theta_k} (C_{xx}^k C_{xy}^k + C_{xy}^k C_{yy}^k) = 0 \quad (4.3)$$

$$C_{yy}^k = \frac{1 + C_{xy}^{k2}}{C_{xx}^k} \quad (4.4)$$

第 1 法線応力差 N_1 とせん断応力 τ_{xy} はそれぞれ次式で定義される.

$$N_1 = \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} (C_{xx}^k - C_{yy}^k) \quad (4.5)$$

$$\tau_{xy} = \eta_0 s \dot{\gamma} + \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} C_{xy}^k \quad (4.6)$$

また, 式 (4.2) ~ (4.4) の時間微分項を 0 として, これらの方程式を解くと, フィンガーひずみテンソルの各成分が次式のように得られる.

$$C_{xx}^k = \frac{\sqrt{2}X_k}{\sqrt{1+X_k}} \quad (4.7)$$

$$C_{xy}^k = \frac{2\dot{\gamma}\theta_k}{1+X_k} \quad (4.8)$$

$$C_{yy}^k = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+X_k}} \quad (4.9)$$

ここで, $X_k = \sqrt{1+4(\dot{\gamma}\theta_k)^2}$ である. これらを式 (4.5), (4.6) に代入すると, 定常せん断粘度 η_S , 第 1 法線応力差 N_1 が次式のように得られる.

$$\eta_S = \eta_0 s + \sum_{k=1}^N \frac{2\eta_k}{1+X_k} \quad (4.10)$$

$$N_1 = \sqrt{2} \sum_k \frac{\eta_k}{\theta_k} \frac{X_k - 1}{\sqrt{1+X_k}} \quad (4.11)$$

これらの式は、表 2.1 に示したものと同一である。

解析は、基礎方程式 (4.2) ～ (4.6) を無次元化したものについて行う。また、現象を理解しやすくするためにシングルモードのレオノフモデルを考える。したがって、式 (4.2) ～ (4.6) で添字 k を省略し、 $N = 1$ とする。ここでは、次のような無次元化を行う。

$$\dot{\gamma}^* = \theta \dot{\gamma} \quad (4.12)$$

$$t^* = t/\theta \quad (4.13)$$

$$N_1^* = N_1/(\eta/\theta) \quad (4.14)$$

$$\tau_{xy}^* = \tau_{xy}/(\eta/\theta) \quad (4.15)$$

ここで、添字 $*$ は無次元量であることを表す。 $\dot{\gamma}^*$ は、流れにおける弾性力と粘性力の比を表す無次元量であるワイセンベルグ数に相当する。

このとき、式 (4.2), (4.3) は次のようになる。

$$\frac{\partial C_{xx}}{\partial t^*} - 2C_{xy}\dot{\gamma}^* + \frac{1}{2}(C_{xx}^2 + C_{xy}^2 - 1) = 0 \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial C_{xy}}{\partial t^*} - 2C_{yy}\dot{\gamma}^* + \frac{1}{2}(C_{xx}C_{xy} + C_{xy}C_{yy}) = 0 \quad (4.17)$$

そして、無次元化した第 1 法線応力差とせん断応力は次のようになる。

$$N_1^* = C_{xx} - C_{yy} \quad (4.18)$$

$$\tau_{xy}^* = \frac{s}{1-s}\dot{\gamma}^* + C_{xy} \quad (4.19)$$

4.2.2 計算結果と考察

いま、スタートアップ流れを考えるので、フィンガーひずみの初期条件は、 $C_{xx} = C_{yy} = 1$, $C_{xy} = 0$ で与えられる。式 (4.2), (4.3) を、オイラーの前進差分法を用いて時間に関して離散化し、時間進行させながら各時刻におけるフィンガーひずみを計算する。

数値計算は $\dot{\gamma}^*$ を変化させて行った。計算を行った $\dot{\gamma}^*$ は 0.1, 0.5, 1, 10, 15 の 5 種類である。図 4.2 に $N_1^* = C_{xx} - C_{yy}$ の時間変化を、図 4.3 に C_{xy} の時間変化を示す。 C_{xy} は τ_{xy}^* の時間依存部分である。さらに、比較のために図 4.4 に $\dot{\gamma}^* = 1, 5, 10$ のときの $C_{xx} - C_{yy}$ と C_{xy} をあわせて示す。

$C_{xx} - C_{yy}$, C_{xy} ともに $\dot{\gamma}^*$ が大きくなる、すなわち流れ場における弾性的影響が大きくなると、オーバーシュート現象が顕著に生じていることが分かる。オーバーシュート量は、

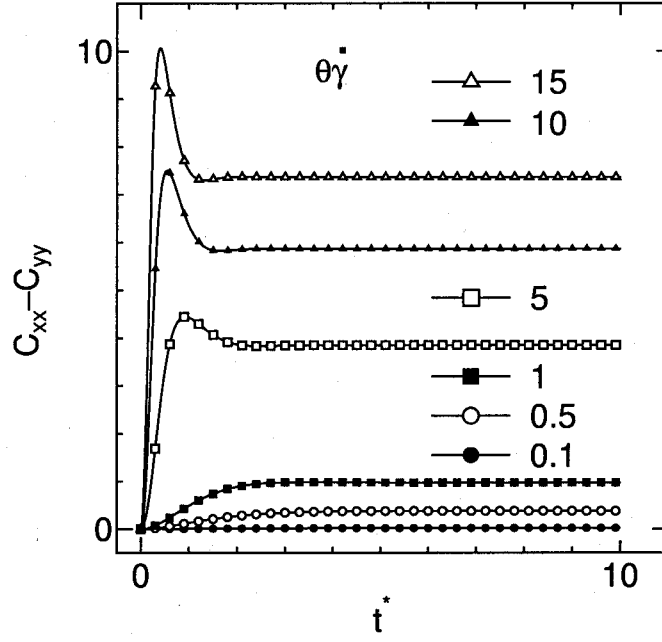


Fig.4.2: Growth of $C_{xx} - C_{yy}$ after the onset of shearing at various non-dimensional shear rate, $\theta\dot{\gamma}$.

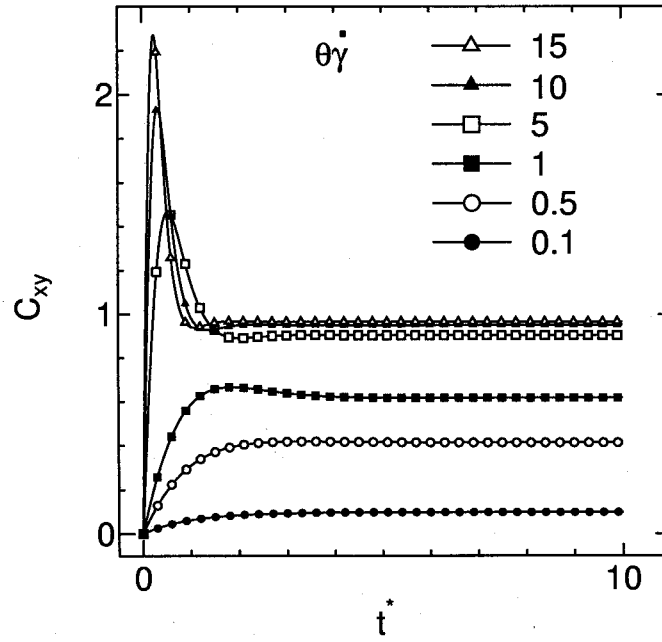


Fig.4.3: Growth of C_{xy} after the onset of shearing at various non-dimensional shear rate, $\theta\dot{\gamma}$.

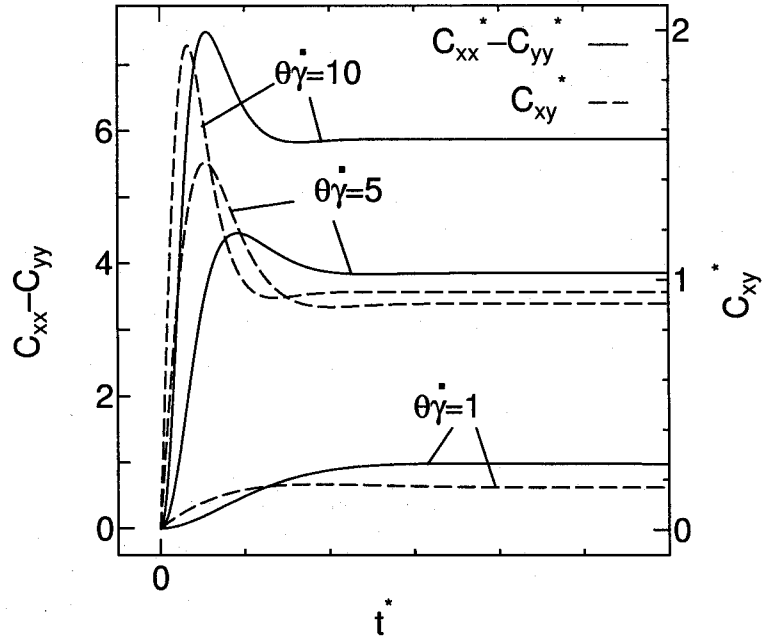


Fig.4.4: Comparison of the growth of $C_{xx} - C_{yy}$ with that of C_{xy} .

$\dot{\gamma}^*$ が大きいほど大きくなっている。この結果は粘弾性流体の実験においてみられる現象と定性的に一致する。図 4.2, 4.3 では分かりにくいだが、いずれの場合も、 $\dot{\gamma}^*$ が 0.5 より大きくなるとオーバーシュート現象が現れることが、数値計算により確認された。

また、いずれの場合にも $\dot{\gamma}^*$ が大きいほど応力の成長が急激であり、最大値をとる時刻が早くなる。そして、定常値に達する時刻も $\dot{\gamma}^*$ が大きいほど早くなる。図 4.4 より、いずれの $\dot{\gamma}^*$ においても、 $C_{xx} - C_{yy}$ の成長は、 C_{xy} よりも遅れることが分かる。

4.3 一軸伸長流れ

4.3.1 基礎方程式

引っ張り方向が x 軸方向、伸長速度が $\dot{\epsilon}$ の一軸伸長流れを考える。このとき速度場 (u, v, w) は次式で与えられる。

$$\begin{cases} u = \dot{\epsilon} \\ v = -\frac{1}{2}\dot{\epsilon}y \\ w = -\frac{1}{2}\dot{\epsilon}z \end{cases} \quad (4.20)$$

このとき、第 k モードのフィンガーひずみテンソル $\mathbf{C}_k^{-1}$ は

$$\mathbf{C}_k^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_k^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k^{-1} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

のように書ける。流路内の流れなどの数値解析においてレオノフモデルが使用される場合、ひずみ硬化パラメータ β を 0 とおいたモデルを使用することが多い。しかし、ここではレオノフモデルの伸長特性を調べるために、 β を 0 としない場合の数値計算も行う。 β を考慮した場合、式 (4.21) をレオノフモデルの式 (2.39) に代入して、整理すると、次式のようなフィンガーひずみテンソルの成分の時間発展を記述する式が得られる。

$$\frac{d\lambda_k}{dt} + \frac{(\lambda_k + 1)(\lambda_k - 1)}{6\lambda_k\theta_k \exp\{\beta F(\lambda_k)\}} = \lambda_k \dot{\epsilon} \quad (4.22)$$

$$F(\lambda_k) = \frac{1}{2} (\lambda_k^2 + 2\lambda_k + 2\lambda_k^{-1} + \lambda_k^{-2} - 6) \quad (4.23)$$

ひずみ硬化パラメータ β を含むモデルでは τ は、

$$\tau = 2\eta_0 s \mathbf{D} \exp\left\{\beta \left(\text{tr } \mathbf{C}_k^{-1} + \text{tr } \mathbf{C}_k - 6\right)/2\right\} + \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} \mathbf{C}_k^{-1} \quad (4.24)$$

で表される。 τ の各成分は、

$$\tau_{xx} = 2\eta_0 s \dot{\epsilon} \exp\{\beta F(\lambda_1)\} + \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} \lambda_k^2 \quad (4.25)$$

$$\tau_{yy} = -\eta_0 s \dot{\epsilon} \exp\{\beta F(\lambda_1)\} + \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} \lambda_k^{-1} \quad (4.26)$$

と書ける。したがって、

$$\tau_{xx} - \tau_{yy} = 3\eta_0 s \dot{\epsilon} \exp\{\beta F(\lambda_1)\} + \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} (\lambda_k^2 - \lambda_k^{-1}) \quad (4.27)$$

を得る。さらに、非定常伸長粘度 $\eta_E^+(\dot{\epsilon}, t)$ は次式で与えられる。

$$\eta_E^+ = 3\eta_0 s \exp\{\beta F(\lambda_1)\} + \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\dot{\epsilon} \theta_k} (\lambda_k^2 - \lambda_k^{-1}) \quad (4.28)$$

式 (4.22), (4.28) で時間微分項を 0 とし、式を整理すると、定常一軸伸長粘度 $\eta_E(\dot{\epsilon}, t)$ が得られる。

$$\eta_E = 3\eta_0 s \exp\{\beta F(\lambda_1)\} + \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\dot{\epsilon} \theta_k} (\lambda_k^2 - \lambda_k^{-1}) \quad (4.29)$$

$$\lambda_k^4 + \lambda_k^3 - 6\dot{\epsilon}\theta_k\lambda_k^2 - \lambda_k - 1 = 0 \quad (4.30)$$

この式で $\beta=0$ としたものは、表 2.1 に示した式と同じである。

ここで、単純せん断流れの場合と同様に、シングルモードのレオノフモデルを考える。したがって、式 (4.22), (4.23), (4.28) で $N=1$ とし、 λ_k を λ で置き換える。さらに、以下のような無次元化を行う。

$$\dot{\epsilon}^* = \theta\dot{\epsilon} \quad (4.31)$$

$$t^* = t/\theta \quad (4.32)$$

$$\tau_{xx}^* - \tau_{yy}^* = (\tau_{xx} - \tau_{yy})/(\eta/\theta) \quad (4.33)$$

$$\eta_E^{+*} = (\tau_{xx}^* - \tau_{yy}^*)/\dot{\epsilon}^* = \eta_E^+/\eta \quad (4.34)$$

このとき、式 (4.22), (4.23), (4.27), (4.28) は以下ようになる。

$$\frac{d\lambda}{dt^*} + \frac{(\lambda+1)(\lambda-1)}{6\lambda \exp\{\beta F(\lambda)\}} = \lambda\dot{\epsilon}^* \quad (4.35)$$

$$F(\lambda) = \frac{1}{2} (\lambda^2 + 2\lambda + 2\lambda^{-1} + \lambda^{-2} - 6) \quad (4.36)$$

$$\tau_{xx}^* - \tau_{yy}^* = \frac{3s\dot{\epsilon}^*}{1-s} \exp\{\beta F(\lambda)\} + \lambda^2 - \lambda^{-1} \quad (4.37)$$

$$\eta_E^{+*} = \frac{3s}{1-s} \exp\{\beta F(\lambda)\} + \frac{1}{\dot{\epsilon}^*} (\lambda^2 - \lambda^{-1}) \quad (4.38)$$

一軸伸長流れのスタートアップ流れを考えると、初期状態で流体は静止しているから、 $\lambda=1$ である。 $\lambda=1$ を初期条件として、式 (4.35) を積分することにより、各時刻の λ の値を得る。本研究では 4 次の Runge-Kutta 法を用いて積分を行った。

4.3.2 計算結果と考察

数値計算は $\dot{\epsilon}^*$ を変化させて行った。計算を行った $\dot{\epsilon}^*$ は 0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, 100, 1000 の 7 種類である。さらにひずみ硬化パラメータ β の影響を調べるために、 $\dot{\epsilon}^*$ が 1 の場合について β を変化させた計算を行った。

はじめに $\beta=0$ の場合について考える。 $\beta=0$ の場合、式 (4.37), (4.38) から伸長応力と伸長粘度の時間変化は、それぞれ $C_{xx} - C_{yy} = \lambda^2 - \lambda^{-1}$ と $(C_{xx} - C_{yy})/\dot{\epsilon}^*$ を調べればよいことが分かる。図 4.5, 4.6 に、それぞれ $C_{xx} - C_{yy}$ の時間変化と、 $(C_{xx} - C_{yy})/\dot{\epsilon}^*$ の時間変化を示す。

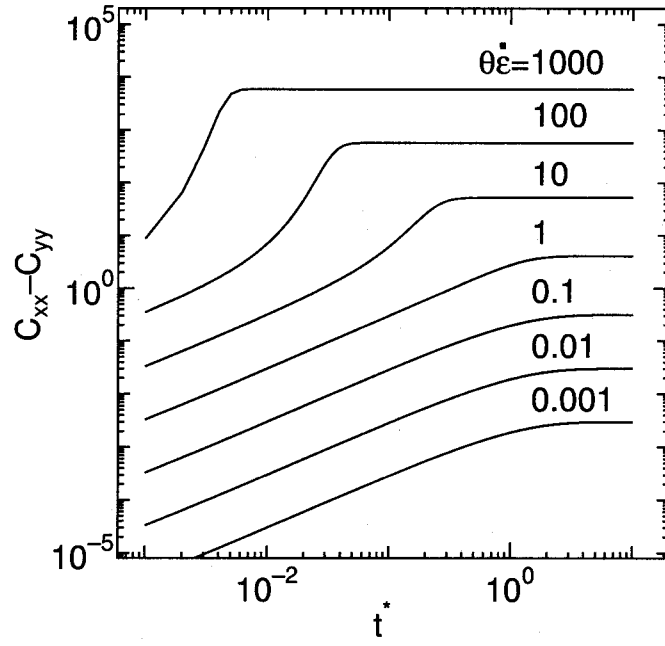


Fig.4.5: Growth of $C_{xx} - C_{yy}$ after the onset of stretching at various non-dimensional elongational strain rates, $\theta\dot{\epsilon}$.

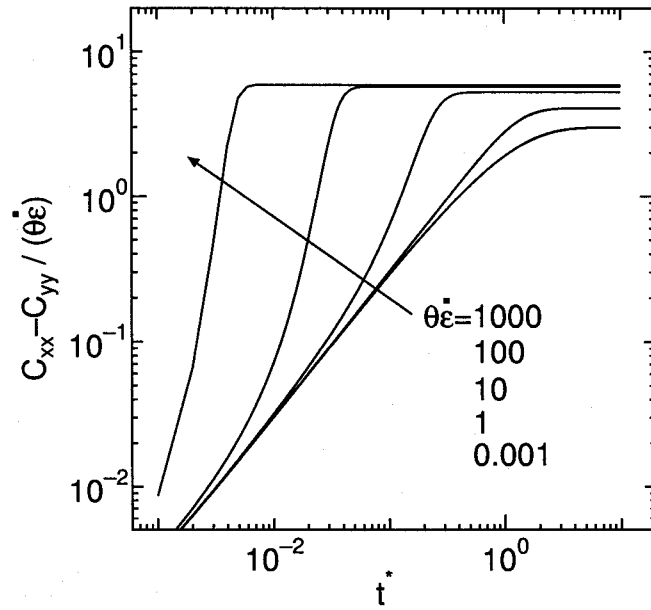


Fig.4.6: Growth of $(C_{xx} - C_{yy})/(\theta\dot{\epsilon})$ after the onset of stretching at various non-dimensional elongational strain rates, $\theta\dot{\epsilon}$.

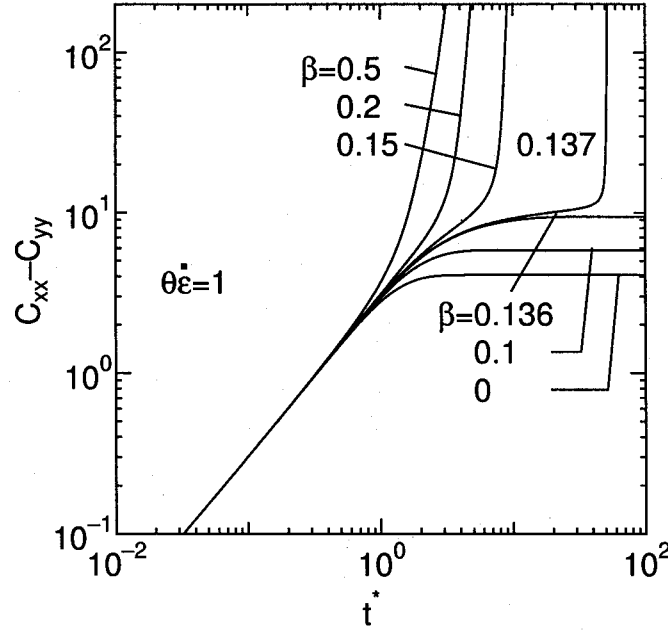


Fig.4.7: Growth of $C_{xx} - C_{yy}$ at various values of β for a non-dimensional elongational strain rate of $\theta\dot{\epsilon}=1$.

図 4.5 から、 $\dot{\epsilon}^*$ が大きいほど、 $C_{xx} - C_{yy}$ は早く定常値に達し、その大きさは大きくなることが分かる。したがって、伸長応力は伸長速度が大きいほど早く定常値になり、大きな値になる。図 4.6 から、伸長粘度は流動開始後に急激に増大し、やがて定常値に達することが分かる。その値は $\dot{\epsilon}^*$ が大きいほど大きく、レオノフモデルの伸長粘度が stretch-thickening 性を有することを示している。また、伸長応力と同様に伸長粘度も $\dot{\epsilon}^*$ が大きいほど早く定常値に達する。

次に、 β を変化させた場合の結果を示す。図 4.7 に $\dot{\epsilon}^*=1$ のときの結果を示す。ここでは、 β を 0, 0.1, 0.136, 0.137, 0.15, 0.2, 0.5 に変化させた。この図から、 β が大きくなると $C_{xx} - C_{yy}$ が大きくなることが分かる。これは、 β が大きくなるほど stretch-thickening 性が強く現れることを意味している。さらに、 β が大きいほど $C_{xx} - C_{yy}$ の成長が急激に現れる、すなわち、伸長応力が急激に増大することが分かる。

また、 β が 0.136 より大きくなると、 $C_{xx} - C_{yy}$ は定常値に達していない。 $C_{xx} - C_{yy}$ の値は、最終的には無限大に発散する。 $\beta=0.136$ は Upadhyay ら⁽⁵⁶⁾ が数値計算により求めた $\dot{\epsilon}^*=1$ の場合の β の臨界値である。そして、 $\dot{\epsilon}^*$ が大きくなるほど臨界値は小さくなる⁽⁵⁶⁾。このことは、数値計算の立場からは、 β が大きくなるほど数値計算が困難になることを意味する。

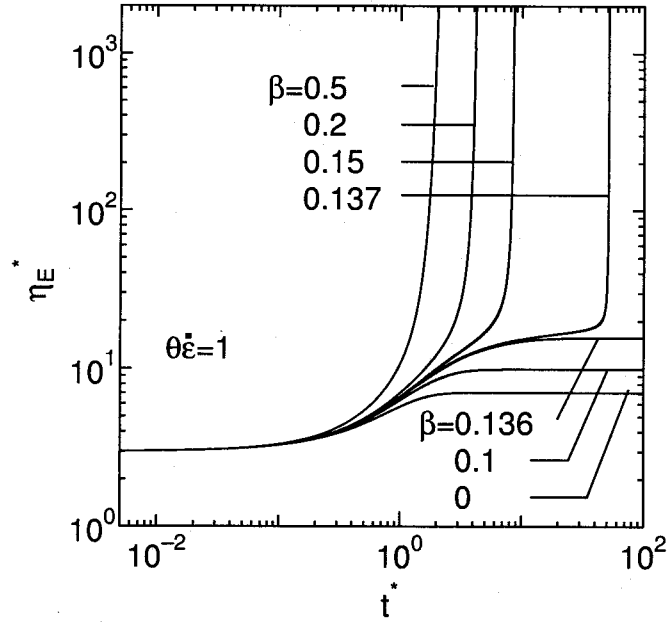


Fig.4.8: Growth of non-dimensionalized uniaxial elongational viscosity at various values of β for a non-dimensional elongational strain rate of $\theta\dot{\epsilon}=1$.

図 4.8 に、無次元一軸伸長粘度 η_E^* の時間変化を示す。ここで、 $s=0.5$, $\dot{\epsilon}^*=1$ とした。伸長粘度の定常値は β が大きいほど大きくなり、伸長粘度の stretch-thickening 性が強く現れる。そして、臨界値以上の β では伸長粘度は定常値をとらず、無限大になる。伸長粘度の成長は β が大きい方が速い。

4.4 平行平板間のスタートアップ流れ

4.4.1 基礎方程式

本節では平行平板間のスタートアップ流れを考える。平行平板間の流れは、複雑な流れ場におけるスタートアップ流れの計算を行う際の流路入り口の境界条件として与えるものである。

図 4.9 に示すような 2 次元の平行平板間流れを考え、流れ方向を x 方向とし、速度勾配方向に y 方向をとり、流速 $u(y, t)$ の時間変化を解析する。ここでは、Isayev の方法⁽⁶⁾にしたがって、平均流速 U が一定の場合のスタートアップ流れを考える。以下に解析の基礎方程式を導く。

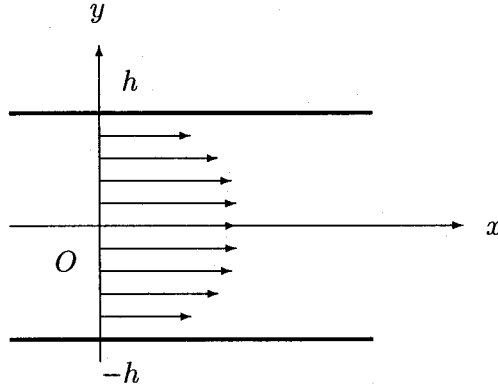


Fig.4.9: The Poiseuille flow.

慣性の影響を無視すると，運動方程式は

$$\frac{\partial \tau_{xy}(y, t)}{\partial y} - \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial x} = 0 \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [\tau_{yy}(y, t) - p(x, y, t)] = 0 \quad (4.40)$$

となる．初期状態では流体は静止しているので， $u(y, 0^-)$ は 0 である．そして，速度 u に関する境界条件として，壁面で $u(h, t) = 0$ ，中心線上で $\partial u(0, t)/\partial y = 0$ を与える．さらに，流量に関して次の条件が要請される．

$$\int_0^h u(y, t) dy = hU \quad (4.41)$$

ここで， h は半流路幅である．式 (4.41) を部分積分すると，

$$- \int_0^h \dot{\gamma}(y, t) y dy = hU \quad (4.42)$$

となる．ここで， $\dot{\gamma}(y, t) = \partial u(y, t)/\partial y$ である．

時刻 $t = 0^+$ において次式で与えられる速度勾配分布を与える．

$$\dot{\gamma}(y, 0^+) = \begin{cases} 0, & 0 < y < h - \epsilon \\ a(h - \epsilon - y), & h - \epsilon \leq y \leq h \end{cases} \quad (4.43)$$

ここで， $\epsilon \ll h$ は境界層厚さである．また定数 a は式 (4.42) を満たすように決められ，次式のようになる．

$$a = -6hU/(\epsilon^3 - 3h\epsilon^2) \quad (4.44)$$

式 (2.59) ~ (2.61) で, $v=0$, $\partial u/\partial y = \dot{\gamma}$, $\partial C_{ij}^k/\partial x=0$ を考慮すると, フィンガーひずみ $C_{ij}^k(y, t)$ の成長に関する式は以下ようになる.

$$\frac{\partial C_{xx}^k}{\partial t} - 2C_{xy}\dot{\gamma} + \frac{1}{2\theta_k} (C_{xx}^{k2} + C_{xy}^{k2} - 1) = 0 \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial C_{xy}^k}{\partial t} - C_{yy}\dot{\gamma} + \frac{1}{2\theta_k} (C_{xx}^k C_{xy}^k + C_{xy}^k C_{yy}^k) = 0 \quad (4.46)$$

$$C_{yy}^k = \frac{1 + C_{xy}^{k2}}{C_{xx}^k} \quad (4.47)$$

初期条件として, $C_{xx}(y, 0^-) = C_{yy}(y, 0^-) = 1$, $C_{xy}(y, 0^-) = 0$ を与える.

また, τ の各成分は次式で表される.

$$\tau_{xx} = \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} C_{xx}^k \quad (4.48)$$

$$\tau_{xy} = \eta_0 s \dot{\gamma} + \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} C_{xy}^k \quad (4.49)$$

$$\tau_{yy} = \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} C_{yy}^k \quad (4.50)$$

式 (4.39) を y について積分し, $\dot{\gamma}(0, t)=0$ を考慮すると次式を得る.

$$\tau_{xy} = -\Lambda(t)y \quad (4.51)$$

ここで, $\Lambda = -\partial p/\partial x$ である. これを, 式 (4.49) に代入すると, $\dot{\gamma}$ は次式のように書ける.

$$\dot{\gamma}(y, t) = \frac{-\Lambda(t)y - \sum_{k=1}^N (\eta_k/\theta_k) C_{xy}^k(y, t)}{\eta_0 s} \quad (4.52)$$

式 (4.52) を式 (4.42) に代入して整理すると,

$$\Lambda(t) = \frac{3\eta_0 s U}{h^2} - \frac{3}{h^3} \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} \int_0^h y C_{xy}^k dy \quad (4.53)$$

を得る.

以上により求められた基礎方程式を用いて次の手順で計算を行う.

- (1) ϵ の値を仮定し, 初期条件を与える.
- (2) 式 (4.45) ~ (4.47) より C_{ij}^k の値を更新する.
- (3) 式 (4.52) と式 (4.53) から $\Lambda(t)$ と $\dot{\gamma}$ を求める.
- (4) 流れが定常になるまで (2), (3) の計算を繰り返す.

(5) $\epsilon \rightarrow 0$ となるように ϵ の値を変えながら、計算結果が ϵ に依存しなくなるまで、上記の計算を繰り返す。

ここで、式 (4.45), (4.46) の積分にはオイラー前進差分法を適用し、式 (4.53) の積分には台形公式を適用する。 u は $\dot{\gamma}$ から次式を用いて計算される。

$$u(y) = \int_h^y \dot{\gamma} dy \quad (4.54)$$

4.4.2 計算結果

まず、緩和時間 θ を変化させた場合の計算結果を示す。平均流速 U 、半流路幅 h 、粘度 η 、 s は固定である。ここでは、 $U=1$ mm/s, $h=1$ mm, $\eta=1$ Pa·s, $s=0.1$ として、 η を 0.1 s, 1 s, 10 s に変えて計算を行った。このときワイゼンベルグ数 $We = \theta U/h$ はそれぞれ、0.1, 1, 10 となる。 We が大きいほど弾性的効果が大きくなる。

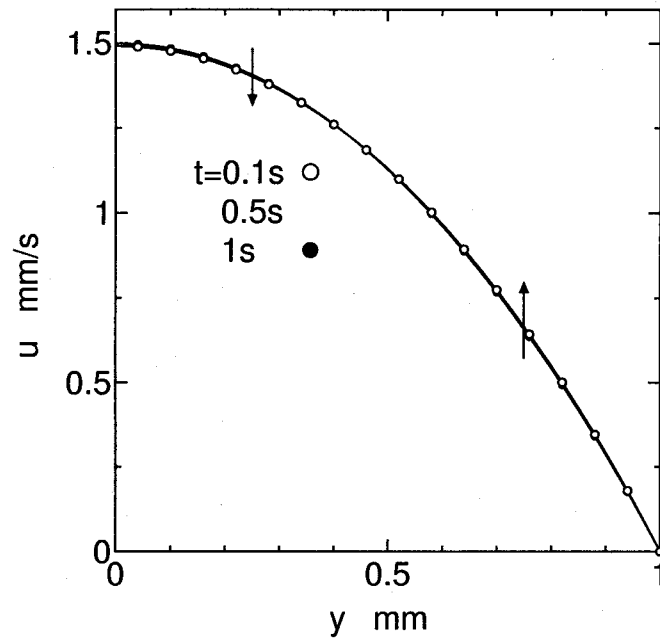
図 4.10 に速度分布の時間変化を示す。 $\theta=0.1$ s の場合は流動開始後、すぐに定常値に達し、速度分布の変化は小さい。一方、 $\theta=1$ s, 10 s の場合には速度分が大きく変化する。速度分布は流動開始直後は放物線状で、ニュートン流体の速度分布に近いが、時間とともに流路の中心 ($y=0$) 付近が平らな速度分布へと変化していく。

このような速度分布の変化は、流体の shear-thinning 粘性に関連付けて説明される。壁面付近ではせん断速度が大きいため、shear-thinning 粘性により、壁面に近いほうが粘度が小さくなる。したがって、壁面付近のほうが流体が流れやすくなるため、壁面付近の流速が大きくなり、逆に中心付近の流速は小さくなる。そして、平らな速度分布へと変化する。

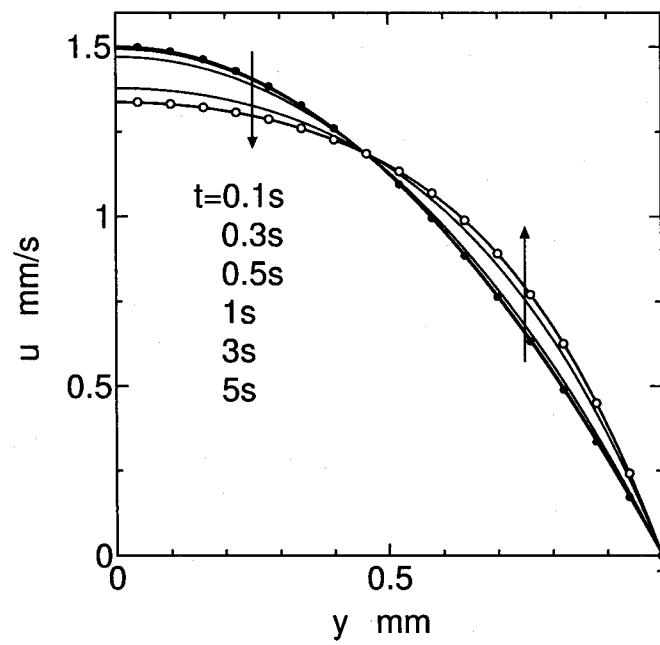
図 4.11 に中心線上の流速 u の時間変化を示す。この図より、 u は θ が小さい方が早く定常値に達することが分かる。すなわち、弾性的効果が大きいほど、流れが定常値に達するまでに時間を要する。また、 $\theta=0.1$ s のときにはあまり顕著ではないが、 $\theta=1$ s, 10 s の結果では、 u はオーバーシュートとアンダーシュートをした後に定常値に達している。

続いて、次章以降の複雑な流れ場における数値解析で使用するモデルパラメータを使用したときの計算結果を示す。計算に使用したパラメータはポリスチレン融液を想定したものの⁽⁶⁸⁾で、 $s=0.09$, $\eta_1 = 5.44 \times 10^4$ Pa·s, $\eta_2 = 1.50 \times 10^4$ Pa·s, $\theta_1 = 0.80$ s, $\theta_2 = 0.027$ s である。

流路幅は次章以降の解析で考える流路に合わせて、 h を 14 mm とした。そして、計算は U を 1 mm/s, 5 mm/s, 10 mm/s の 3 種類に変えて行った。このときワイゼンベルグ数 We は、それぞれ 0.66, 3.3, 6.6 となる (マルチモードモデルの場合のワイゼンベルグ数の定義は次章の式 (5.7) を参照)。

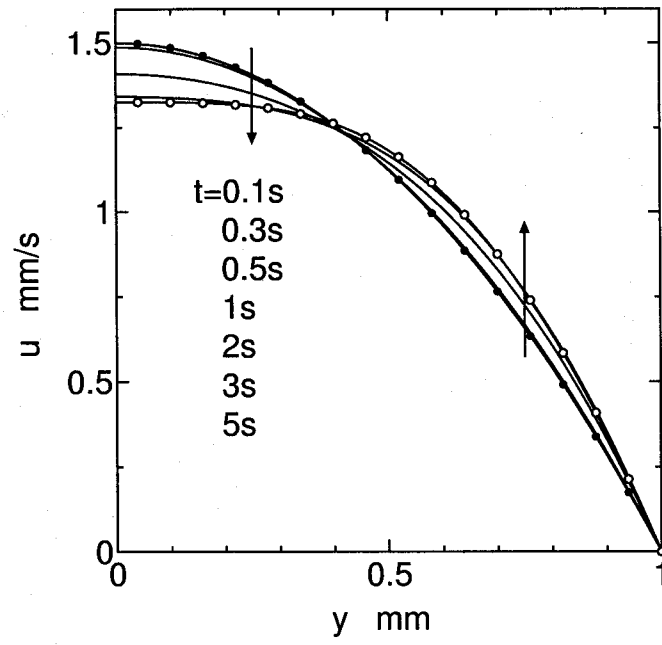


(a) $\theta = 0.1$ s



(b) $\theta = 1$ s

Fig.4.10: (a) and (b).



(c) $\theta=10$ s

Fig.4.10: Development of the velocity profile following start-up flow in a parallel channel for three values of θ : (a) $\theta=0.1$ s, (b) $\theta=1$ s, (c) $\theta=10$ s.

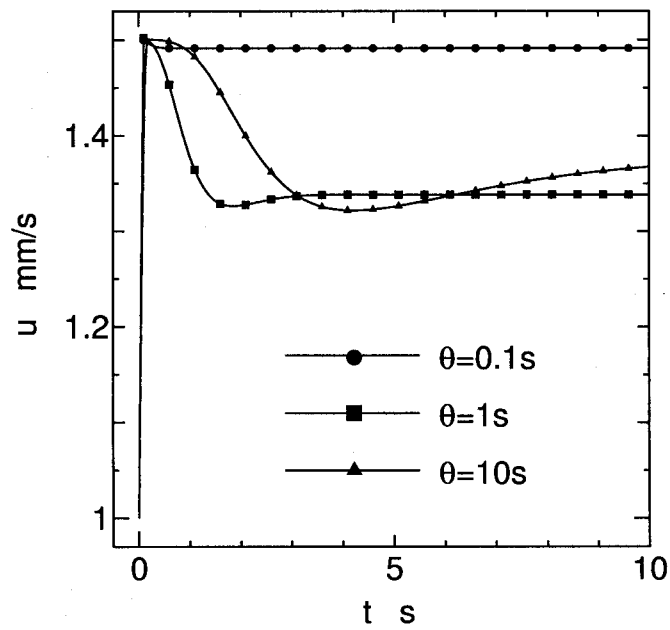


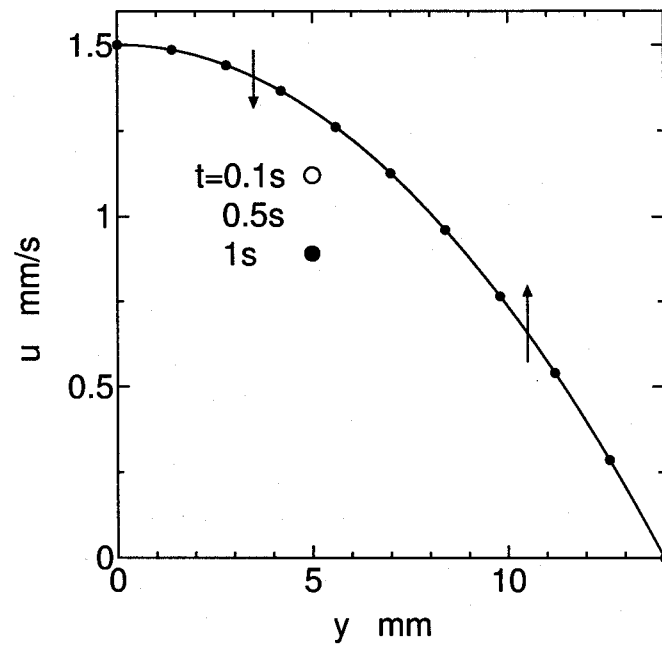
Fig.4.11: Change in the center line velocity with time at $\theta=0.1$ s, 1 s and 10 s.

図 4.12 に速度分布の時間変化を，図 4.13 に中心線上の u の時間変化を示す．先に示した結果と同様に， We が大きい場合に速度分布の時間変化が大きい．そして， We が大きいほど定常値に達するまでの時間が長くなることが分かる．

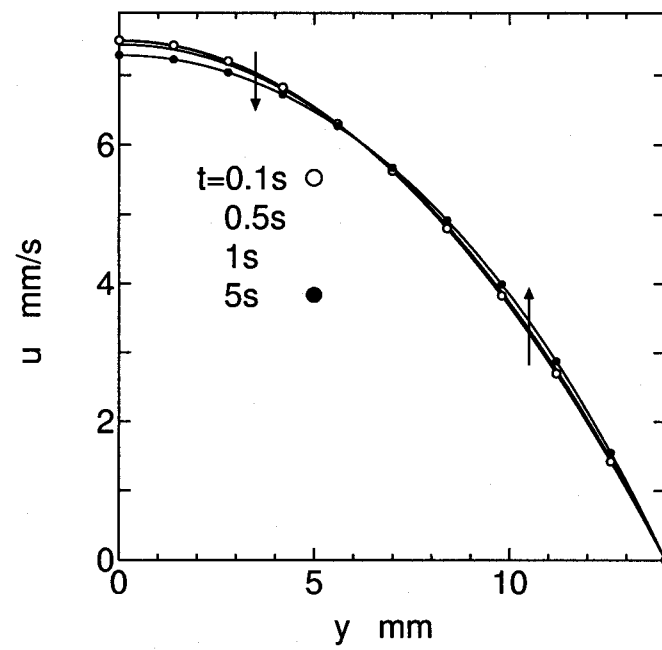
4.5 結 言

本章では単純な流れ場における粘弾性流体の非定常流動挙動についてレオノフモデルを用いた数値解析を行った．ここでは，単純せん断流れ，一軸伸長流れ，平行平板間流れを取り上げ，スタートアップ流れの数値計算を行った．いずれの流れ場においても，レオノフモデルは粘弾性流体の非定常流動挙動を定性的に記述することができた．

また，数値計算と実験結果との定量的な比較について，これまでにいくつかの報告がなされている．例えば，Upadhyay らは数種類の高分子溶液および融液を用いて，非定常せん断特性⁽⁵⁵⁾や多段せん断変形⁽⁵⁷⁾について，実験結果とレオノフモデルによる予測結果との比較を行っている．高橋ら⁽⁵⁹⁾は高分子の濃厚溶液と高分子融液に対して，定常せん断流動と流動停止後の応力緩和について，実験結果とレオノフモデルの予測結果との比較を行った．また，伸長流れに関しては，Upadhyay ら⁽⁵⁶⁾が非定常一軸伸長粘度や伸長応力について，実験結果とレオノフモデルの結果との比較を行っている．いずれの場合も，実験結果とモデルの予測結果の比較的良好な一致が報告されている．また，平行平板間流れについては，Isayev⁽⁶⁾がポリスチレン融液を用いて，平均流速一定あるいは圧力勾配一定の条件で実験を行い，レオノフモデルを用いた計算結果との比較を行っている．

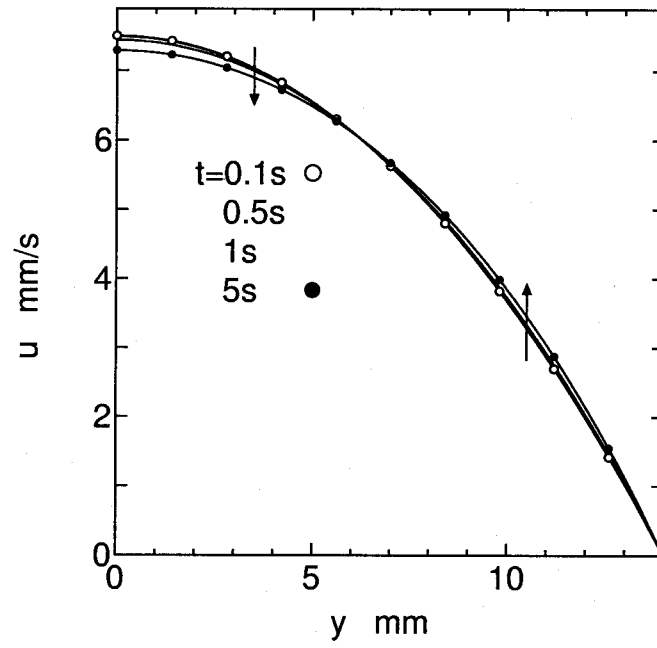


(a) $U = 1$ mm/s



(b) $U = 5$ mm/s

Fig.4.12: (a) and (b).



(c) $U=10$ mm/s

Fig.4.12: Development of the velocity profile following start-up flow in a parallel channel for three values of U : (a) $U=1$ mm/s, (b) $U=5$ mm/s, (c) $U=10$ mm/s.

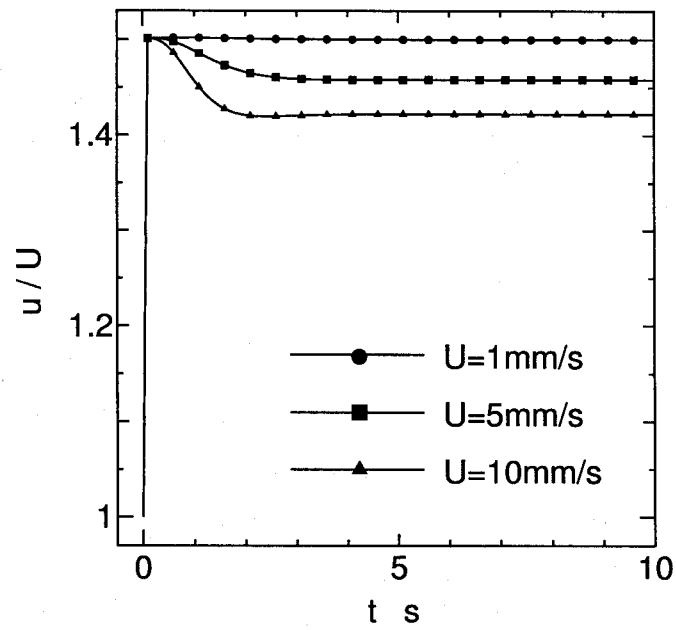


Fig.4.13: Change in the center line velocity with time for three values of U .

第5章 急縮小流路における粘弾性流体の非定常流れの数値解析

5.1 緒 言

本章では 2 次元急縮小流路における粘弾性流体のスタートアップ流れの数値解析を行い、粘弾性流体の非定常流動挙動を考察する。

粘弾性流体の急縮小流れは、成形機のダイ入口付近の流れの解析に関連した問題として、これまでに多くの研究がなされている⁽⁶⁹⁾。粘弾性流体の急縮小流れでは、流路角部に大きな循環二次流れが発生するなどの興味深い現象が現れる。流れ模様や縮小部入口における圧力損失は流動条件によって大きく変化する。このような縮小流路における粘弾性流体の流動のメカニズムと、流体のレオロジー特性、流動条件との関係を調べることは、工業的な応用面における重要性に加えて、非ニュートン流体力学的見地からも興味深い問題である。実験による研究だけではなく、急縮小流れは数値計算による研究においても、最もよく研究対象とされている流れのひとつである⁽⁷⁰⁾。また、新しい数値計算手法のベンチマーク問題としても使用されている。

伸長特性の異なる高分子融液を用いた実験結果をもとに、縮小部付近の流れ挙動に対して、粘弾性流体の伸長特性が重要な役割を果たしていることが、指摘されている⁽⁷¹⁾⁽⁷²⁾。また、伸長粘度の stretch-thickening 性が縮小流れにおける渦の成長を促進するという数値計算結果⁽⁷³⁾も報告されている。さらに、White ら⁽⁷¹⁾は、流路角部に生じる渦は縮小部付近の伸長流れに起因する応力の増大を抑えるための機構 (stress relief mechanism) としての働きをすると提案した。しかし、縮小部付近の流れは伸長流れとせん断流れが混在する複雑な流れ場であるために、縮小流れにおける粘弾性流体の流動のメカニズムに関しては、十分に解明されていない点も多い。

そこで、本解析では粘弾性流体の伸長特性と縮小流路における非定常流動挙動との関係について調べ、さらに循環二次流れが stress relief mechanism として働いているかどうかを数値計算により検証するとともに、非定常流れにおける渦の成長現象と流れ場との関係について考察することを主な目的とする。

5.2 解析に用いる諸量について

ここで、第 5, 6, 7 章で行う複雑な流れ場における粘弾性流体の非定常流動挙動の解析の際に使用する諸量について説明する。

5.2.1 物理量

解析は速度場と応力場に対して行う。速度場については x, y 方向の流速 u, v と速度ベクトルを用いて解析を行う。応力場では、法線応力差 $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ とせん断応力 τ_{xy} を考える。

$\tau_{xx} - \tau_{yy}$ は式 (2.62), (2.64) から式 (5.1) のように表される。 τ_{xy} は式 (2.63) で表される。

$$\tau_{xx} - \tau_{yy} = 2\eta_0 s \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} (C_{xx}^k - C_{yy}^k) \quad (5.1)$$

流路の中心線上では、 $\partial v / \partial y = 0$ で $\partial u / \partial x$ は伸長速度に相当する。そして、 $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ は中心線上では伸長応力に相当する。なお、数値計算では τ の各成分の値を求めることが可能であるが、実験においては圧力 p と法線応力 τ_{ii} を分離して測定することはできず、法線応力差としてのみ測定が可能である。したがって、本研究でも法線応力差を用いて解析を行う。

さらに、応力パワー w を用いた解析を行う。応力パワーは、応力テンソル $\sigma = -p\mathbf{I} + \tau$ とひずみ速度テンソル $\mathbf{D}$ のスカラー積、

$$w = \sigma : \mathbf{D} \quad (5.2)$$

で定義される。応力パワーは、物理的には、現時点での物体の単位体積あたりに、応力が単位時間になす仕事を表す⁽⁷⁴⁾⁽⁷⁵⁾。レオノフモデルの場合、式 (2.51) を式 (5.2) に代入すると、 w は式 (5.3) ~ (5.5) のようになる。ここで、非圧縮性より $\mathbf{I} : \mathbf{D} = \text{tr } \mathbf{D} = 0$ であることを用いた。

$$w = w_v + \sum_{k=1}^N w_e^k \quad (5.3)$$

$$w_v = 2\eta_0 s \mathbf{D} : \mathbf{D} \quad (5.4)$$

$$w_e^k = \frac{\eta_k}{\theta_k} \mathbf{C}^k : \mathbf{D} \quad (5.5)$$

式 (5.3) の右辺第 1 項は粘性による寄与を、第 2 項は弾性による寄与を表す。各項をそれぞれ w_v, w_e で表す。 w_v, w_e はそれぞれ、粘性エネルギーの消散と弾性エネルギーの蓄積に関係する量である。

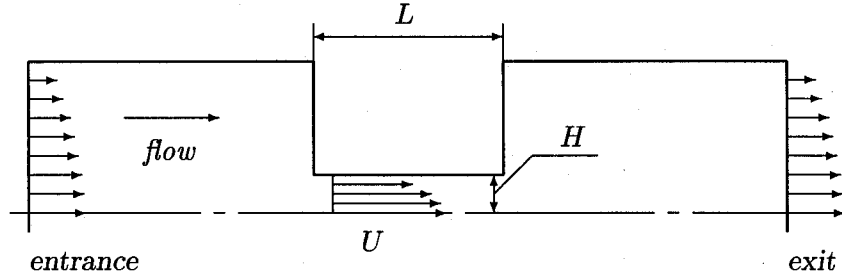


Fig.5.1: Definition of the characteristic length, L and H , and the characteristic velocity, U .

5.2.2 無次元量の定義

ここで，解析の際に使用する無次元量を定義する．図 5.1 に示す流路内の流れを解析する場合を考える．このとき，流れに関係する無次元量であるレイノルズ数 Re ，ワイセンベルグ数 We ，デボラ数 De を以下のように定義する．

$$Re = \frac{\rho U H}{\eta_0} \quad (5.6)$$

$$We = \frac{\lambda U}{H} \quad (5.7)$$

$$De = \frac{\lambda U}{L} \quad (5.8)$$

ここで U は代表速度， H ， L は代表長さで，図 5.1 に示したものである． U と H は縮小部分で定義する．したがって，急縮小流路の場合には， U と H はそれぞれ下流側の平均流速と半流路幅をとり，急拡大流路の場合には， U と H として，それぞれ上流側の平均流速と半流路幅をとる．そして， L は急縮小急拡大流路の場合のみに定義される．また， λ は代表緩和時間で次式で定義される．

$$\lambda = \frac{\sum_{k=1}^N \eta_k \theta_k}{\eta_0} \quad (5.9)$$

ワイセンベルグ数 We は流れ場の弾性力と粘性力の比を表し，デボラ数は，流体のもつ特性時間と流れを代表する時間の比を表す．式 (5.8) と式 (5.7) は類似しており，代表長さの取り方が違うだけである． De を式 (5.7) のように定義して，流れにおける弾性力と粘性力の比を表すために用いている例もあるが，本論文では上記の意味で We と De を定義し，両者を区別して用いる． De は急縮小急拡大流れの解析においてのみ使用する．

Table 5.1: Parameters of the Leonov Model

k	s [-]	η_k [Pa · s]	θ_k [s]
1	9.0×10^{-2}	5.44×10^3	0.80
2		1.50×10^3	0.027

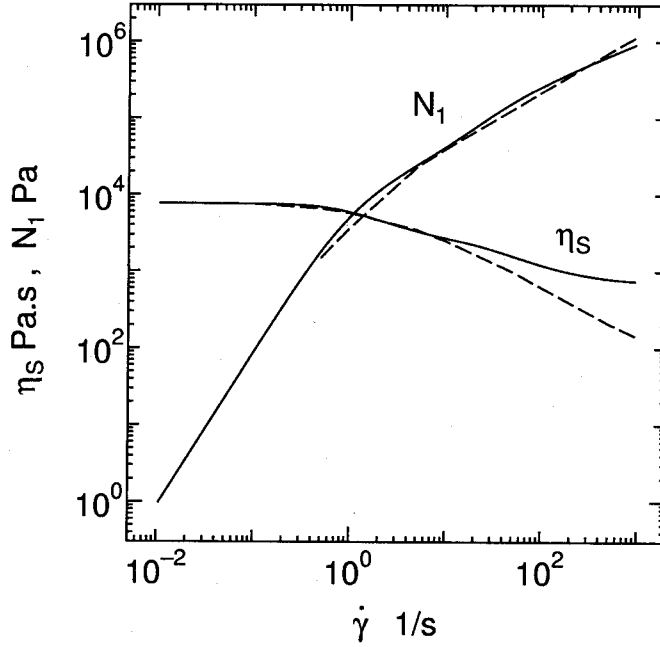


Fig.5.2: Shear viscosity, η_s , and the first normal stress difference, N_1 , versus shear rate, $\dot{\gamma}$. Solid line: prediction of the Leonov model. Dashed line: experimental Data.

5.3 試料流体

解析はポリスチレン融液に対して Isayev ら⁽⁶⁸⁾ が決定したパラメータを使用して行った。モデルパラメータを表 5.1 に示す。また、流体の密度 ρ は 960 kg/m^3 とした。

解析に用いた試料流体のレオロジー特性を示す。試料流体の定常せん断粘度 η_s と第 1 法線応力差 N_1 を図 5.2 に、非定常一軸伸長粘度 η_E^+ を図 5.3 に示す。図中の破線は Wales による測定値⁽⁷⁶⁾⁽⁷⁷⁾ である。試料流体の η_s は、せん断速度の増加とともに低下する shear-thinning 性を示し、 η_E^+ は伸長速度 $\dot{\epsilon}$ の増大とともに増大する stretch-thickening 性を示している。また η_E^+ は $\dot{\epsilon}$ が大きいほど早く定常値に達することが分かる。

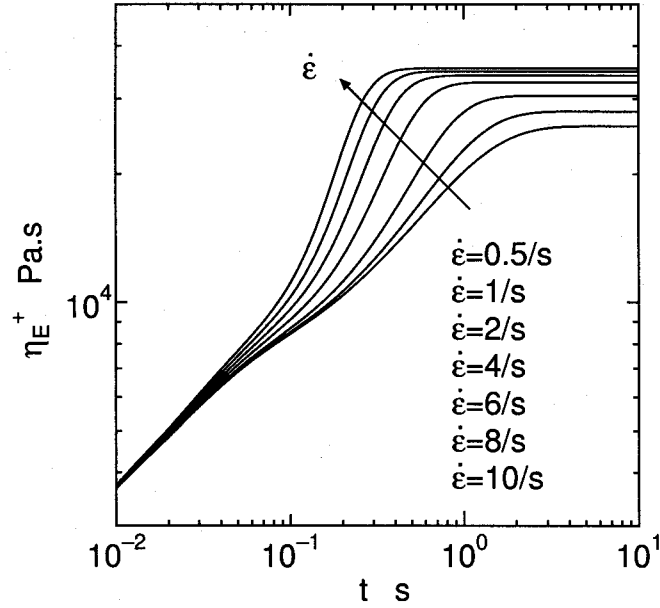


Fig.5.3: Growth of uniaxial elongational viscosity, η_E^+ , at various elongational strain rates, $\dot{\epsilon}$.

5.4 計算条件

解析は縮小比が 4 : 1 の急縮小流路について行った。図 5.4 に解析流路の形状と座標系を，図 5.5 に数値計算に使用したメッシュ分割を示す。図 5.4 には境界条件もあわせて示した。

本解析では 3 種類の入り口平均流速 $\bar{u}_{\text{ent}} = 1, 10, 20 \text{ mm/s}$ について計算を行った。このときワイセンベルグ数 We はそれぞれ 0.66, 6.6, 13 になる。代表速度 U と代表長さ H として，それぞれ縮小部下流側流路の平均流速と縮小部下流側の半流路幅を用いて， We を評価した。本計算で使用するモデルパラメータは高分子融液を想定したものであるため，試料流体の粘度は非常に高い。それで，レイノルズ数 Re は本計算の流速の範囲では 10^{-6} オーダーとなる。したがって，慣性力の影響は無視できる。

さらに比較のためにニュートン流体についても計算を行った。流体密度は粘弾性流体の場合と同じで，粘度を η_0 とした。

また，本解析では緩和時間の短い第 2 モードに対して quick adaptation 近似⁽⁶⁶⁾ を適用した。そして，対称条件 ($y=0$ で $v=0, C_{xy}^k=0, \partial u/\partial y = \partial p/\partial y = \partial C_{xx}^k/\partial y = \partial C_{yy}^k/\partial y = 0$) を用いて， $y \geq 0$ の領域について解析を行った。

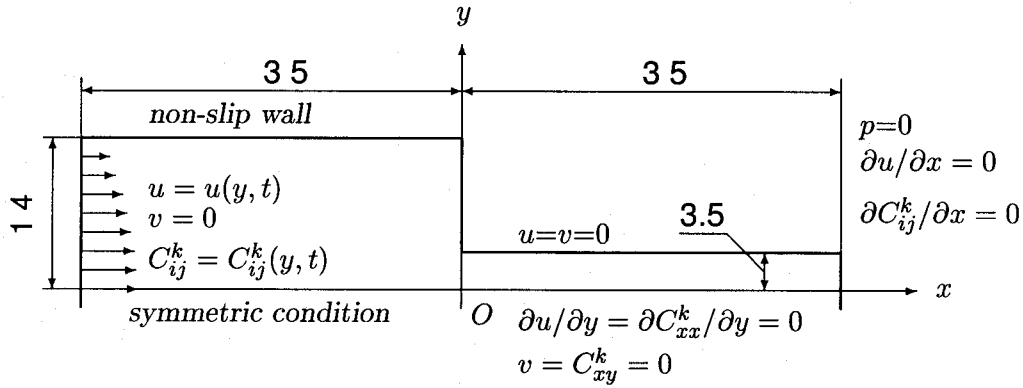


Fig.5.4: Schematic diagram of a 4 to 1 abrupt contraction channel and boundary conditions.

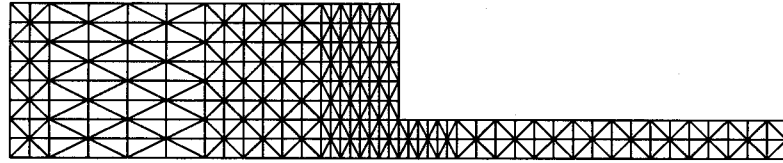


Fig.5.5: Finite element mesh for the 4 to 1 abrupt contraction channel.

5.5 計算結果と考察

5.5.1 速度場

速度場の計算結果を示す。図 5.6 に $\bar{u}_{\text{ent}} = 20 \text{ mm/s}$ ($We=13$) の場合の速度ベクトルの時間変化を示す。図 5.6 にはニュートン流体の計算結果も示している。ニュートン流体の流れは流動開始後すぐに定常状態に達するために、ここでは定常状態の結果のみを示している。いずれの流体の場合にも、流路角部に循環二次流れが発生していることが分かる。粘弾性流体の急縮小流れにおいてこのような渦が発生することはよく知られている現象である⁽¹⁾。また、ニュートン流体の場合にも、レイノルズ数が小さな流れでは、流路角部に渦が発生する⁽⁷⁸⁾。そして、図 5.7 に示すようにワイセンベルグ数が大きいほど渦は大きくなる。粘弾性流体の場合には、渦が時間とともに成長している。流動開始直後の $t=0.1 \text{ s}$ では比較的小さな渦であったものが、時間とともに大きくなり、最大値をとった後に定常状態になる。ほぼ定常状態である $t=5 \text{ s}$ では $t=1 \text{ s}$ よりも少し渦が小さくなっている。しかし、ニュートン流体では、流動開始直後に定常な流れ場になり、粘弾性流体のような渦の成長はみられない。また、渦の大きさは粘弾性流体のものよりも小さい。循環二次流れの成長は後述する速度勾配を通じて、応力場の成長と関連があることが分かった。

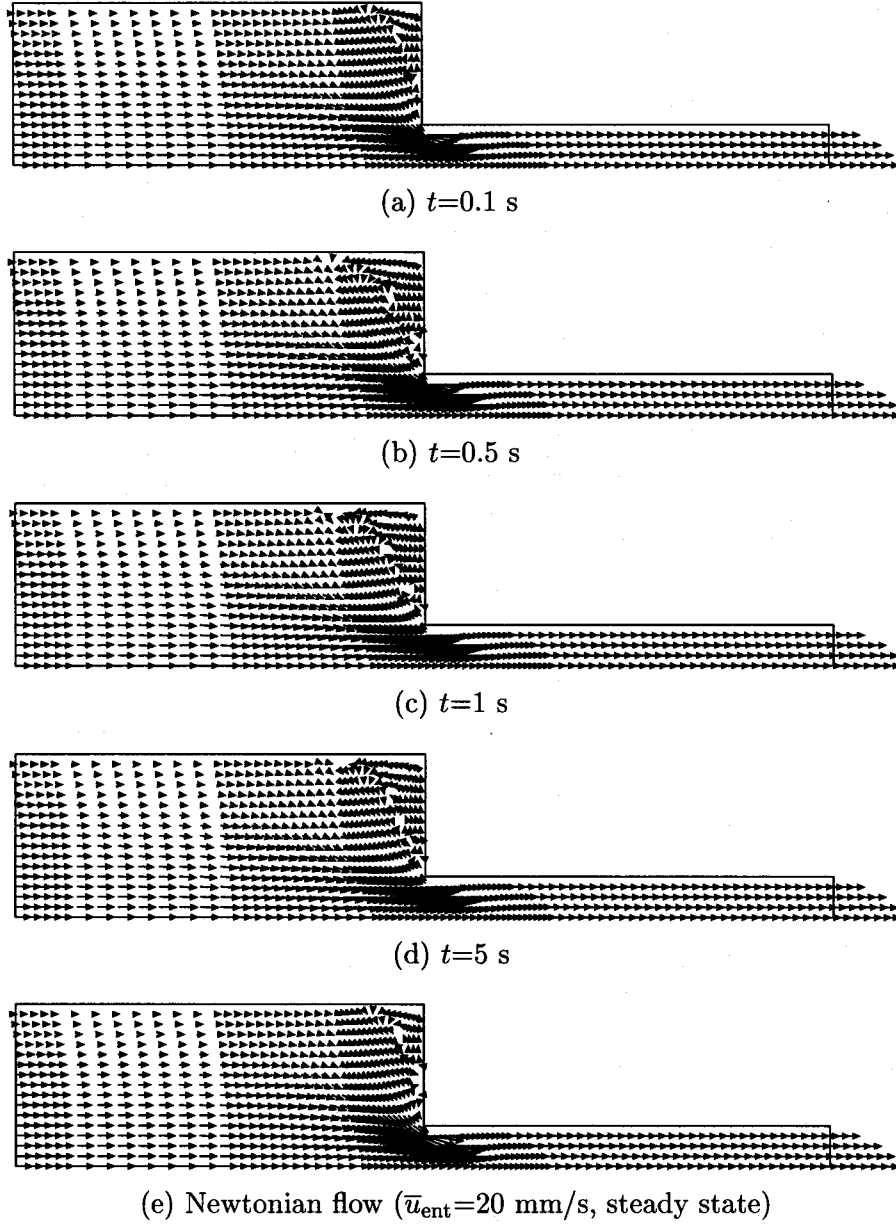


Fig.5.6: (a)–(d) Velocity vectors of viscoelastic flow at $We=13$. (e) Velocity vectors of Newtonian flow of $\bar{u}_{\text{ent}}=20$ mm/s at steady state.

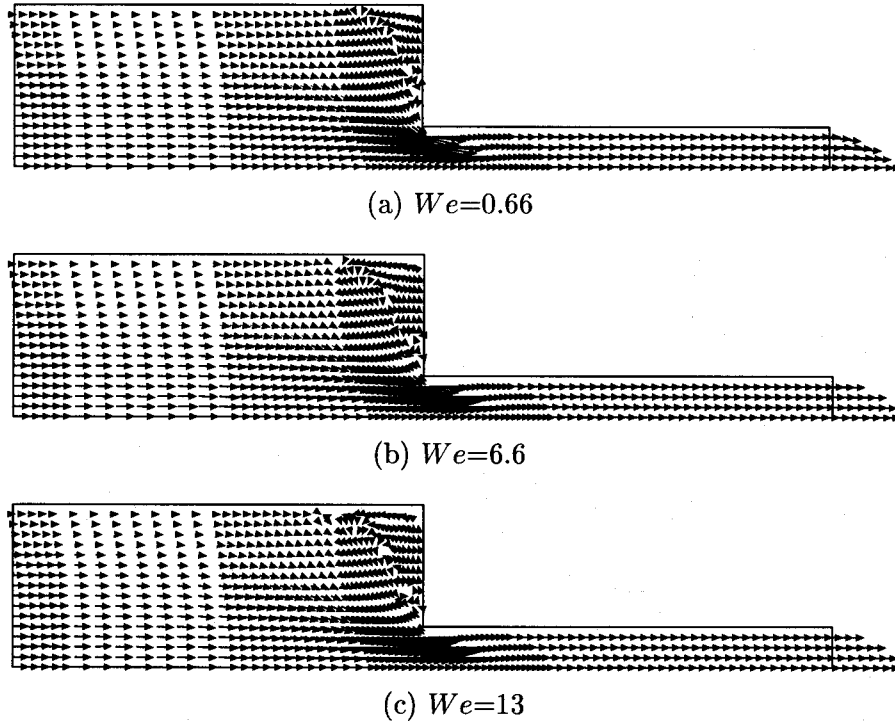
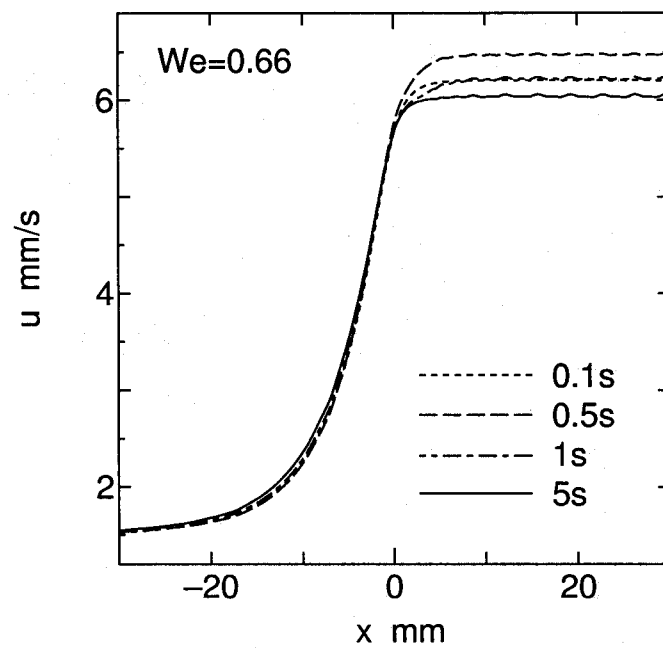


Fig.5.7: Velocity vectors of viscoelastic flow at $We=0.66$, 6.6 and 13 at $t=1$ s.

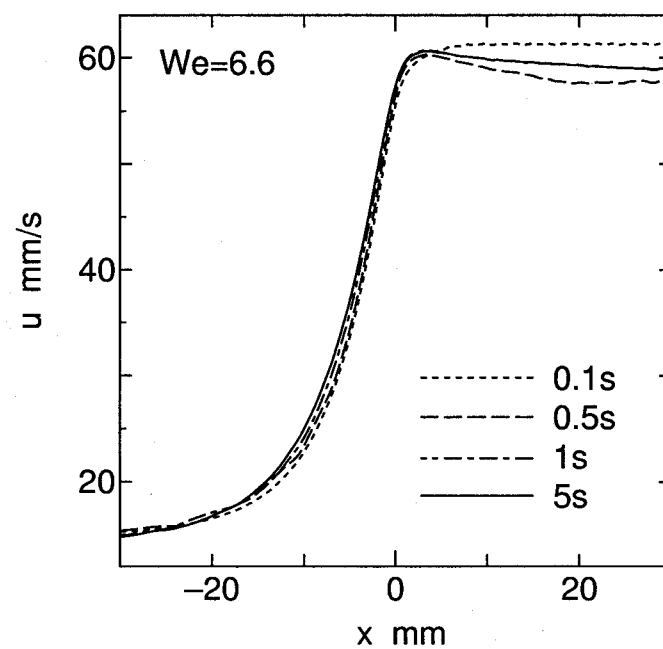
図 5.8 に粘弾性流体の場合の流れ方向流速 u の中心線上分布の時間変化を示す。そして、図 5.9 に、粘弾性流体とニュートン流体の $t=5$ s における u の中心線上分布の比較を示す。図中の実線が粘弾性流体の結果、破線がニュートン流体の結果である。

粘弾性流体の場合には、縮小部入り口の少し下流側で u のオーバーシュート領域がみられる。これは、流体が縮小流れで加速された後に下流側の領域で発達した流れの速度分布になるまでに必要な助走区間が、流体の粘弾性的性質によって長くなるためであると考えられる。一方、ニュートン流体の流れでは、本計算の条件では慣性力の影響がないために、縮小部へ流入した直後に流れが発達するので、粘弾性流体の場合にみられるような流速のオーバーシュート領域はみられない。また、粘弾性流体に比べて縮小部の入り口に近い位置から流速が大きくなり始めている。これは、粘弾性流体の流れでは流路角部に大きな渦が存在するために、ニュートン流体の場合よりも上流側から流体の加速が始まるのに対して、ニュートン流体の流れでは流路角部に存在する渦は小さいため、流体が縮小部の近くにくるまで急速な加速が生じないからである。ここで述べた流速分布の違いは、後述する速度勾配の分布を用いて比較すると、より顕著に粘弾性流体とニュートン流体との違いが分かる。

図 5.10 に、流れ方向の速度勾配 $\partial u / \partial x$ の中心線上分布の時間変化を示す。中心線上で

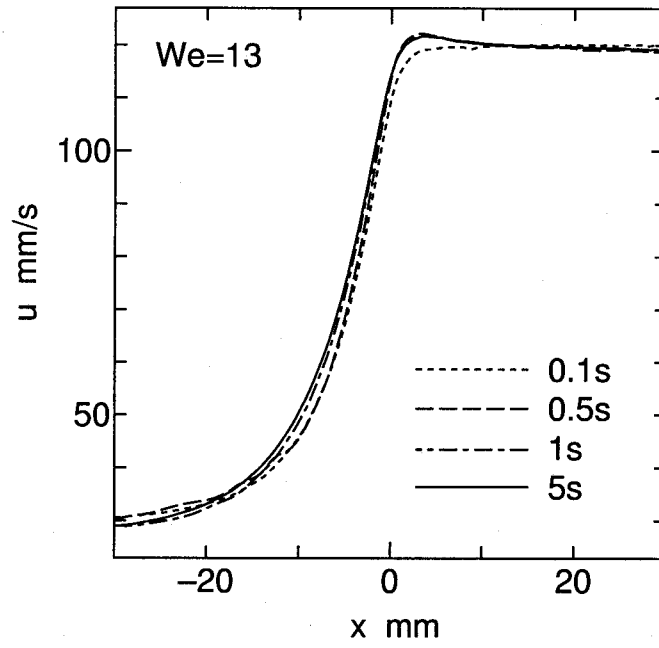


(a) $We=0.66$



(b) $We=6.6$

Fig.5.8: (a) and (b).



(c) $We=13$

Fig.5.8: Velocity, u , along the center line: (a) $We=0.66$, (b) $We=6.6$, (c) $We=13$.

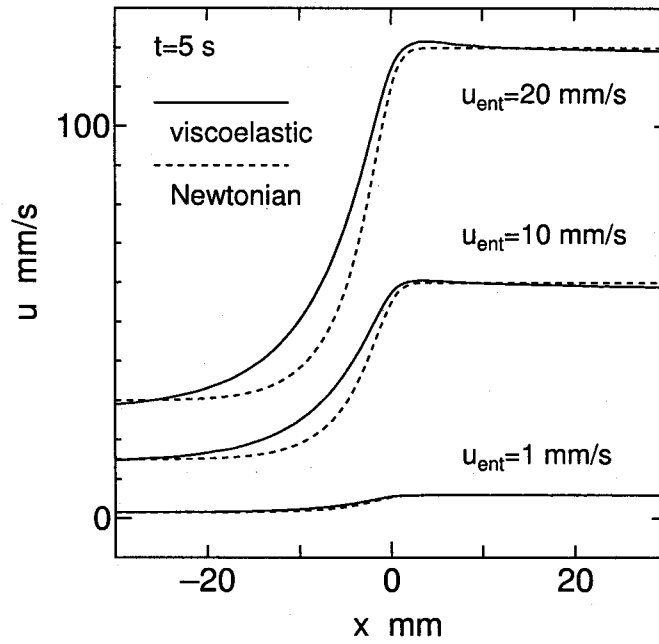
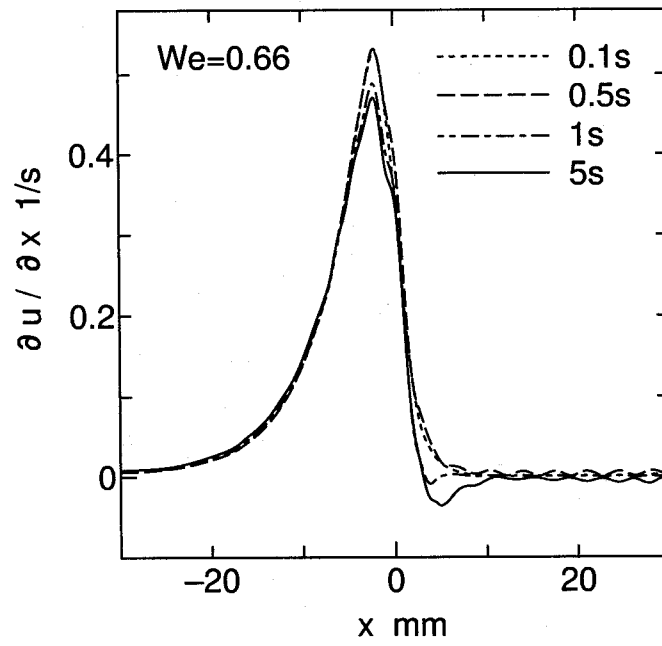
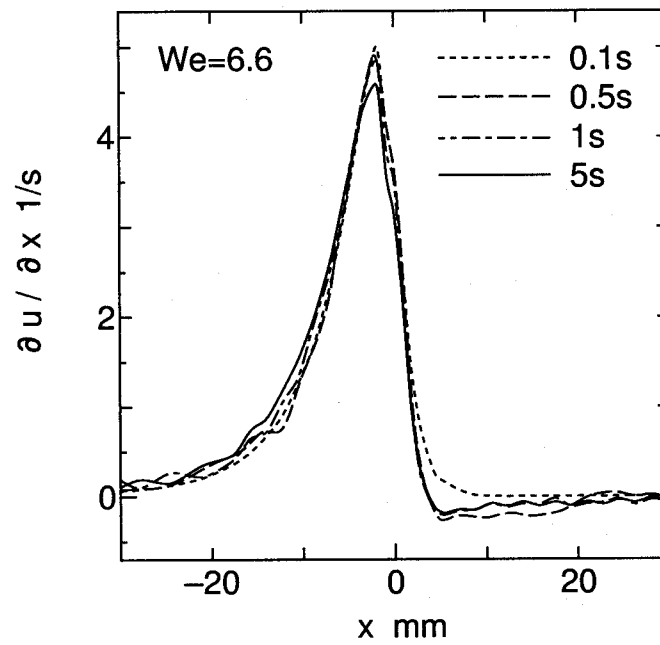


Fig.5.9: Comparison of velocity, u , along the center line for viscoelastic flow with that for Newtonian flow at $t=5$ s. Solid line: viscoelastic fluid. Dashed line: Newtonian fluid.

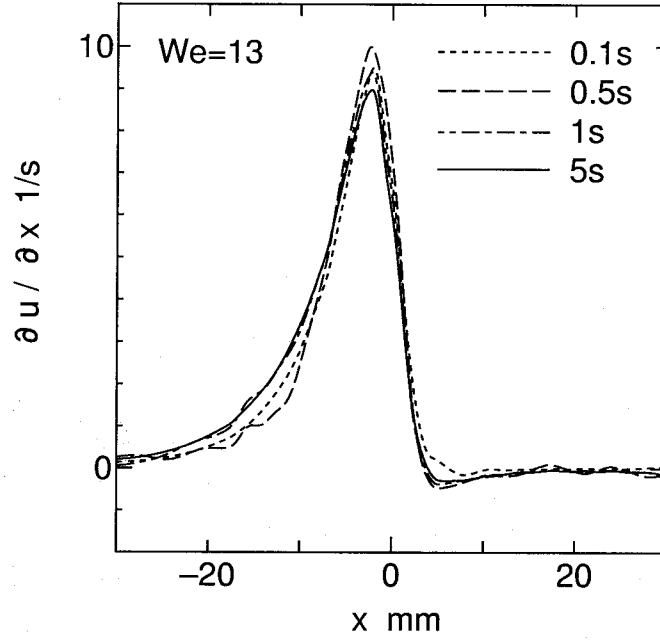


(a) $We=0.66$



(b) $We=6.6$

Fig.5.10: (a) and (b).



(c) $We=13$

Fig.5.10: Velocity gradient, $\partial u / \partial x$, along the center line: (a) $We=0.66$, (b) $We=6.6$, (c) $We=13$.

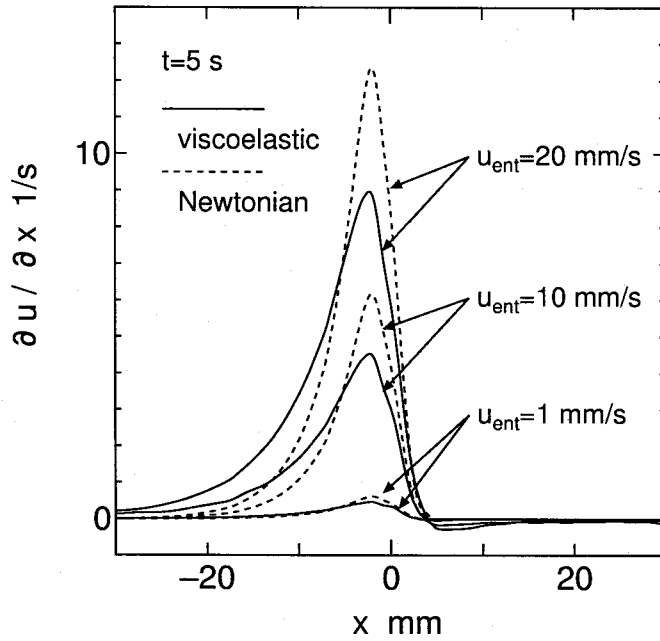


Fig.5.11: Comparison of velocity gradient, $\partial u / \partial x$, along the center line for viscoelastic flow with that for Newtonian flow at $t=5$ s. Solid line: viscoelastic fluid. Dashed line: Newtonian fluid.

は $\partial u / \partial x$ は伸長速度に相当し、 $\partial u / \partial x$ の増大は、伸長応力の増大の原因となる。さらに、図 5.11 に、粘弾性流体とニュートン流体の $t=5$ s における $\partial u / \partial x$ の中心線上分布の比較を示す。図中の実線が粘弾性流体の結果を、破線がニュートン流体の結果である。

図 5.10 から、 $\partial u / \partial x$ は流体が急激に加速される、縮小部入り口付近で大きな値をとっていることが分かる。 $\partial u / \partial x$ が最大値をとる位置は、縮小部入り口の少し上流側である。そして、循環二次流れの成長とともに、最大値は小さくなっている。ニュートン流体の場合と比較すると、いずれのワイセンベルグ数においても、 $\partial u / \partial x$ の最大値は粘弾性流体の方が小さくなっている。その理由は次のように説明できる。粘弾性流体の場合には、流路角部に大きな循環二次流れが生じるために、ニュートン流体に比べてより上流側から流体の加速が始まる。したがって、縮小部入り口付近の速度勾配は小さくなる。それに対して、ニュートン流体の場合には縮小部入り口の近くで流体が急に加速をするために、図 5.11 に示すように、いずれの条件においても速度勾配は粘弾性流体の場合よりも大きくなっている。ここで述べた速度勾配の時間変化と応力場との関係については、次節で議論する。

5.5.2 応力場

続いて、応力場の計算結果を示す。図 5.12 と図 5.13 にせん断応力の大きさ $|\tau_{xy}|$ の分布を、図 5.14 と図 5.15 に法線応力差 $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ の分布を示す。図 5.12, 5.14 はそれぞれ、 $We=13$ のときの $|\tau_{xy}|$ と $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ の分布の時間変化である。そして、図 5.13 と図 5.15 では、3 種類のワイセンベルグ数 ($We=0.66, 6.6, 13$) の時刻 $t=5$ s における $|\tau_{xy}|$ と $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ の分布を比較している。ここで、 $We=0.66$ のときの応力は他の 2 つの場合の応力に比べて非常に小さいため、異なるスケールを用いて表示していることを注意する。

せん断応力は、上流側・下流側ともにせん断速度の大きくなる壁面付近で大きな値をとる。そして、下流側では流速が大きくなり、したがって壁面近くの速度勾配も大きくなるために、せん断応力は上流側に比べて下流側で大きくなる。さらに、縮小部入り口の角部 ($x=0, y=3.5$ mm の点) の近くは、速度ベクトルの方向が急激に変化し、速度勾配も大きくなるために、せん断応力が非常に大きな値となる。また、渦領域ではせん断応力は小さくなる事が分かる。

図 5.13 から分かるように、応力は $We=6.6$ の場合に比べて $We=13$ の場合には大きく、 $We=0.66$ の場合には小さくなるが、応力分布の傾向はいずれのワイセンベルグ数の場合にもほぼ同じである。また、応力の成長の様子もいずれのワイセンベルグ数においても同様の傾向を示し、縮小部の角部付近から成長が進む。

法線応力差は、伸長流れが支配的となる縮小部入り口付近で大きな値になっている。ま

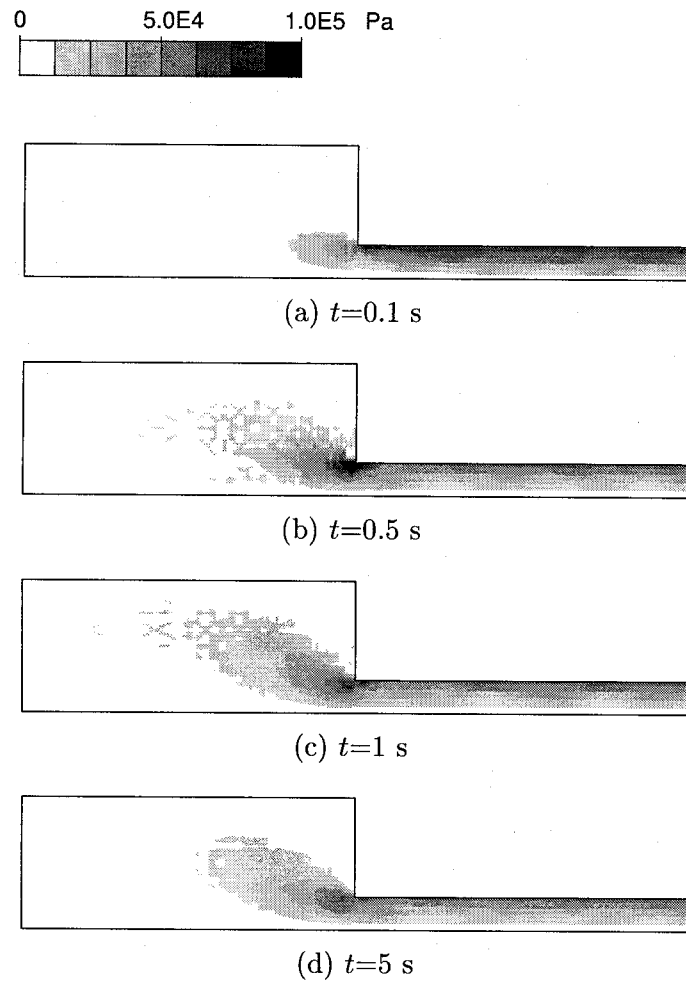


Fig.5.12: Change in distribution of $|\tau_{xy}|$ with time at $We=13$.

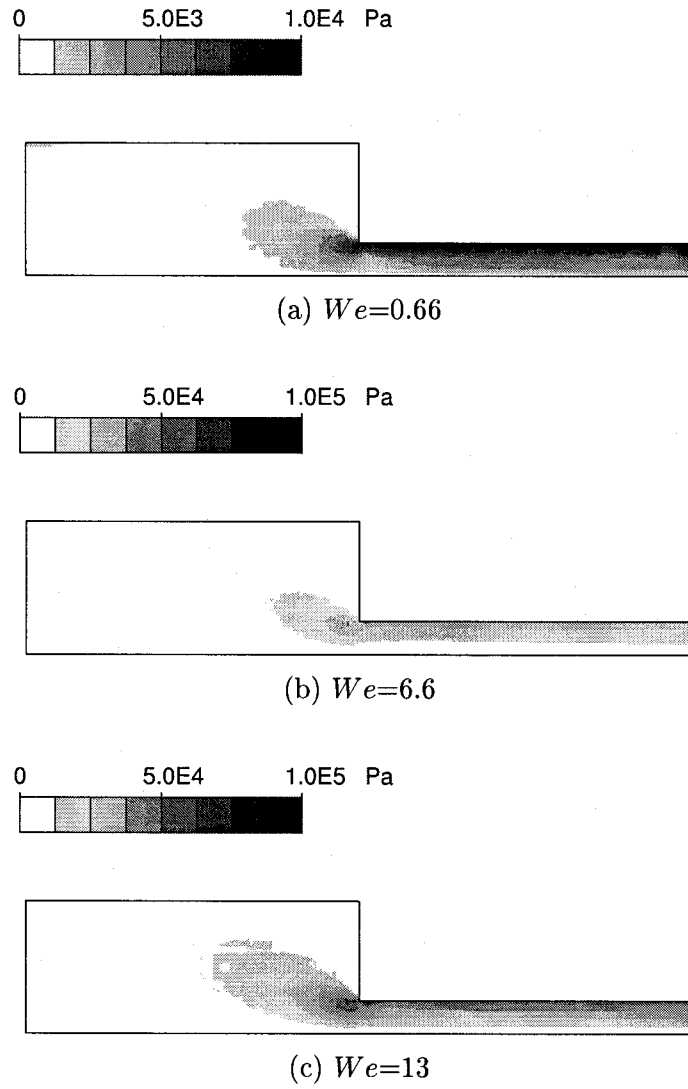


Fig.5.13: Distribution of $|\tau_{xy}|$ at $t=5$ s: (a) $We=0.66$, (b) $We=6.6$, (c) $We=13$.

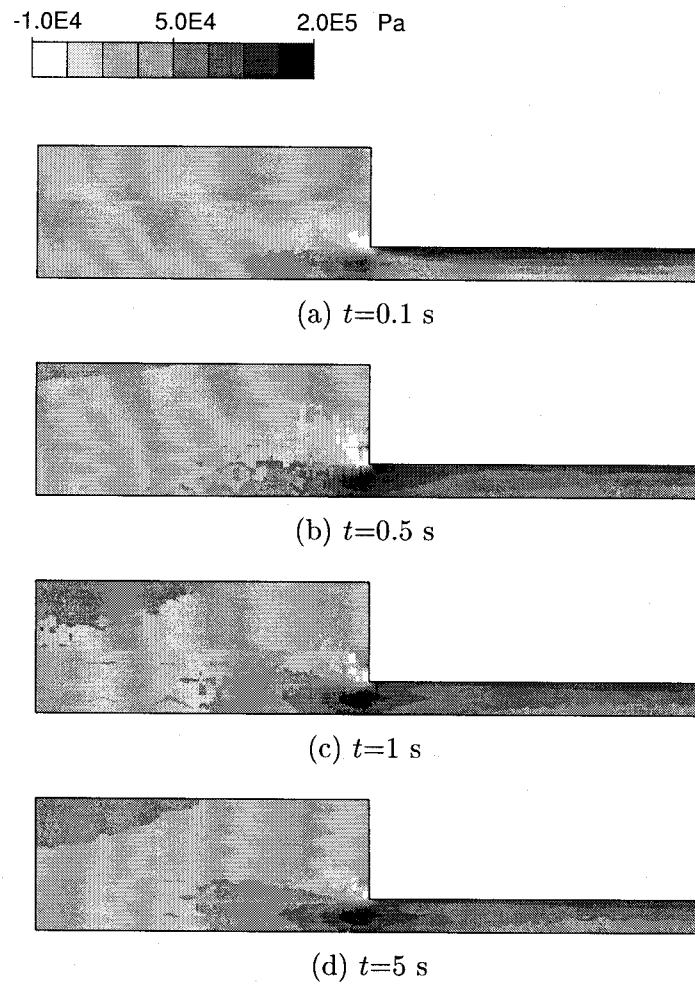
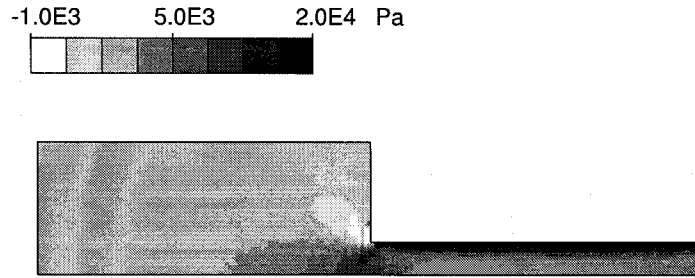
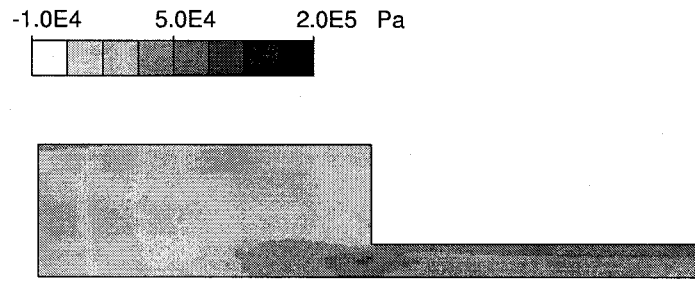


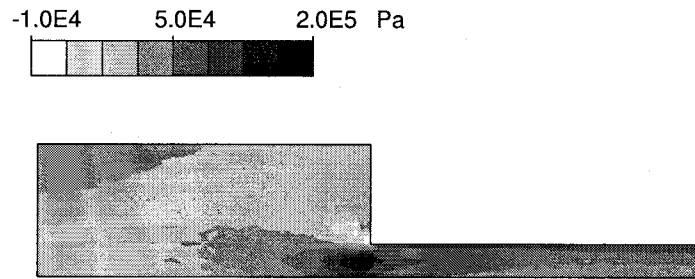
Fig.5.14: Change in distribution of $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ with time at $We=13$.



(a) $We=0.66$



(b) $We=6.6$



(c) $We=13$

Fig.5.15: Distribution of $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ at $t=5$ s: (a) $We=0.66$, (b) $We=6.6$, (c) $We=13$.

た、この領域で応力が成長していく。中心線上では、せん断速度が 0 となり、 $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ は伸長応力に相当する。また、縮小部付近では伸長変形が支配的であり、 $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ の増大は伸長応力の増大につながると考えてよい。

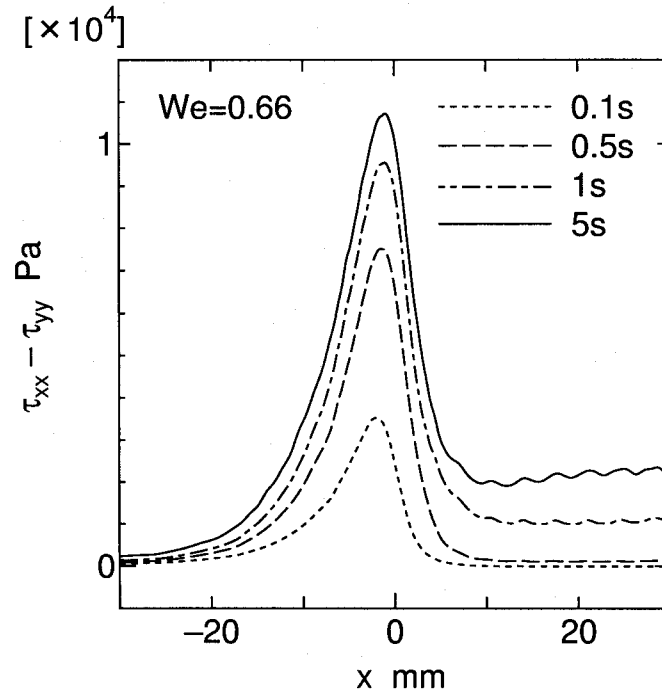
一方、せん断流れが支配的となる縮小部の下流側では、壁面に近いほど大きな値になっている。これは、せん断速度が大きいほど第 1 法線応力差が大きくなるという流体の特性によって説明できる。すなわち、壁面に近いほど速度勾配が大きいため、壁面近くで $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ が大きくなる。

図 5.15 から分かるように、ワイセンベルグ数が大きいほど応力が大きくなっているが、応力分布の傾向はいずれの場合にもほぼ同じである。また、応力の成長の様子もいずれのワイセンベルグ数においても同様の傾向を示し、縮小部付近の伸長流れが支配的となる領域から成長が進む。

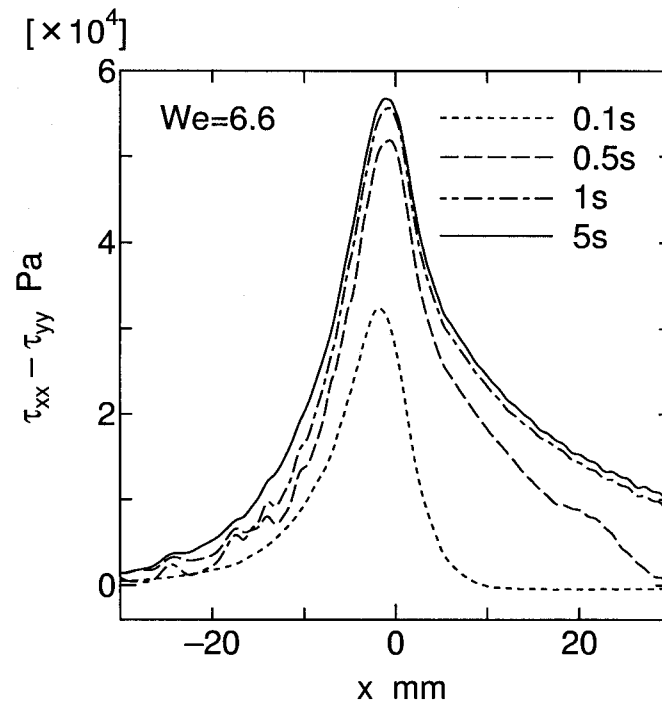
伸長流れの影響が顕著に現れる中心線上の $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ の時間変化を図 5.16 に示す。中心線上では、 $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ は伸長応力に相当する。したがって、伸長速度の大きくなる縮小部付近で大きな値となる。ニュートン流体の場合には縮小部入り口の直後に再び小さくなるが、粘弾性流体の場合には、上流側の応力はすぐには緩和しないために下流側にかけて緩やかに小さくなる。

図 5.17 に中心線上の縮小部入り口付近の各点における $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ の時間変化を示す。いずれの場合も流動開始直後に応力が急速に成長し、やがてその成長速度が遅くなり、ほぼ定常値へと達している。しかし $We = 6.6$ のときにはみられなかった応力成長のオーバーシュートが、 $We = 13$ のときには現れている。

このような応力成長のメカニズムは次のように説明できる。流動開始直後は縮小部入り口付近で、流れ方向の速度勾配 $\partial u / \partial x$ が大きく、伸長応力が急激に成長する。しかし、前述のように、時間とともに循環二次流れが大きく成長することによって、縮小部入り口付近の流れ方向の速度勾配は小さな値に抑えられる。その結果、応力の成長速度は緩和される。すなわち、循環二次流れが応力の成長を抑制する、stress relief mechanism⁽⁷¹⁾ として働いている。そして、 We が大きいときにはオーバーシュートが現れるが、 We が小さいときには現れないことは次のように説明できる。図 5.3 から分かるように、伸長速度が大きいほど試料流体の伸長粘度は早く定常値に達する。つまり We が大きい、したがって縮小部入り口付近の速度勾配が大きい場合には、伸長粘度の増大が早く、応力の成長も早い。そして応力が十分発達した後で、速度勾配の抑制による応力成長の緩和が生じ、その結果、応力が小さくなる。そのために応力のオーバーシュート現象が生じる。しかし We が小さい場合には伸長粘度の成長は遅く、応力が十分に成長するまでに応力成長の緩和が

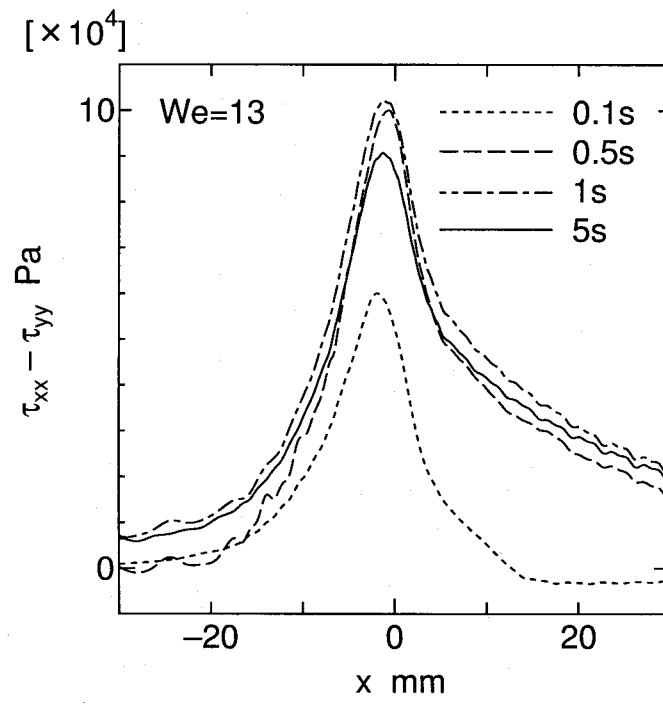


(a) $We=0.66$



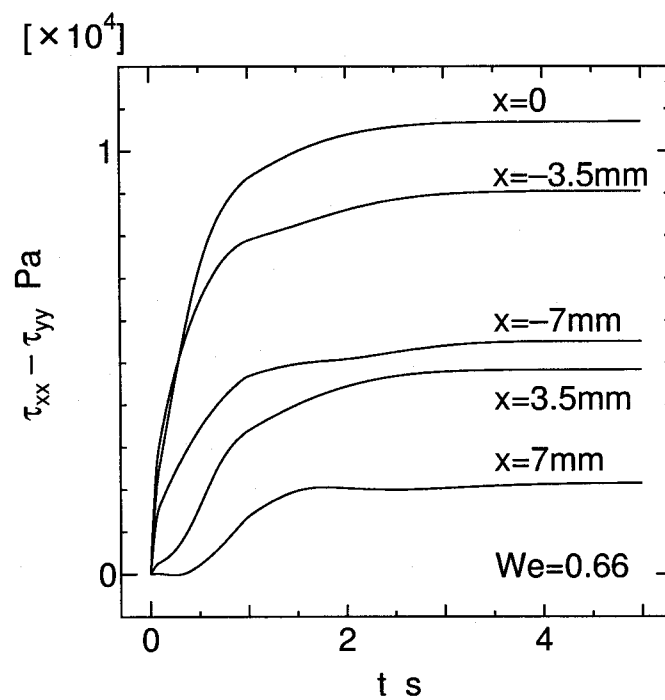
(b) $We=6.6$

Fig.5.16: (a) and (b).

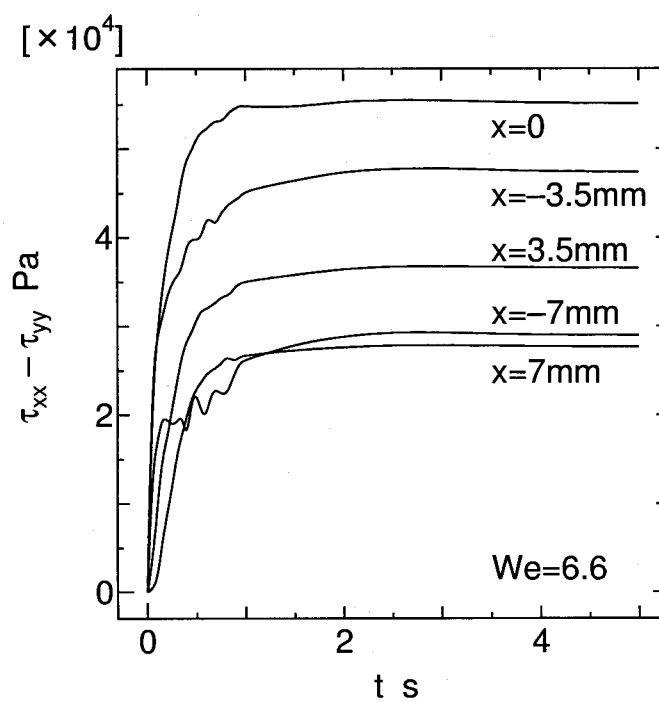


(c) $We=13$

Fig.5.16: Change in distribution of normal stress difference, $\tau_{xx} - \tau_{yy}$, along the center line with time: (a) $We=0.66$, (b) $We=6.6$, (c) $We=13$.

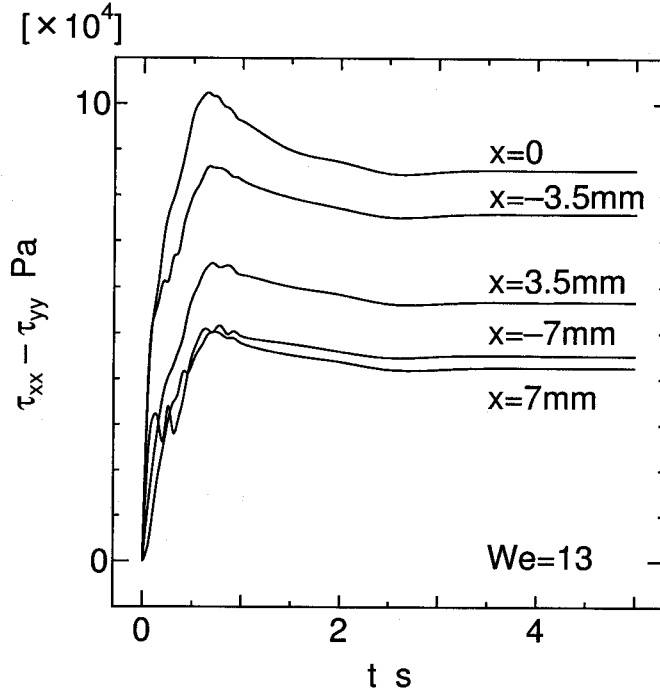


(a) $We=0.66$



(b) $We=6.6$

Fig.5.17: (a) and (b).



(c) $We=13$

Fig.5.17: Change in normal stress difference, $\tau_{xx} - \tau_{yy}$, with time at various points on the center line: (a) $We=0.66$, (b) $We=6.6$, (c) $We=13$.

始まるために、成長速度は緩やかになるがオーバーシュートは生じない。

続いて、応力パワー w を用いた解析を行う。本解析では 2 モードのレオノフモデルを適用したが、緩和時間の短い第 2 モードに対しては quick adaptation 近似を適用したため、第 2 モードの w_e は $(\eta_2/\theta_2)(\mathbf{I} + 2\theta_2\mathbf{D}) : \mathbf{D} = 2\eta_2\mathbf{D} : \mathbf{D}$ となり、粘性的な寄与しか示さない。したがって、以下の解析では w_e については第 1 モードのもののみを考える。そして、簡単のために w_e^1 を w_e で表す。

図 5.18 に $We=13$ のときの w_e の分布図を示す。 w_e は縮小部入り口の上流側と下流側平行流路の壁面近くで大きな値をとっている。したがって、この領域では弾性的エネルギーの蓄積が行われている。他のワイゼンベル数における w_e の分布も絶対値は異なるが、同様の傾向を示す。

流動開始直後から縮小部入り口の角部周辺に大きな値をとる領域が存在し、時間とともに、上流側にも w_e の大きな領域が現れてくる。これは、流動初期には、流体が縮小部の近くで急激な変形を受けるような流れ場であったものが、先に述べたように、流体が緩やかな変形を受けるような流れ場へと変化する現象と対応している。また、下流側をみると、

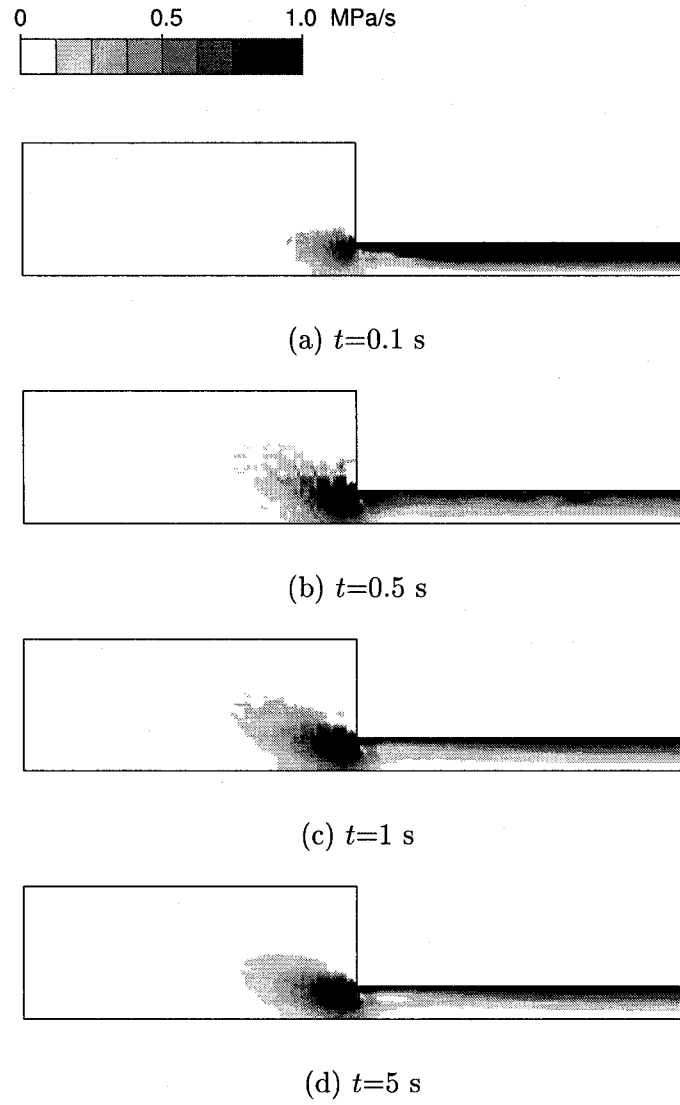


Fig.5.18: Distribution of stress power, w_e , of the first mode at $We=13$.

$t=0.1$ s では壁面から流路中心の方へ比較的広い範囲にわたって w_e が大きくなる領域が存在するが、時間とともにその領域が狭くなっていく。これは流速分布が、ニュートン流体のものに近い中心流速の大きい分布から平らな分布へと変化することによって、流路中心近くのせん断速度が小さくなるためである。

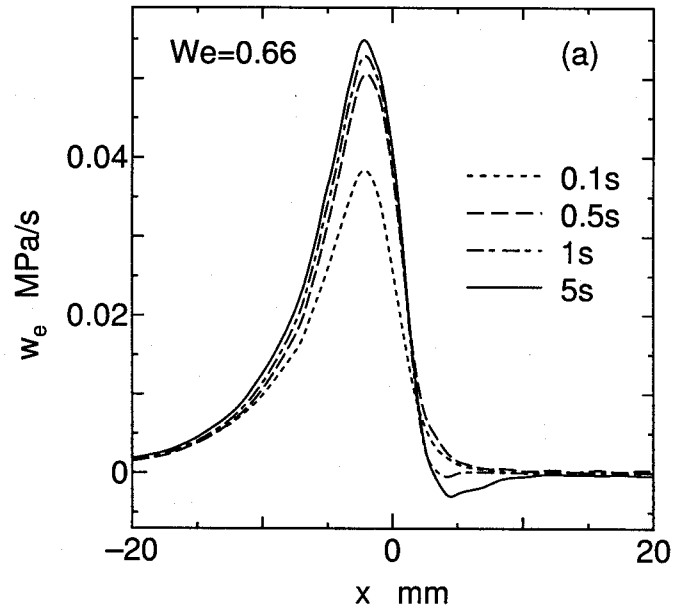
図 5.19 に w_e (第 1 モード) の中心線上の分布の時間変化を示す。いずれのワイセンベルグ数においても、 w_e の分布は縮小部の入り口の少し上流側で大きくなり、縮小部入り口の少し上流側で最大値をとっている。この領域では弾性的エネルギーが蓄積される。ワイセンベルグ数が大きい方が縮小部付近の w_e は大きな値となっている。そして、縮小部の下流側では w_e が負となる領域がみられる。絶対値は上流側に比べてかなり小さい。この領域では、上流側で蓄えられた弾性的エネルギーが少し解放されることになる。縮小部の入り口から十分離れた上流側と下流側では、 w_e は 0 に近い値である。これは、これらの領域では流れが発達しているために、流れ場は流れ方向に変化せず、したがって中心線上では、流れ方向の速度勾配 $\partial u / \partial x$ が 0 で、せん断速度変化も 0 であるからである。壁面付近では図 5.18 に示すように、 w_e は 0 ではなく、せん断変形による弾性的エネルギーの蓄積が行われる。

$We=0.66, 6.6$ の結果と $We=13$ の結果では、縮小部入り口付近における w_e の時間変化に違いが現れる。前者の場合には w_e は $t=0.1$ s のときの値から $t=5$ s の値に単調に増加しているが、後者の場合には $t=5$ s の値は $t=1$ s の値よりも小さくなっている。これは、先に示したように、 $We=13$ の場合には、中心線上の法線応力 $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ の時間変化にオーバーシュート現象が現れるが、 $We=0.66, 6.6$ の場合には現れないこと起因する。すなわち、 $We=13$ の場合には $t=1$ s と $t=5$ s の間で応力が低下するために w_e も低下する。

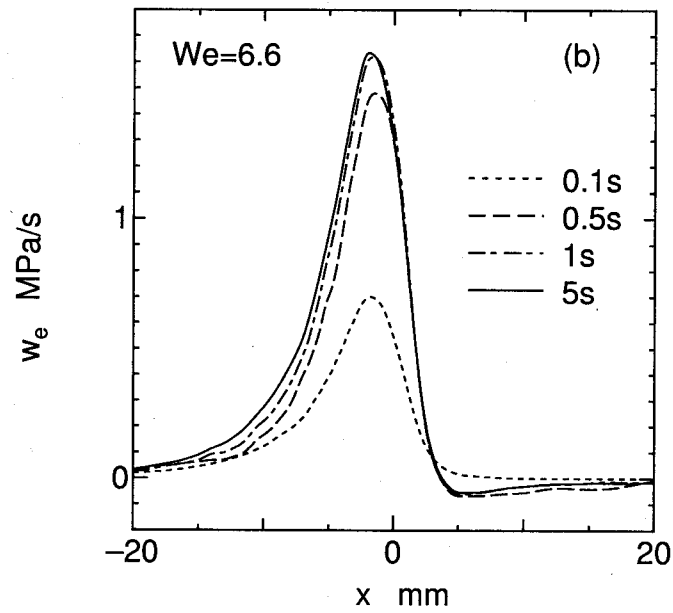
先に行った応力の解析から、粘弾性流体の流れでは縮小部付近の伸長応力の成長を緩やかにするように流れ場が時間的に変化することが分かった。そして、応力パワーを用いた解析の結果とあわせて考えると、そのような流れ場の変化は結果として、縮小部へ流れ込む流体が変形を受けることによって生じる弾性的エネルギーの蓄積が緩やかに行われるような流れ場への変化となることが分かった。

5.6 結 言

本章では構成方程式にレオノフモデルを用いて、急縮小流路における粘弾性流体のスタートアップ流れの数値計算を行った。そして、その結果をもとに、速度場と応力場について解析を行い、粘弾性流体の流れにおいて、ニュートン流体の流れではみられない特異な流れ挙動が現れることが確認された。

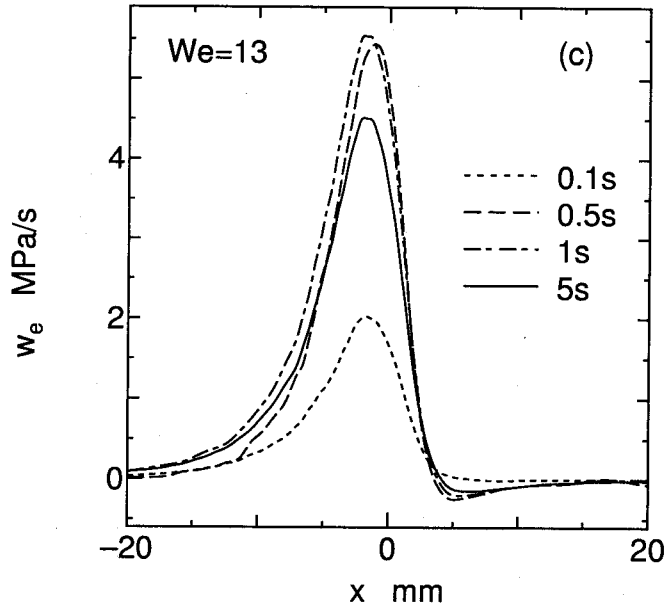


(a) $We=0.66$



(b) $We=6.6$

Fig.5.19: (a) and (b).



(c) $We=13$

Fig.5.19: Stress power, w_e , of the first mode along the center line: (a) $We=0.66$, (b) $We=6.6$, (c) $We=13$.

粘弾性流体の場合には、縮小部入り口の少し下流側に、流速が十分下流側の発達した流れの流速よりも大きくなる領域が存在することが分かった。このような流速分布はニュートン流体の場合にはみられない。また、ワイセンベルグ数が大きくなると、応力の成長においてオーバーシュート現象がみられた。そして、この現象は流体の非定常伸長特性と関係があると考えられる。

さらに、速度場と応力場の時間変化を比較することにより、粘弾性流体の縮小流れにおける流れ場の時間変化のメカニズムについて次のように考察した。流路角部に生じる渦の成長によって、縮小部の上流側における流れ方向の速度勾配が抑えられ、その結果として、伸長応力の成長が緩和されることが分かった。したがって、循環二次流れが stress relief mechanism として働いていることが数値計算からも確認された。さらに、応力パワーを用いた解析により、縮小部付近の応力の成長速度を緩やかにするような流れ場の変化は、縮小部付近の伸長変形による流体の弾性的エネルギーの蓄積を緩やかにすることが分かった。

第6章 急拡大流路における粘弾性流体の非定常流れの数値解析

6.1 緒言

本章では急拡大流路における粘弾性流体のスタートアップ流れの数値解析を行い、粘弾性流体の非定常流動挙動を考察する。拡大流れは、縮小流れと同様に高分子成形加工においてみられる流れである。例えば、射出成形の際にランナーやゲートから金型に高分子流体が流れるときの流れは、拡大流れである。

粘弾性流体の拡大流れに関する研究は、縮小流れに関する研究に比べると少ないが、例えば、円管急拡大流路中の高分子溶液の流れにおける渦高さとレイノルズ数や高分子濃度との関係に関する研究⁽⁷⁹⁾や、矩形管急拡大流路における流れ模様の可視化実験⁽⁸⁰⁾および数値計算⁽⁸¹⁾などがみられる。

急拡大流れにおいては、急拡大部の出口付近で流体が外側の壁面の方へ大きく膨らむように流れる現象が生じることが知られており、その原因は流体の弾性的性質に関係すると考えられている⁽⁸⁰⁾。また、押出成形においてダイから流れ出た高分子流体の自由表面が外側へ膨らむダイスウェル (die swell) あるいはバラス効果 (Barus effect) と呼ばれる現象が現れる⁽¹⁾⁽³⁹⁾。これは流路内の拡大流れとは異なる流れであるが、ダイスウェルの発生の原因は高分子流体のもつ弾性的性質によるものと考えられており、本章で解析を行う急拡大流れとの関連性は強い。

急拡大部付近における粘弾性流体の特異な流れは、流体の弾性的性質との関連が強いと考えられるため、本解析では数値計算の結果をもとに、拡大部付近における流動現象と流体の弾性的性質との関連や流れ場の時間変化について考察する。

6.2 計算条件

解析は拡大比が 1 : 4 の急拡大流路について行った。図 6.1 に解析流路の形状と座標系を、図 6.2 にメッシュ分割を示す。図 6.1 には境界条件もあわせて示した。

数値計算は第 5 章の急縮小流れの計算で解析を行ったものと同じ試料流体に対して行っ

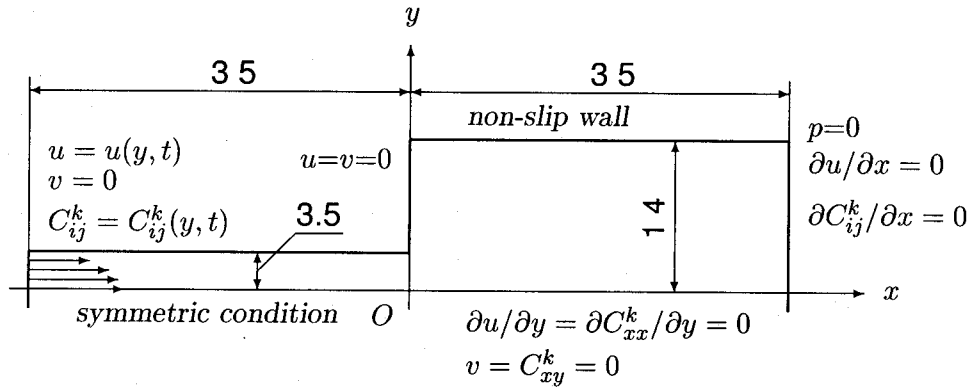


Fig.6.1: Schematic diagram of a 1 to 4 abrupt expansion channel and boundary conditions.

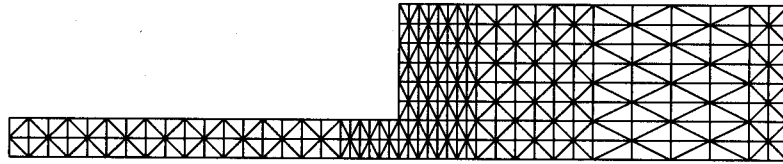


Fig.6.2: Finite element mesh for the 1 to 4 abrupt expansion channel.

た．本解析では入り口平均流速 $\bar{u}_{\text{ent}}$ を 40 mm/s, 60 mm/s, 80 mm/s の 3 種類に変化させて計算を行った．このとき，式 (5.7) で定義されるワイセンベルグ数 We はそれぞれ 6.6, 9.9, 13 になる．ここで，代表速度 U と代表長さ H として，それぞれ上流側平行流路の平均流速と半流路幅を用いた．また，比較のためにニュートン流体についても計算を行った．流体密度は粘弾性流体の場合と同じで，粘度を η_0 とした．

6.3 計算結果と考察

6.3.1 速度場

図 6.3 に $We=13$ のときの速度ベクトルの時間変化を示す．図 6.3 には， $\bar{u}_{\text{ent}}$ が同じ条件のニュートン流体の速度ベクトルもあわせて示している．ニュートン流体の場合には流動開始直後に定常流れに達するために，定常流れにおける結果のみを示した．

上流側の平行流路から拡大部に流れ込んだ流体は拡大部入り口直後で減速する．そして，外側の壁面の方に拡がるように流れ，下流側の流路角部には小さな循環二次流れが生じている．ニュートン流体の場合にはレイノルズ数 Re が大きくなり慣性力の影響が強くなると，渦が大きく成長する⁽⁸²⁾⁽⁸³⁾が，本計算の条件では Re が非常に小さいために，渦の

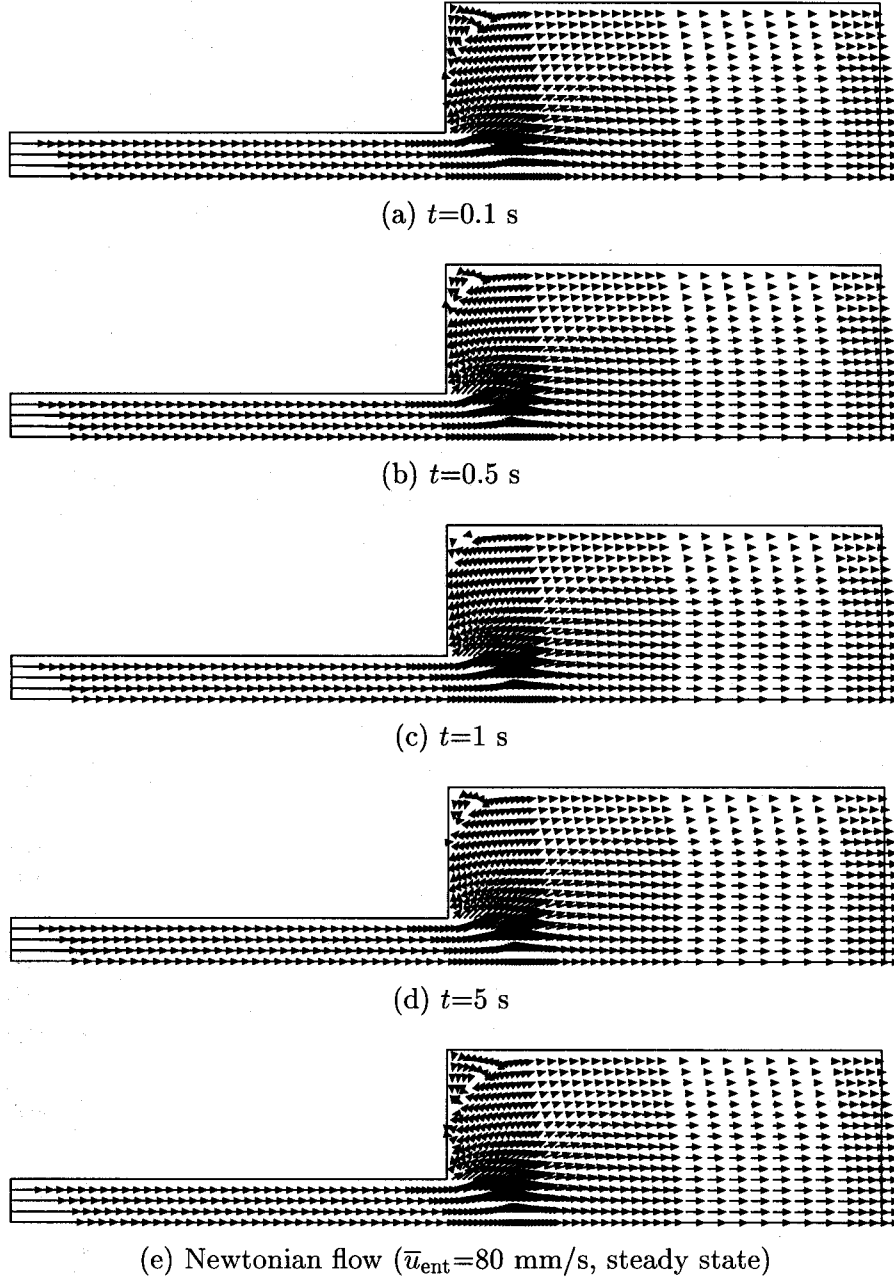


Fig.6.3: (a)–(d) Velocity vectors of viscoelastic flow at $We=13$. (e) Velocity vectors of Newtonian flow of $\bar{u}_{ent}=80$ mm/s at steady state.

大きさは比較的小さい。ただし、粘弾性流体のものよりは大きい渦が発生している。

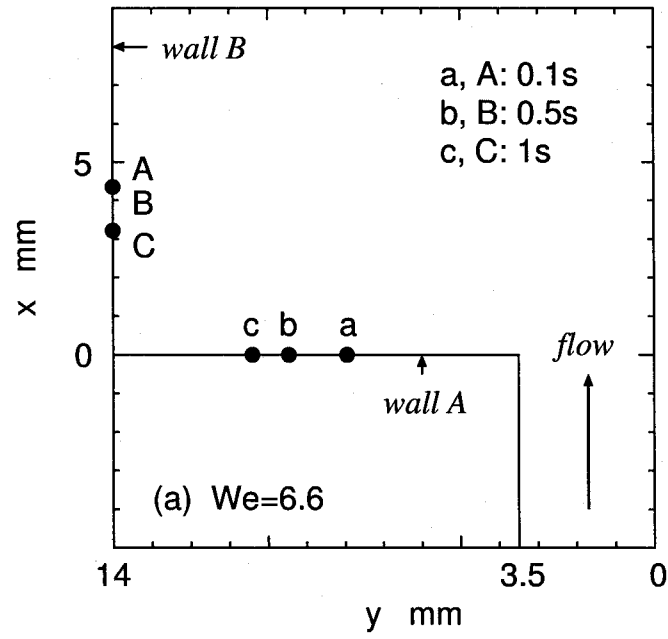
また、粘弾性流れの場合には、流体が上流側の平行流路から拡大部に流れ込むとすぐに、外側の壁面の方に大きく膨らむように流れる現象が、ニュートン流体の流れよりも顕著に現れている。そして、流路の角部に存在する渦の大きさは、時間とともに小さくなっていく。このような渦の大きさの時間変化はニュートン流体の流れではみられなかった。ここでは $We=13$ のときの計算結果のみを示したが、時間の経過とともに渦が小さくなる現象はいずれの We においてもみられる。そして、 We が大きい条件ほど、その現象は顕著に現れる。

ここで、渦の大きさの時間変化に注目し、各ワイセンベルグ数における結果を比較する。図 6.4 に各条件における渦の大きさの時間変化を示す。図 6.4 では、各時刻における剥離点（点 a, b, c）と再付着点（点 A, B, C）の位置を示している。渦の高さ（壁面 A と再付着点との距離）の変化に比べて、渦の幅（壁面 B と剥離点との距離）の方が大きいことが分かる。すなわち、渦は時間とともに外側の壁面 B の方に押しつぶされるように小さくなっていく。そして、ワイセンベルグ数が大きいほど渦は小さくなっている。

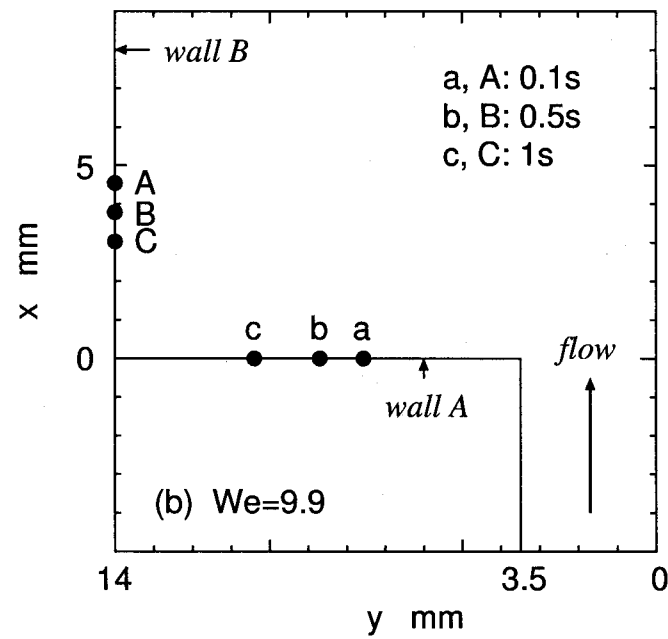
図 6.5 に粘弾性流体の流れ方向（ x 方向）の流速 u の中心線上分布を示す。急拡大流れでは、流体が拡大部に流れ込んだところで減速流れが発生し、拡大部入り口直後に流速は急激に小さくなる。そして、流速分布は時間的に変化し、いずれのワイセンベルグ数においても、流動開始直後の時刻 $t=0.1$ s の流速分布に比べて、他の時刻の分布は拡大部入り口の下流側の流速が小さくなっている。このような流速分布の変化は、先に示した時間の経過とともに拡大部入り口に近い位置から、流体が外側に広がるように流れる流れ模様へと変化する現象に対応している。

図 6.6 に、粘弾性流体とニュートン流体の $t=5$ s における u の中心線上分布の比較を示す。図中の実線が粘弾性流体の結果、破線がニュートン流体の結果である。いずれの $\bar{u}_{ent}$ の条件においても、粘弾性流体の方がニュートン流体よりも拡大部入り口直後の流速が小さくなっている。これは、先に示したように、粘弾性流体の方が拡大部入り口直後でより大きく外側に膨らむような流れになるためである。

続いて、拡大部入り口付近の減速の様子を解析するために、流れ方向の速度勾配 $\partial u / \partial x$ を調べる。図 6.7 に中心線上の $\partial u / \partial x$ の時間変化を示す。いずれのワイセンベルグ数においても、拡大部入り口直後の減速が時間とともに急激になり、ワイセンベルグ数が大きいほど減速率が大きくなっていることが分かる。また時間が経過すると、そのピーク位置は流動開始直後に比べて上流側へ移動している。そして、図 6.8 に示すように、いずれの $\bar{u}_{ent}$ の条件においても、粘弾性流体の方がニュートン流体に比べて、減速率が大きくなっ

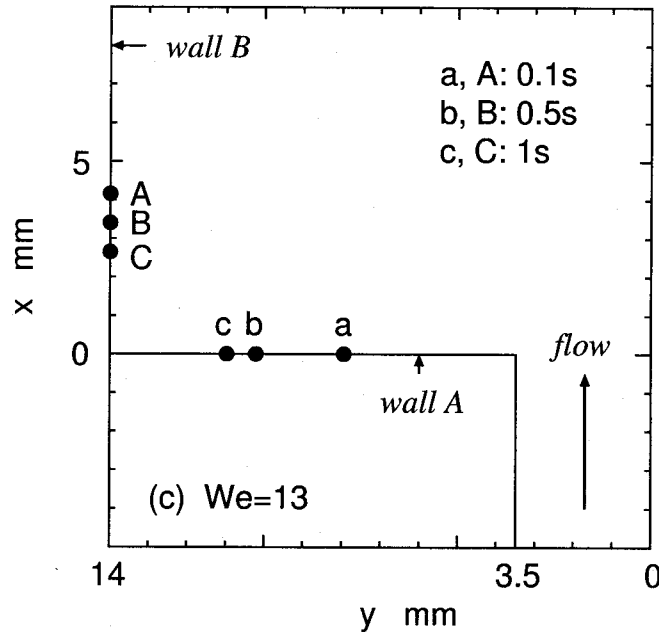


(a) $We=6.6$



(b) $We=9.9$

Fig.6.4: (a) and (b).



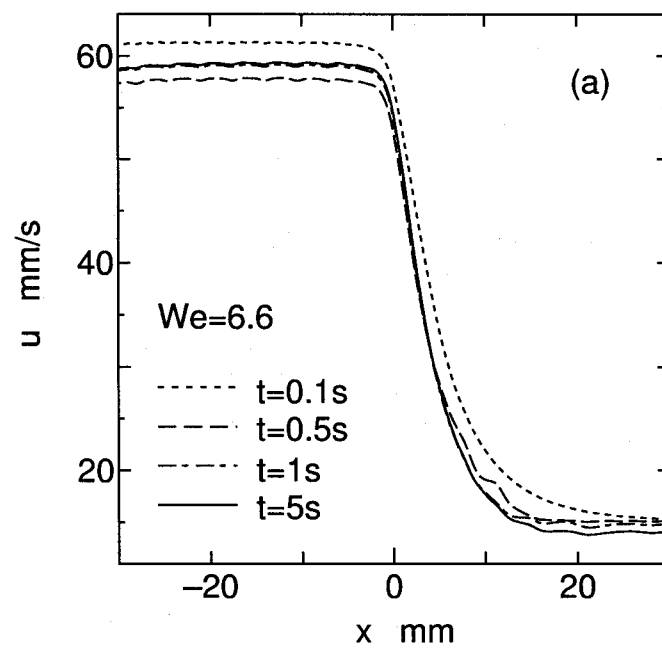
(c) $We=13$

Fig.6.4: Change in vortex size with time: (a) $We=6.6$, (b) $We=9.9$, (c) $We=13$. Closed circles indicate the detachment (a, b, c) and the re-attachment points (A, B, C).

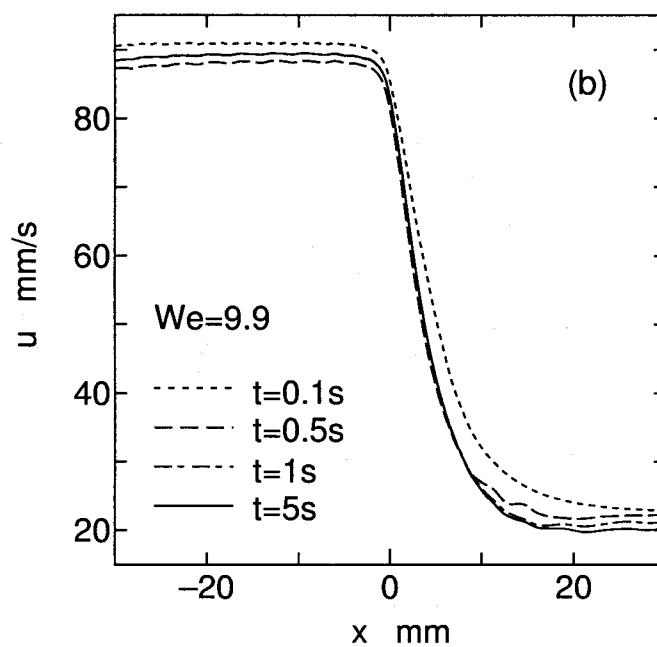
ている。

ここで、粘弾性流体の急拡大流路内のスタートアップ流れにおける速度場の時間変化についてまとめる。流体が上流側の平行流路から拡大部に流れ込むと、急激な減速が生じ、流体は外側へ大きく膨らむように流れる。拡大部入り口付近での流れの膨らみは、時間が経過すると、流動開始直後よりも大きくなり、その結果、流路角部に生じている渦はつぶされて小さくなる。また、速度勾配の分布の時間変化から分かるように、このような速度場の変化によって、拡大部下流側における減速が、流動開始直後よりも急激になり、減速率のピークが上流側へ移動する。すなわち、より拡大部入り口近くで減速が大きくなるように変化する。

ここで示した速度場の時間変化はワイセンベルグ数が大きいほど顕著に現れることから、流体のもつ弾性的性質に関連すると予想される。この速度場の時間変化のメカニズムは次節の応力場の解析結果と速度場の解析結果とをあわせて考察し、そこで議論する。

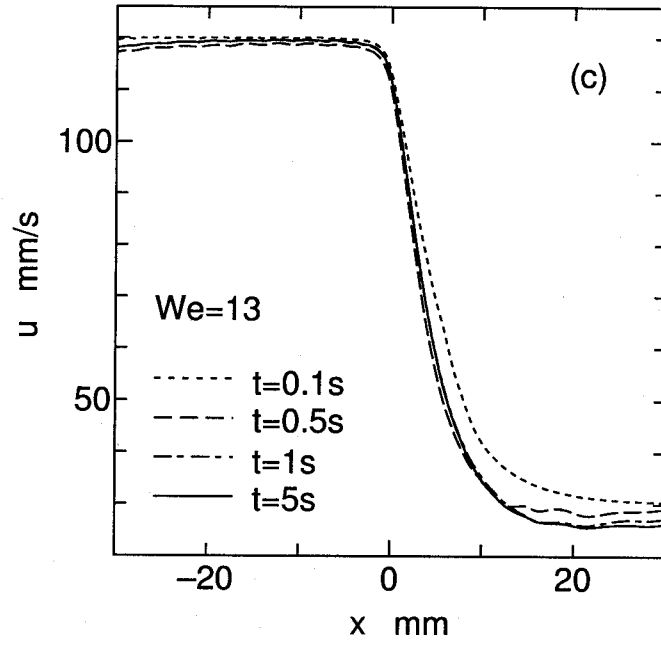


(a) $We=6.6$



(b) $We=9.9$

Fig.6.5: (a) and (b).



(c) $We=13$

Fig.6.5: Velocity , u , along the center line: (a) $We=6.6$, (b) $We=9.9$, (c) $We=13$.

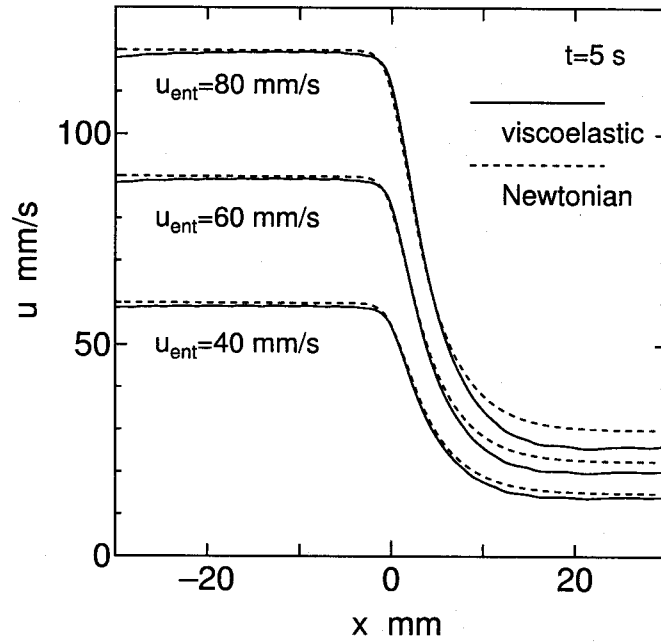
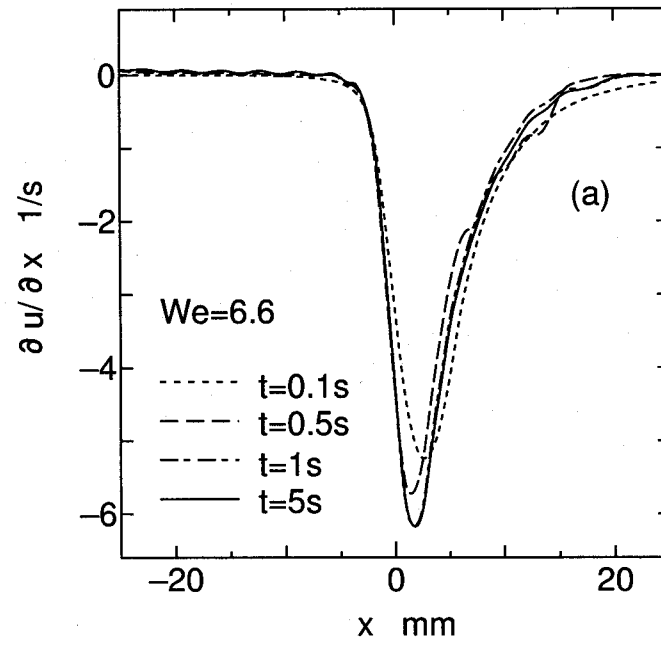
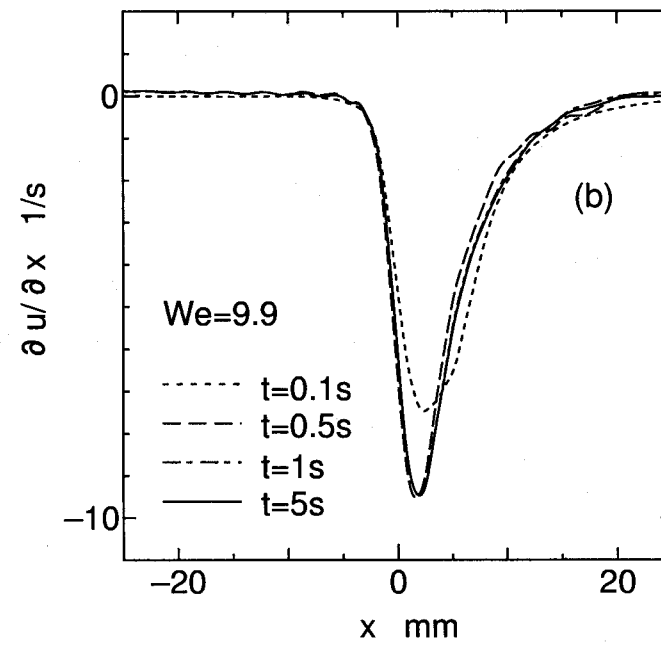


Fig.6.6: Comparison of velocity , u , along the center line for viscoelastic flow with that for Newtonian flow at $t=5s$. Solid line: viscoelastic fluid. Dashed line: Newtonian fluid.

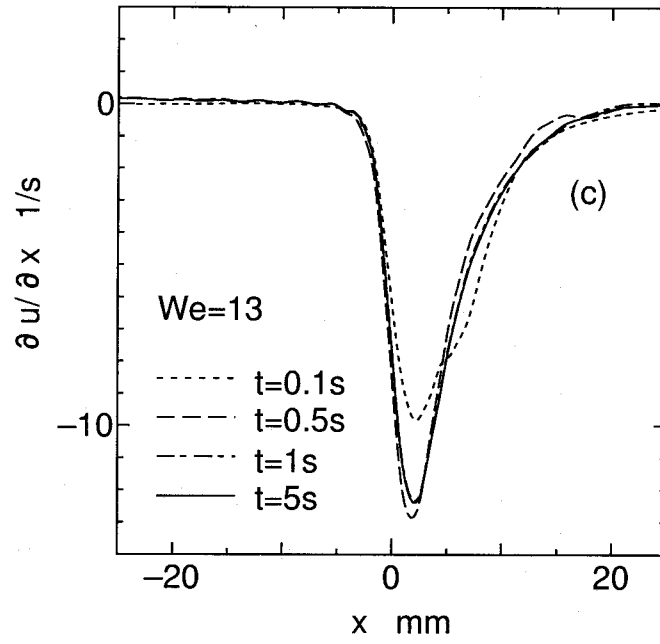


(a) $We=6.6$



(b) $We=9.9$

Fig.6.7: (a) and (b).



(c) $We=13$

Fig.6.7: Velocity gradient, $\partial u / \partial x$, along the center line: (a) $We=6.6$, (b) $We=9.9$, (c) $We=13$.

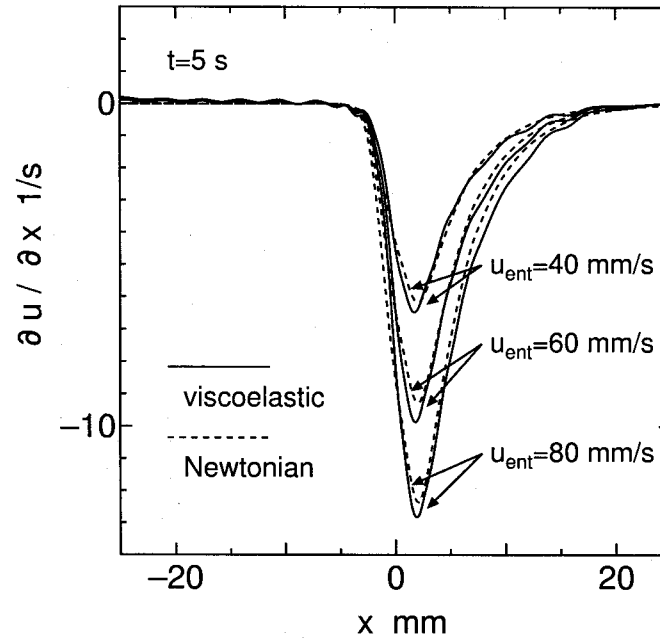


Fig.6.8: Comparison of velocity gradient, $\partial u / \partial x$, along the center line for viscoelastic flow with that for Newtonian flow at $t=5s$. Solid line: viscoelastic fluid. Dashed line: Newtonian fluid.

6.3.2 応力場

本節では応力場の解析を行う。図 6.9 にせん断応力の大きさ $|\tau_{xy}|$ の分布の時間変化を示す。ここでは、 $We=13$ のときの結果を示している。上流側の平行流路ではせん断流れが支配的であり、せん断変形が大きくなる上流側の平行流路の壁面近くで、せん断応力は大きな値になる。また、下流側では、拡大部入り口付近の流れが外側へ大きく向きを変える領域でせん断応力が大きくなっている。

拡大部の入り口周辺から下流側にかけて応力が大きくなる領域が、流動開始直後の $t=0.1$ s において既に存在し、その領域が時間とともに大きくなり、応力が成長していく様子がみられる。また、拡大部入り口の角部 ($x=0, y=3.5$ mm の点) の周辺では少し遅れて、応力の成長がみられる。これは、流動開始後少し時間が経ってから、拡大部入り口の角部周辺の速度ベクトルが外側の方に大きく向きを変えるために、この領域のせん断速度が大きくなり、応力が成長を始めるからである。

図 6.10 に $t=5$ s における各ワイセンベルグ数における $|\tau_{xy}|$ の分布図を比較する。ワイセンベルグ数が多いほど流速が速く、応力の絶対値が大きくなる。したがって、ワイセンベルグ数が多いほど応力の大きい領域が広がっているが、いずれの場合もほぼ同じような分布をしている。

続いて、法線応力差 $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ について考える。図 6.11 に $We=13$ のときの $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ の分布の時間変化を示す。せん断流れが支配的な上流側の平行流路では、せん断応力と同様に、 $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ も壁面に近いほど値が大きくなるような分布を示す。これは、壁面に近いほど速度勾配が大きくなっていることと、せん断速度が多いほど第 1 法線応力差 N_1 が大きくなる流体特性によって説明される。

拡大部入り口の少し下流側には $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ が負の値をとる領域が存在する。図 6.5 および図 6.7 に示したように、この領域は急激な減速が生じ、流れ方向の速度勾配 $\partial u / \partial x$ が負となる領域に対応する。この領域の下流側と拡大部入り口の角部 ($x=0, y=3.5$ mm の点) 周辺から外側の壁面にかけての領域で時間とともに応力が成長していく様子がみられる。

図 6.12 に $t=5$ s における各ワイセンベルグ数における $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ の分布図を示す。いずれの場合にも同様の応力分布となり、拡大部入り口の近くでは減速流れが生じるために $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ が負となる領域が存在する。せん断応力の場合と同様に、ワイセンベルグ数が多いほど応力の絶対値が大きくなるため、拡大部入り口直後の応力が負となる領域はワイセンベルグ数が多い場合ほど広がっている。

せん断応力や法線応力差の解析だけでは、拡大部入り口付近における流動挙動と流体の弾性的性質との関係を十分に解析することが難しいので、次に応力パワーを用いた解析を

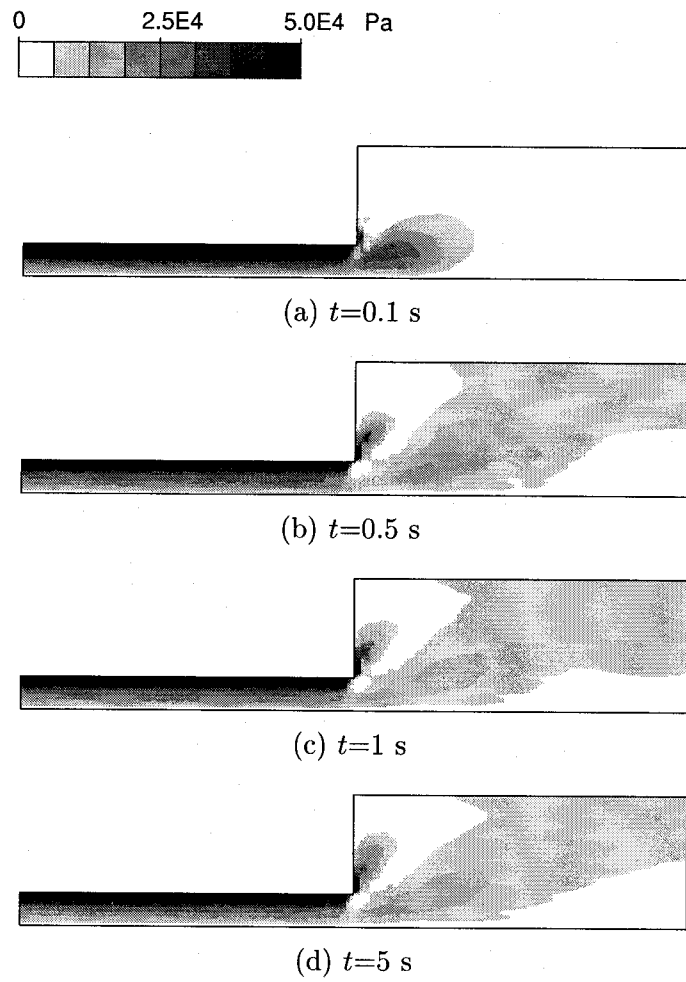


Fig.6.9: Change in distribution of $|\tau_{xy}|$ with time at $We=13$.

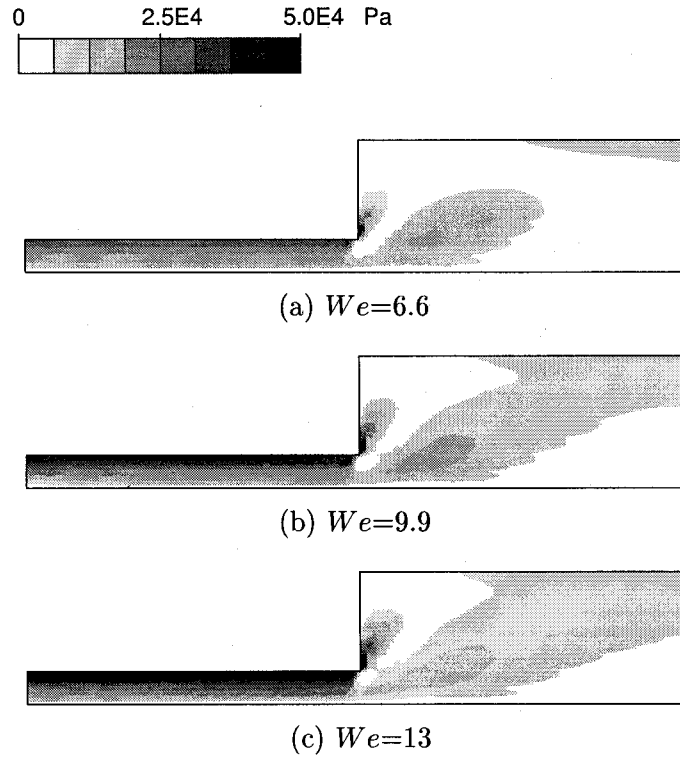


Fig.6.10: Distribution of $|\tau_{xy}|$ at $t=5$ s: (a) $We=0.66$, (b) $We=6.6$, (c) $We=13$.

行う．応力パワー w は現時点での物体の単位体積あたりに，応力が単位時間になす仕事で，レオノフモデルの場合，式 (5.3) ～ (5.5) で表される．そして， w の弾性的寄与分である w_e は弾性エネルギーの蓄積に関係する．すでに 5.5 節で述べたように，緩和時間の短い第 2 モードの w_e^2 は粘性的な寄与しか示さない．したがって， w_e については第 1 モードのみに着目して解析を進める．そして，以下では簡単のために w_e^1 を w_e で表す．

図 6.13 に， $We=13$ のときの w_e の分布の時間変化を示す．この図から w_e は上流側平行流路の壁面側で大きな値になっていることが分かる．したがって，上流側平行流路においては，せん断変形による弾性的エネルギーの蓄積が行われている．また，拡大部入り口付近では， w_e は負の値になっている．すなわち，この領域では負の仕事がなされている．これは拡大部の入り口付近では，流れが壁面の方へ周り込むように流れることによって，急激な減速が生じるためである．負の仕事がなされているということは，上流側で蓄えられた弾性的エネルギーがこの領域で解放されていると解釈できる．他のワイセンベルグ数の条件においても同じ傾向がみられた．

図 6.14 に，上流側平行部の壁面から半流路幅の $1/4$ だけ離れた線上，すなわち $y=2.625$ mm の線上の w_e の分布を示す．いずれのワイセンベルグ数においても， w_e の分布は同じ

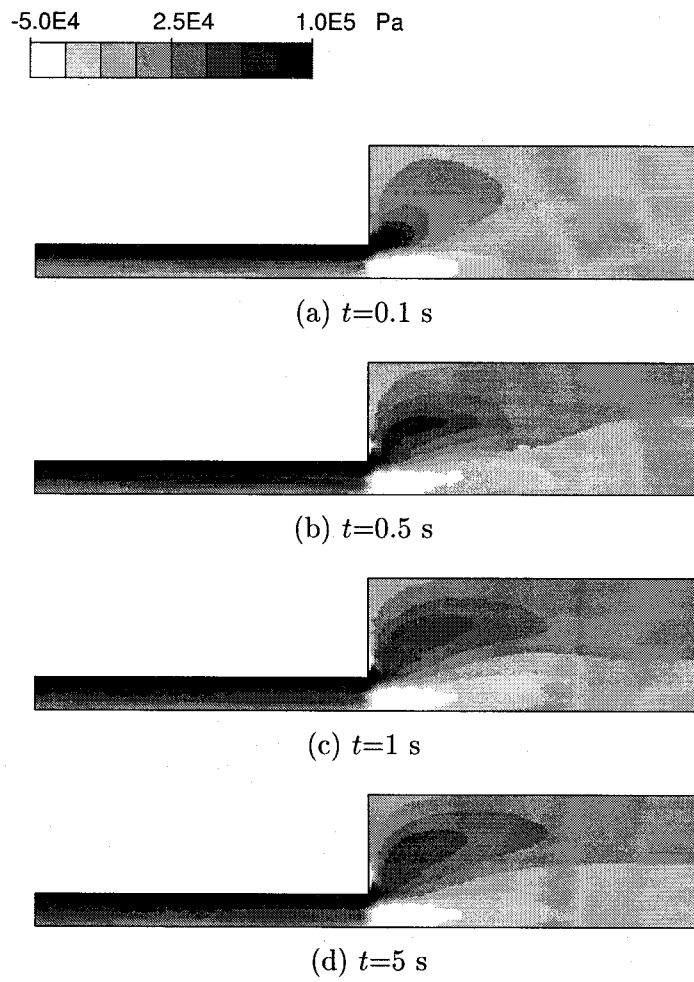


Fig.6.11: Change in distribution of $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ with time at $We=13$.

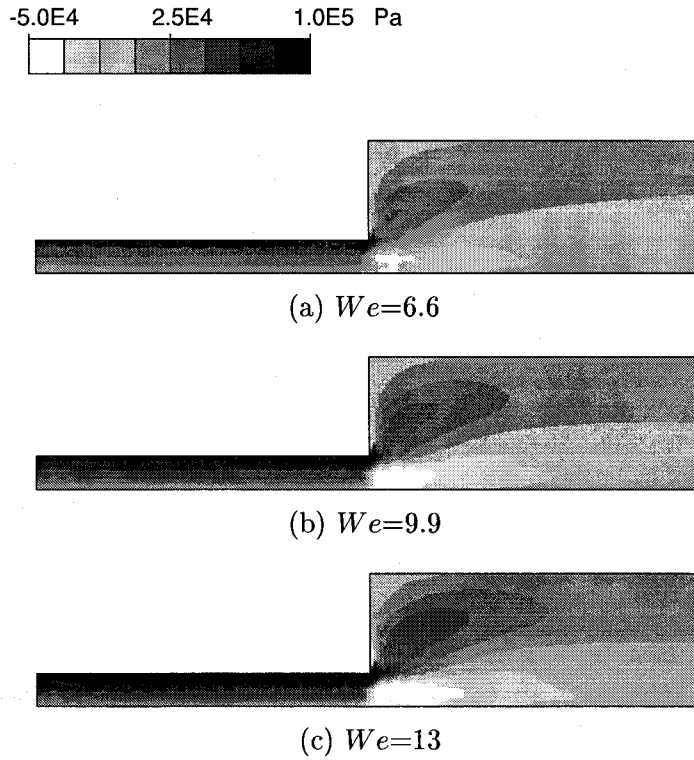


Fig.6.12: Distribution of $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ at $t=5$ s: (a) $We=0.66$, (b) $We=6.6$, (c) $We=13$.

傾向を示している．上流側の $x > 0$ の領域では比較的大きな値でほぼ一定になっているが，拡大部の入り口 ($x=0$) 付近で減少する．そして，拡大部入り口の少し下流側でピーク値をとる．また，十分下流側では， w_e は 0 に近い値となっている．このように，図 6.14 からも上流側では弾性的エネルギーの蓄積が行われ，それを拡大部入り口付近で開放していることが確認できる．そして，ワイセンベルグ数が高いほど w_e の絶対値は大きくなっている．

次に w_e の時間変化を考える．いずれのワイセンベルグ数の場合にも，流動開始直後の $t=0.1$ s には全領域にわたり非負の値であるが，時間が経つと拡大部入口の少し下流側に負の値をとる領域が現れる．そして， w_e の最小値はワイセンベルグ数が高い場合の方が小さくなっている．これは，速度場の変化に対応している．前節で述べたように，時間の経過とともに拡大部入り口直後の流れの拡がりが顕著に現れ，拡大部入り口付近の減速率が大きくなる．その結果として，拡大部入り口付近の w_e が負となる．すなわち，静止していた流体の流動が始まり，時間とともに上流側のせん断変形によって弾性エネルギーの蓄積されてくると，拡大部において弾性エネルギーの解放が促進されるように速度場が変化していくものと考えることができる．

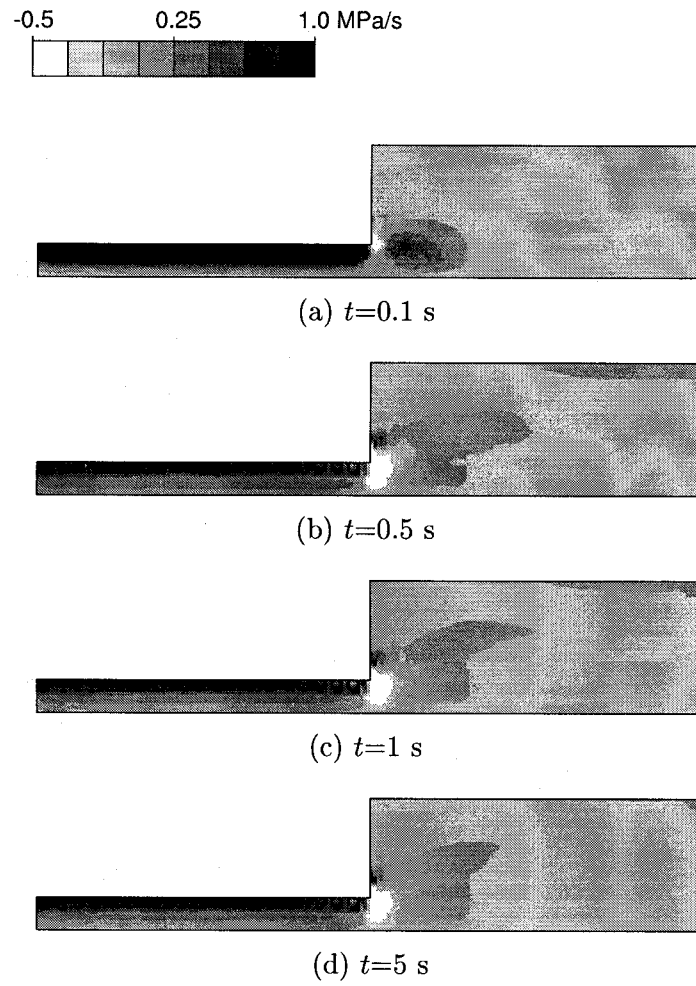
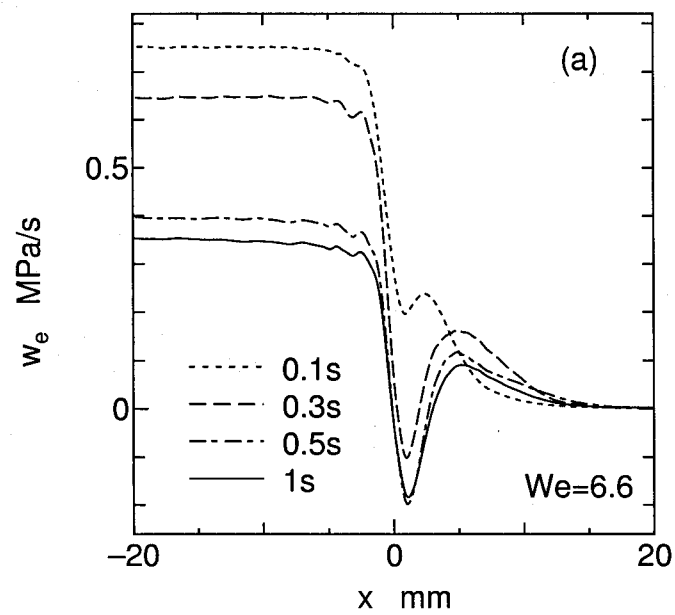
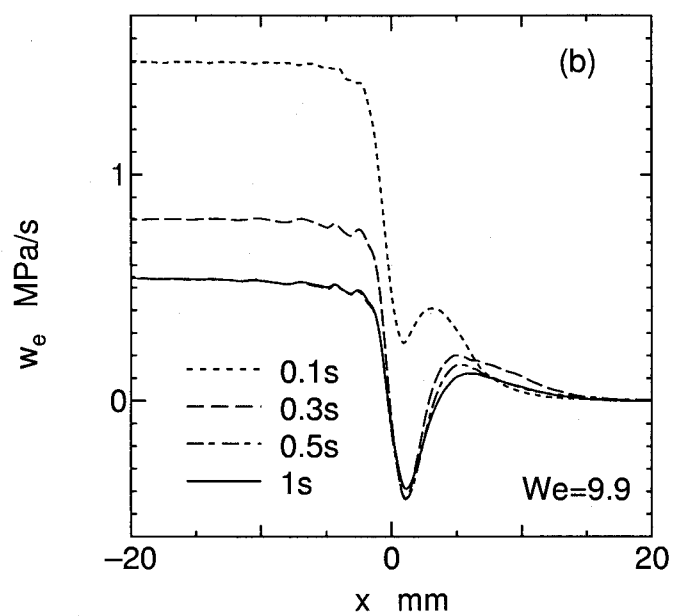


Fig.6.13: Change in distribution of stress power, w_e , of the first mode with time at $We=13$.

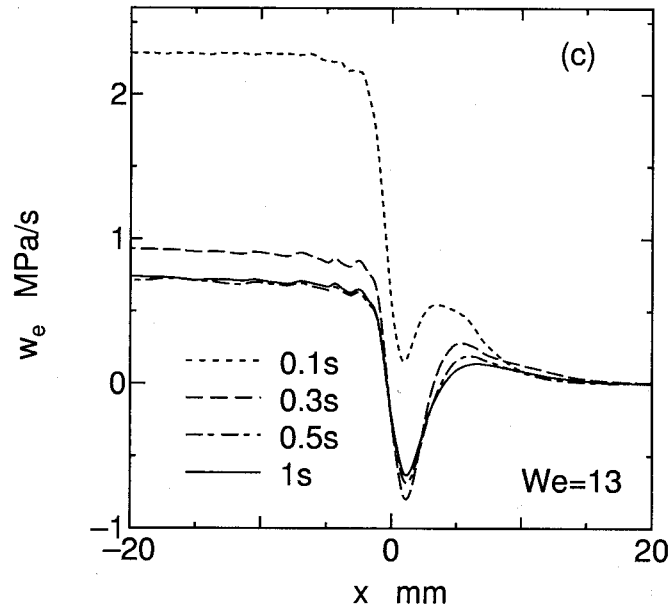


(a) $We=6.6$



(b) $We=9.9$

Fig.6.14: (a) and (b).



(c) $We=13$

Fig.6.14: Stress power, w_e , of the first mode along the line of $y=3H/4$ ($= 2.625$ mm): (a) $We=6.6$, (b) $We=9.9$, (c) $We=13$.

6.4 結 言

本章では構成方程式にレオノフモデルを用いて、急拡大流路における粘弾性流体のスタートアップ流れの数値解析を行った。そして、拡大部付近で起きる粘弾性流体に特有の流動挙動を捉えることができた。

粘弾性流体が上流側の平行流路から下流側の拡大流路に流れ込むと、拡大部の入り口付近で、外側の壁面の方へ大きく膨らむように流れる。そして、この現象は時間とともに顕著に現れ、流路角部に生じる渦が時間とともに小さくなっていく。その結果、流動開始直後に比べて拡大部直後でより大きな減速が生じる流れ場となる。応力パワーを用いた解析の結果から、このような流れ場への変化は、上流側の流路におけるせん断変形によって蓄えられた弾性的エネルギーの開放を促進するためのものであることが分かった。したがって、粘弾性流体の急拡大流れにおいて拡大部入り口直後の領域でみられる特異な流動挙動は、流体の弾性的性質に関係があると考えられる。

第7章 急縮小急拡大流路における粘弾性流体の非定常流れの数値解析

7.1 緒言

本章では、急縮小急拡大流れについて解析を行う。本研究では、流路幅の広い2つの平行流路を、流路幅の狭い平行流路（以下、スリット部と呼ぶ。）で連結した急縮小急拡大流路における粘弾性流体のスタートアップ流れを考える。

高分子成形加工においても、縮小流れや拡大流れを組み合わせた流れが現れることもあり、急縮小急拡大流路における粘弾性流体の流動挙動を解析することは興味深い問題であるが、それにも増して急縮小急拡大流路における流れの解析を行う目的は、記憶効果のような粘弾性流体の時間依存特性の流動挙動への影響を調べることにある。

粘弾性流体は変形履歴の記憶効果をもつために、ある瞬間の応力場は、その時刻の速度場だけでは決定されずに、上流側で受けた変形の履歴の影響を受ける。Perera ら⁽⁸⁴⁾は Oldroyd-B モデルを用いて、急縮小急拡大流路における流れの数値計算を行い、粘弾性流体の記憶効果がスリット部通過後の流れに影響することを報告している。このような状況は工業的にみられる流れにおいても現れる。例えば、成形機の中の流れを考えた場合、流体がスクリー部分からダイ入口、ダイ内部、そしてダイ出口へと流動する過程において、流体は前段階において受けた変形の履歴が、十分緩和する前に次の変形を受けることになる。また複雑な形状の流路内の流れにおいても、流体が上流側の変形の影響を残して新たな変形を受けるような状況が現れる。このときの流体の挙動は製品品質に影響を及ぼす。また、成形プロセスの改良を行うためには、粘弾性流体の流れのメカニズムを解明する必要がある。

本解析では、急縮小流れや急拡大流れの場合と同様に、流速を変化させることにより、ワイセンベルグ数と流れ場との関係を調べる。さらに、スリット部の長さを変化させて、流路長と応力の緩和現象との関連を調べる。

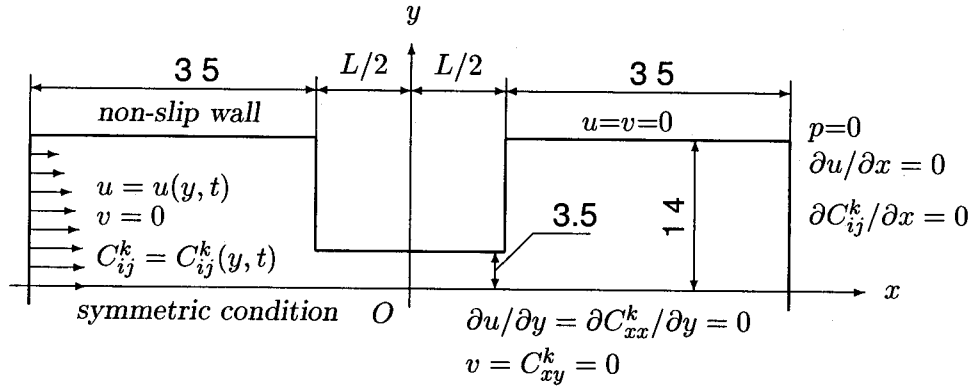


Fig.7.1: Schematic diagram of a 4 to 1 to 4 abrupt contraction-expansion channel and boundary conditions.

7.2 計算条件

図 7.1 に数値計算を行う急縮小急拡大流路の形状と座標系を示す。また、図 7.1 には境界条件もあわせて示している。この流路は、流路幅の等しい 2 つの平行流路を流路幅の狭い平行流路（スリット部）で連結した流路である。入り口部の流路幅とスリット部の流路幅の比は 4 : 1 である。本解析ではスリット長 L が 3.5 mm, 10.5 mm, 21 mm である 3 種類の流路について計算を行った。以下では、これらの流路をそれぞれ流路 A, B, C と呼ぶ。計算に使用したメッシュ分割を図 7.2 に示す。

試料流体は、第 5 章および第 6 章で解析を行ったものと同じものを考えた。したがって、表 5.1 に示したレオノフモデルのパラメータを使用した。

はじめに、ワイセンベルグ数の影響を調べるために、流路 B ($L=10.5$ mm) について、入り口平均流速 $\bar{u}_{\text{ent}}$ を変化させた計算を行った。ここでは、 $\bar{u}_{\text{ent}}=1$ mm/s, 5 mm/s, 10 mm/s の場合を考えた。このとき、式 (5.7) で定義されるワイセンベルグ数 We はそれぞれ 0.66, 3.3, 6.6 となる。ここでは、代表速度 U と代表長さ H として、それぞれスリット部の平均流速と半流路幅を用いて、 We を評価した。次に、スリット部における応力緩和挙動の流れ場への影響を調べるために、 $\bar{u}_{\text{ent}}$ を 5 mm/s ($We=3.3$) に固定して、3 種類の流路 (A, B, C) に対して解析を行った。このとき、式 (5.8) で定義されるデボラ数 De は、流路 A, B, C に対して、それぞれ 3.3, 1.1, 0.55 となる。ここで、代表速度としてスリット部の平均流速を、代表長さとしてスリット長 L を用いて De を評価した。したがって、 De は流体の代表緩和時間と流体がスリット部を通過する平均時間との比となる。

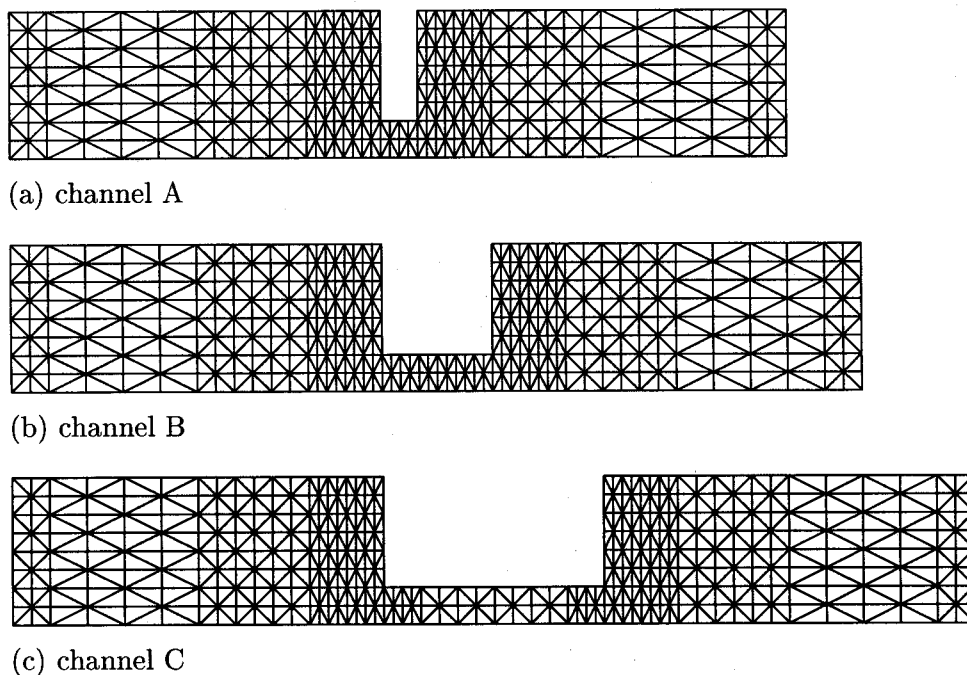


Fig.7.2: Finite element mesh for 4 to 1 to 4 abrupt contraction-expansion channels: (a) Channel A, $L=3.5$ mm. (b) Channel B, $L=10.5$ mm. (c) Channel C, $L=21$ mm.

7.3 計算結果と考察

7.3.1 ワイセンベルグ数の影響

流路 B を用いて, 3 種類のワイセンベルグ数 ($We=0.66, 3.3, 6.6$) の条件で計算を行った. さらに, 比較のためにニュートン流体の流れについても計算した. ニュートン流体の密度は粘弾性流体のものと同一とし, 粘度は粘弾性流体のゼロせん断粘度と等しくおいた.

まず, 速度場の計算結果を示す. 図 7.3 に We が 6.6 のときの速度ベクトルの時間変化を示す. 本計算の条件ではレイノルズ数が非常に小さく, 慣性力の影響は無視できる. そのため, ニュートン流体の速度分布は, 図 7.3 (e) に示すようにスリット部の上流側と下流側で対称な分布になる. 粘弾性流体の場合にも, 流動開始直後の $t=0.1$ s ではニュートン流体のストークス流れと同様にスリット部の上流側と下流側でほぼ対称な流れになっている. しかし, 時間が進行するとともに, 縮小部の上流側の渦は流動開始直後よりも大きく成長し, 下流側の渦は小さくなる. このような渦の大きさの変化は, それぞれ第 5 章と第 6 章に示した, 急縮小流れや急拡大流れの場合に現れる現象と同じである. そして, その流れのメカニズムも先に議論したのと同じであると考えられる.

いずれのワイセンベルグ数の場合にも, このような速度場の時間変化がみられたが, $We=0.66$ の場合には, 他のワイセンベルグ数の場合に比べると, 速度場の変化は顕著で

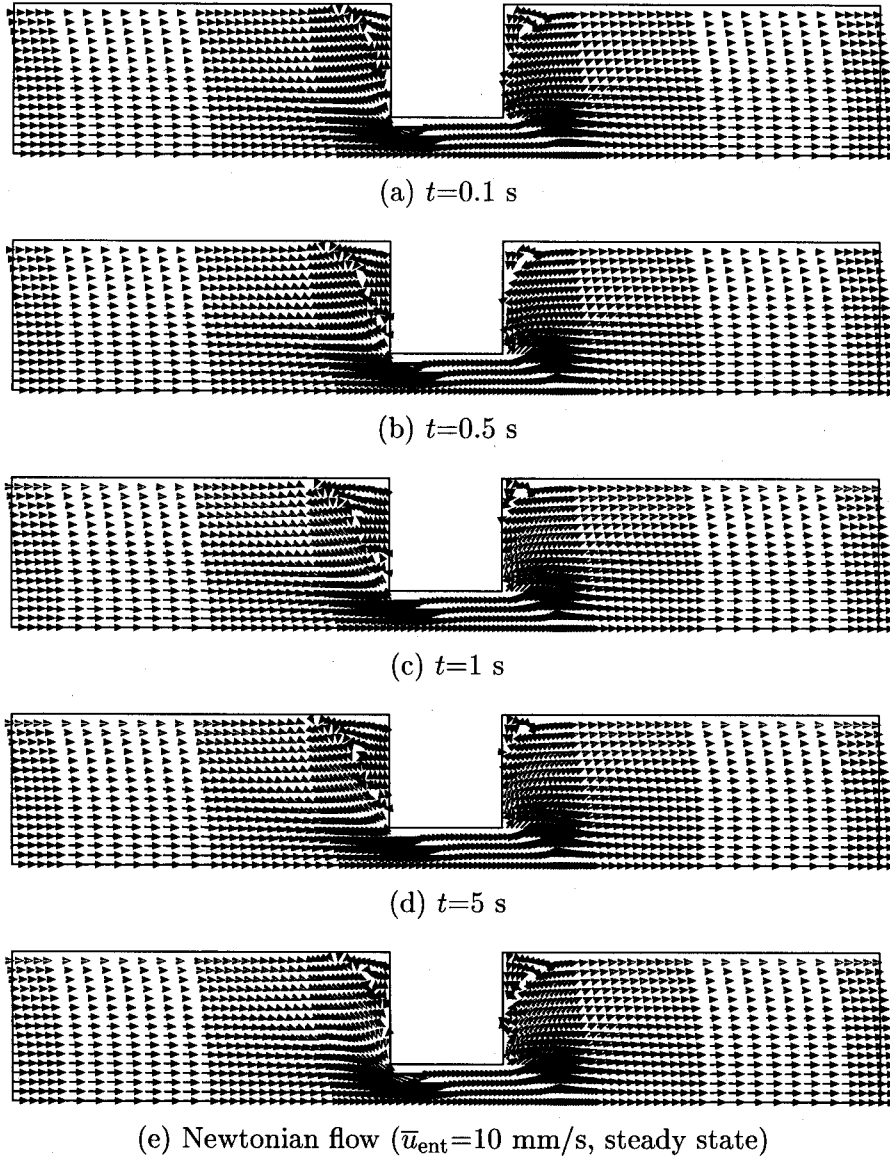


Fig.7.3: (a)–(d) Velocity vectors of viscoelastic flow with time at $We=6.6$. (e) Velocity vectors of Newtonian flow of $\bar{u}_{ent}=10$ mm/s at steady state.

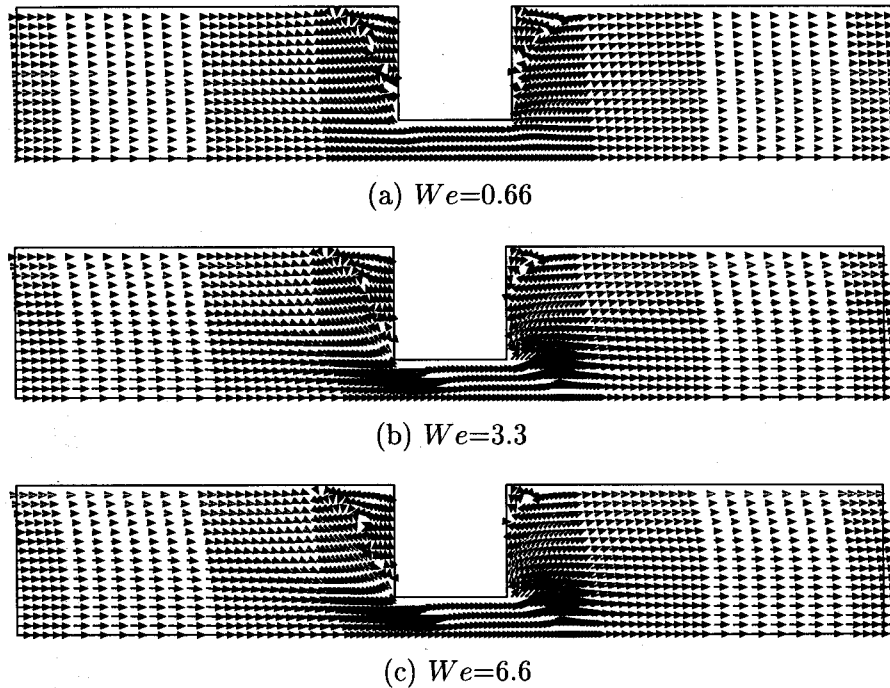


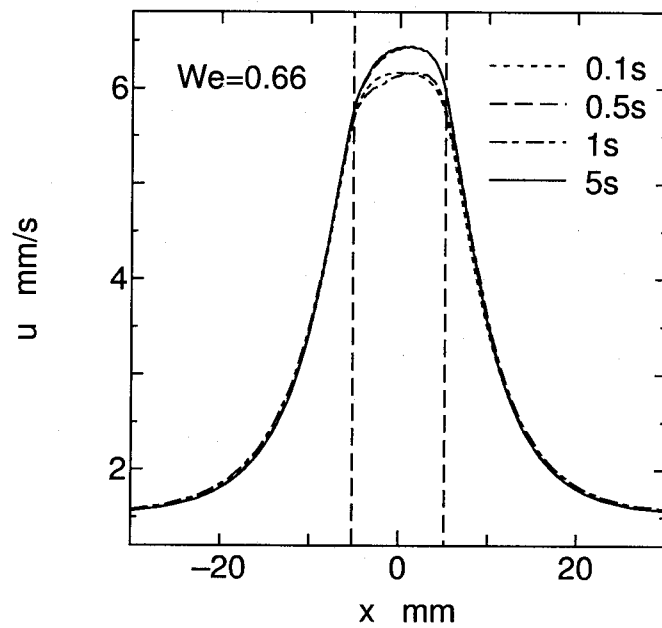
Fig.7.4: Velocity vectors of viscoelastic flow at $t=5$ s: (a) $We=0.66$, (b) $We=3.3$, (c) $We=6.6$.

はない。これは、他の条件に比べて流れ場の弾性の影響が小さいためであると考えられる。

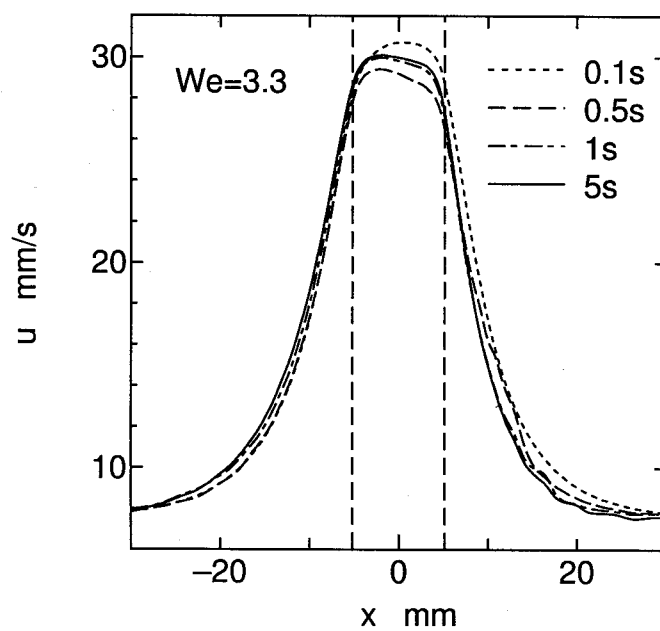
図 7.4 に、ほぼ定常状態である時刻 $t=5$ s における、各ワイセンベルグ数の速度ベクトルを比較する。各ワイセンベルグ数に対する結果を比較すると、ワイセンベルグ数が大きいほど上流側の渦は大きく、下流側の渦は小さくなっていることが分かる。このような傾向は急縮小流れや急拡大流れにおいてみられた現象と同じである。

ここで、縮小部入り口付近の伸長変形や、拡大部入り口付近の減速流れの影響が顕著に現れると考えられる流路の中心線上の流速および速度勾配を調べる。図 7.5 に中心線上の流れ方向流速 u の分布の時間変化を示す。そして、図 7.6 に、 $t=5$ s における粘弾性流体とニュートン流体の u の中心線上分布の比較を示す。図 7.5 中の実線が粘弾性流体の結果を、破線がニュートン流体の結果を表している。また、これらの図中の y 軸に平行な破線はスリット部の入り口と出口の位置を示している。本章のこれ以降に示す x 方向の分布図に関しても同様にスリット部の出入口を示す線を記入している。

いずれのワイセンベルグ数においても、 $t=0.1$ s では $x=0$ に対して上流側と下流側で対称に近い流速分布であったものが、時間の経過とともに非対称な分布へと変化している。スリット部の上流側では、より上流側から加速が始まるような流速分布へと変化し、下流側では、拡大部の入り口により近い位置で減速が生じるような流速分布へと変化している。

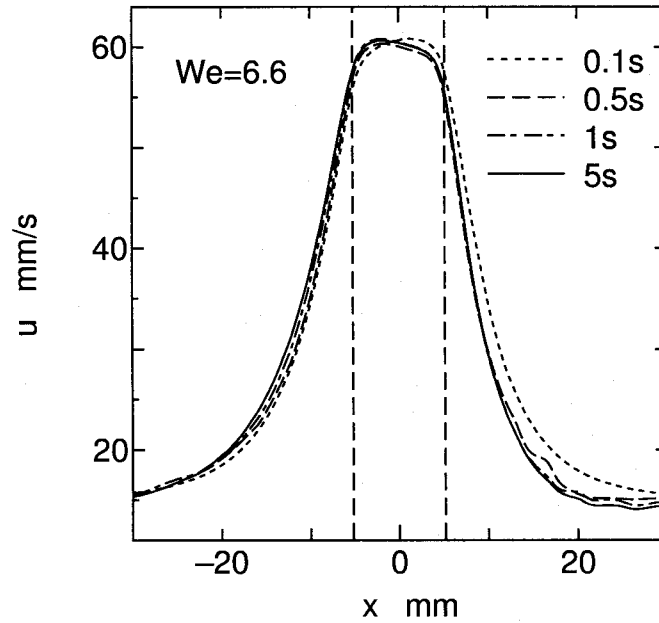


(a) $We=0.66$



(b) $We=3.3$

Fig.7.5: (a) and (b).



(c) $We=6.6$

Fig.7.5: Velocity, u , along the center line: (a) $We=0.66$, (b) $We=3.3$, (c) $We=6.6$.

ここで述べた流速分布の変化は $We=3.3$, 6.6 の場合には顕著に現れるが、ワイセンベルグ数の小さい $We=0.66$ の計算結果ではあまり顕著には現れていない。この結果は、上述の流速分布の時間変化は流れの弾性的影響と関係することを示唆している。

第5章でも述べたように、本解析の計算条件ではレイノルズ数が非常に小さいために、流れはストークス流れとみなすことができる。したがって、図7.6に示すように、ニュートン流体の場合には流速分布は $x=0$ に対して上流側と下流側で対称な分布となる。粘弾性流体の場合にも、 $We=0.66$ のときにはニュートン流体と同じ傾向がみられるが、ワイセンベルグ数が大きくなると、ニュートン流体との違いが現れる。上流側ではニュートン流体よりも上流側で流速が大きくなり始める。そして、スリット部では下流側に比べて上流側の流速が大きくなっている。これは時間とともに上流側の流路角部に生じる渦が大きくなることに起因するもので、急縮小流れにおいてもみられた現象である。また、下流側の拡大部では粘弾性流体の方がより上流側で減速している。これは、急拡大流れの場合と同じように、粘弾性流体の方が拡大部の入り口直後で流体が外側に膨らむように流れるためである。

次に、中心線上の速度勾配を考える。図7.7に中心線上の流れ方向の速度勾配 $\partial u / \partial x$ の分布の時間変化を示す。さらに、 $t=5$ sにおける粘弾性流体とニュートン流体の $\partial u / \partial x$

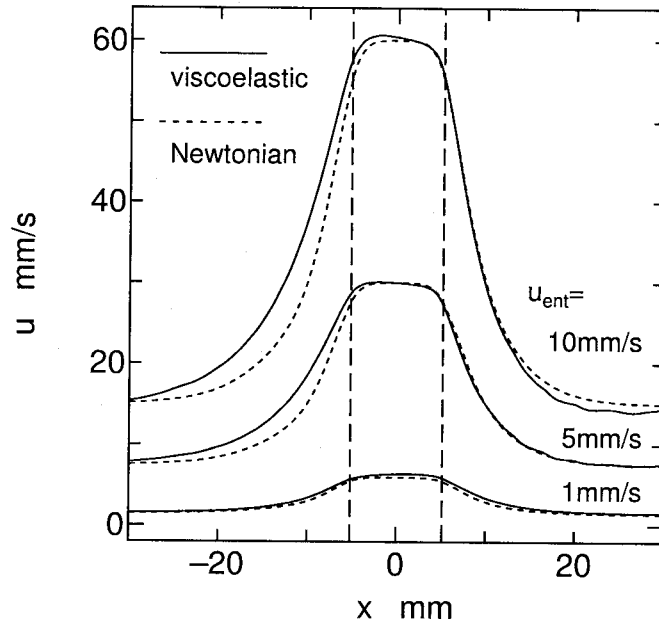
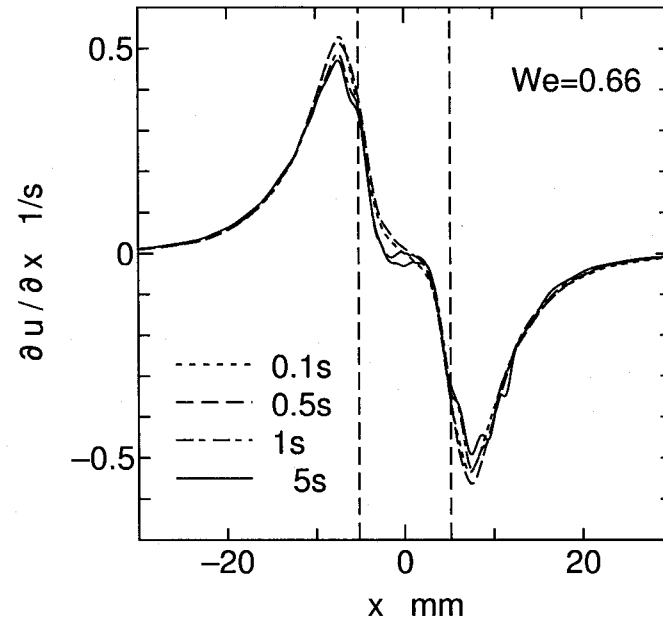


Fig.7.6: Comparison of velocity , u , along the center line for viscoelastic flow with that for Newtonian flow at $t=5$ s. Solid line: viscoelastic fluid. Dashed line: Newtonian fluid.

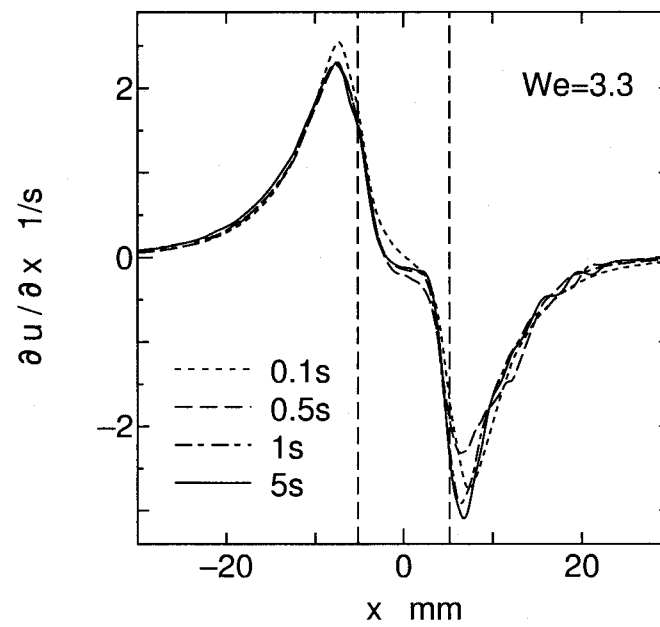
の中心線上分布の比較を図 7.8 に示す. 図 7.7 中の実線は粘弾性流体の結果を, 破線はニュートン流体の結果を表す.

中心線上の $\partial u / \partial x$ の分布は, いずれのワイセンベルグ数においても同様の傾向を示す. 縮小部の入り口から十分上流側では $\partial u / \partial x$ はほぼ 0 に近い値であるが, 縮小流れにより流体が加速されるために, 縮小部の入り口付近では大きくなり, 縮小部の入り口の少し上流側で最大値をとる. そして, スリット部では $\partial u / \partial x$ は小さくなり, ほぼ 0 の値で一定になる領域が存在する. 拡大部の入り口にかけては, 拡大流れにより流体が減速されるために, $\partial u / \partial x$ は負の値となり, 拡大部の入り口直後で最小値をとる. そして, 拡大部の入り口の十分下流側では $\partial u / \partial x$ は再び 0 に近い値となる. ワイセンベルグ数が大きい条件ほど, 速度勾配の絶対値は大きくなっている.

次にニュートン流体の計算結果と粘弾性流体の計算結果とを比較する. ワイセンベルグ数の小さな $We=0.66$ の場合にはほとんど違いはみられないが, 他の 2 つの条件では顕著な違いがみられる. 上流側では粘弾性流体の方がニュートン流体よりも上流側から加速が始まり, $\partial u / \partial x$ の最大値は小さくなっていることが分かる. これは急縮小流れの解析の際にみられたように, 上流側の流路角部に発生する循環二次流れが, stress relief mechanism として働いているためである. また, 下流側をみると, 粘弾性流体の方が上流側で最小値をとっていることが分かる. これは急拡大流れの解析のときにみられたものと同じ現象で

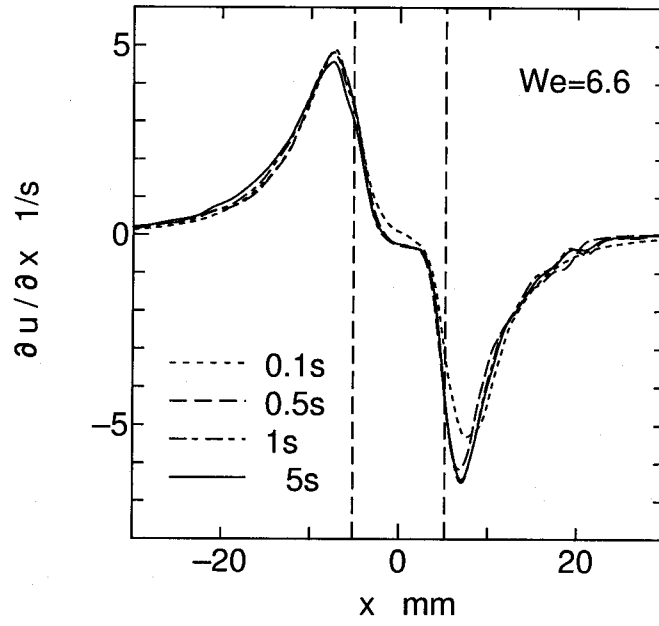


(a) $We=0.66$



(b) $We=3.3$

Fig.7.7: (a) and (b).



(c) $We=6.6$

Fig.7.7: Velocity gradient, $\partial u / \partial x$, along the center line: (a) $We=0.66$, (b) $We=3.3$, (c) $We=6.6$.

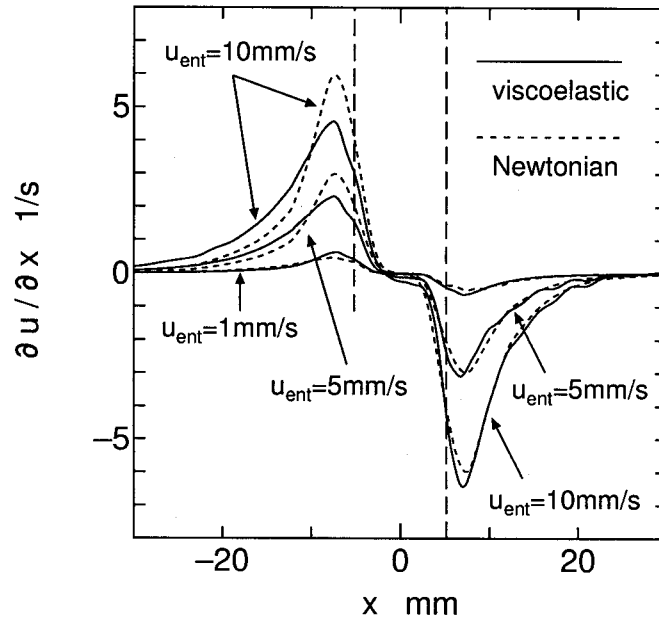


Fig.7.8: Comparison of velocity gradient, $\partial u / \partial x$, along the center line for viscoelastic flow with that for Newtonian flow at $t=5$ s. Solid line: viscoelastic fluid. Dashed line: Newtonian fluid.

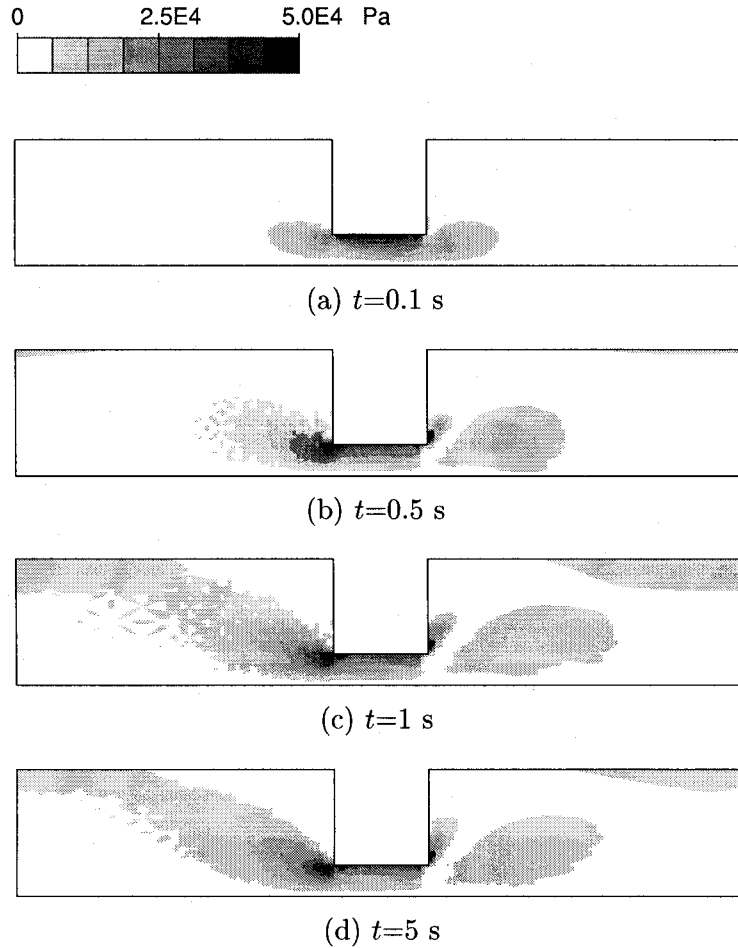


Fig.7.9: Change in distribution of $|\tau_{xy}|$ with time at $We=6.6$.

ある.

続いて、応力場の計算結果を示す. 図 7.9 と図 7.11 に、それぞれ We が 6.6 のときのせん断応力の大きさ $|\tau_{xy}|$ と法線応力差 $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ の分布の時間変化を示す. そして、 $t=5$ s における各ワイセンベルグ数の $|\tau_{xy}|$ と $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ の分布をそれぞれ図 7.10 と図 7.12 に示す. ここで、 $We=0.66$ の場合は他の条件と比較して応力が小さいために、異なるスケールを用いていることに注意する.

せん断応力は、せん断速度の大きくなるスリット部の壁面近くと、スリット部の出入口の角部付近で大きくなり、これらの領域から応力が成長していくことが分かる. そして、応力の値はワイセンベルグ数が大きいほど大きい. また、速度場においてもそうであったように、 $We=0.66$ の場合にはスリット部の上流側と下流側でほぼ対称な応力分布になっている.

次に、 $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ について考察する. 本章で考えている流れでは、スリット部の上流側で

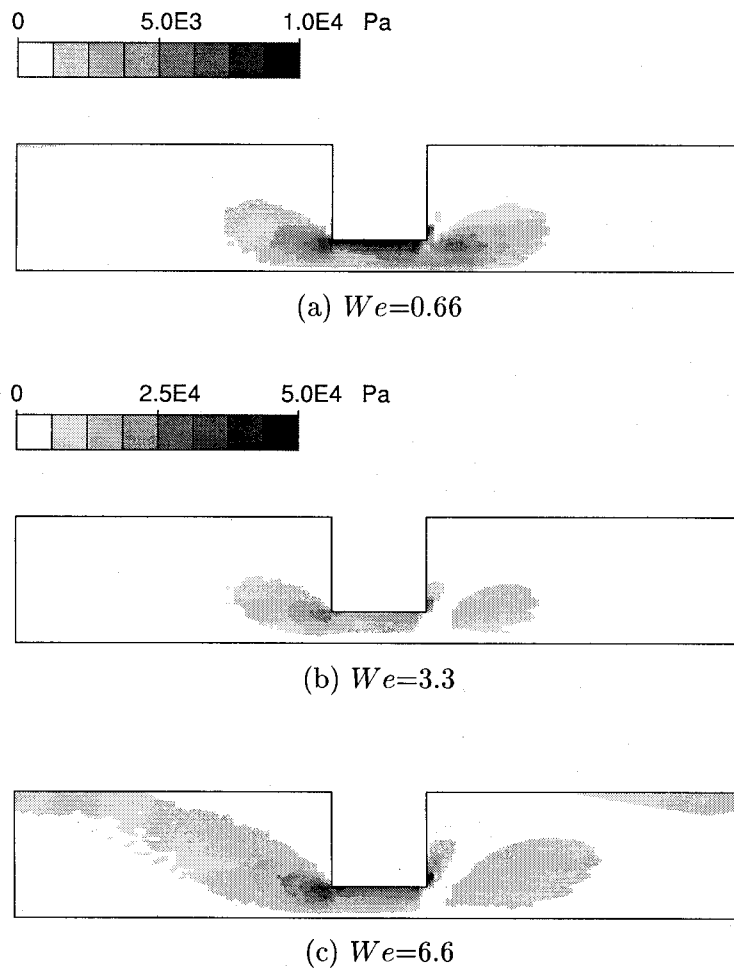


Fig.7.10: Distribution of $|\tau_{xy}|$ at $t=5$ s: (a) $We=0.66$, (b) $We=3.3$, (c) $We=6.6$.

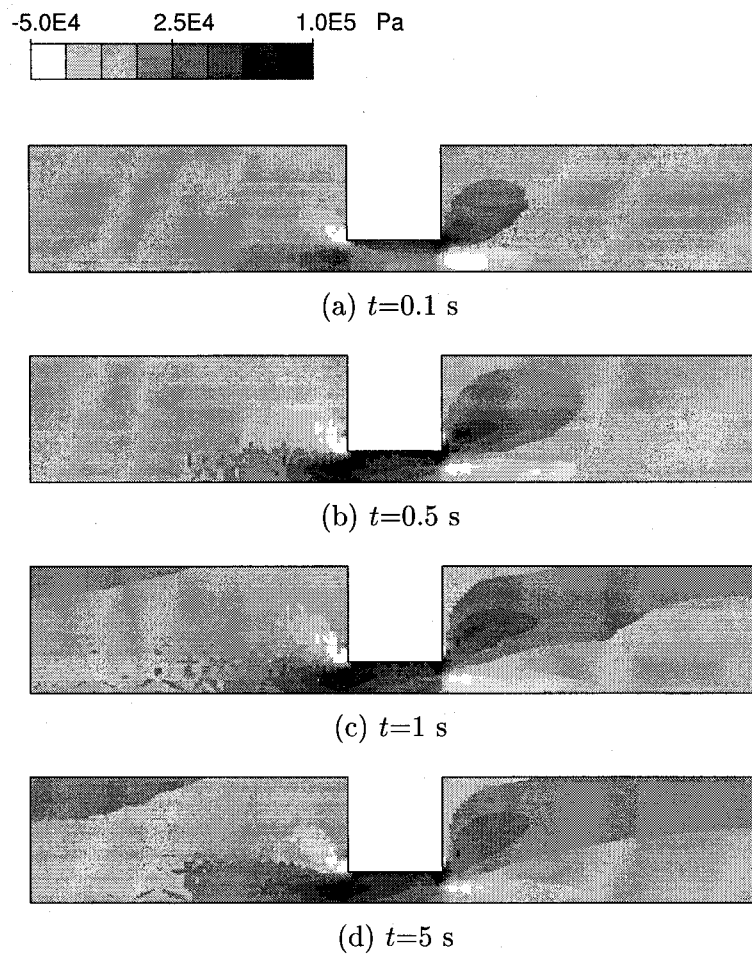


Fig.7.11: Change in distribution of $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ with time at $We=6.6$.

は縮小流れが、スリット部の下流側では拡大流れが生じている。したがって、基本的には上流側では急縮小流れにおいてみられた現象と類似の現象が、下流側では急拡大流れにおいてみられた現象が現れる。すなわち、上流側では急縮小流れの場合と同様に、縮小部の上流側の伸長流れによって応力が大きくなり、縮小部の入り口付近から応力が成長していく。また、下流側では、減速流れとなるために拡大部の入り口の下流側で $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ が負となる領域が現れる。拡大部の角部付近から応力が成長している。しかし、スリット部から下流側の拡大部にかけての応力場には、急拡大流れの応力場との相違がみられる。これは、上流側の伸長変形によって発生した応力がスリット部の平行流路で十分に緩和されずに、拡大流れが生じていることに起因する。急拡大流れの場合には上流側の平行流路部が十分に長く、流れ場が流れ方向に対して発達した状態で拡大流れへと変化する。したがって、拡大部入り口の近くをのぞけば、上流側では中心線上の $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ は 0 となる。一方、急縮小急拡大流れの場合には、上流側で発生した伸長応力が完全には緩和されずに残っているために、 $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ は 0 ではない。そのために、拡大部付近で急拡大流れとは異なる流動挙動が生じていると考えられる。

スリット部における応力緩和現象について調べるために、中心線上の $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ の計算結果を解析する。図 7.13 に $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ の中心線上分布の時間変化を示す。 $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ は流体が加速され、流れ方向の伸長速度が大きくなる縮小部の少し上流側で最大値をとる。そして、スリット部では $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ は減少し、拡大部の入り口付近では減速流れとなるために、 $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ は負の値をとる。いずれのワイゼンベルグ数の条件においても、スリット部の上流側の縮小流れによって受けた変形による応力がスリット部分で完全に緩和されて 0 になる前に出口側の拡大流れへと移っている。したがって、図 7.7 に示すように、拡大部入り口直後の速度勾配 $\partial u / \partial x$ の絶対値が、縮小部の上流側の $\partial u / \partial x$ の絶対値に比べて大きいにもかかわらず、下流側の $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ の最小値の絶対値は上流側の $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ の最大値と比べて小さくなっている。また、上流側の応力が時間とともに大きくなるのにもなって、スリット部の応力も時間とともに大きくなり、応力が減少し始める前の応力が大きくなる。その結果、下流側の $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ の絶対値が小さくなる。

7.3.2 スリット長の影響

第 7.3.1 節では、入り口平均流速を変化させることによって、異なる 3 種類のワイゼンベルグ数の条件で計算を行った。スリット部から拡大部にかけての流れにおいて、上流側の縮小流れによって生じた応力が、スリット部を通過する際に十分に緩和されずに拡大流れへと移行する様子がみられた。そして、この現象はワイゼンベルグ数が大きいほど顕著に

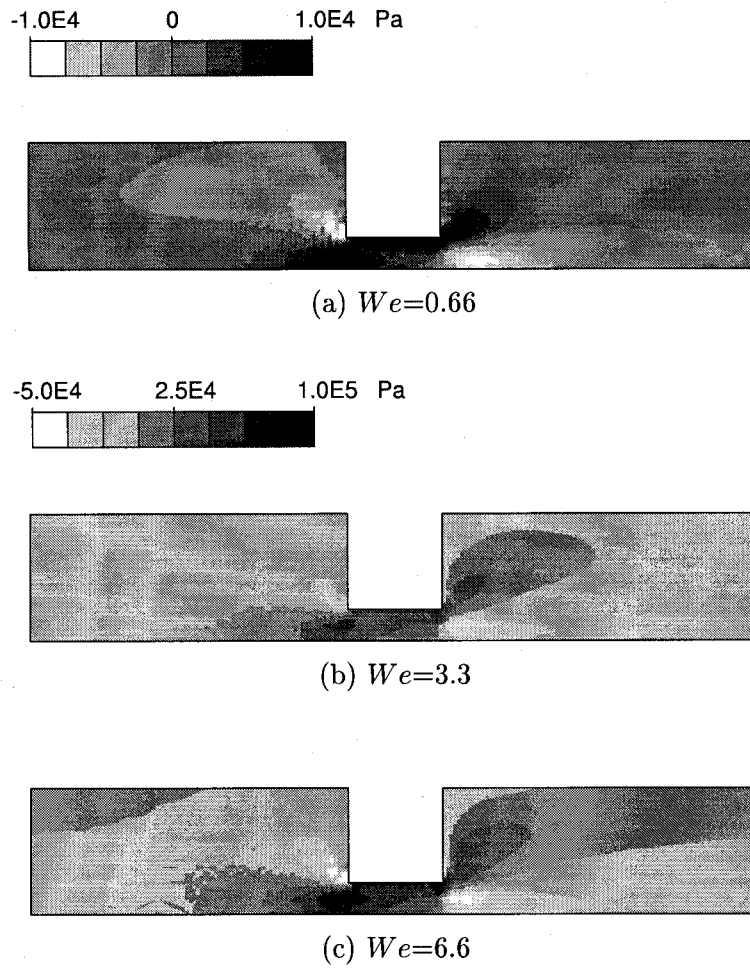
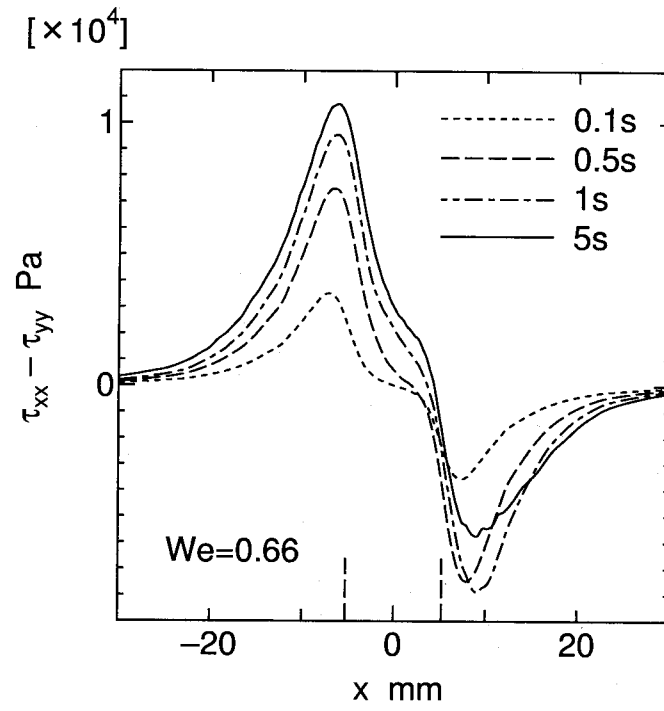
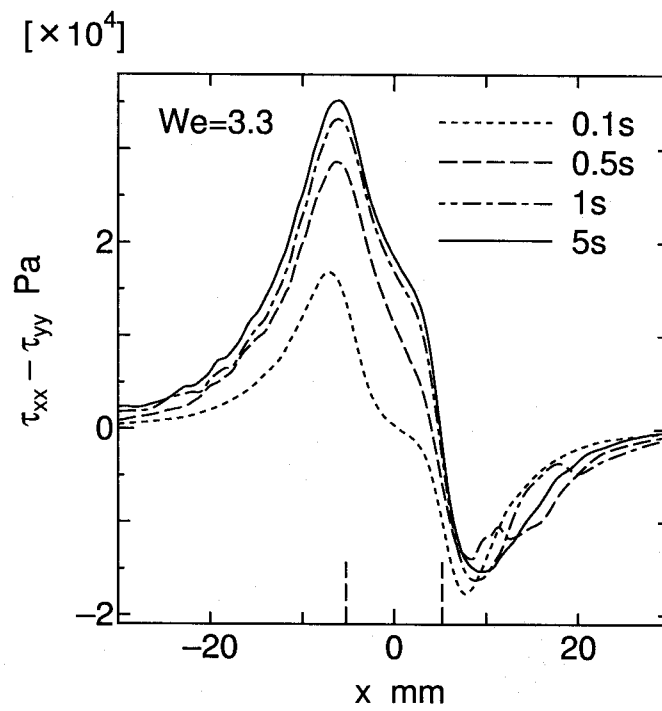


Fig.7.12: Distribution of $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ at $t=5$ s: (a) $We=0.66$, (b) $We=3.3$, (c) $We=6.6$.

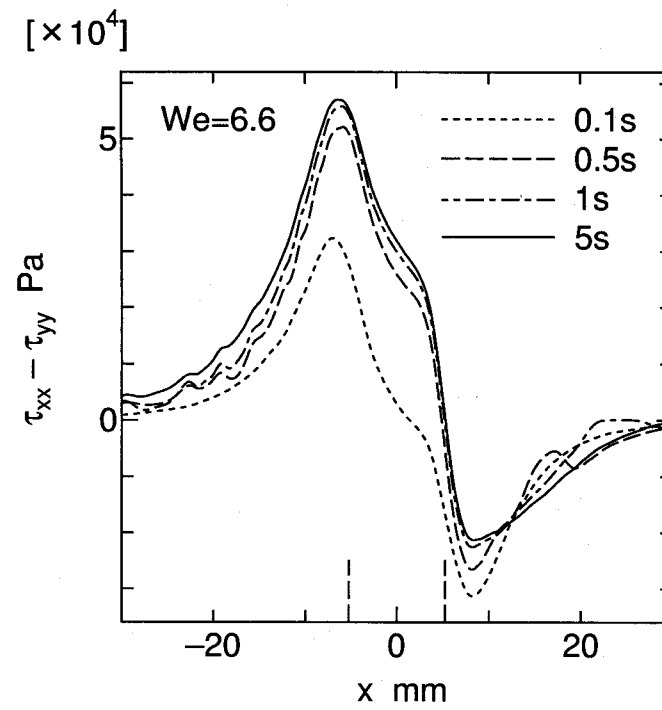


(a) $We=0.66$



(b) $We=6.6$

Fig.7.13: (a) and (b).



(c) $We=13$

Fig.7.13: Normal stress difference, $\tau_{xx} - \tau_{yy}$, along the center line: (a) $We=0.66$, (b) $We=3.3$, (c) $We=6.6$.

現れた。これはワイセンベルグ数が大きいくほど上流側の応力が大きくなるのが原因のひとつであると考えられる。また、流速が大きいくほど流体がスリット部を通過する時間が短くなることも影響していると予想される。実際に、入り口平均流速を大きくすることによりワイセンベルグ数を上げた場合、デボラ数も大きくなる。第 7.3.1 節の計算条件である、 $We=0.66, 3.3, 6.6$ に対して、 De はそれぞれ $0.22, 1.1, 2.2$ である。したがって、流体がスリット部を通過する時間はワイセンベルグ数が大きいくほど短く、そのためにスリット部で応力が緩和される時間も短くなる。この影響もワイセンベルグ数が大きいくときに下流側の特異な流れ現象が顕著に現れる原因のひとつであると考えられる。

そこで、本節では、入り口平均流速を固定し、スリット部の長さ L を変えて解析を行うことにより、流体のもつ記憶効果の流動挙動への影響を調べる。したがって、ワイセンベルグ数は一定で、デボラ数の異なる流れ場を考えることになる。第 7.3.1 節で示したように、スリット部では上流側の伸長変形によって生じた応力の緩和が起きている。そして、スリット部で応力が十分に緩和される前に、流体は下流側の拡大流れによる変形を受ける。スリット長を長くすれば、流体がスリット部に滞留する時間が長くなり、したがって応力が緩和される時間が長くなる。反対にスリット長を短くすれば、応力が緩和される時間が短くなる。

ここでは、入り口平均流速 $\bar{u}_{ent}$ を 5 mm/s に固定し、 $L=3.5 \text{ mm}, 10.5 \text{ mm}, 21 \text{ mm}$ の 3 種類の流路（順に流路 A, B, C）に対して解析を行った。このときワイセンベルグ数はいずれの流路の場合にも 3.3 で、デボラ数はそれぞれ、 $3.3, 1.1, 0.55$ となる。

まず、速度場の計算結果を示す。スリット長 L を変えた場合にも、流れ模様の時間変化は定性的には前述の計算結果と同様の変化を示す。すなわち、流動開始直後ではスリット部の上流側と下流側でほぼ同じ大きさの渦が発生するが、時間とともに上流側の渦は大きく成長し、下流側の渦は外側の壁面の方向に押しつぶされるように小さくなっていく。上流側の渦に関しては、 L による違いはほとんどみられないが、下流側では渦の大きさの変化に違いがみられる。図 7.14 にほぼ定常状態である $t=5 \text{ s}$ における速度ベクトルを示す。それぞれの流路に対する計算結果を比較すると、下流側の渦の大きさに違いがみられる。このような違いは、拡大部入り口直後における流れの外側への膨らみの程度の違いによるものである。

図 7.15 に x 方向流速 u の中心線上分布の時間変化を示す。流路 A, B, C いずれの場合においても、流動開始直後はスリット部の上流側と下流側で対称であった分布が、時間とともに非対称になっている。速度分布の時間変化は既に前節で議論したものと同一である。スリット長が長くなるほど、スリット部において、速度の変化が小さな領域が長く存

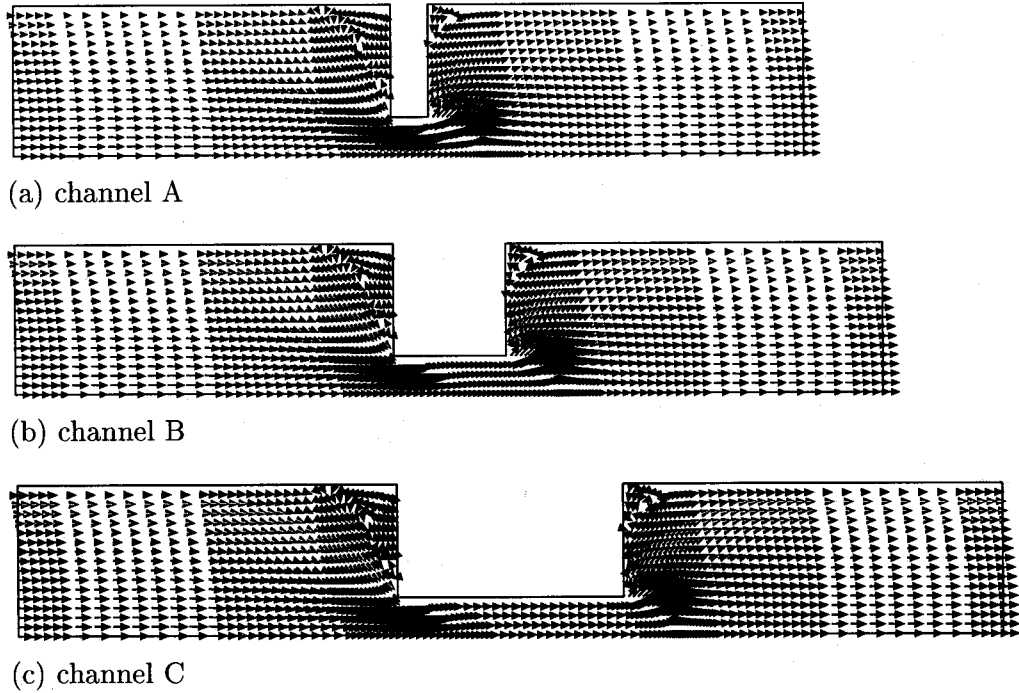


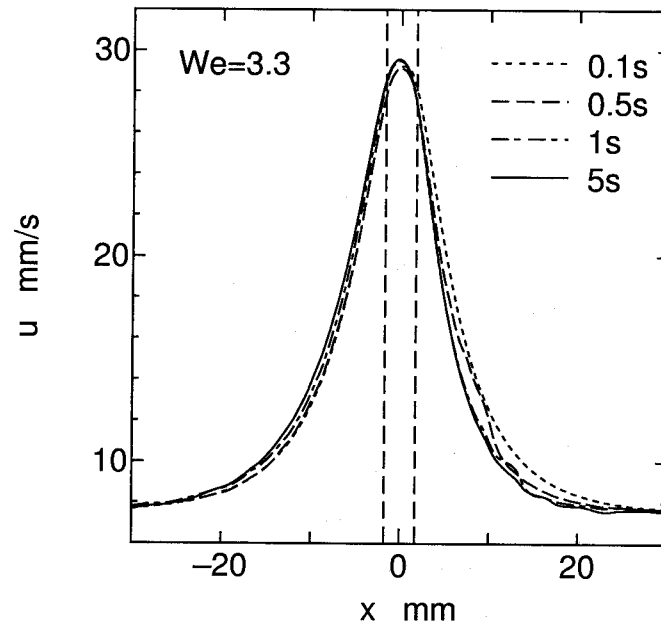
Fig.7.14: Velocity vectors of viscoelastic flow at $We=3.3$ at $t=5$ s: (a) channel A, $De=3.3$, (b) channel B, $De=1.1$, (c) channel C, $De=0.55$.

在する．このことは次に示す流れ方向の速度勾配の結果からも確認できる．

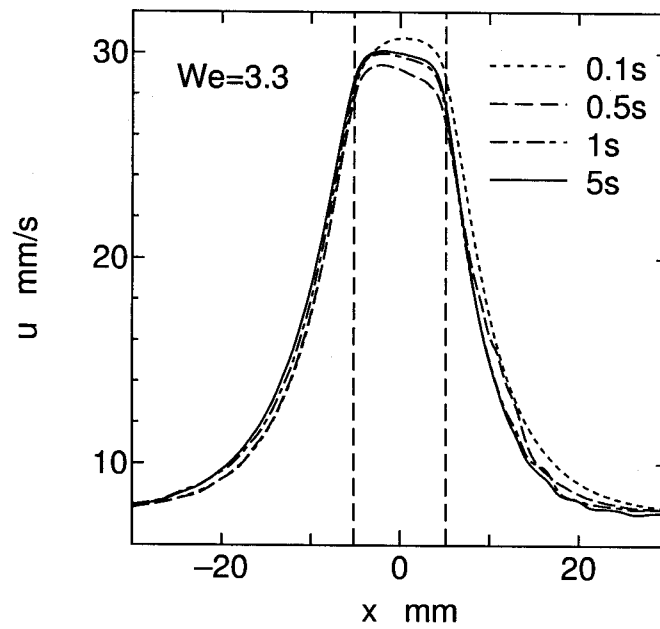
図 7.16 に速度勾配 $\partial u / \partial x$ の中心線上分布の時間変化を示す．いずれの流路においてもスリット部入り口付近（急縮小部）では，流体が加速されるために $\partial u / \partial x$ は大きくなる．そして，スリット部分から拡大部にかけて流体は減速し， $\partial u / \partial x$ の値は負になる．スリット部分の長い流路では，スリット部分で流れが発達するために，速度勾配が 0 に近くなる領域が長く存在することが分かる．そのために，次に示す応力の計算結果にみられるように，この領域で応力の緩和現象がみられる．

続いて，応力場の計算結果を示す．図 7.17～7.19 に，各流路における法線応力差 $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ の分布の時間変化を示す．定性的にはいずれの流路においても同様の時間変化がみられる．スリット長が長い方が，スリット部において応力が空間的に発達している．この様子は次に示す中心線上の応力分布をみるとよく分かる．そして，後で述べるように拡大部入り口の上流側における応力分布の違いが，拡大部における流動挙動の違いの原因になっている．

図 7.20 は法線応力差 $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ の中心線上分布の時間変化である．スリット部入り口付近の急縮小領域で応力は大きくなり，スリット部分では小さくなり，そして拡大部に移るスリット出口付近では負の値になる．また時間とともに分布がスリットの上流側と下流側で非対称になっていく様子が分かる．そして，上で述べたようにスリット長が長い流路で

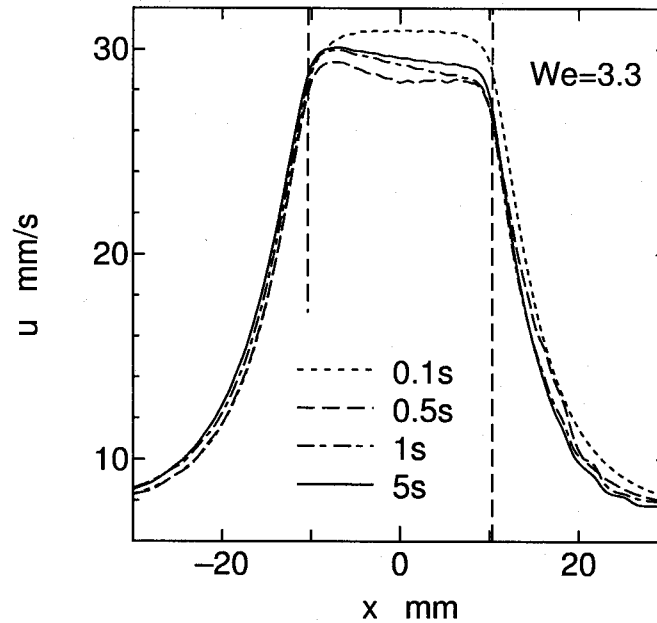


(a) channel A



(b) channel B

Fig.7.15: (a) and (b).



(c) channel C

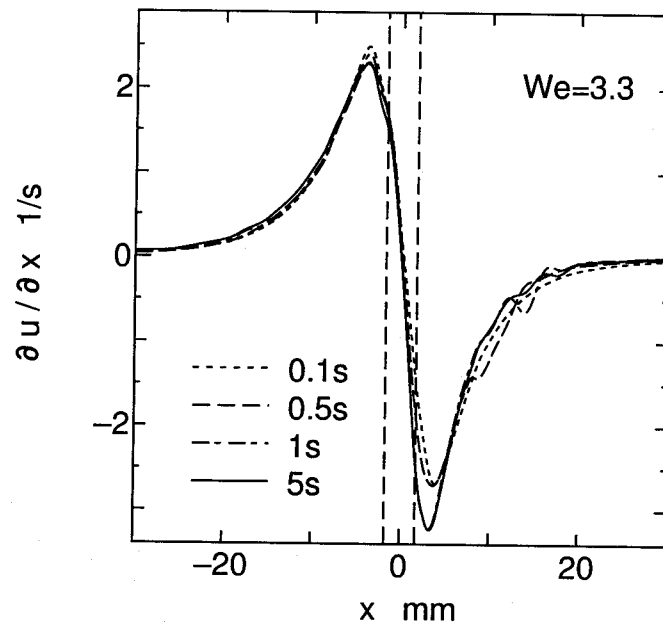
Fig.7.15: Velocity, u , along the center line at $We=3.3$: (a) channel A, $De=3.3$, (b) channel B, $De=1.1$, (c) channel C, $De=0.55$.

はスリット部分で応力の緩和現象が生じている。これは、スリット長が長いためにスリット部分で速度が発達し、速度勾配が 0 に近くなる領域が長く存在することによって、このような緩和現象が生じるものと考えられる。

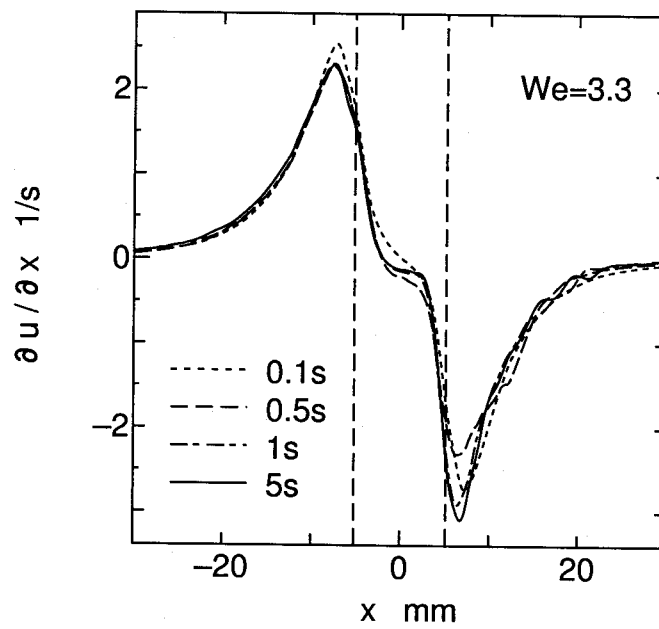
速度勾配の結果をみると、スリットの上流側に比べて下流側の方が絶対値が大きくなっているにも関わらず、法線応力差の絶対値は下流側の方が小さい。これは、上流側で受けた変形による応力が完全に緩和されずに残っているためである。

続いて、応力パワーの弾性的寄与分 w_e を用いて解析を行う。 w_e は弾性エネルギーの蓄積に関係する。急縮小流れ（第 5 章）や急拡大流れ（第 6 章）の解析の場合と同様に、第 1 モードの w_e について解析を進める。以下では、 w_e に関しては第 1 モードの値であることを特に明示はしない。

図 7.21 ～ 7.23 に各流路に対する w_e の時間変化の計算結果を示す。 w_e の分布はいずれの流路においても、定性的には同様の時間変化を示す。 $t=0.1$ s ではスリット部の壁面近くに w_e が大きくなる領域が存在し、スリット部の上流および下流側に w_e が比較的大きい領域が存在する。そして、時間が経過すると、縮小部入り口付近で応力が成長するため、この領域の w_e が大きくなっていく。また、拡大部入り口の下流側では、時間とともに

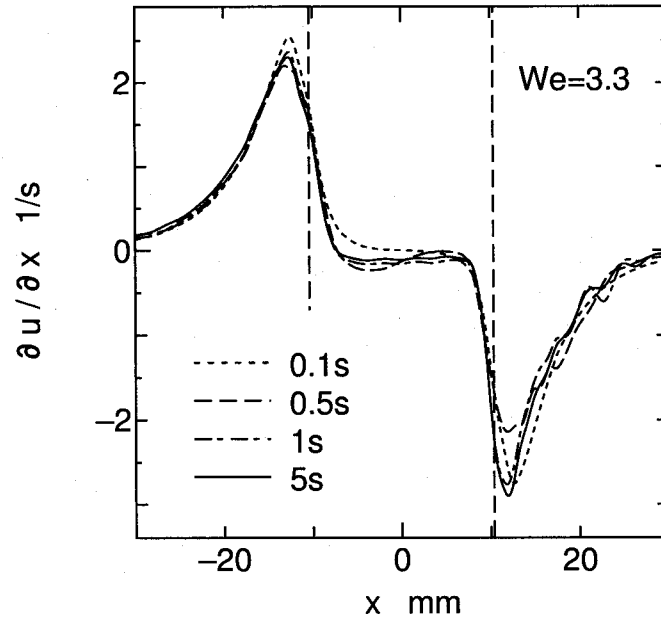


(a) channel A



(b) channel B

Fig.7.16: (a) and (b).



(c) channel C

Fig.7.16: Velocity gradient, $\partial u/\partial x$, along the center line at $We=3.3$: (a) channel A, $De=3.3$, (b) channel B, $De=1.1$, (c) channel C, $De=0.55$.

に w_e が小さくなり、負の値をとる領域が広がっていく。各流路に対する結果を比較すると、縮小部の上流側ではほとんど違いがみられないが、拡大部の入り口付近の分布に顕著な違いがみられる。スリット長の長い流路ほど、拡大部入り口直後の w_e が負となる領域が広がっている。特に、スリット長が短い流路ほど w_e が小さな領域が中心線の方に広がっている。

次に w_e の時間変化をより詳細に解析するために、中心線上とスリット部の壁面からスリット部の半流路幅の $1/4$ だけ離れた線上 ($y=2.625$ mm の線上) の w_e の分布を調べる。

図 7.24 に中心線上分布を、図 7.25 に $y=2.625$ mm の線上の分布を示す。まず、中心線上の分布をみる。中心線上では流体はせん断変形を受けず、加速・減速流れによる伸長変形のみを受ける。スリット部から十分に離れた位置では、上流側・下流側ともに w_e はほぼ 0 で、スリット部の上流側では正の値を、下流側では負の値をとっていることが分かる。したがって、スリット部の上流側では、流体は縮小流れによる伸長変形を受け、弾性的エネルギーが蓄積される。そして、下流側では減速によって上流側で蓄えられた弾性的エネルギーが解放されている。

スリット部の上流側の分布だけを比較すると、スリット長の違いによる違いはほとんど

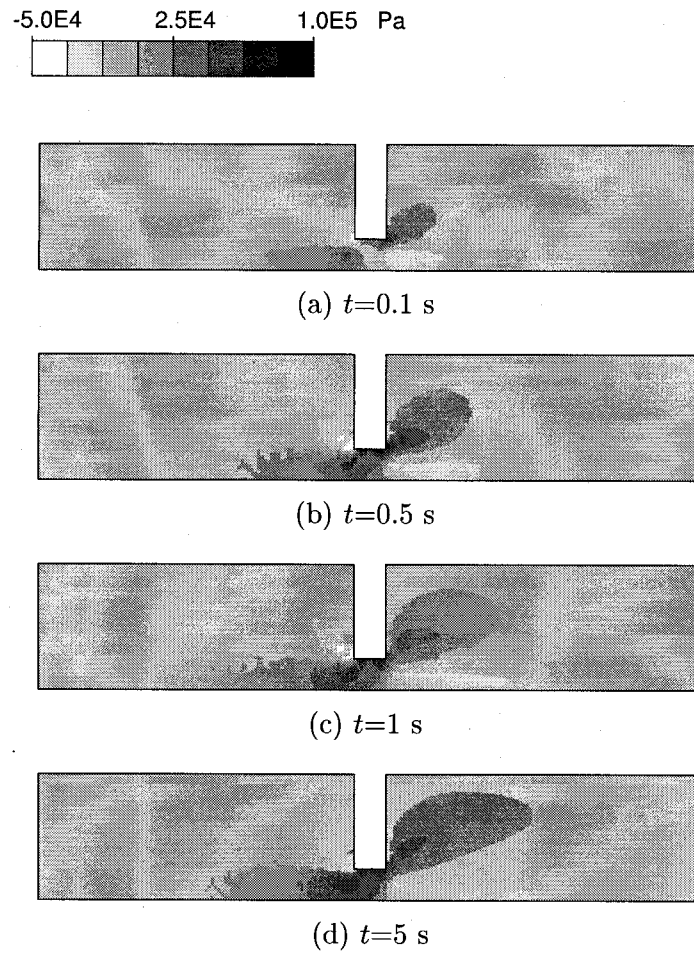


Fig.7.17: Change in distribution of $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ with time for the channel A at $We=3.3$.

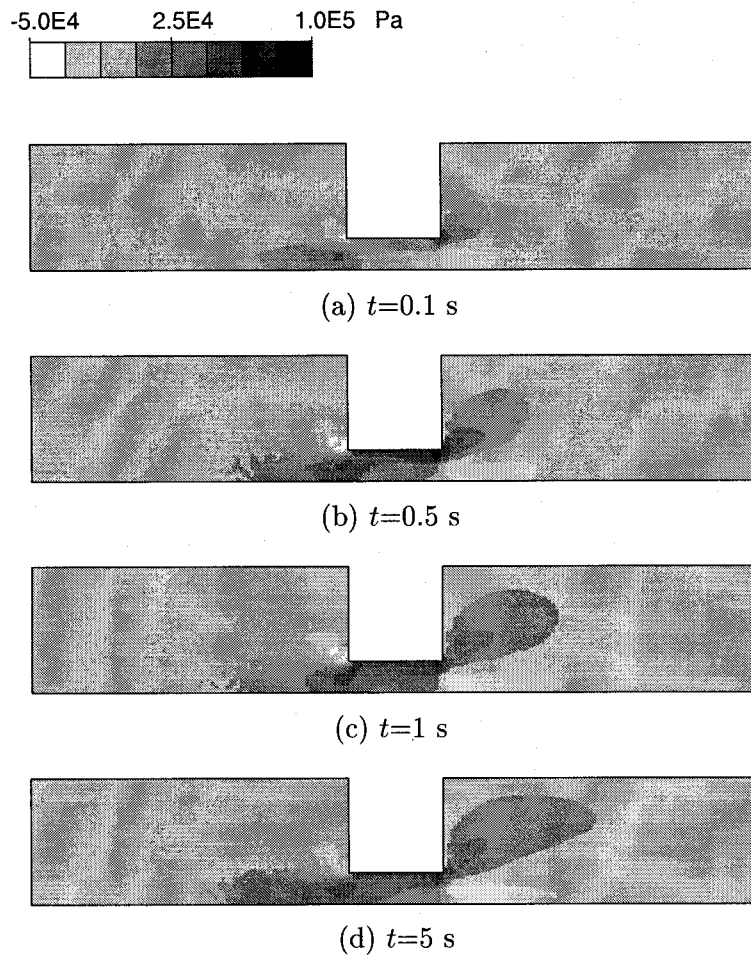


Fig.7.18: Change in distribution of $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ with time for the channel B at $We=3.3$.

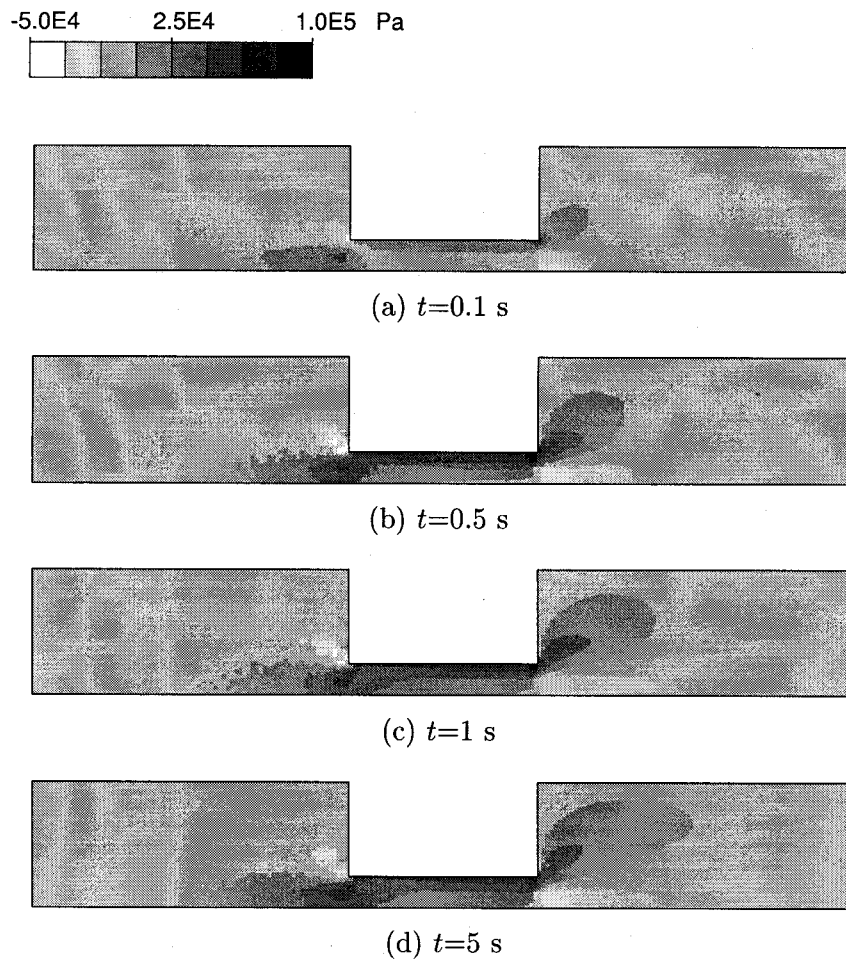
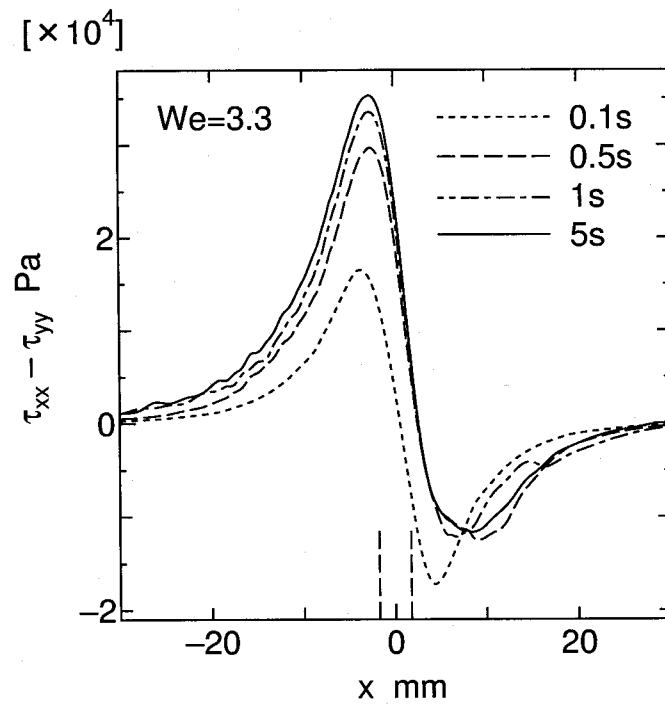
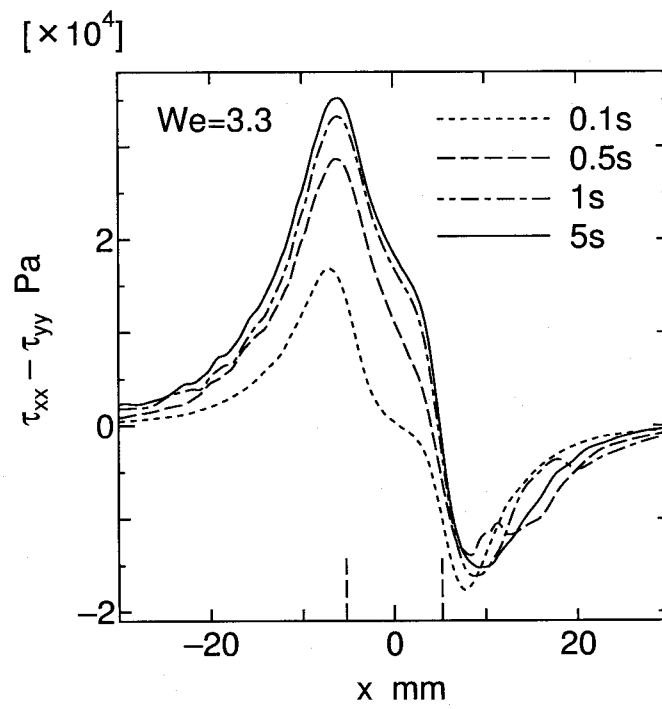


Fig.7.19: Change in distribution of $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ with time for the channel C at $We=3.3$.

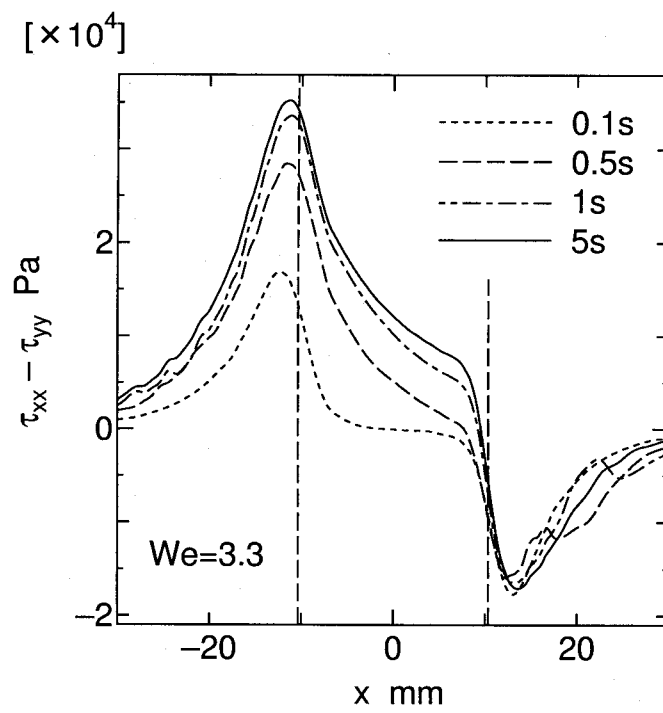


(a) channel A



(b) channel B

Fig.7.20: (a) and (b).



(c) channel C

Fig.7.20: Normal stress difference, $\tau_{xx} - \tau_{yy}$, along the center line at $We=3.3$: (a) channel A, $De=3.3$, (b) channel B, $De=1.1$, (c) channel C, $De=0.55$.

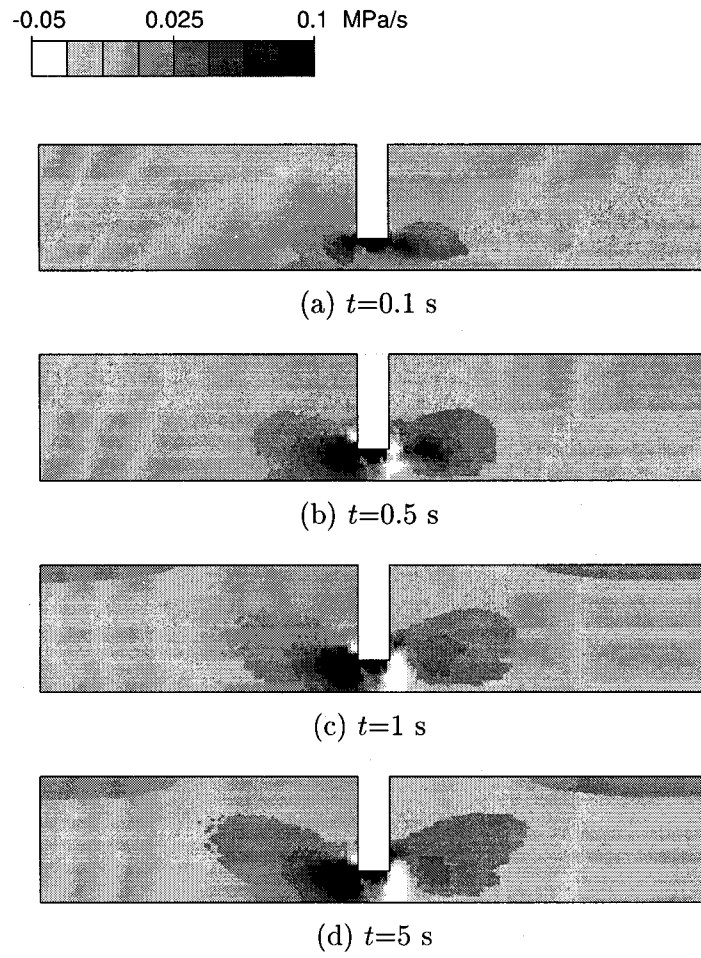


Fig.7.21: Distribution of stress power, w_e , of the first mode in the channel A at $We=3.3$.

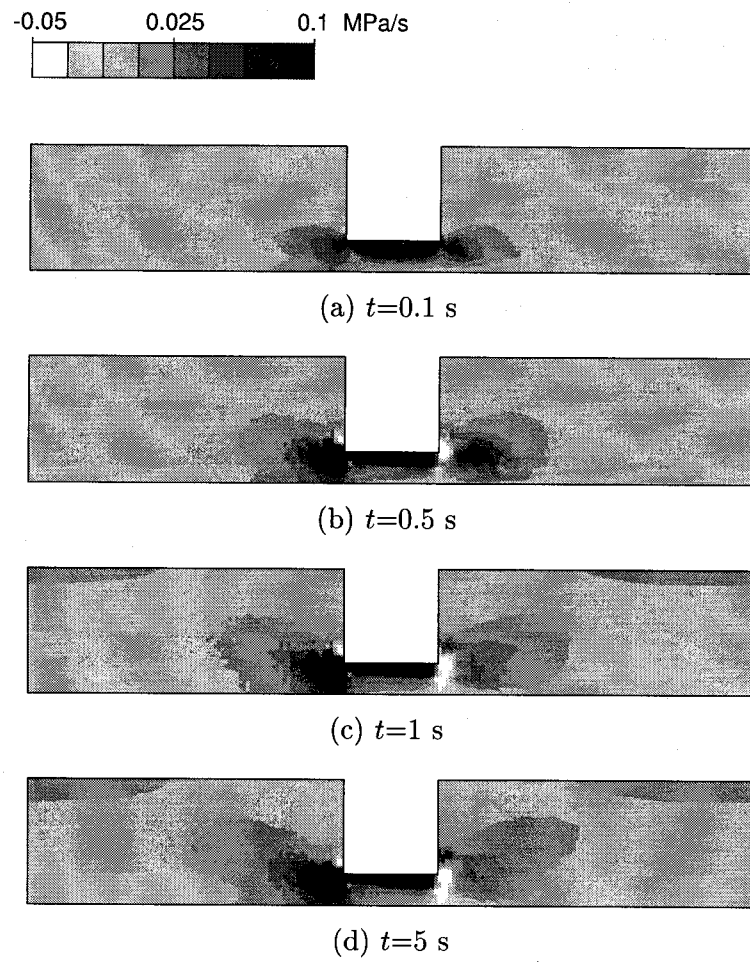


Fig.7.22: Distribution of stress power, w_e , of the first mode in the channel B at $We=3.3$.

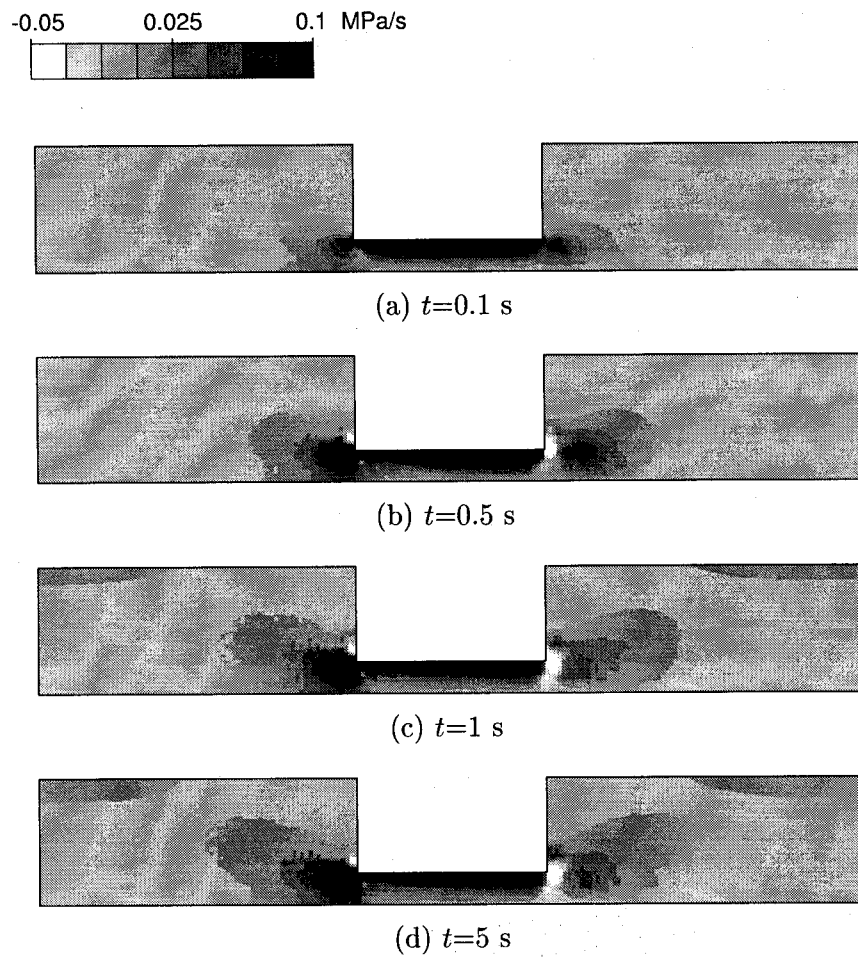
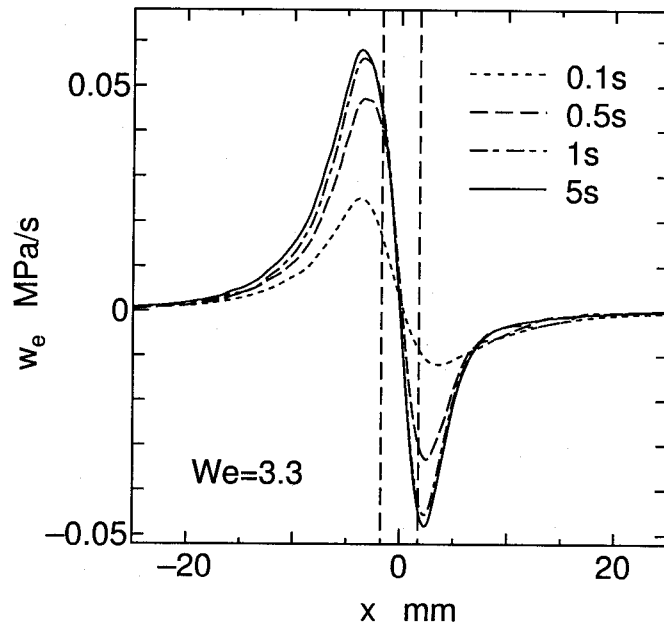
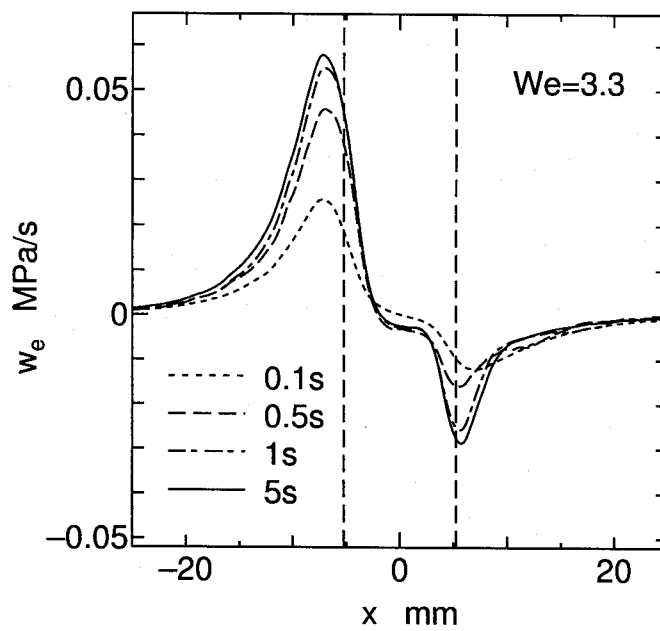


Fig.7.23: Distribution of stress power, w_e , of the first mode in the channel B at $We=3.3$.

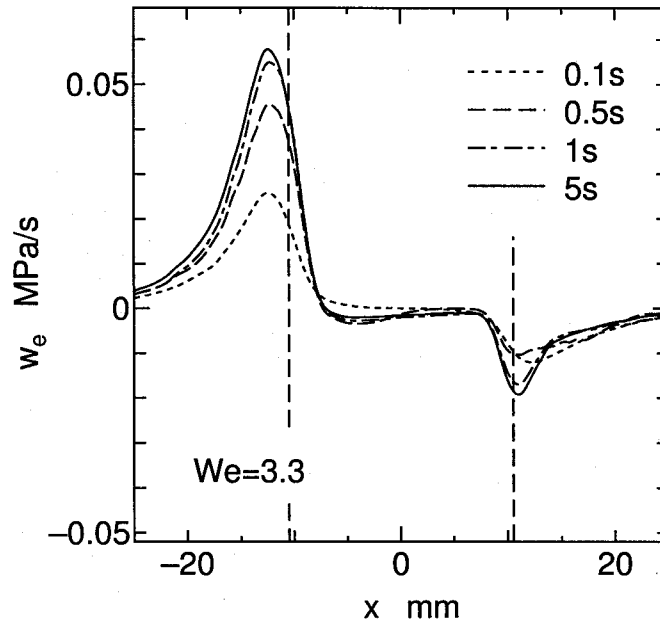


(a) channel A



(b) channel B

Fig.7.24: (a) and (b).



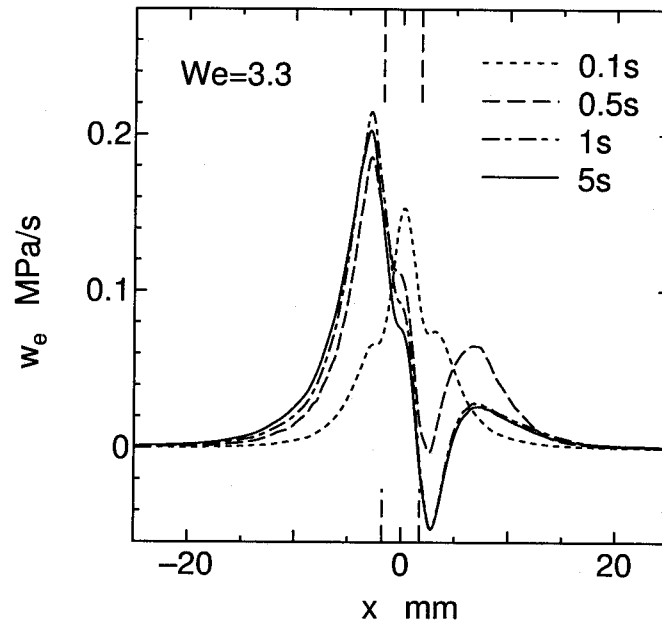
(c) channel C

Fig.7.24: Stress power, w_e , of the first mode along the center line at $We=3.3$: (a) channel A, $De=3.3$, (b) channel B, $De=1.1$, (c) channel C, $De=0.55$.

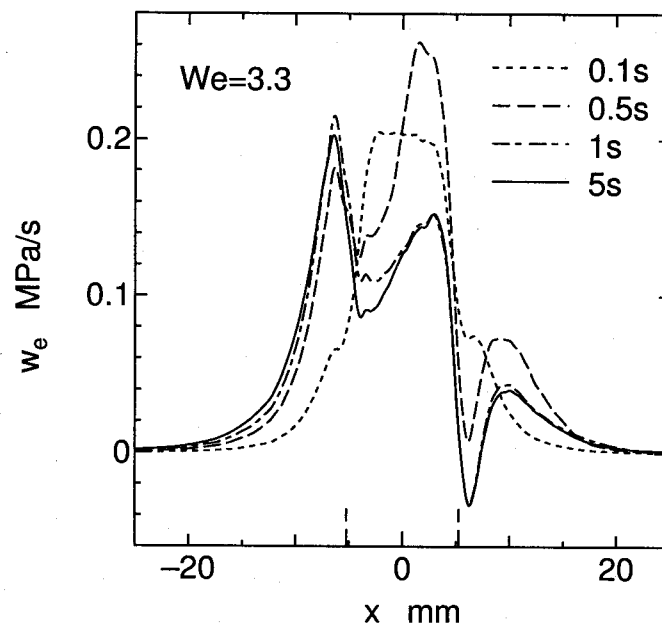
みられない。しかし、スリット部から拡大部へかけての w_e の分布には大きな違いがみられる。流路 B, C の場合には、スリット部分の中央付近に w_e がほぼ 0 の領域が存在するが、流路 A の場合にはそのような領域はみられない。そして、いずれの流路の場合にも拡大部の入り口にかけて w_e が負になり、拡大部入り口直後で w_e が最小となる。

続いて、 $y=2.625$ mm の線上の w_e の分布を考える。流動初期の $t=0.1$ s では、いずれの流路の場合にも、スリット部の上流側と下流側で対象な分布をしている。そして、時間が経過すると、上流側では縮小部の入り口付近では w_e が大きくなり、拡大部の入り口直後では $w_e < 0$ となるような分布へと変化する。これは、中心線上の分布においてもみられた現象である。また、中心線上では流体は伸長変形のみを受け、せん断変形を受けないのに対して、 $y=2.625$ mm の線上では、流体は伸長変形に加えて、せん断変形を受けるために、スリット部で w_e がほぼ 0 で一定となる領域は存在しない。そして、いずれの流路に対する結果においても、中心線上の w_e の値に比べて絶対値が大きくなる。スリット長の長い流路 C の場合には、スリット内で速度場と応力場が流れ方向に十分に発達するために、スリット部に w_e がほぼ一定になっている領域が存在する。

ここで、各流路に対する結果を比較する。縮小部上流側の w_e の分布を比較すると、 $y=0$,

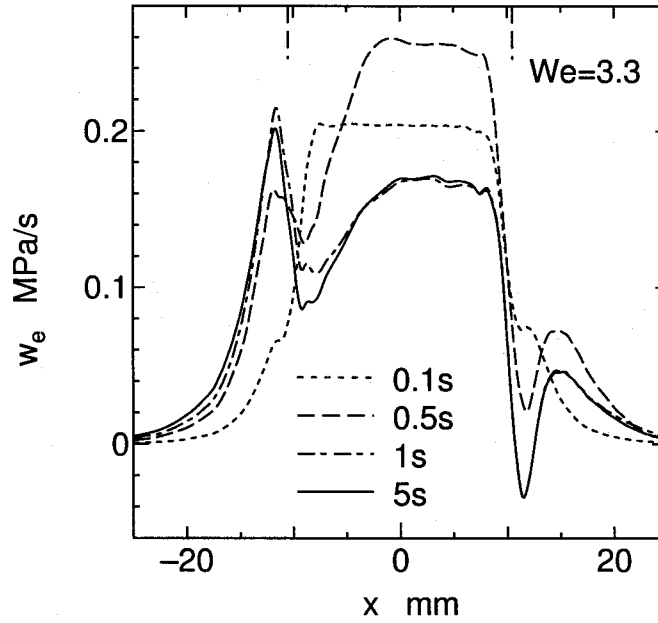


(a) channel A



(b) channel B

Fig.7.25: (a) and (b).



(c) channel C

Fig.7.25: Stress power, w_e , of the first mode along the line of $y=3H/4$ ($= 2.625$ mm) at $We=3.3$: (a) channel A, $De=3.3$, (b) channel B, $De=1.1$, (c) channel C, $De=0.55$.

2.625 mm 上いずれの分布の場合にも各流路の計算結果に顕著な違いはみられない。スリット部では、スリット長が長い流路ほど w_e がほぼ一定値をとる領域が長く存在する。 $y=2.625$ mm 上の分布では流路 C の場合にのみ w_e が一定となる領域がみられる。拡大部入り口直後の w_e の最小値はスリット長の短い流路ほど小さくなる。すなわち、スリット長が短い流路のほうが拡大部入り口の下流側で、より多くの弾性的エネルギーの開放が行われている。これは、スリット部における応力の緩和現象に関係している。スリット長が長い（デボラ数 De が小さい）ほど、流体が拡大部に流れ込むまでにスリット部における応力の緩和が進む。しかし、スリット長が短い場合には、応力の緩和があまり進まないうちに、流体がスリット部の出口に達するために、スリット長が長い場合に比べて、拡大部入り口の下流側でより多くの弾性的エネルギーを開放する必要が生じる。したがって、 w_e の最小値が小さくなる。

7.4 結 言

本研究ではスリット部を有する平行平板間における粘弾性流体のスタートアップ流れの数値計算を行った。ここでは、ワイセンベルグ数を変化させた計算とスリット長を変化さ

せた計算を行った。

数値計算の結果から、流動開始直後はスリット部の上流側と下流側で対称に近い流れ場であるが、時間とともに非対称な流れ場へと変化していく現象が確認された。この傾向はワイセンベルグ数が大きく流れ場の弾性的効果がより強く現れる条件で顕著に現れた。このようなスリット部の上流側と下流側でみられる非対称性は、スリットの上流側の縮小流れで受けた変形によって生じる応力が、スリット部では完全には緩和されずに拡大流れへと移ることによる。したがって、弾性的効果が大きくなるほど非対称性が顕著になるものと考えられる。また、スリット長が長い流路ではスリット部で速度場が発達するために、流れ方向の速度勾配がほぼ 0 となる領域が長く存在し、応力の緩和現象がみられる。そして、スリット部における応力の緩和現象は下流側の流れに大きく影響を及ぼし、スリット長の短い流路ほど、スリット下流側の流れの拡がりが大きく現れる。応力パワーを用いた解析により、拡大部入り口直後における流れの拡がりによって、上流側で蓄えられた弾性的エネルギーが解放されていることが分かった。したがって、スリット長が短い流路の場合にはスリット部における応力の緩和が少ないために、拡大部でより多くの弾性的エネルギーの解放を行う必要が生じ、その結果、拡大部入り口直後における流れの拡がりがより顕著に現れる。

第8章 急縮小流路における高分子水溶液のスタートアップ流れの実験

8.1 緒 言

本章では、粘弾性流体である高分子水溶液の矩形管急縮小流路におけるスタートアップ流れの実験結果を示す。ここでは、レーザードップラー流速計 (Laser Doppler Velocimetry; LDV) を用いた流速の時間変化の測定を行った。そして、構成方程式にレオノフモデルを用いた数値計算の結果と実験結果との比較を行う。

粘弾性流体の急縮小流れは高分子成形加工における流れとの関連性が強く、また非ニュートン流体力学的にも興味深い現象が現れるために、これまでに可視化実験による流れ模様の観察、圧力損失の測定、LDV を用いた流速測定などの種々の手法によって、多くの研究がなされている⁽⁶⁹⁾。例えば、LDV を用いた矩形管急縮小流路における粘弾性流体の流れの流速測定による研究⁽⁸⁾⁽⁸⁵⁾⁽⁸⁶⁾では、ニュートン流体の流れではみられない縮小部入り口直後における流速のオーバーシュート領域の存在などの特異な流れ挙動が報告されている。しかし、縮小部付近の流れは複雑であり、流れのメカニズムについては十分には解明されていない点も多く、実験および数値解析の両面からの更なる研究が望まれている。

本章では、はじめに実験装置および方法、実験に用いた試料流体のレオロジー特性について述べる。そして、LDV を用いた流速応答の測定結果を示し、粘弾性流体の急縮小流れにおける流動挙動について議論する。さらに、試料流体のレオロジー特性をもとに決定したモデルパラメータを使用した数値計算の結果を示し、実験結果との比較を行う。

8.2 実験装置および実験方法

はじめに実験装置の概略について述べる。図 8.1 に、スタートアップ流れを実現するための装置と流路の概略を示す。そして、図 8.2 に流速測定部の流路形状と寸法を示す。流れ方向に x 軸をとり、図のように y 軸および z 軸をとる。そして、座標系の中心は、流路の中心線と縮小部入り口を含む yz 平面との交点に置く。

図 8.1 における (3) のモーターはスピードコントロール型のモーター (オリエンタル

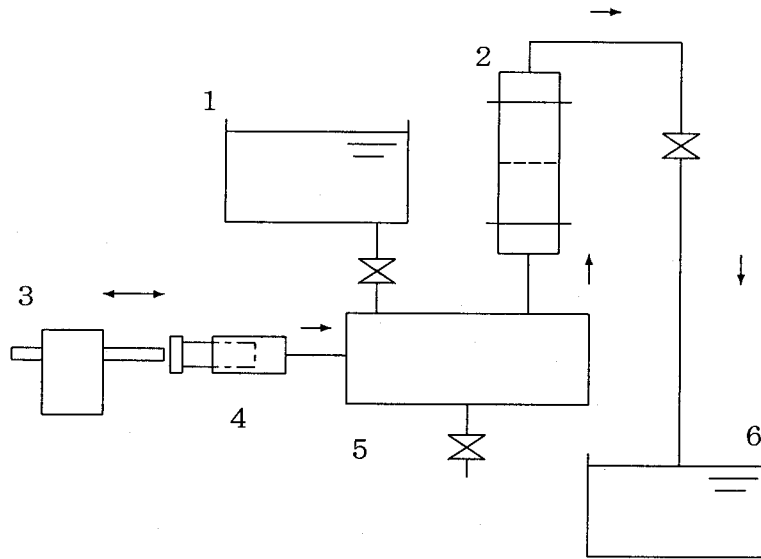


Fig.8.1: Schematic diagram of the flow system: (1) reservoir tank, (2) test section, (3) motor, (4) piston and cylinder, (5) tank, (6) collecting tank.

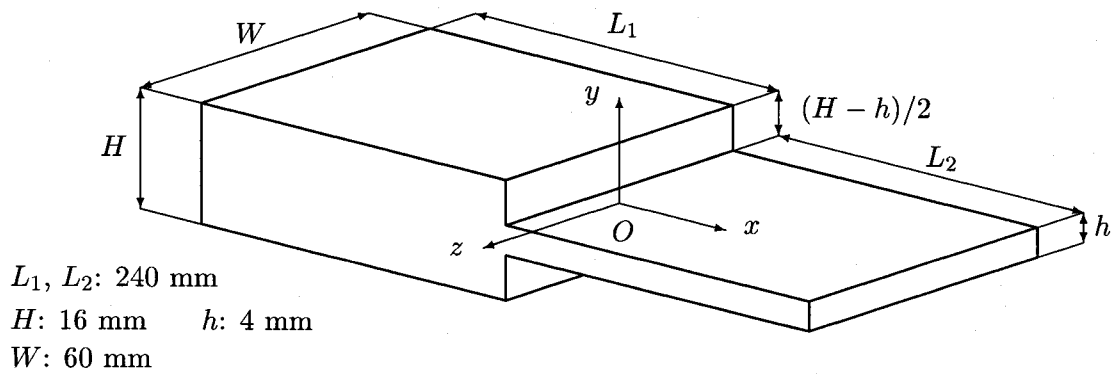


Fig.8.2: Geometry of the test section.

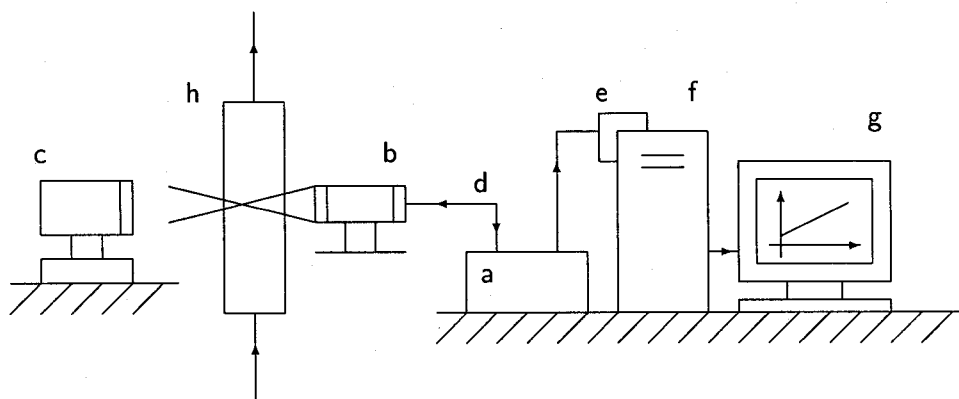


Fig.8.3: Schematic diagram of the LDV system: (a) LDV (KANOMAX system 8851), (b) probe (KANOMAX model 1884, $f=160$ mm), (c) corner-cube retroreflector (TSI model 9240), (d) fiber cable, (e) signal processor board (KANOMAX model 8007), (f) computer (Gateway2000 G6-333C), (g) monitor, (h) test section.

モーター・model 4LB202-SAL) で、付属のスピードコントロールユニットで速度の調整が可能である。モーターに取り付けられた平行移動部でピストン (図 8.1 (4)) を押すことによって、一定流速の流動を発生させる。ピストンには直径 34 mm のガラス製注射器を使用した。

流速測定部は、縮小比 4 : 1 の矩形管急縮小流路である。流路形状と寸法は、図 8.2 に示したとおりである。流れの 2 次元性を確保するために、 y 方向の流路幅 (下流側で 4 mm) に対して z 方向の流路幅を 60 mm と長くとしている。そして、縮小部の入り口から上流側および下流側に、いずれも 240 mm の平行流路部を有している。これは、流れが縮小部入り口の上流側で空間的に発達するための助走区間として十分な長さである。そして、下流側の流路も十分な長さがあり、流体を回収するためのコレクティング・タンク (図 8.1 (6)) との接続部分付近の流れは流速測定部の流れに影響を与えない。また、流速測定に LDV を使用するため、レーザー光を透過するように、流路は透明のアクリル製とした。

図 8.3 に LDV を用いた流速測定のための測定系の概略図を示す。流速測定には 1 次元 He-Ne レーザードップラー流速計 (日本カノマックス・システム 8851) を使用した¹。LDV システムは He-Ne レーザー発振器 (出力 10 mW)、フォトマルチプライヤー (photo multiplier)、制御装置、光学系から構成される。本測定装置は基本システムでは後方散乱式であるが、十分な強さの散乱光強度を確保するために、コーナーキューブ・プリズム (図

¹本実験の流速測定には、DISA (現 DANTEC) 社の He-Ne 1 次元 LDV システムも併用した。本システムは、光学系モジュール (DISA 55X)、周波数シフター (DISA 55N10)、周波数トラッカー (DISA 55N20)、レーザー発振器 (NEC GLG535C) から構成される。

Table 8.1: Parameters of the Leonov model for a 1.0 wt% aqueous solution of polyacrylamide.

k	s [-]	η_k [Pa · s]	θ_k [s]
1	3.0×10^{-3}	3.0×10	3.0×10^0
2		1.0×10	7.5×10^{-1}

8.3 (c)) を使用することによって前方散乱式で測定を行った。LDV システム内部にあるフォトマルチプライヤーからの出力信号は、信号処理器 (日本カノマックス・model 8007) を通してコンピュータに取り込まれ、データ処理される。

続いて、実験方法を簡単に述べる。すべての流路は試料流体で満たされ、流体は静止状態にある。タンクに蓄えられた試料流体をピストンで押し出すことにより、静止している流体を急激に流動させる。なお、平行移動部が一定速度に達した後にピストンと接触するように、モーターとピストンの位置が調整されている。そして、テストセクションの測定点における流速の時間変化を LDV を用いて計測する。1 回の測定が終了すると、リザーバ・タンク (図 8.1 (1)) から新しい試料流体をタンク (図 8.1 (5)) に充填する。また、一般に高分子液体は緩和時間をもつために、前回の実験時の変形履歴の影響がないように、測定間隔を十分にあげる必要がある。本実験では約 5 分の静置時間を設けた。

8.3 試料流体

本研究では、試料流体としてポリアクリルアミド (polyacrylamide, 三洋化成・SANFLOC AH70P; 以下, PAA と略記する) の 1.0 wt% 水溶液を使用した。図 8.4 に、PAA 水溶液の定常せん断粘度 η_s と第 1 法線応力差 N_1 の測定結果とレオノフモデルによる予測値を示す。測定データは円錐円板型レオメータ (日本レオロジー機器・NRM-2000S-NF) を用いて測定したものである。これらの測定結果より、PAA 水溶液が shear-thinning 粘性と弾性的性質を有する粘弾性流体であることが分かる。また、PAA 水溶液の一軸伸長粘度は stretch-thickening 性を有することが知られている⁽⁸⁷⁾⁽⁸⁸⁾。しかし、高分子融液の伸長粘度の測定方法はほぼ確立されており、種々の商用高分子材料に関する粘度測定の結果が報告され、それらのデータが利用されている⁽⁸⁹⁾ のに対して、高分子水溶液の伸長粘度の測定方法は、現在のところ、十分には確立されているとは言えず、したがって、高分子水溶液の伸長粘度を定量的に評価するのは困難である。

数値計算の際に使用するレオノフモデルのパラメータは、レオノフモデルの定常せん断

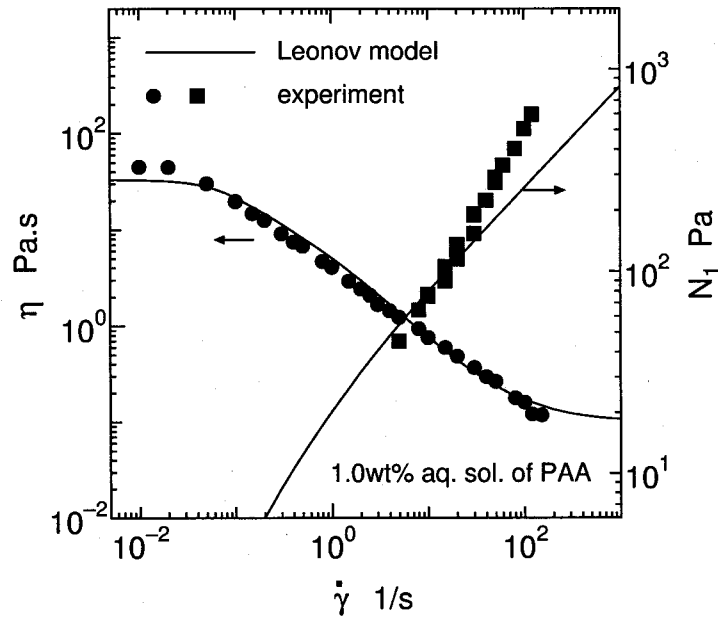


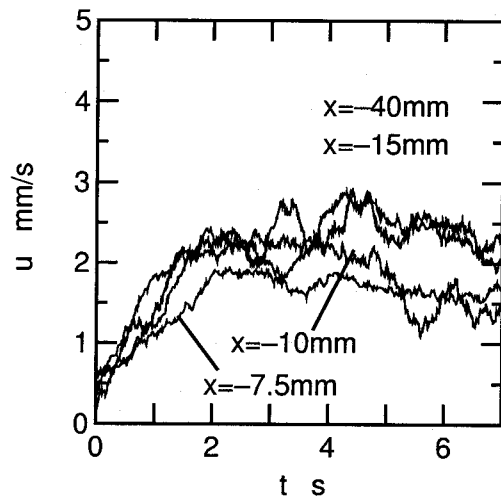
Fig.8.4: Shear viscosity, η_s , and the first normal stress difference, N_1 , of the 1.0 wt% aqueous solution of polyacrylamide (SANFLOC AH70P) versus shear rate, $\dot{\gamma}$, at 20 °C. Line: prediction of the Leonov model. Circle: η . Square: N_1 .

粘度 η_s と第 1 法線応力差 N_1 を，図 8.4 の測定データにフィッティングさせることによって決定した（表 8.1）．ただし， η_s と N_1 の両方のデータに関して，モデルの予測値と実験結果を完全にフィッティングさせることは困難であるため， N_1 は本計算の条件では考慮しなくてもよい高せん断速度領域のデータよりも，中せん断速度域のデータを優先してフィッティングを行った．

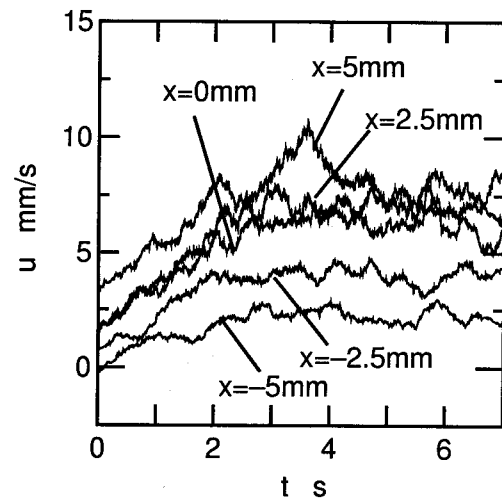
8.4 実験結果および考察

本研究では，流量 Q を (a) 1.0 cm³/s, (b) 5.0 cm³/s, (c) 10 cm³/s の 3 種類に変化させて実験を行った．このとき下流側流路における平均流速は，それぞれ (a) 4.2 mm/s, (b) 21 mm/s, (c) 42 mm/s となる．また，比較のためにニュートン流体であるグリセリン（粘度 1.3 Pa·s, 20 °C）の $Q=9.9$ cm³/s のときの実験結果も示す．流速測定は流路の対称性を確認の上， $y \geq 0$ の領域についてのみ行った．

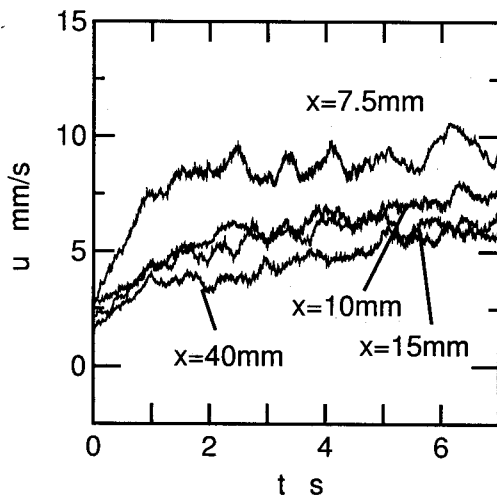
伸長流れの効果が最もよく現れる中心線上の u の時間変化を考える．図 8.5 ～ 8.7 に，PAA 水溶液の中心線上の各点における流れ方向流速 u の時間応答を示す．さらに，図 8.8 にグリセリンの実験結果を示す．ここで，流動開始時の時刻を $t=0$ とした．



(a) $x < 5$ mm

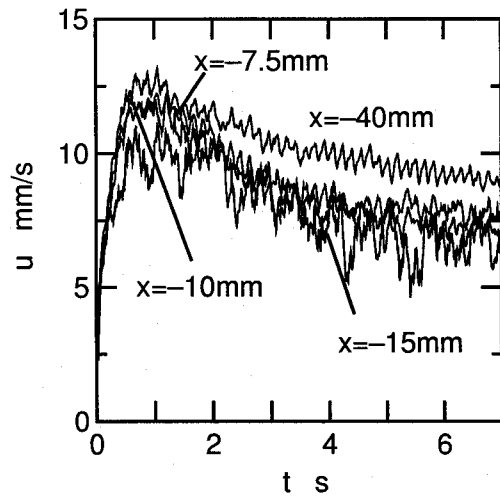


(b) $-5 \text{ mm} \leq x \leq 5$ mm

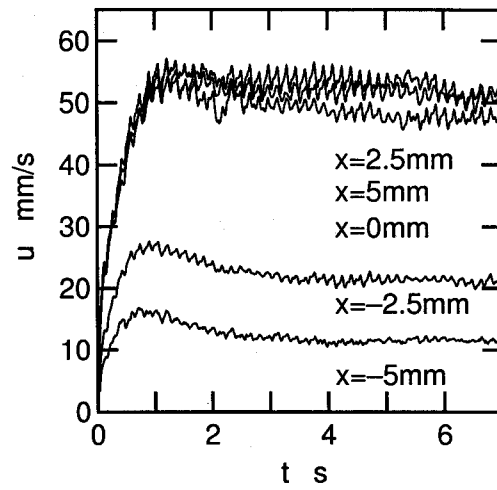


(c) $x > 5$ mm

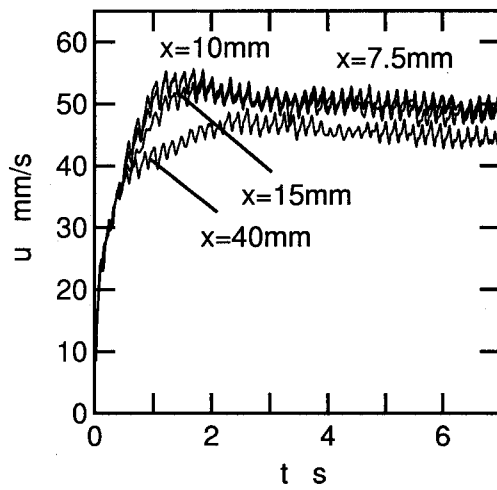
Fig.8.5: Change in velocity, u , with time at several points on the center line at $Q=1.0 \text{ cm}^3/\text{s}$: (a) $x < 5$ mm, (b) $-5 \text{ mm} \leq x \leq 5$ mm, (c) $x > 5$ mm.



(a) $x < 5 \text{ mm}$

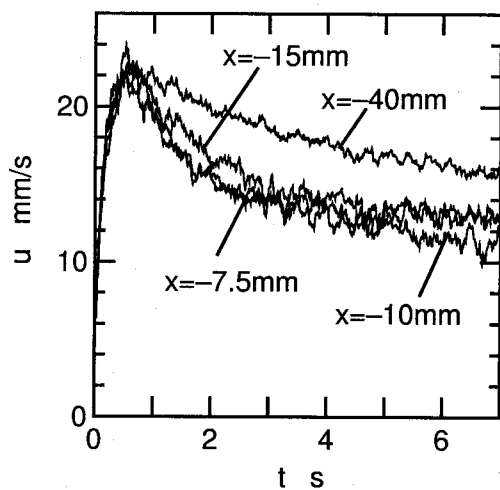


(b) $-5 \text{ mm} \leq x \leq 5 \text{ mm}$

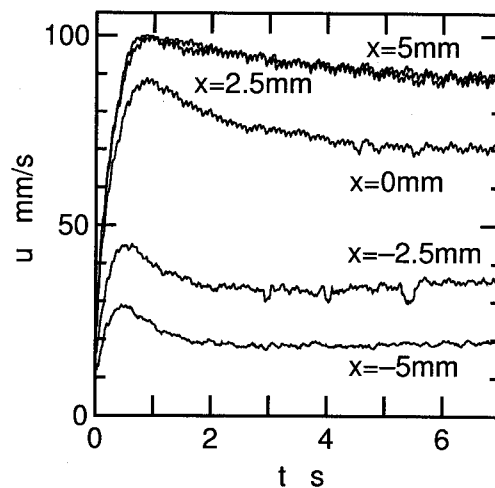


(c) $x > 5 \text{ mm}$

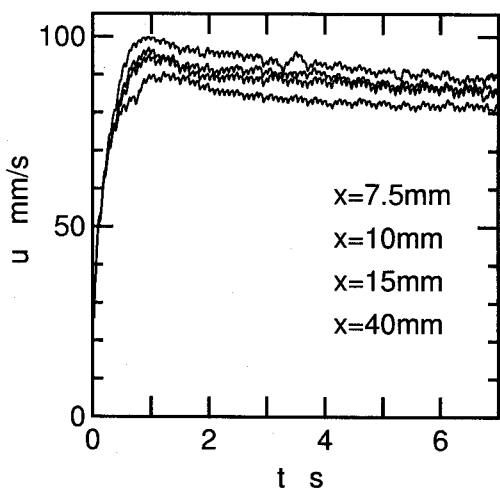
Fig.8.6: Change in velocity, u , with time at several points on the center line at $Q=5.0 \text{ cm}^3/\text{s}$: (a) $x < 5 \text{ mm}$, (b) $-5 \text{ mm} \leq x \leq 5 \text{ mm}$, (c) $x > 5 \text{ mm}$.



(a) $x < 5 \text{ mm}$



(b) $-5 \text{ mm} \leq x < 5 \text{ mm}$



(c) $x > 5 \text{ mm}$

Fig.8.7: Change in velocity, u , with time at several points on the center line at $Q=10 \text{ cm}^3/\text{s}$: (a) $x < 5 \text{ mm}$, (b) $-5 \text{ mm} \leq x \leq 5 \text{ mm}$, (c) $x > 5 \text{ mm}$.

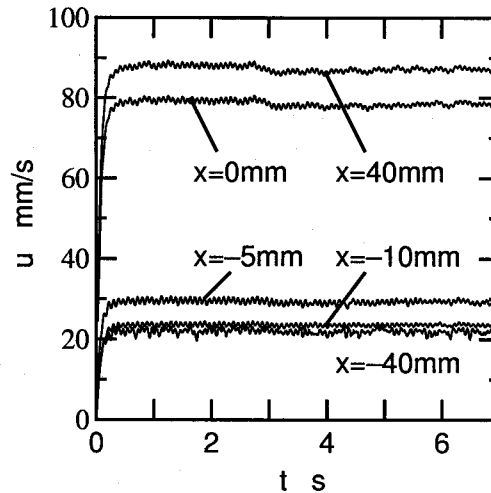


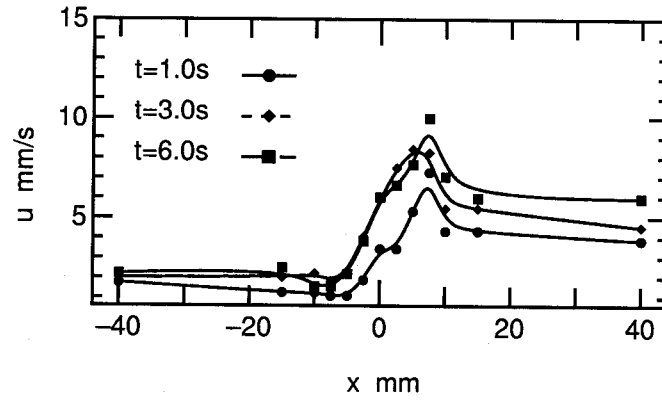
Fig.8.8: Change in velocity, u , with time at several points on the center line: glycerin, $Q=10 \text{ cm}^3/\text{s}$.

PAA 水溶液の場合には、流速は流動開始後、急激に増大した後に、一旦定常値よりも大きな値をとった後に小さくなり、定常値に達する。すなわち、流速のオーバーシュート現象がみられる。流速の小さな (a) の場合 (図 8.5) には比較的緩やかな流速の変化を示し、(b), (c) の場合 (図 8.6, 図 8.7) に比べると流速のオーバーシュートは顕著ではない。一方、ニュートン流体であるグリセリンの場合には、このような流速応答のオーバーシュートはみられず、流動開始後すぐに定常値に達している。

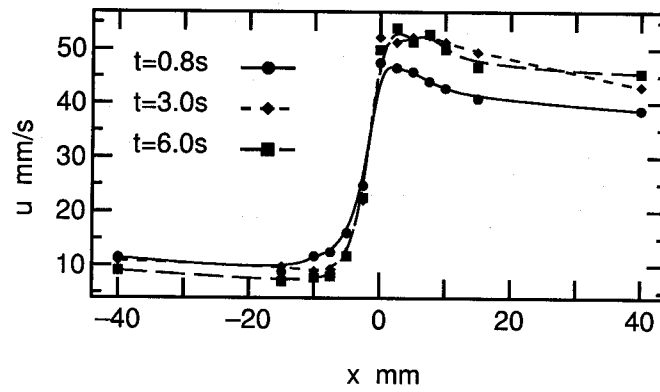
次に、中心線上の u の分布を調べる。図 8.9 に PAA 水溶液の場合の u の中心線上分布を示す。さらに、比較のために図 8.10 に、グリセリンの定常状態における u の中心線上分布を示す。先に示したようにグリセリンの場合には、 $t=4 \text{ s}$ では流れは定常流れである。

PAA 水溶液の場合には、いずれの条件においても、流速は縮小部の少し上流側で急激に大きくなる。そして、縮小部入り口の直後に、十分下流側よりも流速が大きくなるオーバーシュート領域がみられる。縮小部の上流側では、幅の広い流路から縮小部へ向けて流体が流れ込むために、縮小部入り口付近では中心付近の流速が大きくなる。縮小部入り口の下流にみられるオーバーシュート領域は、中心部の流速の大きい速度分布から、平行平板間の発達した流れの速度分布である、平らな速度分布へと流速分布の再構成がなされる区間であると考えられる。

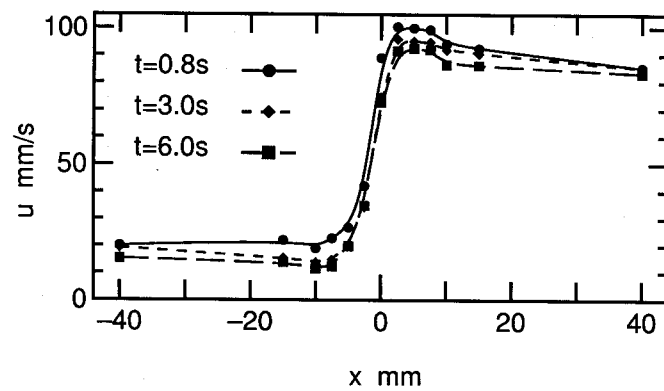
図 8.10 から分かるように、ニュートン流体の場合には粘弾性流体の場合にみられるオーバーシュート領域が存在しない。本実験条件では、下流側の半流路幅と平均流速で評価したレイノルズ数は 0.080 と小さいために、慣性の影響はなく、さらにニュートン流体の場



(a) $Q=1.0 \text{ cm}^3/\text{s}$



(b) $Q=5.0 \text{ cm}^3/\text{s}$



(c) $Q=10 \text{ cm}^3/\text{s}$

Fig.8.9: Distribution of velocity, u , along the center line: (a) $Q=1.0 \text{ cm}^3/\text{s}$, (b) $Q=5.0 \text{ cm}^3/\text{s}$, (c) $Q=10 \text{ cm}^3/\text{s}$.

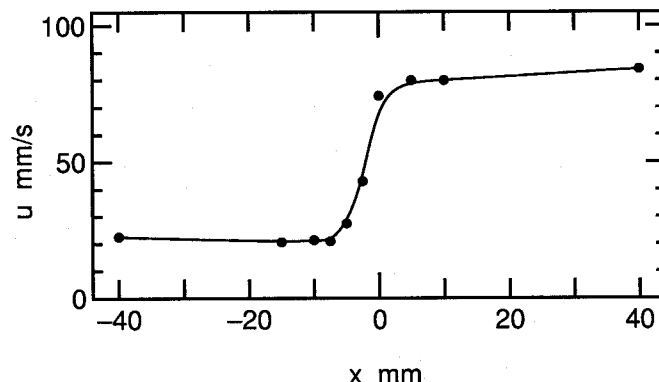


Fig.8.10: Distribution of velocity, u , along the center line: glycerin, $Q=9.9 \text{ cm}^3/\text{s}$.

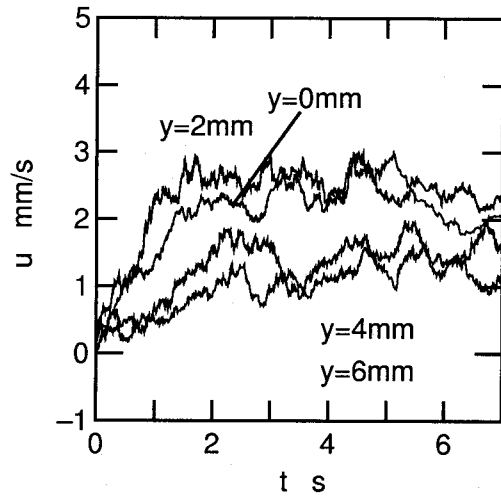
合には変形履歴の記憶効果をもたない。したがって、縮小部の入り口直後で速度分布が発達した流れの速度分布になる。

また、縮小部入り口の少し上流において、流速が増大する直前に減速領域が存在する。Cable ら⁽⁹⁰⁾⁽⁹¹⁾は軸対称急縮小流れの場合に、発散流れ (divergent flow) が発生すると、縮小部直前に減速域が現れることを示し、その原因は流れの慣性によると報告している。しかし、本実験の条件では慣性の影響はあまり大きくはない² ため、ここでみられた縮小部直前の減速が、発散流れと同じメカニズムによるものであるとは言えない。そして、このような減速領域が現れる原因については、現在のところ解明されていない。

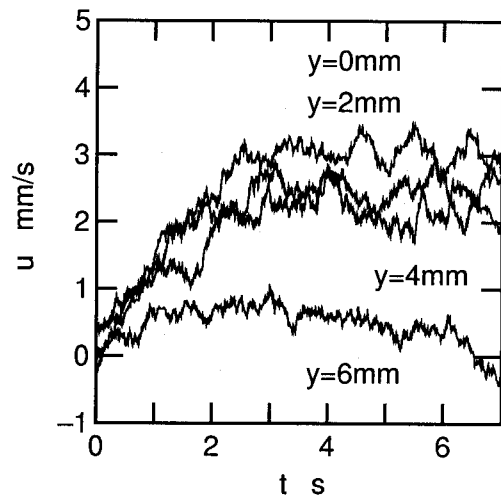
図 8.11 ~ 8.13 に、縮小部付近の各測定点における流速の時間応答を示す。すべての測定点は $z=0$ を通る xy 平面 (中心面) 内の点である。流速の遅い (a) の条件では、あまり顕著にはみられないが、(b), (c) の場合には、顕著な流速のオーバーシュート現象がみられる。流速は流動開始後、急激に増大し、最大値をとった後に緩やかに定常値へと達する。中心線付近 ($y=0, 2 \text{ mm}$) の方が壁面近くよりも急峻な流速の増大が現れている。 $y=6 \text{ mm}$ の流速変化にはオーバーシュートはみられない。

$x = -15 \text{ mm}$ のデータをみると、時間が十分経過するといずれの y の位置の流速もほぼ同じ値に近づいていくことが分かる。したがって、流速分布は中心部の流速の大きい分布から平らなものへと変化している。 $x = -5 \text{ mm}$ の流速変化でも、壁面に近い $y=6 \text{ mm}$ の点以外では同様の現象がみられる。 $y=6 \text{ mm}$ では、他の位置の測定結果とは異なる速度応答を示す。この点では、はじめ流速は緩やかに増大するが、その後流速は小さくなる。

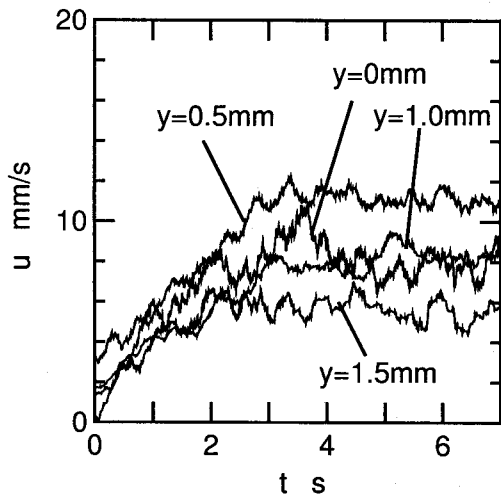
²本実験で用いた PAA 水溶液のせん断粘度は、図 8.4 に示すように、せん断速度依存性を示す。したがって、レイノルズ数 Re を評価する際に、粘度としてどの値を用いるかが問題となる。代表速度 U (下流側の平均流速) と代表長さ H (下流側の半流路幅) によって表される代表せん断速度 U/H におけるせん断粘度を用いて、 Re を評価すると、 $Q=10 \text{ cm}^3/\text{s}$ の条件のときに、 $Re=0.20$ となる。ここで、流体密度は 1000 kg/m^3 である。



(a) $x = -15$ mm

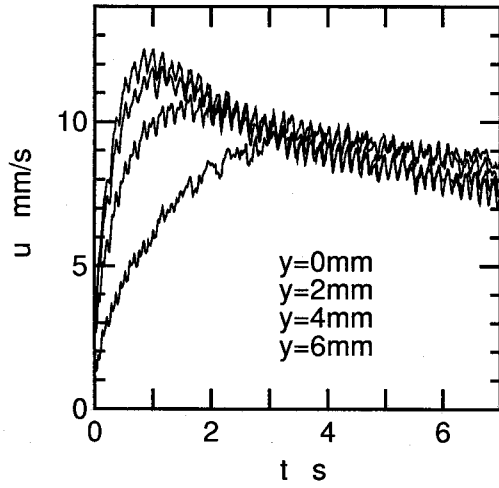


(b) $x = -5$ mm

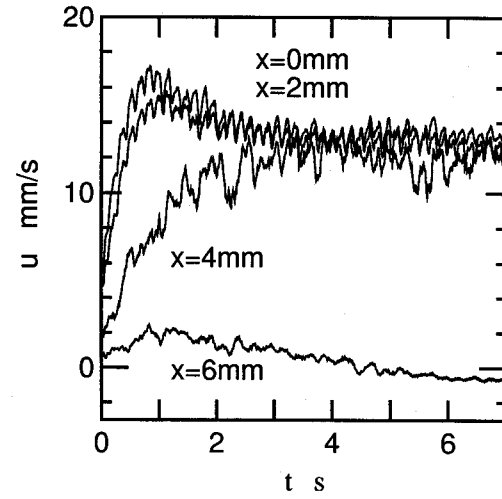


(c) $x = 5$ mm

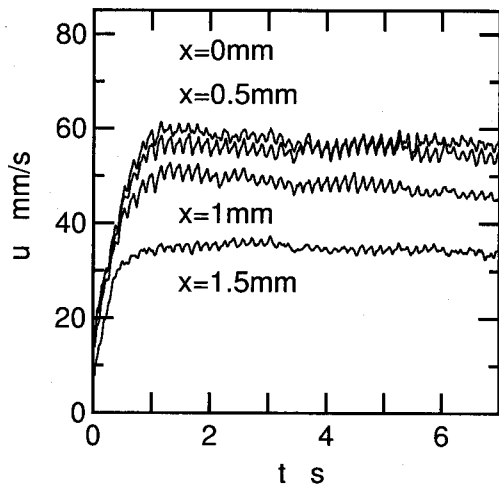
Fig.8.11: Change in velocity, u , with time at several points at $Q=1.0$ cm³/s: (a) $x = -15$ mm, (b) $x = -5$ mm, (c) $x = 5$ mm.



(a) $x = -15$ mm

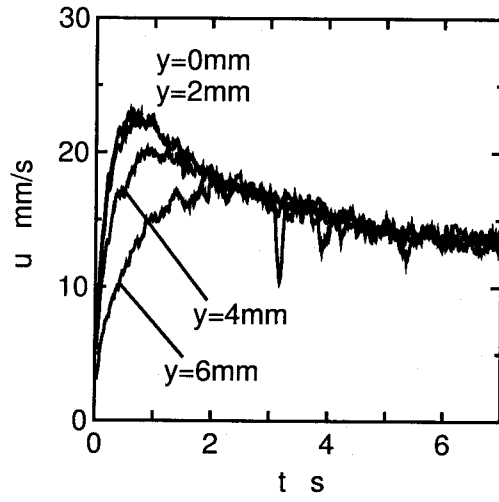


(b) $x = -5$ mm

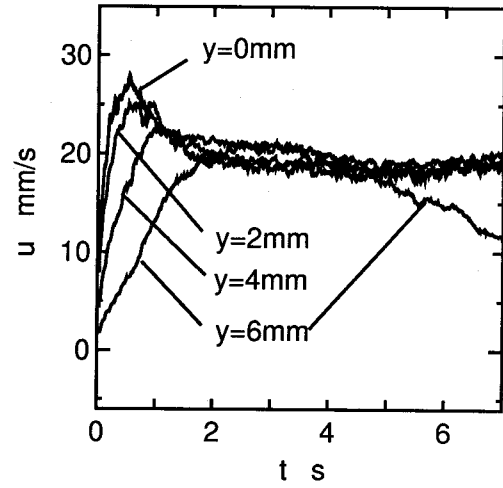


(c) $x = 5$ mm

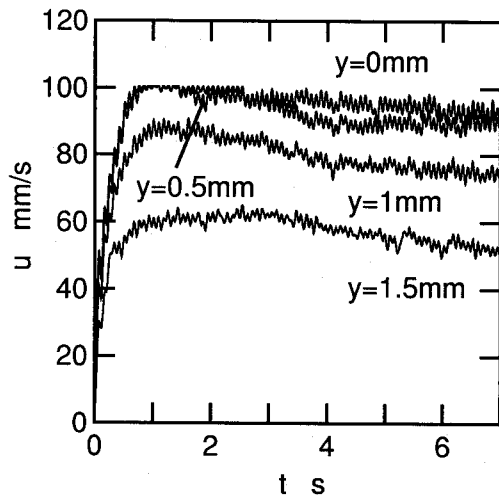
Fig.8.12: Change in velocity, u , with time at several points at $Q=5.0$ cm³/s: (a) $x = -15$ mm, (b) $x = -5$ mm, (c) $x = 5$ mm.



(a) $x = -15$ mm



(b) $x = -5$ mm



(c) $x = 5$ mm

Fig.8.13: Change in velocity, u , with time at several points at $Q=10$ cm³/s: (a) $x = -15$ mm, (b) $x = -5$ mm, (c) $x = 5$ mm.

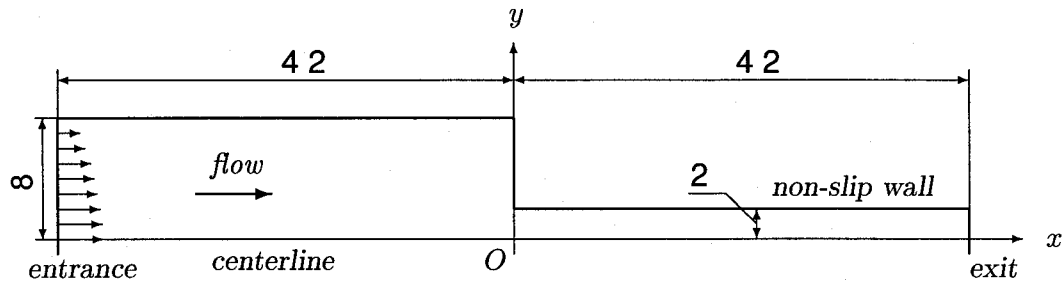


Fig.8.14: Schematic diagram of a 4 to 1 abrupt contraction channel and the coordinate system.

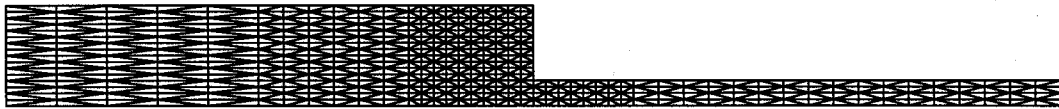


Fig.8.15: Finite element mesh for a 4 to 1 abrupt contraction channel.

$Q=5.0 \text{ cm}^3/\text{s}$ の場合（図 8.12 (b)）では，流動開始直後は正の値であったものが，時間とともに負の値になっている．これらの流速応答は，時間とともに渦が成長する現象を捉えたものであり，次のように説明される．流動初期には測定点は渦領域の外側にあったため，他の測定点と同様に流速が増加する．しかし，時間とともに渦が大きく成長すると，測定点は渦領域に入り，そのために流速が低下する．

8.5 計算結果および実験結果との比較

ここで，数値計算の結果を示し，実験結果との比較を行う．計算を行った流路の形状とメッシュ分割をそれぞれ図 8.14，図 8.15 に示す．先の数値計算で使用したモデルパラメータの緩和時間に比べて，本章の計算で使用するモデルパラメータの緩和時間が長いことを考慮して，縮小部入り口から流路の入り口および出口までの距離を，第 5 章で使用した解析流路のものよりも長くとしている．

数値計算の条件は，実験時の流量 Q が $1.0 \text{ cm}^3/\text{s}$ のときの条件に合わせた．矩形管流路の場合には，流路中心面付近で流れがほぼ 2 次元流れになっていたとしても， z 方向の速度分布が存在するために，軸対称流路の場合とは異なり，中心面内の平均流速は（流量 / 流路断面積）によって求めた平均流速にはならない．ここでは，実験データから中心面内の平均流速を評価し，その値を数値計算の際に使用する入り口平均流速とした．その結果， $Q=1.0 \text{ cm}^3/\text{s}$ の場合には，入り口平均流速は 1.2 mm/s であった．このとき，ワイ

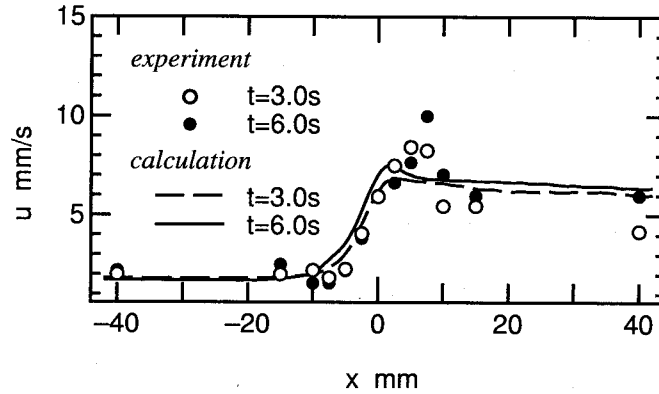


Fig.8.16: Distribution of centerline velocity, u : comparison of the numerical prediction with the experimental data. Circles: experimental data at $Q=1.0 \text{ cm}^3/\text{s}$. Lines: numerical predictions at $\bar{u}_{\text{ent}}=1.2 \text{ mm/s}$.

センベルグ数 We は 5.8 である.

また, 実験は $Q=5.0 \text{ cm}^3/\text{s}$, $10 \text{ cm}^3/\text{s}$ の条件においても行っているが, このような高ワイセンベルグ数の条件における数値計算は困難であるため, ここでは実験結果との比較を行わない. 以下では, $Q=1.0 \text{ cm}^3/\text{s}$ の場合のみを考える.

図 8.16 に流れ方向流速 u の中心線上分布を示す. 計算結果を破線および実線で, 実験結果を白丸および黒丸で示した. 数値計算結果は縮小部入り口の直前で大きく加速し, 下流側に流速のオーバーシュート領域が存在するという速度分布を示しており, 定性的には実験結果とほぼ一致する. ただし, 縮小部入り口の少し上流側の減速は, 数値計算では予測されていない. また, 定量的に比較すると, 両者は上流側では比較的一致しているが, 縮小部入り口直後では, 数値計算の予測の精度は低く, 数値計算結果のオーバーシュート量は実験結果よりも小さくなっている.

続いて, 縮小部入り口付近における流速分布について, 数値計算結果と実験結果とを比較する. 図 8.17 に, $x=-15 \text{ mm}$, -5 mm , 5 mm における u の y 方向分布を示す. 図中の破線および実線は計算結果を, 白丸および黒丸は実験結果を表す. 縮小部から比較的離れた $y=-15 \text{ mm}$ に比べて, 縮小部入り口付近の $y=-5 \text{ mm}$, 5 mm で, 数値計算結果と実験結果との定量的な差が顕著に現れる. 特に縮小部下流側の $y=5 \text{ mm}$ における流速分布で, その差が大きい. 図 8.16 と図 8.17 の結果とをあわせて考えると, 伸長流れの影響が大きい領域で, 数値計算による定量的な予測の精度が低くなっていると言える.

これらの結果から分かるように, 数値計算結果と実験結果の間には定性的な一致はみられたが, 定量的な一致は十分には得られていない. 計算結果と実験結果との定量的な違い

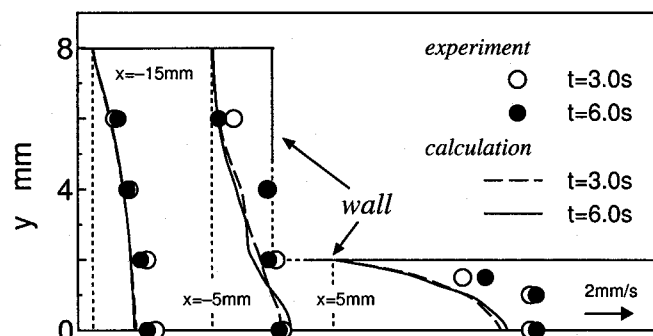


Fig.8.17: Distribution of velocity, u , near the contraction: comparison of the numerical prediction with the experimental data. Circles: experimental data at $Q=1.0 \text{ cm}^3/\text{s}$. Lines: numerical predictions at $\bar{u}_{\text{ent}}=1.2 \text{ mm/s}$.

に最も大きく影響しているものとして、モデルパラメータの決定の際に、試料流体のせん断特性（定常せん断粘度，第1法線応力差）のみを考慮し，伸長特性は考慮されていないことがあげられる．したがって，伸長流れの影響が強い縮小部入り口付近において定量的な違いが現れるものと考えられる．

水溶液系の伸長粘度の測定は困難であり，現在も多く研究者によって，水溶液の伸長粘度を測定するためのレオメータの開発が進められている．特に，近年は非定常一軸伸長粘度を測定するための装置であるフィラメント・ストレッチ型レオメータ (filament stretching rheometer) に関する研究が盛んである（例えば，Sridhar ら⁽⁹²⁾⁽⁹³⁾，Spiegelberg ら⁽⁹⁴⁾，Yao ら⁽⁹⁵⁾）．今後，試料流体の伸長流れ場におけるレオロジー特性の定量的な評価が可能となれば，試料流体の伸長特性を定量的に記述するモデルパラメータを使用することにより，より精度の高い数値シミュレーションが可能となると期待される．

また，実験時の流れの3次元性の影響も定量的な誤差の原因となり得る．本研究で使った流路では， y 方向の流路幅に対して z 方向の流路幅を大きくとり，中心面の流れはほぼ2次元的であるとみなせる．しかし，本研究で考えたスタートアップ流れの場合には，上流側の平行流路部における流れ方向の流速の z 方向分布が時間的に変化するために，定常流れを扱う場合よりも，流れの3次元性の影響が現れやすい．本章で数値計算との比較に用いた実験条件では，比較的流量の小さな流れであるために，流れの3次元性の影響は小さいと考えられる．しかし，流量が大きくなるにつれて，流れの3次元性がより強く現れてくるために，実験結果と数値計算結果との定量的な比較において，誤差の原因となり得る．この誤差は， z 方向の流路幅をさらに大きくし，中心面における流れの2次元性を確保することにより低減される．

一方、実際に高分子成形加工において使用される流路内の流れは、しばしば 3 次元的なものとなることを考慮すれば、積極的に粘弾性流体の 3 次元流れを扱うことも重要である。近年の計算機の性能の向上にともない、構成方程式に準線形モデルである UCM モデルや Oldroyd-B モデルを用いた粘弾性流体の 3 次元急縮小流れの数値解析⁽⁹⁶⁾⁽⁹⁷⁾⁽⁹⁸⁾も行われようになった。さらに、ごく最近の研究では、構成方程式に Phan-Thien Tanner モデルのような非線形粘弾性モデルを使用した粘弾性流体の 3 次元流れの数値解析⁽⁹⁹⁾⁽¹⁰⁰⁾⁽¹⁰¹⁾の結果が報告されている。工業的な応用面を考えると、3 次元流れ構造の解析は、高ワイセンベルグ数の流れの解析とともに、今後の粘弾性流れの数値解析の主要な課題であると言える。

8.6 結 言

本章では、LDV を用いて、矩形管急縮小流路における高分子水溶液のスタートアップ流れの流速応答の測定した結果を示し、粘弾性流体の非定常流動挙動について議論した。さらに、構成方程式にレオノフモデルを用いた数値計算の結果と実験結果の比較を行った。

実験では、粘弾性流体の流れでは、流速変化におけるオーバーシュート現象や特異な中心流速分布などのニュートン流体とは大きく異なる現象が観測された。また、渦の大きさの時間変化に関連する流速変化を捉えることが出来た。そして、実験結果と数値計算結果を比較した結果、両者は定性的にはほぼ一致したものの、定量的な一致は十分には得られなかった。その主な原因として、流体の伸長特性の定量的な記述が不十分であることが考えられる。

第9章 結 論

本研究は粘弾性流体の非定常流動挙動の解明を目的として行われた。粘弾性流体の非定常流れは、非常に複雑な挙動を示し、ニュートン流体の場合にはみられない特異な現象が現れる。そのために、粘弾性流体の非定常流れは学問的な研究対象として興味深い問題である。さらに、高分子成形加工における流体の非定常流動特性は、製品の品質に大きな影響を及ぼすため、工業的な応用面を考えた場合にも、粘弾性流体の非定常流動挙動の解明は重要な問題である。

本論文では、主として数値計算により粘弾性流体の非定常流動特性の解析を行った。ここで、本研究で得られた成果についてまとめ、結論を述べる。

第1章で粘弾性流体の非定常流動解析の重要性と、これまでの研究と本研究との関係について述べた後、第2章では、粘弾性流体の流動解析の理論を示した。特に構成方程式については、現在までに提案されている構成方程式の中から主なものを選び、それらの特徴をまとめた。本研究で数値解析の際に使用したレオノフモデルについては、さらに詳しく扱った。第3章では、有限要素法を用いて数値計算を行うための準備を行った。

第4章から第7章では、典型的な非定常流動のひとつであるスタートアップ流れを取り上げ、構成方程式にレオノフモデルを用いた数値解析を行った。第4章で、単純せん断流れ、一軸伸長流れ、平行平板間流れといった単純な流れ場について解析した後、せん断流れと伸長流れが混在するような複雑な流れ場として、急縮小流路（第5章）、急拡大流路（第6章）、急縮小急拡大流路（第7章）における流れの数値解析を行った。

単純な流れ場におけるスタートアップ流れの数値計算により、レオノフモデルを用いた計算の結果は、単純せん断流れにおける応力のオーバーシュート現象、伸長速度に依存する伸長応力の成長現象、平行平板間流れにおける速度分布の時間変化などの実際の高分子流体の流動においてみられる現象を記述することが示された。さらに他の研究者による報告もあわせて判断し、レオノフモデルを構成方程式として使用することの有効性を確認した。

第5章以降では、複雑な流れ場における粘弾性流体のスタートアップ流れの数値解析を行い、以下に示す結論を得た。

急縮小流れでは、縮小部上流側の流路角部に循環二次流れが発生し、時間とともに渦が大きく成長する現象が確認された。このような流れ模様の時間変化によって、縮小部入り口付近における流れ方向の速度勾配は小さく抑えられ、その結果として、応力の成長が抑制される。したがって、循環二次流れは、応力の成長を抑制するための機構、いわゆる stress relief mechanism としての機能を果たしている。さらに、応力パワーによる解析の結果から、このような流れ場の変化は、縮小部入り口付近における弾性的エネルギーの蓄積を緩やかにする流れ場への変化となることが分かった。

そして、急拡大流れの解析では、拡大部入り口直後で流体が外側の壁面の方に大きく広がるように流れる現象がみられた。この流れの広がりには時間とともに顕著に現れる。このような流れ模様の变化は、拡大部入り口付近で、上流側のせん断変形によって蓄えられた弾性的エネルギーを解放するためのものであることが分かった。すなわち、拡大部入り口直後で流れが大きく外側へ広がることによって、この領域の減速がより大きくなり、弾性的エネルギーの解放が促進される。

また、急縮小急拡大流れでは、流動開始直後にはスリット部の上流側と下流側で対称に近い流れ模様であったものが時間とともに、上流側では渦が大きく成長し、下流側では拡大部入り口直後の流れの広がりが大きくなり、非対称な流れ模様へと変化する現象がみられた。上流側および下流側の流れの変化は、基本的にはそれぞれ、急縮小流れと急拡大流れにおいてみられたものと同じである。しかし、急縮小急拡大流れの場合には、スリット部における応力の緩和現象が、下流側の流れに大きな影響を及ぼすために、スリット長の違いによる下流側の流れの違いが顕著に現れた。スリット長が短い場合には、上流側の縮小流れで生じた応力が、スリット部であまり緩和されないために、拡大部においてより多くの弾性的エネルギーを解放する必要がある。そのために、時間とともに拡大部入り口直後の流れの広がりが大きく、弾性的エネルギーの解放を促進するような流れ模様へと変化する事が分かった。

第 8 章では、レーザー・ドップラー流速計を用いて矩形管急縮小流路における高分子水溶液スタートアップ流れの流速応答の測定を行った。そして、中心線上流速分布におけるオーバーシュート領域の存在や、速度の時間変化におけるオーバーシュート現象などの、ニュートン流体の場合にはみられない特異な流動挙動が現れることを確認した。また、流速の時間変化の測定において、流路角部に生じる渦の成長現象が捉えられた。さらに、本実験で使用した流体のレオロジー特性に合わせたモデルパラメータを使用して、スタートアップ流れの数値計算を行い、その結果と実験結果を比較した。そして、両者の間に定性的な一致が得られた。

参考文献

- (1) Bird, R.B., Armstrong R.C., Hassager O., "Dynamics of Polymeric Liquid", vol.1. Fluid Dynamics, 2nd. ed., (1985), Wiley, New York.
- (2) Bird, R.B., Armstrong R.C., Hassager O., "Dynamics of Polymeric Liquid", vol.2. Kinetic Theory, 2nd. ed., (1985), Wiley, New York.
- (3) Tanner, R.I., "Engineering Rheology", (1988), Clarendon, Oxford.
- (4) Brydson, J.A., "Flow Properties of Polymer Melts", (1970), Iliffe Books, London.
- (5) White, J.L., "Principles of Polymer Engineering Rheology", (1988), Wiley, New York.
- (6) Isayev, A.I., Unsteady channel flow of polymeric fluids, *J. Rheol.*, **28** (1984), 411-437.
- (7) 森 教安, 武原弘明, 小西義朗, 中村喜代次, 円管内における粘弾性流体の流量一定のスタートアップ流れ, *日本レオロジー学会誌*, **18** (1990), 69-75.
- (8) 森 教安, 海下 巧, 中村喜代次, 絞り部を有する矩形管流路内における粘弾性流体のスタートアップ流れの流速測定, *日本レオロジー学会誌*, **21** (1993), 33-40.
- (9) Chong, J.S., Franks, R.G.E, Time-dependent flow of quasi-linear viscoelastic fluids, *J. Appl. Polym. Sci.*, **14** (1970), 1639-1650.
- (10) 森 教安, 小西義朗, 海下 巧, 中村喜代次, 粘弾性流体の円管内流量一定スタートアップ流れの数値計算, *日本レオロジー学会誌*, **19** (1991), 125-129.
- (11) Sato, T., Richardson, S.M., Explicit numerical simulation of time-dependent viscoelastic flow problems by a finite element/finite volume method, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **51** (1994), 249-275.
- (12) Szabo, P., Rallison, J.M., Hinch, E.J., Start-up of flow of a FENE-fluid through a 4:1:4 constriction in a tube, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **72** (1997), 73-86.
- (13) Cable, P.J., Boger, D.V., A comprehensive experimental investigation of tubular entry flow of viscoelastic fluids: Part III. Unstable flow, *AIChE J.*, **25** (1979), 152-159.

- (14) Jawler, J.V., Muller, S.J., Brown, R.A., Armstrong, R.C., Laser Doppler velocimetry measurements of velocity fields and transitions in viscoelastic fluids, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **20** (1986), 51–92.
- (15) McKinkey, G.H., Raiford, W.P., Brown, R.A., Armstrong, R.C., Nonlinear dynamics of viscoelastic flow in axisymmetric abrupt contractions, *J. Fluid Mech.*, **223** (1991), 411–456.
- (16) 中村喜代次, 五明 聡, 西村太良, 堀川 明, 急収縮流路における高分子流体の不安定流動, 第 1 報: 変動の発生及び周期, *日本繊維機械学会論文集*, **40** (1987), T1–T9.
- (17) Chiba, K., Sakatani, T., Nakamura, K., Anomalous flow patterns in viscoelastic entry flow through a planar contraction, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **36** (1990), 193–203.
- (18) 中村喜代次, 村田滋身, 西村太良, 小西圭介, 堀川 明, 合流部における粘弾性流体の不安定現象, *日本繊維機械学会論文集*, **38** (1985), T1–T10.
- (19) Rahaman, K.D., Ramkissoon, H., Unsteady axial viscoelastic pipe flow, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **57** (1995), 27–38.
- (20) 中村雅英, 中世古 誠, 加藤隆一, 草薨英明, 粘弾性流体の曲がり管内脈動流における壁面圧力変動, *日本機械学会論文集 B 編*, **63** (1997), 1561–1567.
- (21) Larson, R.G., "Constitutive Equations for Polymer Melts and Solutions", (1988), Butterworth, Massachusetts.
- (22) Bird, R.B., Useful non-Newtonian models, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **8** (1976), 13–34.
- (23) Bird, R.B., Wiest, J.M., Constitutive equations for polymeric liquids, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **27** (1995), 169–193.
- (24) 中川鶴太郎, レオロジー, (1978), 第 5 章, 岩波書店.
- (25) 中村喜代次, 非ニュートン流体力学, (1997), 第 5 章, コロナ社.
- (26) Noll, W., A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **2** (1958/1959), 197–226.

- (27) Bird, R.B., Öttinger, H.C., Transport properties of polymeric liquids, *Annu. Rev. Phys. Chem.*, **43** (1992), 371–406.
- (28) White, J.L., Metzner, A.B., Development of Constitutive Equations for Polymeric Melts and Solutions, *J. Appl. Polym. Sci.*, **7** (1963), 1867–1889.
- (29) Giesekus, H., A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **11** (1982), 69–109.
- (30) Giesekus, H., A unified approach to a variety of constitutive models for polymer fluids based on the configuration-dependent molecular mobility, *Rheol. Acta*, **21** (1982), 366–375.
- (31) Leonov, A.I., Nonequilibrium thermodynamics and rheology of viscoelastic polymer media, *Rheol. Acta*, **15** (1976), 85–98.
- (32) Leonov, A.I., Lipkina, E.H., Pashin, E.D., Prokunin, A.N., Theoretical and experimental investigation of shearing in elastic polymer liquids, *Rheol. Acta*, **15** (1976), 411–426.
- (33) Phan-Thien, N., Tanner, R.I., A new constitutive equation derived from network theory, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **2** (1977), 353–365.
- (34) Phan-Thien, N., A nonlinear network viscoelastic model, *J. Rheol.*, **22** (1978), 259–283.
- (35) Larson, R.G., A constitutive equation for polymer melts based on partially extending strand convection, *J. Rheol.*, **28** (1984), 545–571.
- (36) Larson, R.G., Convected derivatives for differential constitutive equations, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **24** (1987), 331–342.
- (37) Bernstein, B., Kearsley, E.A., Zapas, L.J., A study of stress relaxation with finite strain, *Trans. Soc. Rheol.*, **7** (1963), 391–410.
- (38) Kaye, A., Non-Newtonian flow in incompressible fluids, College of Aeronautics, Cranfield, CoA Note No.134 (1962).

- (39) Lodge A.S., "Elastic Liquids", (1964), Academic Press, London & New York.
- (40) Boger, D.V., A highly elastic constant-viscosity fluid, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **3** (1977/1978), 87-91.
- (41) Yamamoto M., The visco-elastic properties of network structure. I. General formalism, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **11** (1956), 413-421.
- (42) Yamamoto M., The visco-elastic properties of network structure. II. Structural viscosity, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **12** (1957), 1148-1158.
- (43) Yamamoto M., The visco-elastic properties of network structure. III. Normal stress effect (Weissenberg effect), *J. Phys. Soc. Jpn.*, **13** (1958), 1200-1211.
- (44) de Gennes, P.-G., Reptation of a polymer chain in the presence of fixed obstacles, *J. Chem. Phys.*, **55** (1971), 572-579.
- (45) de Gennes, P.-G., "Scaling Concepts in Polymer Physics", (1979), Chap. VIII, Cornell Univ. Press, New York.
- (46) Doi, M., Edwards, S.F., "The Theory of Polymer Dynamics", (1986), Clarendon Press, Oxford.
- (47) Papanastasiou, A.C., Scribeven, L.E., Macosko, C.W., An integral constitutive equation for mixed flows: viscoelastic characterization, *J. Rheol.*, **27** (1983), 387-410.
- (48) Luo, X.-L., Tanner, R.I., A streamline element scheme for solving viscoelastic flow problems. Part II: Integral constitutive models, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **22** (1986), 61-89.
- (49) Tanner, R.I., From A to (BK)Z in constitutive relations, *J. Rheol.*, **32** (1988), 673-702.
- (50) Ferry, J.D., "Viscoelastic Properties of Polymers", (1980), Wiley, New York.
- (51) Williams, M.L., Landel, R.F., Ferry, J.D., The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids, *J. Am. Chem. Soc.*, **77** (1955), 3701-3707.

- (52) Kröger, M., Loose, W., Hess, S., Rheology and structural changes of polymer melts via nonequilibrium molecular dynamics, *J. Rheol.*, **37** (1993), 1057–1059.
- (53) Koplik, J., Banavar, J.R., Molecular simulation of reentrant corner flow, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997), 2116–2119.
- (54) Koplik, J., Banavar, J.R., Reentrant corner flows of Newtonian and non-Newtonian fluids, *J. Rheol.*, **41** (1997), 787–805.
- (55) Upadhyay, R.K., Isayev, A.I., Shen, S.F. Transient shear flow behavior of polymeric fluids according to the Leonov model, *Rheol. Acta*, **20** (1981), 443–457.
- (56) Upadhyay, R.K., Isayev, A.I., Elongational flow behavior of polymeric fluids according to the Leonov model, *Rheol. Acta*, **22** (1983), 557–568.
- (57) Upadhyay, R.K., Isayev, A.I., Shen, S.F., Modeling of stresses in multistep-shear deformation of polymeric fluids, *J. Rheol.*, **27** (1983), 155–169.
- (58) Braun, H., Friedrich, Chr., Transient processes in Couette flow of a Leonov fluid influenced by dissipation, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **33** (1989), 39–51.
- (59) 高橋雅興, 小川健一郎, 升田利史朗, 高分子濃厚溶液・融液物の定常せん断流動と流動停止後の応力緩和に対する Leonov モデルの適用性, *日本レオロジー学会誌*, **18** (1990), 180–189.
- (60) Larson, R.G., Elongational-flow predictions of the Leonov constitutive equation, *Rheol. Acta*, **22** (1983), 435–448.
- (61) Shen, S.F., Simulation of polymer flows in the injection moulding process, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **4** (1984), 171–182.
- (62) Mavridis, H., Hrymak, A.N., Vlachopoulos, J., The effect of fountain flow on molecular orientation in injection molding, *J. Rheol.*, **32** (1988), 639–663.
- (63) Baaijens, F.P.T., Calculation of residual stresses in injection molded products, *Rheol. Acta*, **30** (1991), 284–299.
- (64) Upadhyay, R.K., Isayev, A.I., Simulation of two-dimensional planar flow of viscoelastic fluids, *Rheol. Acta*, **25** (1986), 80–94.

- (65) Leonov, A.I., On a class of constitutive equations for viscoelastic liquids, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **25** (1987), 1-59.
- (66) Leonov, A.I., Prokunin, A.N., An improved simple version of a nonlinear theory of elasto-viscous polymer media, *Rheol. Acta*, **19** (1980), 393-403.
- (67) Crochet, M.J., Davies, A.R., Walters, K., "Numerical Simulation of Non-Newtonian Flow", (1984), Chaps. 8-10, Elsevier, Netherlands.
- (68) Isayev, A.I., Hieber, C.A., Toward a viscoelastic modelling of the injection molding of polymers, *Rheol. Acta*, **19** (1980), 168-182.
- (69) Boger, D.V., Viscoelastic flows through contractions, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **19** (1987), 157-182.
- (70) Crochet, M.J., Walters, K., Numerical simulation in non-Newtonian fluid mechanics, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **15** (1983), 241-260.
- (71) White, J.L., Kondo, A., Flow patterns in polyethylene and polystyrene melts during extrusion through a die entry region: measurement and interpretation, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **3** (1977/1978), 41-64.
- (72) White, S.A., Baird, D.G., The importance of extensional flow properties on planar entry flow patterns of polymer melts, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **20** (1986), 93-101.
- (73) Debbaut, B., Crochet, M.J., Extensional effects in complex flows, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **30** (1988), 169-184.
- (74) 徳岡辰雄, 有理連続体力学入門 (5), 機械の研究, **28** (1976), 683-686.
- (75) 久田俊明, 非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎, (1992), 丸善, p.190.
- (76) Wales, J.L.S., "The Application of Flow Birefringence to Rheological Studies of Polymer Melts", (1976), Delft University Press, Delft.
- (77) Dietz, W., White, J.L., Ein einfaches Modell zur Berechnung des Druckverlustes während des Werkzeugfüllvorganges und der eingefrorenen Orientierung beim Spritzgießen amorpher Kunststoffe, *Rheol. Acta*, **17** (1978), 676-392.

- (78) 千葉訓司, 村上公啓, 山本徹也, 中村喜代次, 二次元の急絞り流路内における希薄繊維懸濁液の流れ, 日本繊維機械学会論文集, **44** (1991), T247-T259.
- (79) Pak, B., Cho, Y.I., Choi, S.U.S., Separation and reattachment of non-Newtonian fluid flows in a sudden expansion pipe, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **37** (1990), 175-199.
- (80) Townsend, P., Walters K., Expansion flows of non-Newtonian liquids, *Chem. Eng. Sci.*, **49** (1994), 749-763.
- (81) Boloch, A., Townsend, P., Webster, M.F., On vortex development in viscoelastic expansion and contraction flows, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **65** (1996), 133-149.
- (82) Macagno, E.O., Hung, T.-K., Computational and experimental study of a captive annular eddy, *J. Fluid Mech.*, **28** (1967), 43-64.
- (83) Acrivos A., Schrader, M.L., Steady flow in a sudden expansion at high Reynolds numbers, *Phys. Fluids.*, **25** (1982), 923-930.
- (84) Perera, M.G.N., Walters, K., Long range memory effects in flows involving abrupt changes in geometry. Part 2: the expansion/contraction/expansion problem, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **2** (1977), 191-204.
- (85) Xu, Y., Wang, P., Qian, R. Velocity field of contraction flow into a rectangular slit for a polymeric fluid, *Rheol. Acta*, **25** (1986), 239-245.
- (86) Quinzani, L.M., Armstrong, R.C., Brown, R.A., Birefringence and laser-Doppler velocimetry (LDV) studies of viscoelastic flow through a planar contraction, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **52** (1994), 1-36.
- (87) Barnes, H.A., Hutton, J.F., Walters, K., "An Introduction to Rheology", (1989), Chap.5, Elsevier, Amsterdam.
- (88) 小柴 孝, 森 教安, 中村喜代次, スピンラインレオメータによる高分子溶液の伸長粘度測定と流れの数値解析, 日本機械学会論文集 B 編, **62** (1996), 136-144.
- (89) Meissner, J., Rheometry of Polymer Melts, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **17** (1985), 45-64.

- (90) Cable, P.J., Boger, D.V., A comprehensive experimental investigation of tubular entry flow of viscoelastic fluids: Part I. Vortex characteristics in stable flow, *AICHE J.*, **24** (1978), 869–879.
- (91) Cable, P.J., Boger, D.V., A comprehensive experimental investigation of tubular entry flow of viscoelastic fluids: Part II. The velocity field in stable flow, *AICHE J.*, **24** (1978), 992–999.
- (92) Sridhar, T., Tirtaatmadja, V., Nguyen, D.A., Gupta, R.K., Measurement of extensional viscosity of polymer solutions, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **40** (1991), 271–280.
- (93) Tirtaatmadja, V., Sridhar, T., A filament stretching device for measurement of extensional viscosity, *J. Rheol.*, **37** (1993), 1081–1102.
- (94) Spiegelberg, S.H., Ables, D.C., McKinley, G.H., The role of end-effects on measurements of extensional viscosity in filament stretching rheometers, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **64** (1996), 229–267.
- (95) Yao, M., McKinley, G.H., Debbaut, B., Extensional deformation, stress relaxation and necking failure of viscoelastic filaments, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **79** (1998), 469–501.
- (96) 温 洪昭, 中村喜代次, 三次元急絞り流路における粘弾性流体の流れの数値計算, *日本繊維機械学会論文集*, **46** (1993), T187–T196.
- (97) 温 洪昭, 中村喜代次, 急縮小部における Oldroyd-B 流体の三次元流動解析, *プラスチック成形加工学会誌*, **9** (1997), 547–556.
- (98) Mompean, G., Deville, M., Unsteady finite volume simulation of Oldroyd-B fluid through a three-dimensional planar contraction, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **72** (1997), 253–279.
- (99) Xue, S.-C., Phan-Thien, N., Tanner, R.I., Numerical study of secondary flows of viscoelastic fluid in straight pipes by an implicit finite volume method, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **59** (1995), 191–213.

- (100) Xue, S.-C., Phan-Thien, N., Tanner, R.I., Three dimensional numerical simulations of viscoelastic flows through planar contractions, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **74** (1998), 195–245.
- (101) Xue, S.-C., Phan-Thien, N., Tanner, R.I., Numerical investigations of Lagrangian unsteady extensional flows of viscoelastic fluids in 3-D rectangular ducts with sudden contractions, *Rheol. Acta*, **37** (1998), 158–169.

関連発表論文

ここで、本論文の各章に関連する発表論文を示す。以下に示す各論文と本論文との関係は以下の通りである。論文 (1) は第 2 章に関連する。論文 (2) ~ (4), (8), (a) は第 5 章と関連し、論文 (7) は第 6 章と、論文 (5), (6) は第 7 章に関連する。論文 (9) は第 8 章に関連する。また、論文 (2) ~ (8), (a) は第 3 章および第 4 章とも関連がある。

(学術論文)

(1) 高分子水溶液に対する構成式の検討,

中村喜代次, 森 教安, 山本剛宏, 日本繊維機械学会論文集, **45** (1992), T61-T69.

Examination of Constitutive Equations for Polymer Solutions,
Kiyoji Nakamura, Noriyasu Mori, Takehiro Yamamoto,
Journal of the Textile Machinery Society of Japan, English Edition, **38** (1992), 31-38.

(2) レオノフモデルを用いた非定常粘弾性流れの有限要素解析
(第 1 報) 2 次元スタートアップ流れの速度場

中村喜代次, 山本剛宏, 日本繊維機械学会論文集, **47** (1994), T127-T134.

Finite Element Simulation of Unsteady Viscoelastic Flow by Using Leonov Model.
Part 1: Velocity Field of Two-Dimensional Start-up Flow through Abrupt Contraction,
Kiyoji Nakamura, Takehiro Yamamoto,
Journal of the Textile Machinery Society of Japan, English Edition, **41** (1995), 1-8.

(3) レオノフモデルを用いた非定常粘弾性流れの有限要素解析
(第 2 報) 2 次元スタートアップ流れの応力場

中村喜代次, 山本剛宏, 日本繊維機械学会論文集, **47** (1994), T211-T218.

Finite Element Simulation of Unsteady Viscoelastic Flow by Using Leonov Model.
Part 2: Stress Field of Two-Dimensional Start-up Flow through Abrupt Contractions,
Kiyoji Nakamura, Takehiro Yamamoto,
Journal of the Textile Machinery Society of Japan, English Edition, **42** (1996), 1-8.

(4) テーパー部を有する縮小流路における粘弾性流体のスタートアップ流れの数値計算
山本剛宏, 中村喜代次, 日本繊維機械学会論文集, **49** (1996), T253-T259.

Numerical Analysis of Viscoelastic Start-up Flow in Channels with a Tapered Contraction

Takehiro Yamamoto, Kiyoji Nakamura,

Journal of the Textile Machinery Society of Japan, English Edition, **43** (1997), 83–89.

(5) スリット部を通過する粘弾性流体のスタートアップ流れの数値解析

第 1 報：速度場と応力場の時間的变化

山本剛宏，中村喜代次，日本レオロジー学会誌, **24** (1996), 183–187.

(6) スリット部を通過する粘弾性流体のスタートアップ流れの数値解析

第 2 報：応力緩和に対するスリット長の影響

山本剛宏，中村喜代次，日本レオロジー学会誌, **24** (1996), 189–193.

(7) 急拡大流路における粘弾性流体のスタートアップ流れの数値計算

山本剛宏，中村喜代次，日本レオロジー学会誌, **26** (1998), 103–108.

(8) 急縮小流路における粘弾性流体のスタートアップ流れの数値解析

山本剛宏，中村喜代次，日本機械学会誌論文集 B 編, **64** (1998), 3162–3167.

(9) *Velocity Measurement of Start-up Flow of Polymeric Solutions in a Planar Contraction Channel*

Takehiro Yamamoto, Masateru Morimoto, Kiyoji Nakamura,

Rheologica Acta (to be published).

(国際会議発表論文)

(a) *Numerical Analysis of Viscoelastic Start-up Flow*

Takehiro Yamamoto, Kiyoji Nakamura,

Proceedings of XIIth International Congress on Rheology, (1996), 405–406.

(XIIth International Congress on Rheology, Quebec City (Quebec), Canada, August 18–23, 1996)

謝 辞

本研究の遂行および本論文の作成にあたり，貴重な御指導と御助言を賜った，大阪大学大学院工学研究科・中村喜代次 教授に深く感謝いたします。また，本論文の作成にあたり，貴重な御教示と丁寧な御校閲を頂きました，大阪大学大学院工学研究科・三宅 裕 教授ならびに辻 裕 教授に心より感謝いたします。

そして，本研究にあたり数々の御助言と御協力を頂きました，大阪大学大学院工学研究科・森 教安 助教授，保田和則 助手に感謝いたします。さらに，流速測定実験では，当時，中村研究室に在籍された森本政輝，石山雅一 両氏に御協力を頂きました。ここに，感謝の意を表します。

また，事務上の手続きに関して，ご迷惑とご苦勞をおかけした，瀧川光子 事務官に御礼申し上げます。

最後に，本研究を行うに際して，快適な環境を提供して下さった，大阪大学院工学研究科機械物理工学専攻・複雑流体力学講座の諸氏に感謝いたします。

付 録 A 有限要素式の導出

A.1 内挿関数

計算で使った内挿関数の具体的な形を示す．本研究では，有限要素として三角形要素を使用した．三角形要素を使用する場合，三角形内の任意の点を表すために，面積座標を用いると便利である．

三角形の頂点 i ($i=1, 2, 3$) のデカルト座標系における座標を (x_i, y_i) のように書き，図 A.1 に示すように，面積 A_i を定義する．そして，新しい座標 L_i を次式のように定義する．

$$L_i = A_i/A \quad (\text{A.1})$$

ここで， $A = A_1 + A_2 + A_3$ である．また， L_i は以下のように表すこともできる．

$$L_i = a_i + b_i x + c_i y \quad (\text{A.2})$$

ここで，

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{2A}(x_j y_k - x_k y_j) \\ b_i &= \frac{1}{2A}(y_j - y_k) \\ c_i &= \frac{1}{2A}(x_k - x_j) \end{aligned} \quad (i, j, k = 1, 2, 3; \text{ cyclic}) \quad (\text{A.3})$$

である．

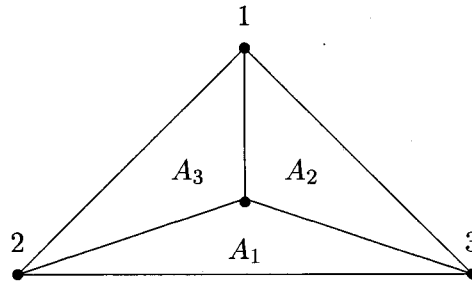


Fig.A.1: Definition of the area coordinate system

面積座標を用いると，解析に使用した内挿関数 Ψ_λ および Φ_α は次式のように表される．ただし，マトリックス中の空欄は 0 を意味する．

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & -1 & -1 \\ & 1 & & -1 & -1 \\ & & 1 & -1 & -1 \\ & & & 4 & \\ & & & & 4 \\ & & & & & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \\ L_2 L_3 \\ L_3 L_1 \\ L_1 L_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

A.2 具体的な式展開

ここでは，ガラーキン有限法によって基礎方程式を離散化し，各要素に関する有限要素式を導く手順を具体的に示す．まず，連続の式，運動方程式の有限要素式を導く．連続の式，

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.6})$$

の両辺に重み関数 Ψ_λ を乗じて，要素内で積分すると，

$$\int_V \Psi_\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

となる．ここで，式 (3.1)，(3.2) を代入すると，

$$\left(\int_V \Psi_\lambda \Phi_{\beta,x} dx dy \right) U_\beta + \left(\int_V \Psi_\lambda \Phi_{\beta,y} dx dy \right) V_\beta = 0 \quad (\text{A.7})$$

となる．上式を整理して，

$$H_{\lambda\beta}^x U_\beta + H_{\lambda\beta}^y V_\beta = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$H_{\lambda\beta}^x \equiv \int_V \Psi_\lambda \Phi_{\beta,x} dx dy \quad (\text{A.9})$$

$$H_{\lambda\beta}^y \equiv \int_V \Psi_\lambda \Phi_{\beta,y} dx dy \quad (\text{A.10})$$

となる．次に運動方程式，

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \eta_0 s \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} \left(\frac{\partial C_{xx}^k}{\partial x} + \frac{\partial C_{xy}^k}{\partial y} \right) \\ + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \eta_0 s \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} \left(\frac{\partial C_{xy}^k}{\partial x} + \frac{\partial C_{yy}^k}{\partial y} \right) \\ & + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

を離散化する．式 (A.11) の両辺に重み関数 Φ_α を乗じて，要素内で積分すると，

$$\begin{aligned} & \int_V \Phi_\alpha \left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \eta_0 s \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} \left(\frac{\partial C_{xx}^k}{\partial x} + \frac{\partial C_{xy}^k}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} \right] dxdy = 0 \end{aligned}$$

となる．これを展開して次式を得る．

$$\begin{aligned} & \int_V \Phi_\alpha \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right) dxdy + \int_V \Phi_\alpha \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \right) dxdy + \int_V \Phi_\alpha \left(\rho v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy \\ & - \eta_0 s \int_V \Phi_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dxdy - \eta_0 s \int_V \Phi_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dxdy \\ & - \sum_{k=1}^N \int_V \Phi_\alpha \frac{\eta_k}{\theta_k} \left(\frac{\partial C_{xx}^k}{\partial x} + \frac{\partial C_{xy}^k}{\partial y} \right) dxdy \\ & + \int_V \Phi_\alpha \frac{\partial p}{\partial x} dxdy = 0 \end{aligned}$$

さらに，部分積分して，

$$\begin{aligned} & \int_V \Phi_\alpha \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right) dxdy + \int_V \Phi_\alpha \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \right) dxdy + \int_V \Phi_\alpha \left(\rho v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy \\ & - \eta_0 s \left(\int_S \Phi_\alpha \frac{\partial u}{\partial x} n_x dS - \int_V \Phi_{\alpha,x} \frac{\partial u}{\partial x} dxdy \right) \\ & - \eta_0 s \left(\int_S \Phi_\alpha \frac{\partial u}{\partial y} n_y dS - \int_V \Phi_{\alpha,y} \frac{\partial u}{\partial y} dxdy \right) \\ & - \sum_{k=1}^N \int_V \Phi_\alpha \frac{\eta_k}{\theta_k} \left(\frac{\partial C_{xx}^k}{\partial x} + \frac{\partial C_{xy}^k}{\partial y} \right) dxdy \\ & + \int_V \Phi_\alpha \frac{\partial p}{\partial x} dxdy = 0 \end{aligned}$$

となる．ここで，上式に式 (3.1)，(3.2)，(3.3)，(3.4) を代入すると，

$$\rho \left(\int_V \Phi_\alpha \Phi_\beta dxdy \right) \dot{U}_\beta$$

$$\begin{aligned}
& + \rho \left(\int_V \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_{\gamma,x} dx dy \right) U_\beta U_\gamma + \rho \left(\int_V \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_{\gamma,y} dx dy \right) V_\beta U_\gamma \\
& + \eta_0 s \left(\int_V \Phi_{\alpha,x} \Phi_{\beta,x} dx dy \right) U_\beta + \eta_0 s \left(\int_V \Phi_{\alpha,y} \Phi_{\beta,y} dx dy \right) U_\beta \\
& - \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} \left\{ \left(\int_V \Phi_\alpha \Phi_{\beta,x} dx dy \right) C_{xx\beta}^k + \left(\int_V \Phi_\alpha \Phi_{\beta,y} dx dy \right) C_{xy\beta}^k \right\} \\
& + \left(\int_V \Phi_\alpha \Psi_{\lambda,x} dx dy \right) P_\lambda - \eta_0 s \left(\int_S \Phi_\alpha \frac{\partial u}{\partial x} n_x dS + \int_S \Phi_\alpha \frac{\partial u}{\partial y} n_y dS \right) = 0
\end{aligned}$$

となる．ここで， $[\dot{\cdot}]$ は時間微分である．上式を次のように書く．

$$\begin{aligned}
& \rho M_{\alpha\beta} \dot{U}_\beta + \rho E_{\alpha\beta\gamma}^x U_\beta U_\gamma + \rho E_{\alpha\beta\gamma}^y V_\beta U_\gamma + \eta_0 s K_{\alpha\beta} U_\beta + G_{\alpha\lambda}^x P_\lambda \\
& = \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} (N_{\alpha\beta}^x C_{xx\beta}^k + N_{\alpha\beta}^y C_{xy\beta}^k) + F_\alpha^x
\end{aligned} \tag{A.13}$$

ここで，

$$M_{\alpha\beta} \equiv \int_V \Phi_\alpha \Phi_\beta dx dy \tag{A.14}$$

$$E_{\alpha\beta\gamma}^x \equiv \int_V \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_{\gamma,x} dx dy \tag{A.15}$$

$$E_{\alpha\beta\gamma}^y \equiv \int_V \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_{\gamma,y} dx dy \tag{A.16}$$

$$K_{\alpha\beta} \equiv \int_V \Phi_{\alpha,x} \Phi_{\beta,x} dx dy + \int_V \Phi_{\alpha,y} \Phi_{\beta,y} dx dy \tag{A.17}$$

$$N_{\alpha\beta}^x \equiv \int_V \Phi_\alpha \Phi_{\beta,x} dx dy \tag{A.18}$$

$$N_{\alpha\beta}^y \equiv \int_V \Phi_\alpha \Phi_{\beta,y} dx dy \tag{A.19}$$

$$G_{\alpha\lambda}^x \equiv \int_V \Phi_\alpha \Psi_{\lambda,x} dx dy \tag{A.20}$$

$$F_\alpha^x \equiv \eta_0 s \left(\int_S \Phi_\alpha \frac{\partial u}{\partial x} n_x dS + \int_S \Phi_\alpha \frac{\partial u}{\partial y} n_y dS \right) \tag{A.21}$$

である．さらに整理して，

$$\rho \left(M_{\alpha\beta} \dot{U}_\beta + E_{\alpha\beta\gamma}^x U_\beta U_\gamma + E_{\alpha\beta\gamma}^y V_\beta U_\gamma \right) + \eta_0 s K_{\alpha\beta} U_\beta + G_{\alpha\lambda}^x P_\lambda = \Omega_\alpha^x \tag{A.22}$$

を得る．ここで，

$$\Omega_\alpha^x \equiv F_\alpha^x + \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} (N_{\alpha\beta}^x C_{xx\beta}^k + N_{\alpha\beta}^y C_{xy\beta}^k) \tag{A.23}$$

である。同様に式 (A.12) の両辺に重み関数 Φ_α を乗じて、要素内で積分し、さらに部分積分すると、次式を得る。

$$\begin{aligned}
& \rho \left(\int_V \Phi_\alpha \Phi_\beta dx dy \right) \dot{V}_\beta \\
& + \rho \left(\int_V \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_{\gamma,x} dx dy \right) U_\beta V_\gamma + \rho \left(\int_V \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_{\gamma,y} dx dy \right) V_\beta V_\gamma \\
& + \eta_0 s \left(\int_V \Phi_{\alpha,x} \Phi_{\beta,x} dx dy \right) V_\beta + \eta_0 s \left(\int_V \Phi_{\alpha,y} \Phi_{\beta,y} dx dy \right) V_\beta \\
& - \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} \left\{ \left(\int_V \Phi_\alpha \Phi_{\beta,x} dx dy \right) C_{xy\beta}^k + \left(\int_V \Phi_\alpha \Phi_{\beta,y} dx dy \right) C_{yy\beta}^k \right\} \\
& + \left(\int_V \Phi_\alpha \Psi_{\lambda,y} dx dy \right) P_\lambda - \eta_0 s \left(\int_S \Phi_\alpha \frac{\partial v}{\partial x} n_x dS + \int_S \Phi_\alpha \frac{\partial v}{\partial y} n_y dS \right) = 0
\end{aligned}$$

ここで、上式に式 (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) を代入すると、

$$\begin{aligned}
& \rho \left(M_{\alpha\beta} \dot{V}_\beta + \rho E_{\alpha\beta\gamma}^x U_\beta V_\gamma + \rho E_{\alpha\beta\gamma}^y V_\beta V_\gamma \right) + \eta_0 s K_{\alpha\beta} V_\beta + G_{\alpha\lambda}^y P_\lambda \\
& = \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} (N_{\alpha\beta}^x C_{xy\beta}^k + N_{\alpha\beta}^y C_{yy\beta}^k) + F_\alpha^y
\end{aligned} \tag{A.24}$$

となる。ここで、

$$G_{\alpha\lambda}^y \equiv \int_V \Phi_\alpha \Psi_{\lambda,y} dx dy \tag{A.25}$$

$$F_\alpha^y \equiv \eta_0 s \left(\int_S \Phi_\alpha \frac{\partial v}{\partial x} n_x dS + \int_S \Phi_\alpha \frac{\partial v}{\partial y} n_y dS \right) \tag{A.26}$$

である。これを整理して、

$$\rho C_{\alpha\beta} \dot{V}_\beta + \eta_0 s K_{\alpha\beta} V_\beta + G_{\alpha\lambda}^y P_\lambda = \Omega_\alpha^y \tag{A.27}$$

を得る。ここで、

$$\Omega_\alpha^y \equiv F_\alpha^y + \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} (N_{\alpha\beta}^x C_{xx\beta}^k + N_{\alpha\beta}^y C_{xy\beta}^k) \tag{A.28}$$

である。以上で、連続の式および運動方程式の有限要素式が導けた。

続いて、構成方程式の有限要素式を導く。離散化には、連続の式、運動方程式の場合と同様にガラーキン有限要素法を用いる。ひずみの時間発展方程式は次式で表される。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial C_{xx}^k}{\partial t} + u \frac{\partial C_{xx}^k}{\partial x} + v \frac{\partial C_{xx}^k}{\partial y} - 2 \left(C_{xx}^k \frac{\partial u}{\partial x} + C_{xy}^k \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
& + \frac{1}{2\theta_k} (C_{xx}^{k2} + C_{xy}^{k2} - 1) = 0
\end{aligned} \tag{A.29}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial C_{xy}^k}{\partial t} + u \frac{\partial C_{xy}^k}{\partial x} + v \frac{\partial C_{xy}^k}{\partial y} - C_{xx}^k \frac{\partial v}{\partial x} - C_{yy}^k \frac{\partial u}{\partial y} \\
& + \frac{1}{2\theta_k} (C_{xx}^k C_{xy}^k + C_{xy}^k C_{yy}^k) = 0
\end{aligned} \tag{A.30}$$

まず、式 (A.29) の離散化を行う。式 (A.29) の両辺に重み関数 Φ_α を乗じて、要素内で積分すると、

$$\begin{aligned}
& \int_V \Phi_\alpha \left[\frac{\partial C_{xx}^k}{\partial t} + u \frac{\partial C_{xx}^k}{\partial x} + v \frac{\partial C_{xx}^k}{\partial y} - 2 \left(C_{xx}^k \frac{\partial u}{\partial x} + C_{xy}^k \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2\theta_k} (C_{xx}^{k2} + C_{xy}^{k2} - 1) \right] dxdy = 0
\end{aligned}$$

これを展開して、

$$\begin{aligned}
& \int_V \Phi_\alpha \left(\frac{\partial C_{xx}^k}{\partial t} \right) dxdy + \int_V \Phi_\alpha \left(u \frac{\partial C_{xx}^k}{\partial x} \right) dxdy + \int_V \Phi_\alpha \left(v \frac{\partial C_{xx}^k}{\partial y} \right) dxdy \\
& - 2 \int_V \Phi_\alpha \left(C_{xx}^k \frac{\partial u}{\partial x} \right) dxdy - 2 \int_V \Phi_\alpha \left(C_{xy}^k \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy \\
& + \frac{1}{2\theta_k} \left[\int_V \Phi_\alpha C_{xx}^{k2} dxdy + \int_V \Phi_\alpha C_{xy}^{k2} dxdy - \int_V \Phi_\alpha dxdy \right] = 0
\end{aligned}$$

となる。上式に式 (3.1), (3.2), (3.4) を代入すると、

$$\begin{aligned}
& \left(\int_V \Phi_\alpha \Phi_\beta dxdy \right) \dot{C}_{xx}^k \\
& + \left(\int_V \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_{\gamma,x} dxdy \right) u_\beta C_{xx\gamma}^k + \left(\int_V \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_{\gamma,y} dxdy \right) v_\beta C_{xx\gamma}^k \\
& - 2 \left(\int_V \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_{\gamma,x} dxdy \right) C_{xx\beta}^k u_\gamma - 2 \left(\int_V \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_{\gamma,y} dxdy \right) C_{xy\beta}^k u_\gamma \\
& + \frac{1}{2\theta_k} \left[\left(\int_V \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_\gamma dxdy \right) C_{xx\beta}^k C_{xx\gamma}^k + \left(\int_V \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_\gamma dxdy \right) C_{xy\beta}^k C_{xy\gamma}^k \right. \\
& \quad \left. - \int_V \Phi_\alpha dxdy \right] = 0
\end{aligned}$$

となる。上式を整理すると、

$$\begin{aligned}
& M_{\alpha\beta} \dot{C}_{xx}^k + E_{\alpha\beta\gamma}^x u_\beta C_{xx\gamma}^k + E_{\alpha\beta\gamma}^y v_\beta C_{xx\gamma}^k - 2E_{\alpha\beta\gamma}^x C_{xx\beta}^k u_\gamma - 2E_{\alpha\beta\gamma}^y C_{xy\beta}^k u_\gamma \\
& + \frac{1}{2\theta_k} (S_{\alpha\beta\gamma} C_{xx\beta}^k C_{xx\gamma}^k + S_{\alpha\beta\gamma} C_{xy\beta}^k C_{xy\gamma}^k) = R_\alpha^k
\end{aligned} \tag{A.31}$$

を得る。ここで、

$$E_{\alpha\beta\gamma}^x \equiv \int_V \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_{\gamma,x} dxdy \tag{A.32}$$

$$E_{\alpha\beta\gamma}^y \equiv \int_V \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_{\gamma,y} dx dy \quad (\text{A.33})$$

$$S_{\alpha\beta\gamma} \equiv \int_V \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_\gamma dx dy \quad (\text{A.34})$$

$$R_\alpha^k \equiv \frac{1}{2\theta_k} \int_V \Phi_\alpha dx dy \quad (\text{A.35})$$

である。同様に、式 (2.60) の両辺に重み関数 Φ_α を乗じて積分すると、

$$\begin{aligned} \int_V \Phi_\alpha \left[\frac{\partial C_{xy}^k}{\partial t} + u \frac{\partial C_{xy}^k}{\partial x} + v \frac{\partial C_{xy}^k}{\partial y} - C_{xx}^k \frac{\partial v}{\partial x} - C_{yy}^k \frac{\partial u}{\partial y} \right. \\ \left. + \frac{1}{2\theta_k} (C_{xx}^k C_{xy}^k + C_{xy}^k C_{yy}^k) \right] dx dy = 0 \end{aligned}$$

となる。これを展開して、

$$\begin{aligned} \int_V \Phi_\alpha \left(\frac{\partial C_{xy}^k}{\partial t} \right) dx dy + \int_V \Phi_\alpha \left(u \frac{\partial C_{xy}^k}{\partial x} \right) dx dy + \int_V \Phi_\alpha \left(v \frac{\partial C_{xy}^k}{\partial y} \right) dx dy \\ - \int_V \Phi_\alpha \left(C_{xx}^k \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy - \int_V \Phi_\alpha \left(C_{yy}^k \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \\ + \frac{1}{2\theta_k} \left[\int_V \Phi_\alpha C_{xx}^k C_{xy}^k dx dy + \int_V \Phi_\alpha C_{xy}^k C_{yy}^k \right] = 0 \end{aligned}$$

となる。上式を整理すると、

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} \dot{C}_{xy}^k + E_{\alpha\beta\gamma}^x u_\beta C_{xy\gamma}^k + E_{\alpha\beta\gamma}^y v_\beta C_{xy\gamma}^k - E_{\alpha\beta\gamma}^x C_{xx\beta}^k v_\gamma - E_{\alpha\beta\gamma}^y C_{yy\beta}^k u_\gamma \\ + \frac{1}{2\theta_k} (S_{\alpha\beta\gamma} C_{xx\beta}^k C_{xy\gamma}^k + S_{\alpha\beta\gamma} C_{xy\beta}^k C_{yy\gamma}^k) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

を得る。