平面プルームの
安定性と乱流遷移の研究

昭和 62 年 1 月

脇 谷 俊 一

平面プルームの

安定性と乱流遷移の研究

昭和６２年１月

脇谷　俊一

目　次

第１章 緒言

流体中の密度差が、重力のような体積力との相互作用により惹き起す流れは、自然界における大気や海流の循環、地下のマントル対流などに代表される気象学的、海洋学的そして地球物理学的なスケールの流体運動から、室内の暖房や冷房による空気の流れとかタバコから立ち昇る紫煙のように日常生活に見られるようなスケールの流体運動まで、また、工業プラントにおける加熱、冷却プロセスに見られる流れなど多種多用である。この密度差は流体系内に課された温度差や濃度差に起因し、その結果として浮力の場が生じる。浮力以外に系外から流体を駆動する力が働かない自然対流では熱や物質の輸送過程は、ファンやポンプなどによる駆動力が働いている場合の強制対流とは全く異なっている。強制対流では流れ場内の密度差が特に大きくない限り、流体に働く慣性力は主としてこの駆動力によって生じ、密度の不均一による重力の影響は無視でき、流れ場は近似的に通常の流体力学で取り扱うことができる。この強制対流では、同じ幾何学的配置であっても、温度場もしくは濃度場は流れ場の影響を受け、大きく変化する。熱交換器や航空機の空気力学的加熱などに関する多くの工学上の問題はこの場合に当る。しかし自然対流では、流体の駆動力は浮力であり、たとえ流れ場内の密度差が小さくとも浮力の影響は無視できず、流体に働く慣性力は浮力と同程度の大きさであり、流れ場と温度場もしくは濃度場は互いに影響しあう。したがって、流れ場も温度場と同時に解かねばならないという解析上の困難さのために、また系外から課された流速を大きくすることによって強制対流では、自然対流よりもはるかに大きな熱伝達が得られることのために、これまで自然対流の研究は強制対流に比べて余りなされなかった。しかし近年、気象学、地球物理学の分野で、さらには環境問題との関連から自然対流現象に関する研究が数多くなされるようになった。

通常の流れの問題と同様に、自然対流問題も固体壁に沿う流れと、そうでない自由流の場合とに大きく分類することができる。熱伝達等に関する工学的応用面の少なさもあり、後者の場合についてはこれまで余り興味が持たれなかった。しかし、そのような自由流に類する自然対流は、太陽光によって暖められた地面からの上昇気流や工場の煙突からの煙の流出にも見られるように自然界や工学においてもしばしば起きている流れである。この種の流れには、加熱物体上方や冷却物体下方の後流、連続的なエネルギー供給により上昇

もしくは下降流をなすプルーム（plume）*、一つの流体塊として上昇もしくは下降するサーマル（thermal）などがある。なかでもプルームに関する研究が他に比べて多くなされているが、そのほとんどは定常層流場での理論解析や実験、乱流場での時間平均量や変動量などの統計量の測定に限られている。

層流から乱流への遷移の問題は、長い間、流体力学にたずさわる研究者たちによって興味が持たれてきた。乱流の発生理論として、微小攪乱だけを対象とする線型安定理論は多くの成功を収めてはいるが、有限の大きさの攪乱を扱う非線型問題においては、線型問題ほど理論的手法が確立されいない。さらに、決定的な遷移論というものは未だ手付かずの状況である。最近、完全に発達した乱流の中での秩序運動（組織構造とも呼ばれる）の存在が、条件付抽出の手法や流れの可視化によって見出されている。完全に乱雑なはずの乱流中にどのようにしてそのような秩序がもたらされかについては、全くわかっていない。乱流に至るまでの遷移領域においては、例えば、二次元の波や縦渦、渦の合体（ vortex pairing ）等はありふれた秩序運動であり、特に自由流においては、それらが乱流とみなされている領域においても消滅せず残っている可能性も否定できない。なぜなら、一般的に自由流は、固体壁を伴う流れに比べずっと不安定ではあるが、乱流への遷移はかなり緩やかに起るからである。このような観点から再び遷移領域に関する研究が最近、注目を集めている。しかしながら、自由流に類する自然対流の遷移領域における研究は極めて乏しく、その特性や遷移の機構は全く解明されていない現状である。

本論文では、自由流の一つで比較的容易に実験室で作ることのできる、空気中に水平に置かれた線熱源から立ち昇る二次元自然対流（平面プルームと呼ぶ）の層流の安定性から乱流への遷移に至る過程を理論的、実験的に取り扱う。ここで、遷移領域の定義を明確にしておく必要があろう。本研究では、攪乱の線型成長の終り、すなわち非線型成長の始まりから、変動が周期的でなく偶然的な乱流状態に至るまでを遷移領域とする。以下に本論文の各章の内容について概説する。

---

*　特に、非加熱壁に沿うプルームを壁面プルーム（ wall plume ）、浮力を伴うジェットを強制プルーム（ forced plume ）と呼んで区別する。

まず第２章では、境界層近似のもとで得られる層流平面プルームの定常解について言及し、更に、境界層型の基礎流に対して通常用いられている平行流近似に基づく空間増幅型の線型安定理論を、この平面プルームに適用し種々の安定特性を解明している。

第３章では、加熱細線上に形成される平面プルームの速度、温度の測定結果と定常理論解との比較検討を行っている。次に、この基礎流に人工的に微小攪乱を導入し、その振舞いを調べることによって前章の線形安定理論による結果を定量的に確かめている。また、人工的に微小攪乱を導入しない時にでも現れる自然発生攪乱の諸特性について、線型安定性の範囲内で理論との比較検討を行っている。

第４章では、線型安定理論において従来から、境界層型の基礎流に対して使われてきた平行流近似の仮定を用いずに、弱い非平行流に対して有効な一種の多重尺度法 (method of multiple scales)を平面プルームに適用し、基礎流の非平行性がその安定特性に及ぼす影響を解析している。次に、実験結果との比較を行い、この理論の妥当性を示している。

第５章では、攪乱の線型成長の領域から遷移領域を経て、乱流に至る広範囲の遷移過程の実験を実施している。速度、温度の時間平均量、変動成分やパワースペクトルの測定を行い、遷移領域における平面プルームの特性と遷移の機構を解明している。さらに煙注入法とスモーク・ワイヤ法を用いて流れ場を可視化し、点測定では得られない、平面プルームの遷移領域における流れ場の構造を明らかにしている。

以上本論文は、極めて単純な幾何学的配置である平面プルームの、乱流への遷移過程における諸特性と遷移の機構を解明している。工学、気象学、地球物理学などにおける現実の現象は、より複雑なものが多いが、この単純な幾何学的配置についての本研究の結果はその修正や拡張によって、多くの問題に適用可能であると考えられる。

第２章　層流平面プルームの線型安定理論

２．１　序論

円管 Poiseuille 流の乱流への遷移についての 1883 年の Reynolds [1] の実験以来、粘性のある実在流体の安定性に関する問題は多くの研究者によって興味が持たれて来た。流れの不安定性は、重力や遠心力などの外力の作用によって起る外力型不安定性と、そのような外力がなくとも流れ自身の渦度分布の不均一性により起る内在的不安定性とに大別できる。[2] Reynolds の実験は内在的不安定性の、回転同軸円筒流についての Taylor [3] の実験や水平流体層の Bénard [4] 問題は外力型不安定性の典型的な例である。一般に、内在的不安定性は、直ちに乱流への遷移を起すが、外力型不安定性は、一旦新しい別の定常流（例えば、Taylor渦やBénard cell として知られている）への転移を起すに過ぎない。前者の安定問題については、微小攪乱を対象とした線型安定理論が Lin [5] 、巽 [6] の著書に書かれており、後者の安定問題については Chandrasekhar [7] の著書に詳述されている。また、非線型安定理論をも取り扱った両安定問題が巽と後藤 [2] 、 Drazin と Reid [8] の著書に取り上げられている。

定常解の状態では、流体層の中に直線的な温度分布があるだけで、流れは存在せず静止の状態である Bénard 問題とは異なり、鉛直加熱平板に沿う自然対流や、本研究で取り扱う平面プルームでは、定常解の状態で、すでに流れ（攪乱に対して、基礎流と呼ぶ）が存在する。したがって、これらの安定問題は、いわゆる内在的安定性の問題である。

鉛直加熱平板に沿う自然対流境界層に対する線型安定理論の定式化は、Plapp [9] によって初めてなされた。結果としての攪乱を支配する方程式系は、浮力項を有するいわゆるOrr-Sommerfeld 方程式と攪乱エネルギー方程式から成り、この浮力項を通して流れ場と温度場は互いに影響しあう。したがって、解析が複雑となるために初期の研究では、この相互作用は無視された。[9,10] 1963年、Nachtsheim [11] は、この鉛直平板上の自然対流境界層の安定性に関して、攪乱速度と温度の相互作用を考慮した方程式を数値的に解き、この流れの安定特性を得た。彼はまた、相互作用を無視した計算を行い、この相互作用が流れをより不安定にする効果を持つことを見出した。以来、

この種の安定問題の研究が数多くなされるようになった。[12-14]

線熱源上の平面プルームの線型安定問題は、Nachtsheim と同様の数値的方法を用いて Pera と Gebhart [15]によって初めて解析され、Prandtl 数が 0.7（空気）の場合について中立曲線が求められた。結果は、ほとんどすべての Grashof数で不安定であることを示している。このことは、壁の存在しない二次元ジェットが、極めて低い臨界Reynolds 数を与える[16] ことからも予測できることである。しかしながら、波数とGrashof 数の小さな領域での数値計算の困難さのために、臨界 Grashof数と中立曲線の下枝は得られていない。この状況は点熱源上の軸対称プルームの安定性 [17]についても同様であり、鉛直加熱平板上の自然対流境界層や壁面に沿って上昇する壁面プルーム [18]とは異なり、自由流に類する自然対流境界層の特徴と考えられる。通常の境界層の場合と同様に、上述の自然対流境界層の安定問題は、基礎流に対して平行流の近似を課す、いわゆる準平行流の仮定を用いている。Haaland と Sparrow [19]は平面プルームについて、その基礎流の非平行性を一部取り入れた解析を行い、Peraと Gebhart によって得られなかった臨界 Grashof数と中立曲線の下枝を、一定増幅率の曲線とともに求めた。しかしながら、彼らと同様に、通常の境界層に対しても用いられたような修正 Orr-Sommerfeld 方程式には、その導出に問題があることが Ling と Reynolds [20]によって指摘されている。この基礎流の非平行性については、本論文の第４章で詳細に取り扱う。なお、上述の自然対流境界層の安定問題をまとめたものとしては、Gebhart [21-23]や Gebhart と Mahajan [24]による総合報告がある。しかしながら、平面プルームの安定問題についてはなお多くの検討すべき余地がある。本章では、平面プルームの線型安定性に関して、従来の準平行流の仮定の下に、 Pera と Gebhart のように中立曲線だけでなく、次章で述べる実験結果との比較のために、増大および減衰攪乱についても、その諸特性を求める。

2．2　層流平面プルームの定常解

平面プルームの線型安定性を支配する攪乱方程式を導く前に、その基礎流について述べておく。基礎流としては、無限に広い空間に置かれた、無限長の水平線熱源から立ち昇る定常層流プルームを採用する。図 2.1に示すように座標系をとり、流体の速度のｘ，ｙ成分をそれぞれＵ，Ｖとし温度をＴとする。通常、周囲温度とプルームの温度との差は小さく、またプルーム場は薄い層に限られるということから、境界層近似および Boussinesq 近似がプルーム流れに対して用いられる。これらの近似のもとで、

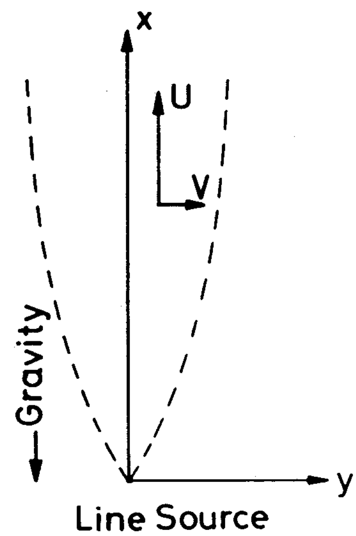


図 2.1　座標系

連続の式、運動方程式およびエネルギー方程式は、それぞれ

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \tag{2.1}$$

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = g\beta^*(T - T_\infty) + \nu\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \tag{2.2}$$

$$U\frac{\partial T}{\partial x} + V\frac{\partial T}{\partial y} = \kappa\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{2.3}$$

と書ける。ここで、g は重力加速度、β^* は流体の体膨張係数、ν は動粘性係数、κ は温度伝導率（$=k/(\rho c_p)$，k は熱伝導率、ρ は密度，c_p は定圧比熱）、T_∞ は周囲温度である。周囲は成層化していない場合を考え、T_∞ は一定とする。

$y=0$ の鉛直面に関する流れ場、温度場の対称性を考慮すると、境界条件は

$$y=0\text{で、}\quad V=0,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial T}{\partial y}=0, \tag{2.4}$$

$$y\to\infty\text{で、}\quad U\to 0,\quad T\to T_\infty \tag{2.5}$$

となる。　これらの方程式をもとにして、線熱源上の定常自然対流の流れ場と温度場の解析は最初に、点熱源プルームと共に、相似の概念を用いて Zeldovich [25] によって考えられた。しかしながら、彼の解析は水平速度成分Vを無視したもので、満足な解は得られなかった。この平面プルームには系を代表する長さ、速度および温度差が存在しないので、解は相似変数の導入によって相似解として求められる。この相似変数を用いた解析が Schuh [26] によって行われ、Prandtl 数が 0.7（空気）の場合についての数値解が得られた。以後、この定常プルームの解析は多くの研究者によってなされた。二、三の特定の Prandtl数については解析解が得られてはいるが、他はすべて数値解である。これまで求められている解を、点熱源の場合も含めて、表2.1 に示す。

表2.1　定常プルーム解

著　　者	熱源	Prandtl 数	解の種類
Schuh [26]	線熱源	0.7	数値解
	点熱源	0.7	〃
Yih [27]	点熱源	1, 2	解析解
Yih [28]	線熱源	2/3, 7/3	解析解
Sevruk [29]	線熱源	限定なし	巾級数解
Crane [30]	線熱源	5/9	級数解
Spalding & Cruddace [31]	線熱源	∞	近似解
Fujii [32]	線熱源	2	解析解
		0.01, 0.7, 10	数値解
	点熱源	1, 2	解析解
		0.01, 0.7, 10	数値解
Brand & Lahey [33]	線熱源	5/9, 2	解析解
		0.72, 1, 5, 10	数値解
	点熱源	1, 2	解析解
		0.72, 5, 10	数値解
Gebhart, Pera & Schorr [34]	線熱源	0.01, 0.1, 0.7	数値解
		2, 6.7, 10, 100	〃
Fujii, Morioka & Uehara [35]	線熱源	0.01, 0.03, 0.1, 0.3	数値解
		0.7, 1, 3, 5, 10,100	〃

数値解を求めるのに最も簡単な手順で済む、Gebhart ら[34]による解析をまず以下に示す。

相似変数η(x,y) と流れ関数Ψ(x,y) を次のようにとる。

$$\eta = \frac{y}{x}\left(\frac{Gr_x}{4}\right)^{1/4}, \qquad (2.6)$$

$$\Psi = 4\nu\left(\frac{Gr_x}{4}\right)^{1/4} F(\eta). \qquad (2.7)$$

ここで、局所 Grashof数は

$$Gr_x \equiv \frac{g\beta^*(T_0 - T_\infty)\ x^3}{\nu^2} \qquad (2.8)$$

で定義される。T_0 は鉛直面$y=0$での温度であり、xの関数である。

式 (2.8)における中心温度差を

$$T_0 - T_\infty = N x^n \qquad (2.9)$$

と仮定し、無次元温度$\Phi(\eta)$を

$$\Phi(\eta) \equiv \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \qquad (2.10)$$

のように定義する。

境界層近似および Boussinesq 近似の成り立つ範囲では、x方向の温度勾配による熱伝導は無視でき、単位時間にプルーム中を運ばれる熱量はどの水平面をとっても一定となる。この熱量は線熱源の単位長さあたり単位時間に発生する熱量Q（加熱量）に等しくなければならない、すなわち

$$Q = \rho c_p \int_{-\infty}^{\infty} U(T - T_\infty)\, dy \qquad (2.11)$$

となる。これより、式 (2.9)におけるNとnは決定でき、

$$T_0 - T_\infty = \left(\frac{Q^4}{4^3\ g\beta^*\ \rho^4\ c_p^4\ \nu^2\ I^4} \right)^{1/5} x^{-3/5} \tag{2.12}$$

となる。ここで、

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} F'\ \Phi\ d\eta \tag{2.13}$$

である。ただし $'$ は $d/d\eta$ を表す。式 (2.6), (2.7), (2.8), (2.10), (2.12)を式(2.2), (2.3)に代入すると、

$$F''' + \frac{12}{5} F F'' - \frac{4}{5} F'^2 + \Phi = 0, \tag{2.14}$$

$$\Phi'' + \frac{12}{5} Pr\ (F\Phi)' = 0 \tag{2.15}$$

が得られる。ここで Pr $(=\nu/\kappa)$ は Prandtl数である。

$y\to\infty$での境界条件 (2.5)の二つは、実は独立でないことが Gebhartら[34]によって示されており、$y\to\infty$での$T\to T_\infty$の条件は除いてもよい。結局、式 (2.4),(2.5)とΦの定義式 (2.10) から必要かつ十分な境界条件は

$$F(0) = F''(0) = \Phi'(0) = 0, \quad \Phi(0) = 1, \tag{2.16}$$

$$F'(\infty) \to 0 \tag{2.17}$$

となる。

速度成分 U, Vは

$$U = \frac{\partial\Psi}{\partial y} = \frac{4\nu}{x} \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{1/2} F'(\eta), \tag{2.18}$$

$$V = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} = -\frac{4\nu}{x} \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{1/4} \{3F(\eta) - 2\eta F'(\eta)\} \tag{2.19}$$

で与えられる。式 (2.12) より $Gr_x \sim x^{12/5}$ であるから、境界層の厚さは $x^{2/5}$ で拡がり、上昇速度Uは $x^{1/5}$ で加速され、温度は $x^{-3/5}$ で減衰することが分る。

一方、Fujii [32] や Fujiiら [35] による解析は上述のものとはやや異なり、相似変数 $\eta_f(x,y)$, 流れ関数 $\Psi(x,y)$ と温度 $T(x,y)$ を次のようにとっている（無次元変数に添字 f を付けて区別する）。

$$\eta_f = \frac{y}{x} Gr_{x,f}^{1/5}, \tag{2.20}$$

$$\Psi = \nu Gr_{x,f}^{1/5} F_f(\eta_f), \tag{2.21}$$

$$T - T_\infty = Gr_{x,f}^{-1/5} \Theta \Phi_f(\eta_f). \tag{2.22}$$

ここで、局所 Grashof数 $Gr_{x,f}$ は

$$Gr_{x,f} \equiv \frac{g \beta^* \Theta x^3}{\nu^2} \tag{2.23}$$

で定義されており、Θは後に述べる規格化条件によって決まる温度の次元を持った量である。式 (2.20), (2.21), (2.22) を式 (2.2), (2.3) に代入すると

$$F_f''' + \frac{3}{5} F_f F_f'' - \frac{1}{5} F_f'^2 + \Phi_f = 0, \tag{2.24}$$

$$\Phi_f'' + \frac{3}{5} Pr (F_f \Phi_f)' = 0 \tag{2.25}$$

が得られる。ここで、′ は $d/d\eta_f$ を表す。

独立な境界条件は式 (2.4), (2.5) より

$$F_f(0) = F_f''(0) = \Phi_f'(0) = 0, \tag{2.26}$$

$$F_f'(\infty) \to 0 \tag{2.27}$$

であり、方程式 (2.24), (2.25) を解くには、さらにもう一つの条件が必要となる。

このために、Fujii [32] と Fujiiら [35] は次の規格化条件を採用した。

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_f' \Phi_f d\eta_f = 1. \qquad (2.28)$$

この式と、プルームに運ばれる一定の熱量が加熱量Qに等しくなければならないという前述の条件 (2.11) から

$$\Theta = \frac{Q}{\rho c_p \nu} \qquad (2.28)$$

のようにΘは決まる。

Gebhart ら [34] の方法では、式 (2.16) から明らかなように、$\eta = 0$ で４つの境界値が与えられており、$F'(0)$ だけを推定して数値積分を試行錯誤的に繰返すことができる。一方、 Fujii [32], Fujii ら [35] の方法では、$F_f'(0)$ と $\Phi_f(0)$ という、$\eta_f = 0$ での二つの境界値を推定しなければならないという不利な点はあるが、最も精度の良い数値計算の結果は Fujiiら [35] により得られている（ Pr =0.7 （空気）に対して、$F_f'(0) = 0.80872$, $\Phi_f(0) = 0.37328$ ）。両者の定式化における変数の間の関係は、例えば$\Phi_f(0)$ を使って、次のようにたやすく変換できる。

$$\left.\begin{aligned} &Gr_x = \Phi_f(0)\, Gr_{x,f}^{4/5}, \quad \eta = \{\Phi_f(0)/4\}^{1/4}\, \eta_f, \\ &F(\eta) = (1/4)\, \{4/\Phi_f(0)\}^{1/4}\, F_f(\eta_f), \\ &\Phi(\eta) = \Phi_f(\eta_f) / \Phi_f(0). \end{aligned}\right\} \qquad (2.29)$$

安定性の解析において、基礎流には Gebhartらによる定式化を用いるが、Gebhart らのデータは入手できなかったので、実際の数値計算に必要な$F'(\eta)$ 、$\Phi(\eta)$ 等の数値は Fujiiらのデータから上式により変換したものを用いる。

2．3　線型安定性の解析

2．3．1　基礎方程式と境界条件

流れの線型安定性の問題は、基礎流に重ね合わされた微小攪乱が時間とともに、もしくは下流に伝わるにつれて増大するか、減衰するかを調べることに帰着される。ここでは、通常、境界層型の基礎流に対して用いられている準平行流の仮定の下に、速度と温度の攪乱の相互作用のある場合の攪乱方程式を導くことにする。

基礎流として用いる層流平面プルームの定常速度成分U，Vは式 (2.18)，(2.19) で与えられるから、

$$V/U \sim O\{(Gr_x/4)^{-1/4}\}, \quad \frac{\partial U}{\partial x}/U \sim O(x^{-1})$$

であり、xが大きく、Gr_x が大きくなると準平行の仮定が成り立つ。したがって、攪乱方程式を導くにあたって、Uに比べてVとその微係数、および∂U／∂xを無視する。また、温度Tについても

$$\frac{\partial T}{\partial x}/(T-T_\infty) \sim O(x^{-1})$$

であるから、準平行流の近似と同じ程度で∂T／∂xを無視することができる。二次元平行流において、三次元攪乱は二次元攪乱よりも大きな臨界 Reynolds 数を与えるという Squire の定理[36)]が自然対流境界層においても成り立つことが Knowles と Gebhart[12)] によって示されているので、ここでは二次元攪乱のみを取り扱うことにする。したがって、基礎流の速度成分（U，V）、温度Tに対する攪乱をそれぞれ（u，v）とtとし、これら攪乱量の二次以上の高次の項を無視すると、Boussinesq 近似の下での連続の式、Navier-Stokes の方程式およびエネルギー方程式より

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad (2.30)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{\tau}} + U\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = g\beta^*\frac{\partial t}{\partial y} + \nu\triangle\omega, \qquad (2.31)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \bar{\tau}} + U\frac{\partial t}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \kappa\triangle t \qquad (2.32)$$

の攪乱についての線型化された方程式が得られる。ここで、$\bar{\tau}$は時間を表し、また、$\omega=\partial u/\partial y-\partial v/\partial x$，$\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$である。

任意波形の微小攪乱を考えるかわりに、攪乱の Fourier展開の一成分だけを取り扱うことにし、[37] $u\equiv\partial\phi/\partial y$，$v\equiv-(\partial\phi/\partial x)$で定義される攪乱流れ関数$\phi$および攪乱温度$t$を

$$\{\phi,\ t\}=\{\bar{\phi}(y),\bar{s}(y)\}\exp\left[\,i\,(\bar{\alpha}x-\bar{\beta}\bar{\tau})\,\right] \tag{2.33}$$

のように、平面波の形に仮定する。ここで、iは虚数単位（$=\sqrt{-1}$）を表す。攪乱はいわゆる、空間増幅型を考え、$\bar{\alpha}$を複素数（$\bar{\alpha}=\bar{\alpha}_r+i\,\bar{\alpha}_i$）、$\bar{\beta}$を実数とする。したがって、$\bar{\alpha}_i<0,\ =0,\ >0$はそれぞれ$x$とともに攪乱が増大、中立、安定であることを表す。攪乱の波長をλ，周波数をfとすると、$\bar{\alpha}_r$は波数$2\pi/\lambda$，$\bar{\beta}$は角周波数$2\pi f$である。

基礎流についての Gebhartら [34]の定式化に従い、代表長さ、速度、温度差をそれぞれ、

$$L_c=4x/G,\quad V_c=\nu G^2/(4x),\quad T_c=T_0-T_\infty \tag{2.34}$$

ととり、諸量を以下のように無次元化する、ただし　Gは

$$G\equiv 2\sqrt{2}\ Gr_x^{1/4} \tag{2.35}$$

で定義される変形 Grashof数である。

$$\left.\begin{aligned}&(\xi,\ \eta)=(x/L_c,\ y/L_c),\ \tau=\bar{\tau}V_c/L_c,\\&F'=U/V_c,\ \Phi=(T-T_\infty)/T_c,\ \phi=\bar{\phi}/(V_c L_c),\\&s=\bar{s}/T_c,\ \alpha=\bar{\alpha}L_c,\ \beta=\bar{\beta}L_c/V_c.\end{aligned}\right\} \tag{2.36}$$

式(2.33)，(2.36)を式(2.31)，(2.32)に代入すると、流れ場と温度場の相互作用のある次の攪乱方程式が得られる。

$$\phi^{iv}-2\alpha^2\phi''+\alpha^4\phi+s'$$
$$=i\alpha G\{(F'-\beta/\alpha)(\phi''-\alpha^2\phi)-F'''\phi\}, \quad (2.37)$$

$$s''-\alpha^2 s=i\alpha \Pr G\{(F'-\beta/\alpha)s-\Phi'\phi\}. \quad (2.38)$$

式 (2.37) は浮力項を持つ Orr-Sommerfeld 方程式、式 (2.38) は攪乱エネルギー方程式である。ただし、$' \equiv d/d\eta$である。方程式 (2.37) は浮力項を通して方程式(2.38)と連立し、結局、問題は以下に示す境界条件の下で６階の常微分方程式を解くことに帰着される。

攪乱は無限遠方で消滅しなければならないから、

$$\phi(\infty)\to 0,\ \phi'(\infty)\to 0,\ s(\infty)\to 0, \quad (2.39)$$

となる。$y=0$の鉛直面に関して対称な速度および温度分布を持つこの平面プルームでは、構造的に、その鉛直面に対称な攪乱と反対称な攪乱の二つのモードが考えられる。対称攪乱のモードはϕが奇関数、sが偶関数の場合、反対称攪乱のモードはϕが偶関数、sが奇関数の場合にそれぞれ対応する。したがって、攪乱モードに応じて次の境界条件が得られる。

$$\phi(0)=\phi''(0)=s'(0)=0 \quad (\text{対称攪乱}), \quad (2.40)$$

$$\phi'(0)=\phi'''(0)=s(0)=0 \quad (\text{反対称攪乱}). \quad (2.41)$$

Peraと Gebhart [15]によって得られた非粘性解（$G\to\infty$）は反対称攪乱の方が対称攪乱よりも、より不安定であることを示している。平面プルームにおいて現実に現れる不安定は反対称攪乱から起るようであり、粘性を考慮した場合（G：有限）の安定性の計算はこれまでこの反対称攪乱に限られてきたが、[15),38)] 本章では両攪乱モードについて安定特性を調べることにする。

2．3．2　解法

連立方程式（2.37），(2.38) の6組の基本解のうち、$\eta\rightarrow\infty$での境界条件（2.39）を満たす3組の基本解（ϕ_j，s_j）（ j=1, 2, 3 ）について、その線型結合からϕ，sを作り、境界条件（2.40）あるいは（2.41）を適用して、α，β，Gに関する固有値問題に持ち込むことになる。これら3組の基本解についての$\eta\rightarrow\infty$での漸近解は、鉛直加熱平板に沿う自然対流の場合について、 Hieber と Gebhart [14]によって求められており、平面プルームについては

$$\left.\begin{aligned}
&\phi_1 \sim \exp(-\alpha\eta),\quad s_1 \sim i\alpha \mathrm{Pr}G\Phi'\phi_1/[\zeta^2-(\alpha+2.4\,\mathrm{Pr}F_\infty)^2],\\
&\phi_2 \sim \exp(-\gamma\eta),\quad s_2 \sim i\alpha \mathrm{Pr}G\Phi'\phi_2/[\zeta^2-(\gamma+2.4\,\mathrm{Pr}F_\infty)^2],\\
&\phi_3 \sim \exp(-\zeta\eta),\quad s_3 \sim (\zeta^2-\alpha^2)(\zeta^2-\alpha^2)\,\phi_3/\zeta^2
\end{aligned}\right\}\quad(2.42)$$

となる。[39] ここで、$\gamma^2=\alpha^2-i\beta G$，$\zeta^2=\alpha^2-i\beta\mathrm{Pr}G$　である。ただし Re（γ），Re（ζ）＞0　とする。また、$\Phi'\sim C\exp(-2.4\,\mathrm{Pr}\,F_\infty\eta)$ である。ただし、C は定数であり、$F_\infty=\lim_{\eta\rightarrow\infty}F(\eta)$ である。

方程式（2.37），(2.38) の解　$\phi(\eta)$，$s(\eta)$ は境界条件（2.39）を満たす3組の基本解（ϕ_j，s_j）（ j=1, 2, 3 ）の線型結合として表せるが、この問題では$\eta=0$での境界条件（2.40）あるいは（2.41）に示すように、すべて0の値の境界値を課すのであるから、ϕ，sの絶対的な大きさは決まらず、3つの積分定数の比のみが決まるだけである。したがって、$\phi(\eta)$，$s(\eta)$ は

$$\phi(\eta)=\phi_1(\eta)+B_2\,\phi_2(\eta)+B_3\,\phi_3(\eta),\qquad(2.43)$$

$$s(\eta)=s_1(\eta)+B_2\,s_2(\eta)+B_3\,s_3(\eta)\qquad(2.44)$$

のように、ϕ_1, s_1 にかかる係数を1とする規格化条件を用いて表現できる。

まず、数値計算としては、固有値　$\alpha=\alpha_r+i\alpha_i$，$\beta$，Gを推定することから始め、無限遠の境界条件（2.39）の代りに、式（2.42）によって計算される漸近解を

初期値として、プルームの外縁$\eta=\eta_e$から中心面$\eta=0$まで、$\Delta\eta$のきざみ値で数値積分する。次に、例えば反対称攪乱に対しては、式(2.41)の３つの境界条件のうちの最初の２つ、$\phi'(0)=\phi'''(0)=0$　を満たすようにB_2，B_3の値を決定する。しかし、一般には、このようにして決定された$s(\eta)$は第３の境界条件$s(0)=0$を満たさない。これは固有値として決定されるべきα，β，Gを勝手に推定したからである。そこで、例えば、β，Gを固定し、αを$\alpha+\Delta\alpha$と変えて再びこれまでの計算を行い、$s(0)$の値が十分小さくなるまで繰返す。αの変え方は、複素方程式

$$s(0,\alpha)+\frac{\partial s(0,\alpha)}{\partial\alpha}\Delta\alpha=0, \tag{2.45}$$

を満たすように$\Delta\alpha$を選べばよい(Newton-Raphson 法）。ただし、$\partial s(0,\alpha)/\partial\alpha$は方程式(2.37)，(2.38)と境界条件（2.41）をαで微分した方程式系を作り、同じくαで微分した式（2.42）を初期値として、それらを攪乱方程式とともに$\eta=\eta_e$から$\eta=0$まで数値積分することによって得られる。

数値積分は４次の Runge-Kutta法を用いて行い、$|s(0)|<10^{-5}$（対称攪乱に対しては$|s'(0)|<10^{-5}$），$|\Delta\alpha/\alpha|<10^{-4}$を満たすまで繰返した。また、$\alpha=\alpha_r+i\alpha_i$を固定し、$\beta$，Gをさがすやり方も試みた。[38] この方法では、α_rの大きな値に対しては、迅速に固有値を求めることができ、一定の増幅率曲線（$\alpha_i=$const）を得るには有効であるが、小さな波数付近（$\alpha_r<0.5$）での収束は悪い。数値計算において、η_e，$\Delta\eta$の値は、それらによる固有値の変動が１％以内に収まるように選んだ。

2．4　安定性の計算結果と議論

2．4．1　反対称攪乱

Prandtl 数 Pr が 0.7（空気）の場合について、反対称攪乱に対して得られた数値計算の結果を図 2.2から 2.4 に示す。図 2.2は無次元波数α_rと変形 Grashof数Gの関係を、図 2.3は無次元振動数βと変形 Grashof数との関係をそれぞれ、空間増幅率α_i＝const の曲線として表したものである。$\alpha_i=0$の曲線は中立曲線であり、Peraと Gebhart [15]のものに一致する。この中立曲線によって安定特性を表す平面は$\alpha_i>0$の安定領域と$\alpha_i<0$の不安定領域とに分離される。α，β，Gの極端に小さな領域では、数値計算の収束は非常に悪くなり、臨界 Grashof数と中立曲線の下枝は得られなかった。一方、Haaland と Sparrow [19]は、基礎流の非平行性を調べるため、通常、準平行流近似において無視される基礎流のV，$\partial U/\partial x$，$\partial T/\partial x$等を残すことによって得られる修正 Orr-Sommerfeld 方程式と攪乱エネルギー方程式を数値的に解き、臨界 Grashof数$G_{crit}=12$と中立曲線の下枝を得た。また、Hieber と Nash [40] は第0近似に非粘性の Orr-Sommerfeld 方程式を用いた展開法によって基礎流の非平行性を調べ$G_{crit}=17.3$と中立曲線の下枝を得た。いずれの結果も、準平行流近似の場合に比べて不安定領域の減少に導いている。しかしながら、第4章において示すように、これらの結果は基礎流の非平行性による影響を正しく評価していない。

図 2.2，2.3 における$\alpha_i<0$の増大攪乱の曲線から、最大増幅率の点はかなり小さな Grashof数のところにあるようである。数値計算における困難さのために、その点は得られてはいないが、図から想像して$G\fallingdotseq10$，$\alpha_r\fallingdotseq0.25$，$\beta\fallingdotseq0.002$ の程度と考えられ、その増幅率（$-\alpha_i$）は 0.23 よりも大きいことは明らかである。このことは、攪乱が熱源にかなり近い高さで最も増幅され、その振動は非常にゆっくりしたものであることを意味する。攪乱の周波数をｆとすると、式 (2.34)，(2.36) から無次元振動数βは

$$\beta=32\pi f x^2/(\nu G^3) \tag{2.46}$$

で与えられる。この式から　$\beta\sim fG^{1/3}$ となるから、一定周波数の攪乱の経路は

$$\beta G^{-1/3} = \text{const} \tag{2.47}$$

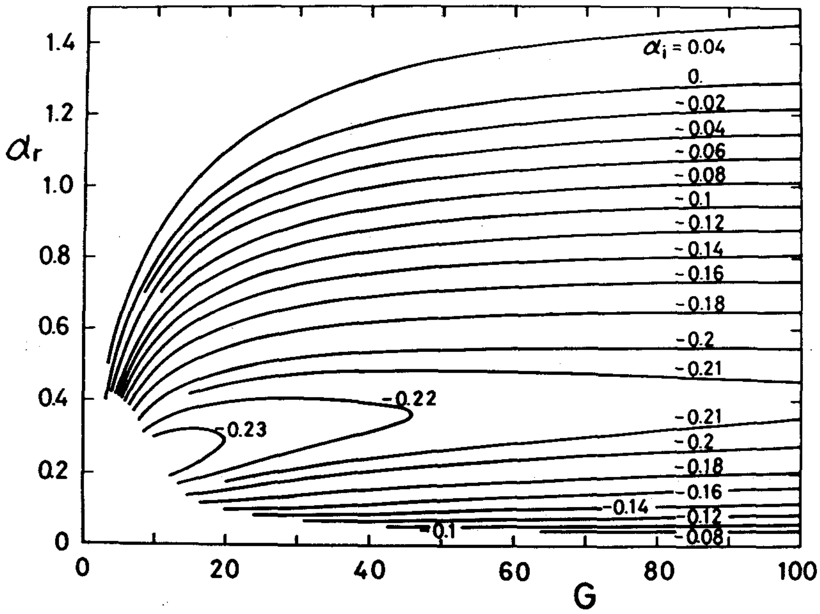


図 2.2 α_r-G面の一定増幅率曲線 (Pr=0.7)

となり、図 2.3において傾きが1/3 の直線を表す。したがって図 2.3から、上述のG≒10でのβ≒0.002 のような低周波の攪乱は、ずっと下流（G≒100 ）では、そこでの小さな増幅率のために、もはやそれほど増幅されずに、もっと大きなβ≒0.08程度の周波数に対応する攪乱が強く増幅されると考えられる。しかし、G≒10 のような小さ

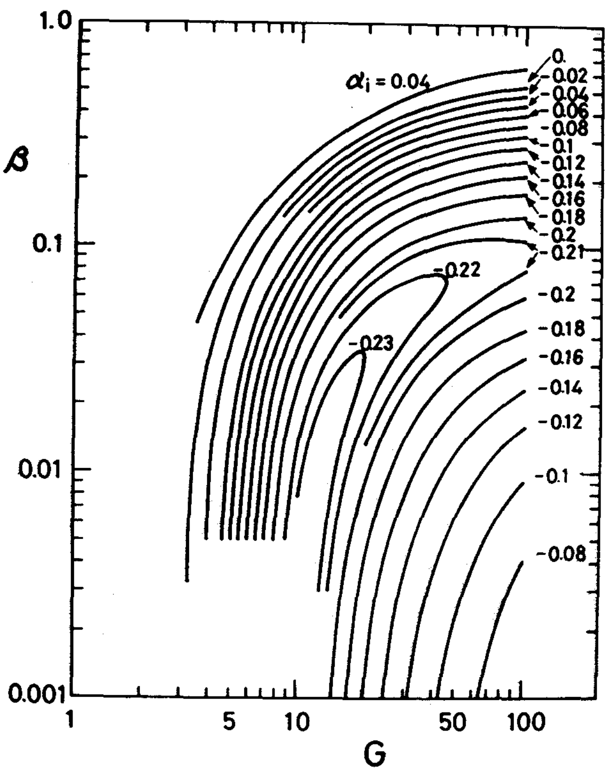


図 2.3 β－G面の一定増幅率曲線 (Pr=0.7)

な Grashof数での安定特性は、全面的に信頼のおけるものものとはいえない。なぜなら、そのような Grashof数（すなわち、Reynolds数）では、もはや基礎流に対して課された準平行流の近似だけではなく、境界層近似に基づく基礎流そのものが怪しくなるからである。しかしながら、高Reynolds数での安定特性が、基礎流の速度の2階微分 $\partial^2 U/\partial y^2$ の局所的な振舞いに強く依存するのとは違い、二次元ジェットにおいて Tatsumi と Kakutani [16] によって示されたように、低 Reynolds 数でのその安定特性は、基礎流の速度分布の積分にのみ依存するので、上に述べた安定特性は厳密なものとはそれほど大きくは異なっていないと考えられる。

一方、図 2.4は無次元増幅率（$-\alpha_i$）と振動数βの関係を Grashof 数Gをパラメータとして表したものである。また、図 2.5 は固有値$\alpha=1.2$（中立攪乱），$\beta=0.4613$, $G=46.27$

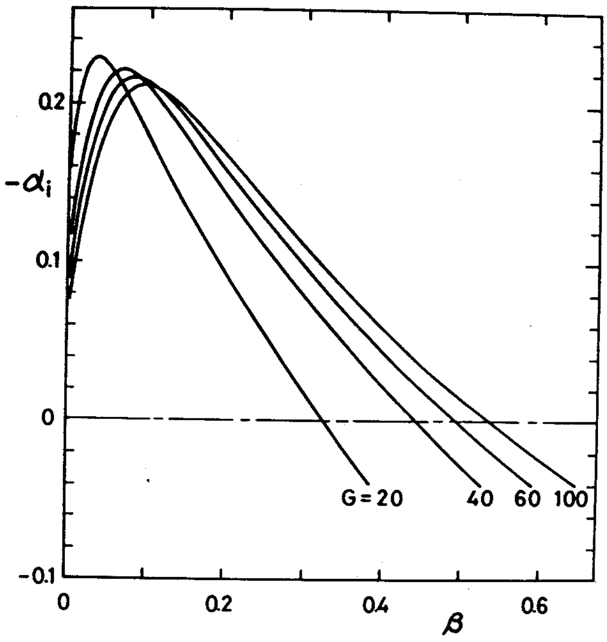


図 2.4　Gをパラメータとしたα_i-β図

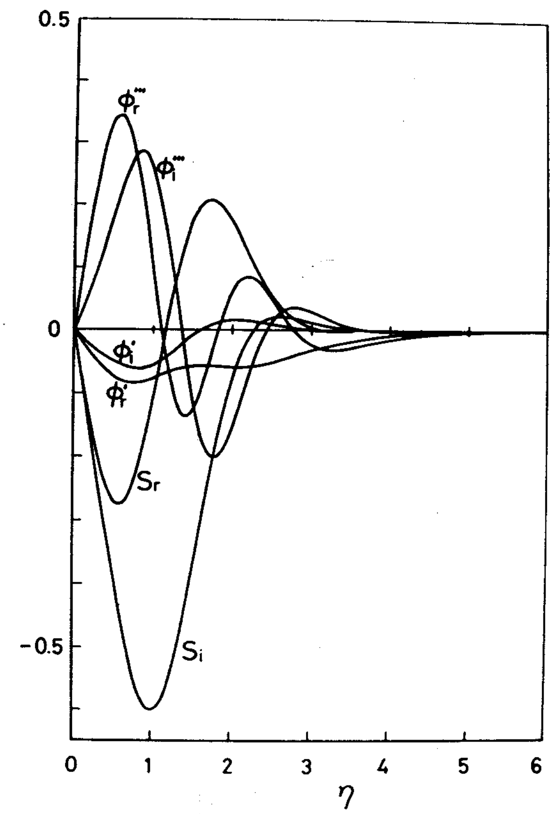


図 2.5　固有関数
（$\alpha=1.2$, $\beta=0.4613$, $G=46.27$）

の場合の固有関数ϕ', ϕ''', sの数値計算結果の一例で、これらの実数部と虚数部をそれぞれ添字 r, i を用いて描いたものである。

無次元攪乱速度のx成分と攪乱温度は固有関数から、

$$u/U_c = \mathrm{Re}\{\phi'(\eta)\exp[i(\alpha\xi-\beta\tau)]\}$$
$$= \exp(-\alpha_i\xi)\{(\phi'_r)^2+(\phi'_i)^2\}^{1/2}\cos(\alpha_r\xi-\beta\tau+\theta_u), \quad (2.48)$$

$$t/T_c = \mathrm{Re}\{s(\eta)\exp[i(\alpha\xi-\beta\tau)]\}$$
$$= \exp(-\alpha_i\xi)\{s_r^2+s_i^2\}^{1/2}\cos(\alpha_r\xi-\beta\tau+\theta_t) \quad (2.49)$$

で与えられる。ここで、θ_u, θ_t はそれぞれ攪乱u, tの相対位相角であり、次式によって定義される。

$$\theta_u = \tan^{-1}(\phi'_i/\phi'_r), \quad \theta_t = \tan^{-1}(s_i/s_r). \quad (2.50)$$

線型理論では、攪乱u, tの絶対的な値は前述のように決まらないから、それらの振幅分布は各最大振幅値で規格化して表すと、

$$\mathrm{Amp}(u)/\mathrm{Amp}(u)_{max} = [\{(\phi'_r)^2+(\phi'_i)^2\}/\{(\phi'_r)^2+(\phi'_i)^2\}_{max}]^{1/2}, \quad (2.51)$$

$$\mathrm{Amp}(t)/\mathrm{Amp}(t)_{max} = [\{s_r^2+s_i^2\}/\{s_r^2+s_i^2\}_{max}]^{1/2} \quad (2.52)$$

となる。ここで、Amp は振幅を表す。式 (2.50) ~ (2.52) によって求められる相対振幅と位相の分布を、図に示した固有値の組について図 2.6に示す。図 2.6(a) は攪乱速度uの振幅と$\eta\to\infty$での値を0とした位相の分布であり、図 2.6(b) は攪乱温度tの振幅と$\eta=0$での値を$\pi/2$とした位相の分布である。図から、最大振幅は攪乱速度、温度ともに基礎流の速度、温度分布の変曲点（図中において、$\partial^2U/\partial y^2=0$の位置を$F_{inf}$で、$\partial^2T/\partial y^2=0$の位置を$\Phi_{inf}$で示す）付近に位置しているこ

とが分る。また、攪乱速度の振幅分布には、攪乱温度の場合とは異なり、二つのピークが存在していることが分る。

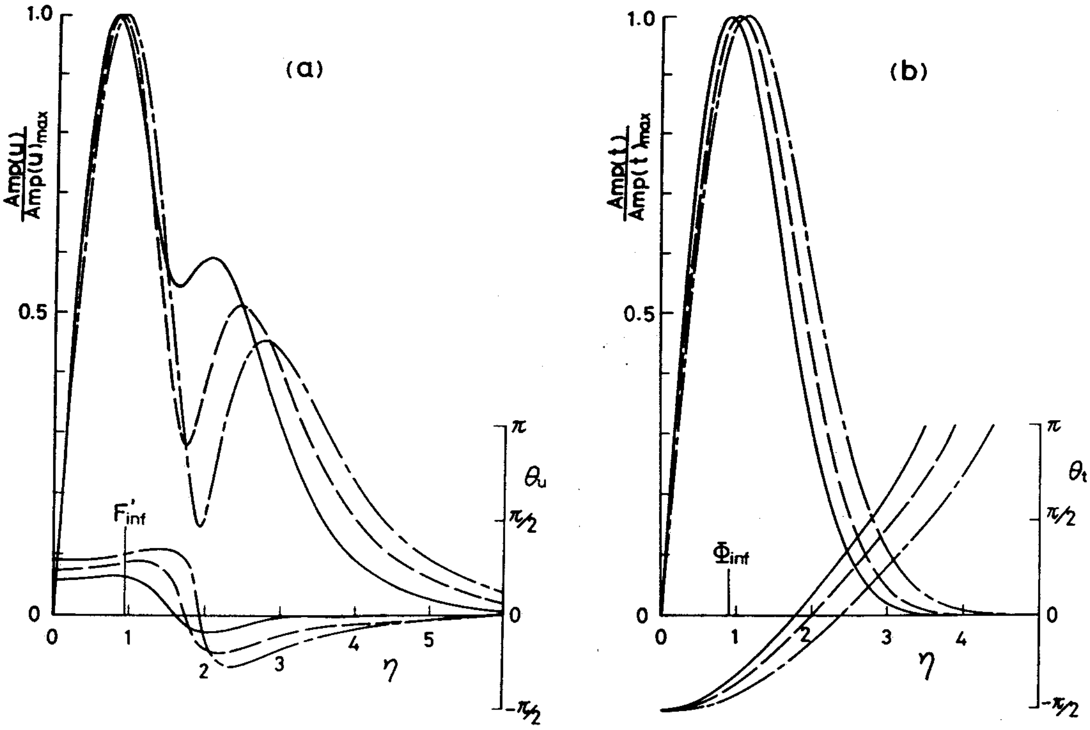


図 2.6　攪乱の振幅と位相の分布　（a）攪乱速度u，（b）攪乱温度t
————：$\alpha=1.2, \beta=0.4613$，G＝46.27
－－－－：$\alpha=0.975-0.08i, \beta=0.3256$，G＝57.12
—－－—：$\alpha=0.84-0.12i$，$\beta=0.2507$，G＝51.25

2．4．2　対称攪乱

非粘性の極限（G→∞）では、方程式（2.37），(2.38) から明らかなように、速度と温度の攪乱の相互作用はなくなる。この極限において、Pera と Gebhart[15] は反対称攪乱に対して、α_r ＝1.3847、対称攪乱に対してα_r ＝ 0.7088 の中立攪乱の解を求めている。非粘性の極限では、このように反対称攪乱の方が対称攪乱よりも不安定であるが、このことは粘性のある場合（G：有限）にそのままあてはまらない。したがって、有限のGに対しては、実際に対称攪乱についての安定計算を行って、その安定特性を調べなければならない。

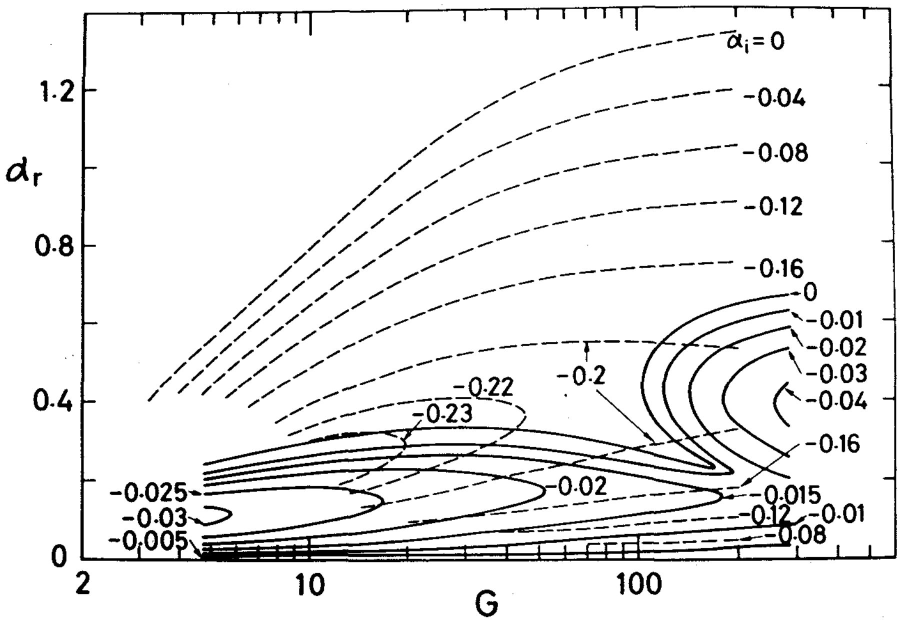


図 2.7　α_r-G面の一定増幅率曲線 (Pr=0.7)
——— ：対称攪乱；　－－－：反対称攪乱

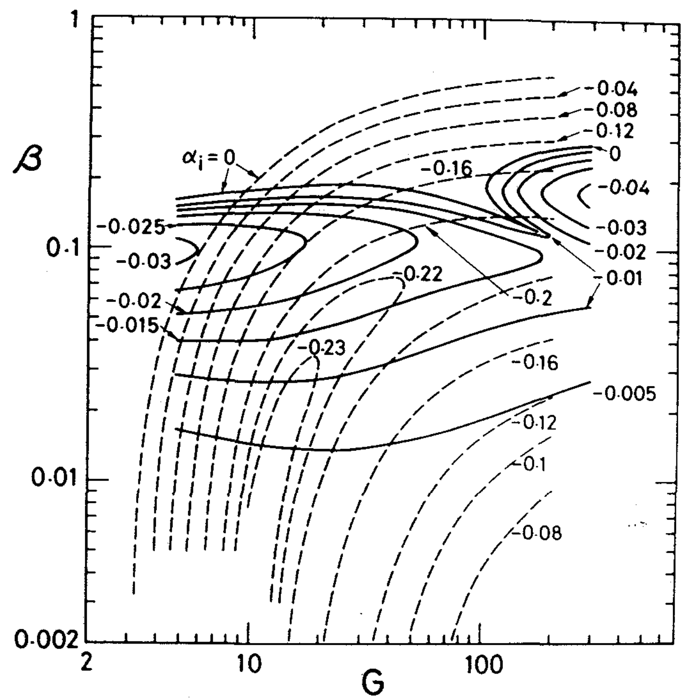


図 2.8　β－G面の一定増幅率曲線 (Pr=0.7)
——— ：対称攪乱；　－－－：反対称攪乱

$\eta=0$ での境界条件が式 (2.40) によって与えられる対称撹乱について、$Pr=0.7$ の場合の数値計算の結果を図 2.7, 2.8 に示す。図 2.7は α_r とGの関係を、図 2.8 は β とGの関係をそれぞれ、α_i =const の曲線として表したものである。ただし、図中の実線が対称撹乱についての結果であり、比較のために、反対称撹乱についての結果を破線で示してある。対称撹乱の場合にも、反対称撹乱の時と同じ理由で、臨界 Grashof 数と中立曲線の下枝は得られなかった。これらの図は、反対称撹乱と対称撹乱とではその安定特性にかなりの相違があることを示している。特に、対称撹乱に対する中立曲線および増幅率曲線には、$G=100\sim200$ にいわゆる 'nose' 部分が存在している。これは、鉛直加熱平板に沿う自然対流境界層や壁面プルームの安定特性においても見出されているもので、mechanically-driven instability および buoyancy-driven instability と呼ばれている二種類の不安定モードが存在しており、それらのモードの合体の結果として現れているものであり、自然対流境界層の安定問題においては、しばしば起っていることである。[11,14,18,41)]

図 2.7から、対称撹乱の場合、小さな波数 α_r の領域に不安定領域が集中していることが分る。すなわち、対称な不安定撹乱の波長はかなり長いものとなる。しかしながら、図 2.8から分るように、$G\fallingdotseq100$ 付近での最大の増幅率を与える振動数 β の値は、対称、反対称撹乱ともに 0.1 程度である。また、Gの小さなところでは、反対称撹乱に関して安定な領域において、不安定な対称撹乱が存在していることが分る。しかしながら、増幅率 $(-\alpha_i)$ は反対称撹乱の場合と比べて、一桁小さな値であり、現実に現れる不安定が対称撹乱から起る可能性は少ないと考えられる。

2．5　まとめ

準平行流近似に基づく、空間増幅型の線型安定理論を、Prandtl 数が 0.7（空気）の場合の平面プルームに適用して得られた結果を以下に示す。

（1）反対称攪乱と対称攪乱に対して、無次元波数とGrashof 数間（α_r －G）、および無次元振動数とGrashof 数間（β －G）の安定特性を表す一定増幅率（α_i ＝const ）の曲線を数値計算により求めた。臨界 Grashof数と中立曲線の下枝は得られなかった。反対称攪乱についての中立曲線は Pera と Gebhart [15]によって得られたものと一致する。

（2）反対称攪乱について、最大の増幅率（－α_i ）を与える点はβ，Gがともに小さな所にあり、攪乱は熱源にかなり近い高さで最も増幅され、その振動は非常にゆっくりしたものである。

（3）反対称な攪乱温度の振幅分布には一つのピークしか現れないが、攪乱速度の振幅分布には二つのピークが現れる。最大振幅はともに基礎流としての定常層流の速度分布と温度分布の変曲点の近傍に現れる。

（4）対称攪乱に対する不安定領域は、反対称攪乱に比べて、より小さな波数領域に限られ、中立曲線を含む一定増幅率曲線に′nose′部分が存在する。これは、対称攪乱が二種類の不安定モードを持つことを示している。

（5）Grashof 数の小さな、反対称攪乱が安定となる領域においても、不安定な対称攪乱が存在するが、全般的に、対称攪乱の増幅率（－α_i ）は反対称攪乱に比べて、一桁小さな値をとる。

記　号

B_2, B_3 ：複素係数，式 (2.43),(2.44)

c_p ：定圧比熱

F ：無次元流れ関数（基礎流），式 (2.7)

F_f ：無次元流れ関数（基礎流），式 (2.21)

f ：攪乱周波数

G ：変形 Grashof数， $2\sqrt{2}\,Gr_x^{1/4}$

Gr_x ：局所 Grashof数，式 (2.8)

$Gr_{x,f}$ ：局所 Grashof数，式 (2.23)

g ：重力加速度

i ：虚数単位，$\sqrt{-1}$

k ：熱伝導率

L_c ：代表長さ， $4x/G$

Pr ：Prandtl 数， ν/κ

Q ：加熱量（線熱源の単位長さ、単位時間あたりの発生熱量）

s ：攪乱温度の無次元振幅関数，式 (2.36)

$\bar{s}$ ：攪乱温度の振幅関数，式 (2.33)

T ：流体温度（基礎流）

T_0 ：$y=0$ の鉛直面での流体温度（基礎流）

T_∞ ：流体の周囲温度

T_c ：代表温度差，T_0-T_∞

t ：攪乱温度

U ：速度の x 成分（基礎流）

u ：攪乱速度の x 成分

V ：速度の y 成分（基礎流）

V_c ：代表速度，$\nu G^2/(4x)$

v ：攪乱速度の y 成分

x ：線熱源を原点とする鉛直方向の座標

y ：　　〃　　水平方向の座標

Θ ：$Q/(\rho c_p \nu)$

Φ ：無次元温度（基礎流），式（2.10）

Φ_f ：無次元温度（基礎流），式（2.22）

Ψ ：流れ関数（基礎流）

α_r ：無次元波数，（$\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$）

α_i ：無次元増幅率

$\overline{\alpha}_r$ ：波数，$2\pi/\lambda$，（$\overline{\alpha} = \overline{\alpha}_r + i\overline{\alpha}_i$）

$\overline{\alpha}_i$ ：増幅率

β ：無次元振動数

$\overline{\beta}$ ：角周波数，$2\pi f$

β^* ：体膨脹係数

η ：相似変数，式（2.6），（2.36）

η_f ：相似変数，式（2.20）

κ ：温度伝導率，$k/(\rho c_p)$

λ ：攪乱の波長

ν ：動粘性係数

ξ ：無次元高さ，x/L_c

ρ ：密度

τ ：無次元時間，$\bar{\tau} V_c / L_c$

$\bar{\tau}$ ：時間

ϕ ：攪乱流れ関数の無次元振幅関数

$\overline{\phi}$ ：攪乱流れ関数の振幅関数

ψ ：攪乱流れ関数

$'$ ：$d/d\eta$（ただし，式（2.24），（2.25）においてのみ $d/d\eta_f$）

参 考 文 献

1) Reynolds, O. : Phil. Trans. 174 (1883) 935.

2) 巽友正, 後藤金英 : " 流れの安定性理論 " 産業図書 (1976).

3) Taylor, G. I. : Phil. Trans. Roy. Soc. London A 223 (1923) 289.

4) Bénard, H. : Ann. Chim. Phys. 23 (1901) 62.

5) Lin, C. C. : " The Theory of Hydrodynamic Stability " Cambridge Univ. Press (1955).

6) 巽友正 : " 乱流 " 槇書店 (1962).

7) Chandrasekhar, S. : " Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability " The Clarendon Press, Oxford. (1961).

8) Drazin, P. and Reid, W. : " Hydrodynamic Stability " Cambridge Univ. Press (1981).

9) Plapp, J. E. : J. Aero. Sci. 24 (1957) 318.

10) Szewczyk, A. A. : Int. J. Heat Mass Transfer 5 (1962) 903.

11) Nachtsheim, P. R. : NASA Tech. Note, No. D-2089 (1963).

12) Knowles, C. P. and Gebhart, B. : J. Fluid Mech. 34 (1968) 657.

13) Dring, R. P. and Gebhart, B. : J. Fluid Mech. 34 (1968) 551.

14) Hieber, C. A. and Gebhart, B. : J. Fluid Mech. 48 (1971) 625.

15) Pera, L. and Gebhart, B. : Int. J. Heat Mass Transfer 14 (1971) 975.

16) Tatsumi, T. and Kakutani, T. : J. Fluid Mech. 4 (1958) 261.

17) Wakitani, S. : J. Phys. Soc. Jpn. 49 (1980) 2392.

18) Wakitani, S. : J. Phys. Soc. Jpn. 53 (1984) 148.

19) Haaland, S. E. and Sparrow, E. M. : ASME J. Heat Transfer 95 (1973) 295.

20) Ling, C. H. and Reynolds, W. C. : J. Fluid Mech. 59 (1973) 571.

21) Gebhart, B. : Ann. Rev. Fluid Mech. 5 (1973) 213.

22) Gebhart, B. : Adv. Heat Transfer 9 (1973) 273.

23) Gebhart, B. : ASME J. Fluids Eng. 101 (1975) 5.

24) Gebhart, B. and Mahajan, R. L. : Adv. Appl. Mech. 22 (1982) 231.

25) Zeldovich, Y. B. : Zh. Eksp. Teor. Fiz. 7 (1937) 1463.

26) Schuh, H. : “Boundary layers of temperature” Sec.B.6 of W. Tollmien's Boundary Layers, British Ministry of Supply, German Document Centre, Reference 3220T (1948).

27) Yih, C. S. : Proc. 1st U.S. Natn. Congr. Appl. Mech. (1951) 941.

28) Yih, C. S. : Trans. Am. Geophys. Un. 33 (1962) 669.

29) Servruk, I. G. : J. Appl. Math. Mech. 22 (1958) 807.

30) Crane, L. J. : Z. Angew. Math. Phys. 10 (1959) 453.

31) Spalding, D. B. and Cruddace, R. G. : Int. J. Heat Mass Transfer 3 (1961) 55.

32) Fujii, T. : Int. J. Heat Mass Transfer 6 (1963) 597.

33) Brand, R. S. and Lahey, F. J. : J. Fluid Mech. 29 (1967) 305.

34) Gebhart, B., Pera, L. and Schorr, A. W. : Int. J. Heat Mass Transfer 13 (1970) 161.

35) Fujii, T., Morioka, I. and Uehara, H. : Int. J. Heat Mass Transfer 16 (1973) 755.

36) Squire, H. B. : Proc. Roy. Soc. A 142 (1933) 621.

37) 後藤金英：“流れの空間不安定性理論” 京都大学数理解析研究所講究録 569 (1985) 1.

38) Wakitani, S. and Yosinobu, H. : J. Phys. Soc. Jpn. 53 (1984) 1291.

39) 吉信宏夫：“流体力学の展望 2：熱対流” 流体力学懇談会 (1978) 29.

40) Hieber, C. A. and Nash, E. J. : Int. J. Heat Mass Transfer 18 (1975) 1473.

41) Gill, A. E. and Davey, A. : J. Fluid Mech. 35 (1969) 775.

第３章　平面プルームの安定性の実験

３．１　序論

外力型不安定性の一例としての回転同軸円筒流の安定性は、1923年、Taylor [1] によってはじめて理論的に調べられ、その結果は彼自身の実験によって確証されていた。しかしながら、内在的不安定性については、その線型安定理論の発展にもかかわらず、実験的な裏付けが得られなかったために、理論結果はむしろ疑問視されてきた。1940年に Schubauerと Skramstad は減衰スクリーンを用いて乱れを小さくした風洞気流中の平板に沿う境界層（Blasius 流）において、下流方向に進む正弦波を発見した。その後、Schubauer と Skramstad [2] は平板の前縁付近にリボンを張り、それを振動させることにより境界層の中に微小攪乱を導入し、それが下流に進むにつれて増大するか減衰するかを調べた。彼らは、測定結果が Tollmien [3]や Schlichting [4] によって理論的に得られた安定特性と一致することを見出し、その正弦波が理論的に予測されていた Tollmien-Schlichting 波に他ならないことを証明した。この内在的不安定性についての実験的確証の後、種々の流れに線型安定理論が適用されるようになり、多くの成功を収め、実験的にも数多くの研究がなされるようになった。

鉛直加熱平板に沿う自然対流境界層における攪乱の測定は、Colak-Antic [5]によって熱線流速計を用いて行われた。攪乱は境界層内に設けた線線ヒータを振動的に加熱する方法で導入されたが、攪乱速度と攪乱温度の分離が困難であったために、この研究では定性的な結果しか得られなかった。Polymeropoulosと Gebhart [6] は、圧縮窒素（Pr=0.72)中における一様熱流束条件下の鉛直加熱平板に沿う自然対流境界層の安定性についての実験を、Schubauer と Skramstad [2] と同様に、振動リボンを用いて攪乱を導入する方法により行った。彼らは Mach-Zehnder 干渉計による攪乱温度の測定から得られた安定特性が Nachtsheim [7]の理論結果とよく一致することを示した。その後、Knowles と Gebhart [8] , Dring と Gebhart [9] はシリコン油（それぞれ、Pr=7.7と 6.7)中での Mach-Zehnder 干渉計と熱線流速計を用いたさらに精しい実験を行い、鉛直加熱平板に沿う自然対流境界層に対する線型安定理論の妥当性を確証した。

線熱源上の平面プルームの安定性についての実験は、Peraと Gebhart [10]により、彼ら自身の線型安定理論の結果を確証するために行われたが、Mach-Zehnder干渉計と熱線流速計を用いた定性的な観察のみに終っており、精しい安定特性は調べられなかった。これは、平面プルームが元来極めて不安定で、外乱によってすぐにくずれてしまうために、彼らの実験装置では安定な定常層流そのものを作ることが困難であったためと考えられる。

平面プルームの定常場について、これまで行われた実験としては、空気の上昇気流の温度場と速度場をそれぞれ Mach-Zehnder 干渉計と粉末飛跡法を用いて測定した Brodowicz と Kiercus [11]、同じく空気の上昇気流の温度場を熱電対を用いて精しく測定した Forstrom と Sparrow [12]、シリコン油 (Pr=6.7) 中の上昇流の温度場を Mach-Zehnder干渉計を用いて測定した Schorr と Gebhart [13]や水中の上昇流の速度場をレーザ・ドップラ流速計を用いて測定した Nawojと Hickman [14]によるものなど数多くの研究がある。[15,16]

本章ではまず、平面プルームの安定性の実験を行う前に、その基礎流としての空気の上昇気流の定常場における速度と温度分布の測定を、それぞれレーザ・ドップラ流速計と熱電対を用いて行い、理論定常解と比較検討する。次に、この上昇気流に人工的に微小攪乱を導入し、その攪乱温度を熱電対を用いて測定することにより、本論文の第2章の線型安定理論の結果を確証する。また、自然に発生する攪乱の測定を行い、その振舞いについて線型安定理論の予測する安定特性から検討する。

3．2　実験装置と方法

外乱の影響を防ぐために、実験室内に床から天井まで厚さ 15 mm のベニヤ板で囲った小室（約 3.6×2.3 ×高さ3.2 m)を作り、実験中はこの小室を密閉し、計器の操作はすべてこの小室外から行った。小室内に図 3.1に示す網箱を置き、この中で作られる上昇気流の速度と温度を測定した。実験に使用した網箱は二種類あり、以下、網箱Ⅰ、網箱Ⅱとする。網箱Ⅰの内側寸法は線熱源の長さ方向が 50 cm 、それと直角な水平方向が 30 cm、高さが 100 cm であり、網箱Ⅱはそれよりやや大きく、それぞれ 51 cm ，47 cm，151 cm である。網箱Ⅰ，Ⅱともに、線熱源に平行な前後の面には，それぞれ４枚のナイロン・スクリーン（13メッシュ／cm）を 5 mm 間隔に張ってあり，他の側面はアクリル透明板で，下底はベニヤ板でできている。また、上底には５枚のナイロン・スクリーン（6 メッシュ／cm）を１cm 間隔に張っている。網箱内の空気は上昇気流に乗って上昇する間に乱流に遷移してこの網箱から出るところで上底のスクリーンによって細かい渦に分割され、小室内での対流運動の間に減衰し、再び前後のスクリーンを通して上昇気流を乱すことなく網箱内に吸い込まれる。したがって、この上底のスクリーンは定常なプルームを得るためには重要なものである。[12)] 事実、このスクリーンなしで行った温度測定の予備実験では、明らかに層流領域と考えられる低い高さでの測定においてでも、線熱源を加熱後、しばらくの間はほぼ一定の温度波形を示すが、その後、ガタガタの波形になってしまう。これは明らかに、乱流に遷移したままの大きな渦が網箱を出ていき、小室内を対流した後、前後のスクリーンを通過しても十分減衰せず、再び網箱内に吸い込まれ上昇気流を乱してしまっているからと考えられる。

線熱源は、直径 0.2 mm のニクロム線で、長さが網箱Ⅰでは 15.6 cm、網箱Ⅱでは 19.8 cm のものを用いた。どちらの場合も、その両端は直径 0.4 mm の銅の導線に接続され、下底から 35 cmの高さに水平に張られている。ニクロム線を加熱するための装置としては、網箱Ⅰでは摺動抵抗を介して並列に連結された２個の６Ｖのバッテリーが、網箱Ⅱでは直流安定化電源が用いられた。加熱量Q（W／m）はニクロム線両端の電圧と電流を測定して求めた。なお、線熱源の中点を $z=0$ として、図 3.1に示すように線熱源方向に z 座標を、それに直角な水平方向に y 座標を、鉛直方向に x 座

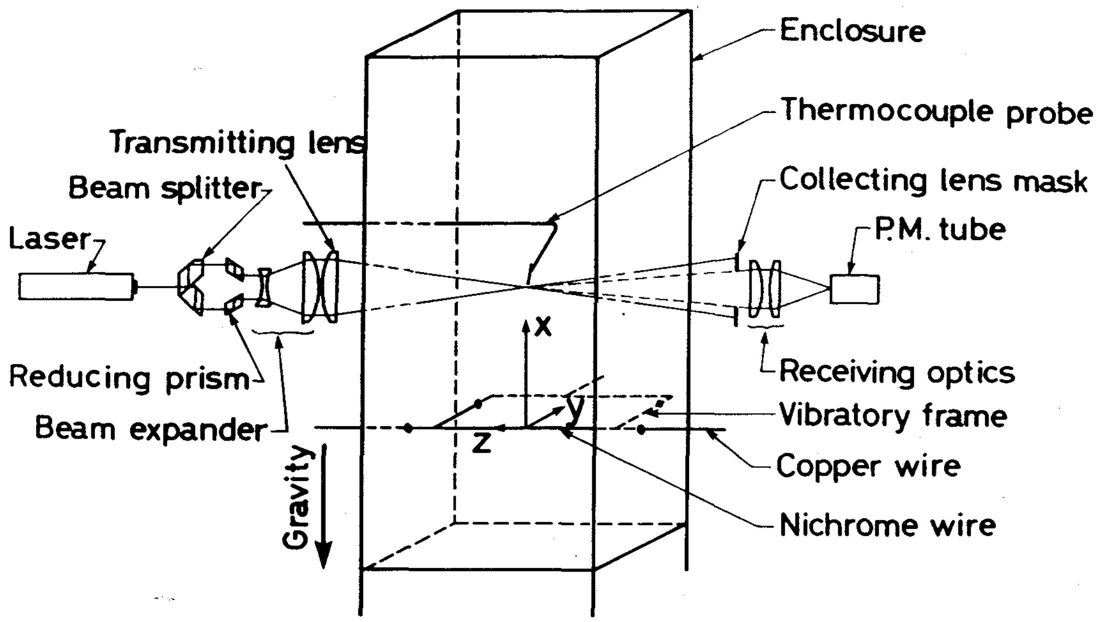


図 3.1　実験装置の概略図

標をとる。理論で考えている無限小の直径の線熱源とは異なり、実験では 0.2 mm の有限な直径のニクロム線を用いているため、実際にこの熱源からの高さが必ずしも理論での高さ x に一致するとは限らない。したがって、実験において測定される熱源からの高さを便宜上、x ′ としておく。

プルーム中心面（y ＝ 0）に関して反対称な、無限小正弦波攪乱を定常流に導入するための装置は、図 3.1に示すようなU字型のフレームを熱源両端の導線に、他の一端を低周波スピーカ（5ワット）のボイスコイルに取付けたものである。このスピーカに低周波発振器からの正弦波電流を入力してボイスコイルを振動させ、上述のフレームを通して線熱源を水平面内 y 方向に微小振動させることにより、定常流に反対称攪乱を導入した。このときの線熱源の振幅は 0.1～ 0.25 mm　の程度で、測定点の高さでの上昇気流の厚さに比べて十分小さいことが予備実験より確かめられた。一方、対称攪乱を導入する方法としては、低周波発振器と直流安定化電源を用いて脈動電流

を作り、それによりニクロム線を振動的に加熱する方法をとった。

本章では上昇気流の速度としては定常場の速度のx成分Uのみの測定だけを行い、攪乱場においては攪乱温度のみの測定を行った。

速度の測定は1チャンネル差動型の前方散乱方式レーザ・ドップラ流速計（以後、LDV と呼ぶ、KANOMAX 1900 ）を用いて行った。この流速計は 15 mW He-Neレーザ、光学系（収束レンズ焦点距離 433.6 mm ）およびフォトマルからなり、ドップラ信号はバンドパスフィルタを通した後、周波数トラッカ（KANOMAX 1095）で処理される。レーザ・ビーム交差点の測定体積の微小化とS/N 比向上のために、拡大率 3.57 のビーム・エキスパンダを用いている。このとき、光の強度分布の e^{-2}点（光の相対強度が e^{-2} 以上である寸法）で定義される測定体積は短径約 0.09 mm、長径約 0.69 mmの回転楕円体となっている。散乱粒子としては線香の煙を用い、測定前に小室内に充満させた。一度、煙を充満させると、約6時間、煙を補給することなしに実験を続けることができた。

上昇気流温度の測定には素線径 0.1 mm の銅－コンスタンタン熱電対および素線径 0.05 mm と 0.025 mm のクロメル－アルメル熱電対を用い、網箱外の周囲温度の測定には素線径 0.32 mm の銅－コンスタンタン熱電対およびクロメル－アルメル熱電対を用いた。上昇気流温度測定用の熱電対は約0.8 mmのガラス管あるいはセラミック管に通して線熱源上に支持した。測温接点が鉛直方向に 1.01 cm だけ離れた、素線径 0.05 mm の二つのクロメル－アルメル熱電対からなるプローブを用いて攪乱温度の位相速度を測定した。予備実験から、この熱電対プローブは 5.5 Hz 程度の周波数の温度変動には十分正確に追随できることが確かめられている。定常場の速度と温度の同時測定を行うときには、素線径 0.025 mm の熱電対を用い、温度の測定点つまり熱電対の測温接点はレーザ・ビーム交差点上、2～3 mm の位置に設定した。上昇気流温度測定用の熱電対の冷接点は網箱外の周囲流体中に設け、直接、周囲温度との差が測定できるようになっている。周囲温度は冷接点を0℃に保った、上述の周囲温度測定用の熱電対を用いて測定した。

網箱Ｉを使った実験では、温度のみの測定を行い、速度の測定は行っていない。したがって、上昇気流温度測定用の熱電対プローブのみの三次元方向のトラバースが微

動トラバース装置を用いて手動で行われた。ただし、水平面内のy方向のトラバースは小室外から操作できる。上昇気流の温度に対応する熱電対の起電力は、すべて直流増幅器によって増幅され、ローパスフィルタ（遮断周波数 20 Hz）を通した後、電磁オシログラフ（フォトコーダ）に記録された。

一方、網箱Ⅱを使った実験では、LDV および熱電対プローブの三次元方向のトラバースが、パルス・モータ駆動により、0.0125 mm の分解能で小室外からマイクロ・コンピュータ（8ビット）を用いて遠隔操作できるようになっている。また、速度に対応する周波数トラッカと温度に対応する熱電対の出力はすべて直流増幅器、ローパスフィルタ（遮断周波数 20 Hz）を通して、12ビットA/D 変換器によりサンプリングされる。A/D 変換の後、ディジタル化されたデータはマイクロ・コンピュータに転送され、フロッピーディスクに記録される。なお、サンプリング周波数は 10 Hzと 50 Hzを用いた。

なお、すべての実験データの整理には周囲温度での物性値を用いた。

3．3　実験結果と議論

3．3．1　定常流

安定性の実験を行う前に、理論において基礎流として用いられた、層流境界層近似に基づくプルームの速度および温度分布の定常解が実験室内でどの程度実現されているかを調べることが必要である。また、大きな Grashof数での安定特性が基礎流の速度と温度分布に強く依存するために、できるだけ理論解に近い定常なプルームを実現することが必要である。

まず、理論で仮定された無限長の熱源に対して、実験では有限長の熱源を用いているので、速度と温度場の二次元性が実現されているかどうかが問題である。このために、網箱Ｉを使って種々の加熱量Ｑに対して、熱源からの高さｘ′が 4 cm から 15 cmの間で、熱源の真上（ｙ＝０）で熱電対を熱源の長さ方向（ｚ方向）にトラバースさせて中心温度を測定した。その結果、線熱源の両端から 3 cm を除く内側では中心温度は完全に一定となっており、中心部分では十分二次元性が成り立っていることが確かめられた。とくに断らない限り、これ以降の本章での測定は線熱源の中点を通る鉛直面内（ｚ＝０）のみで行ったものである。

Fujii [17]、Fujii ら [15] の解析によれば、平面プルームの速度のｘ成分Ｕと温度Ｔは

$$U = (\nu / x)\, Gr_{x,f}^{2/5}\, F_f'(\eta_f), \tag{3.1}$$

$$T - T_\infty = Gr_{x,f}^{-1/5}\, \Theta \Phi_f(\eta_f), \tag{3.2}$$

$$\eta_f = Gr_{x,f}^{1/5}\, y / x, \tag{3.3}$$

$$Gr_{x,f} = g \beta^* x^3 \Theta / \nu^2, \quad \Theta = Q/(\rho c_p \nu) \tag{3.4}$$

のように相似解で表される。ここで、T_∞ は周囲温度、$Gr_{x,f}$ は局所 Grashof数、F_f と Φ_f はそれぞれ、無次元流れ関数と温度、η_f は相似変数、g は重力加速度、β^* は体膨張係数、ν は動粘性係数、ρ は密度、c_p は定圧比熱であり、′ は $d/d\eta_f$

を表す。したがって、$y=0$の中心速度U_0と中心温度T_0は

$$U_0 = (\nu / x)\, Gr_{x,f}^{2/5}\, F_f'(0)\,, \qquad (3.5)$$

$$T_0 - T_\infty = Gr_{x,f}^{-1/5}\, \Theta \Phi_f(0) \qquad (3.6)$$

で与えられる。上式より、

$$C_1 Q^{-2} U_0^5 = [F_f'(0)]^5 x, \qquad (3.7)$$

$$C_2 Q^{4/3} (T_0 - T_\infty)^{-5/3} = [\Phi_f(0)]^{-5/3}\, x \qquad (3.8)$$

が得られる。ここで、C_1, C_2 は物性値のグループであり、

$$C_1 = \nu\, (\rho c_p)^2 / (g \beta^*),\ \ C_2 = [g \beta^* (\rho c_p)^4\, \nu^2]^{-1/3} \qquad (3.9)$$

である。加熱量Qが 10.2 W/m から 30.2 W/m の間で、熱源からの高さx'が 5 mm から 102 mm の間で中心速度U_0と中心温度T_0を、網箱Ⅱを使って測定し、結果を$C_1 Q^{-2} U_0^5$ 対x'のグラフと$C_2 Q^{4/3}(T_0 - T_\infty)^{-5/3}$ 対x'のグラフに整理したものをそれぞれ、図 3.2, 3.3 に示す。図中の破線は最小二乗法から得られた直線である。測定データはこれらの直線にほぼのっていることが分る、すなわちU_0が高さの 1/5乗で加速され、T_0が高さの−3/5 乗で減衰することが確かめられた。しかしながら、これらの直線はいずれも原点を通らず、図 3.2では$x'=1.3$ mmのところで、図 3.3では$x'=-0.8$ mmのところでx'軸を切っている。これは、理論では直径が無限小の線熱源を考えているのに対し、実際の熱源は有限の直径を持っているためと、熱源近傍の、Grashof 数の小さな領域では境界層近似が成り立たないためのくい違いと考えられる。Forstromと Sparrow [12]は直径 1.0 mm の熱源を用いた定常温度場の測定から、$x'=-2.1$ mmを得、実際の熱源よりも 2.1 mm だけ下方に“み

かけの熱源"があるとした。また、網箱Iを使った定常温度場の測定からは、このみかけの熱源の位置は実際の熱源の下方 3.0 mm との結果を得ている。[18] このように、みかけの熱源の位置は熱源の直径や加熱量などの実験条件に依存するため、この概念に対して、Schorrと Gebhart [13] や Fujiiら [15]の議論があるが、定常理論解を基礎流として計算した前章の安定特性と実験によって得られたものとを比較するために

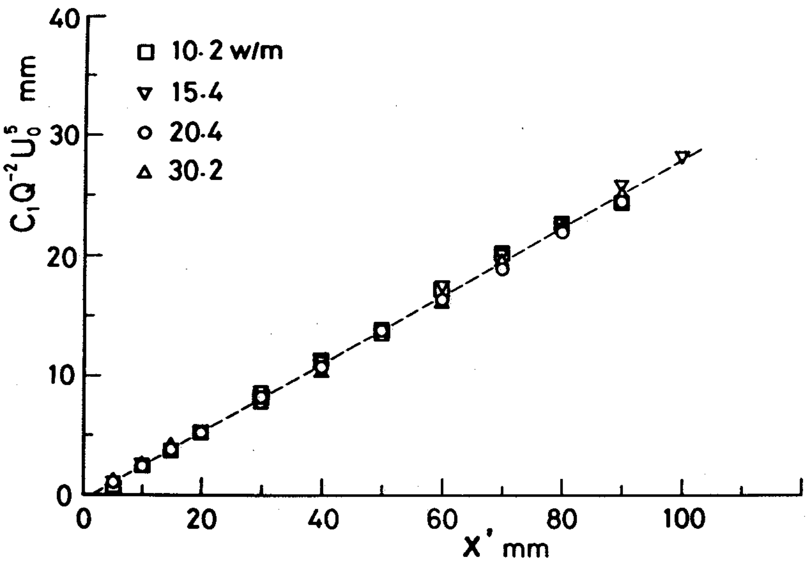


図 3.2 熱源からの高さによる中心速度の変化

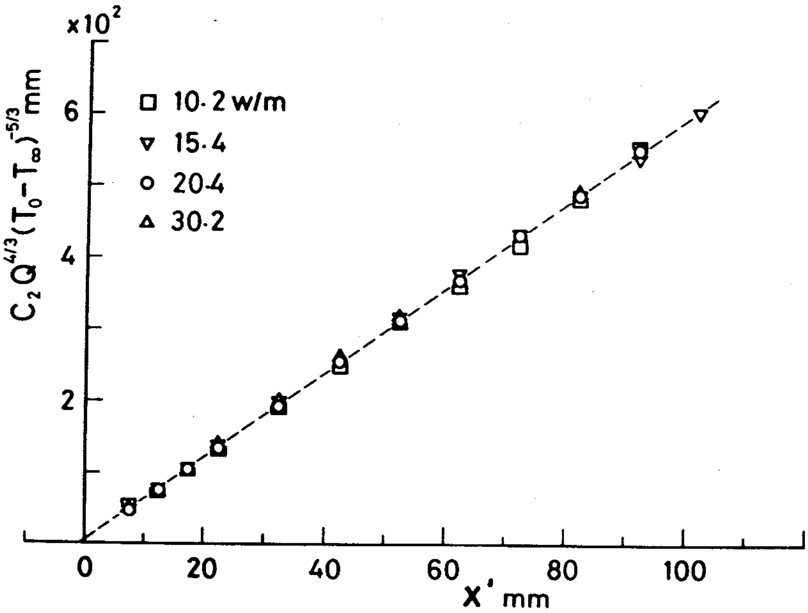


図 3.3 熱源からの高さによる中心温度の変化

は、このような補正によって実験的に実現されている場を理論の枠組みの中に組込んでおく必要がある。

一方、式 (3.7), (3.8) から分るように、図 3.2, 3.3 の直線の勾配からそれぞれ無次元の中心速度 $F_f'(0)$ と中心温度 $\Phi_f(0)$ の値を求めることができる。結果は、Prandtl 数 $Pr = 0.7$ （空気）の場合についての Fujiiら [15] の理論値（ $F_f'(0) = 0.80872$, $\Phi_f(0) = 0.37328$ ）よりも $F_f'(0)$ は４%、$\Phi_f(0)$ は７%低い。同じように、網箱 I を使った実験からは、理論値よりも 14.4 %低い中心温度の測定結果が得られている。[18] 同様な傾向は、定常温度場についてのこれまでの実験結果にも見られ、Forstrom とSparrow [12] の実験では15%、Schorrと Gebhart [13] では15 ～ 20 %低い中心温度となっている。また、Nawoj と Hickman [14] による水中での測定では 20 ～ 25 %低い中心速度が得られている。このように、研究者によって差はあるが、この原因としては、まず熱源から発生した熱量の一部が散逸していることが考えられる。例えば導線への熱伝導、熱源下方の流体への熱伝導、さらに前述した端末効果によってできる温度勾配による熱の両側への散逸などが考えられる。

Fujii ら [15] はこの原因が主にプルームのスウェイング運動と呼ばれるものによると考えた。このスウェイング運動は Forstromと Sparrow [12] によって初めて報告されたもので、１分程度の周期の非常にゆっくりとしたプルームの左右（y 方向）の揺動であることが Mach-Zehnder干渉計等の観測 [13,15] から知られている。図 3.4は温度測定におけるスウェイング運動の記録で、3.4(a)は $y = 0$ と $y = 3.8$ mmでの同時測定の、3.4(b)は $y = \pm 4.0$ mmでの同時測定の結果を示す。図から明らかなように、中心部分ではほとんど現れていないことが分る。3.4(b)はスウェイ

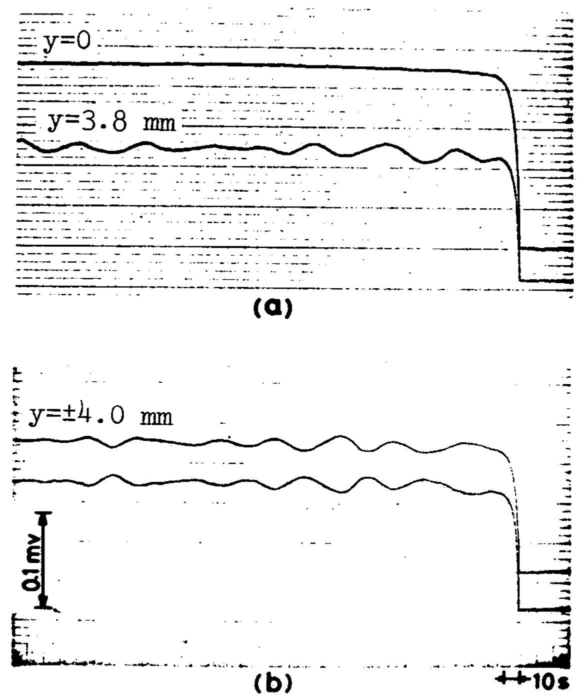


図 3.4 スウェイング運動の一例（温度）

ング運動が反対称攪乱であることを示している。また、熱源の長さ方向（z方向）の二点での同時測定から、この攪乱の二次元性が確かめられた。このように、スウェイング運動が中心ではほとんど現れない程小さいのは、前述したように網箱により安定した層流が確立されているためであり、網箱を使っていない実験ではスウェイング運動はかなり大きなものとなり、中心での速度と温度の測定値が低くなる原因となっていることも考えられる。

これまで述べてきた原因の他に、理論では$x \geq 0$の領域だけを考えており、$x < 0$からの流体の吸い込みはないとしている点が考えられる。このために、実際に熱源の真下（$y = 0$）で速度を測定してみたところ、$Q =$ 10 ～20 W/m の加熱量で最大、数 cm/s のU_0があることが分った。Lyakhov [16] はこの点に注目して、熱源下方の$x < 0$からの流体の吸い込みを抑えるために、熱源下の空間を多孔質材とした実験装置を使った。彼は Mach-Zehnder 干渉計による定常温度場の測定を行い、空気の上昇気流については理論値よりも 2.4%高い中心温度を、水の上昇流については理論値にほぼ一致する中心温度を得た。なお、直径 0.095 mm の熱源を用いて、空気の場合には熱源の下方 1.2 mm に、水の場合には同じく 0.7 mm にみかけの熱源位置を求めている。このように、中心速度と温度についての測定値と理論値とのくい違いも実験条件に大きく依存するようである。

網箱IIを使って得られた速度分布と温度分布の測定結果の一例を図 3.5に示す。ここで、xにはみかけの熱源位置からの高さを用いて整理しており、図中の実線は $Pr=0.7$ に対する理論曲線である。[15] 前述したように、安定性の実験結果を理論の枠組みの中で対比させるためには、基礎流の定常分布が理論と実験とで一致していることが必要である。そこで、便宜的に、中心速度と温度についての理論と実験のくい違いの原因がすべて加熱量にあるとし、純粋に上昇気流によって運ばれる熱量は、実際の熱源で発生する熱量よりも小さく、εQ（$\varepsilon < 1$）であるという補正をする。このとき、η_fは$\varepsilon^{1/5}$だけ縮められ、$F_f'(\eta_f)$と$\Phi(\eta_f)$はそれぞれ$\varepsilon^{-2/5}$と$\varepsilon^{-4/5}$だけ引き延ばされることになる。図 3.2, 3.3 で得られた$F_f'(0)$と$\Phi_f(0)$の値から求められるεはほとんど同じ値をとり、平均すると$\varepsilon = 0.908$となる。このように速度と温度から決まるεの値にほとんど差がないことから、この補正は妥当なものであ

ると考えられる。網箱Ｉを使った定常温度場の測定からは、やや低い $\varepsilon=0.823$ の結果が得られた。この補正を行うと、図 3.6にみられるように、測定結果は理論曲線とかなりよく一致するようになる。

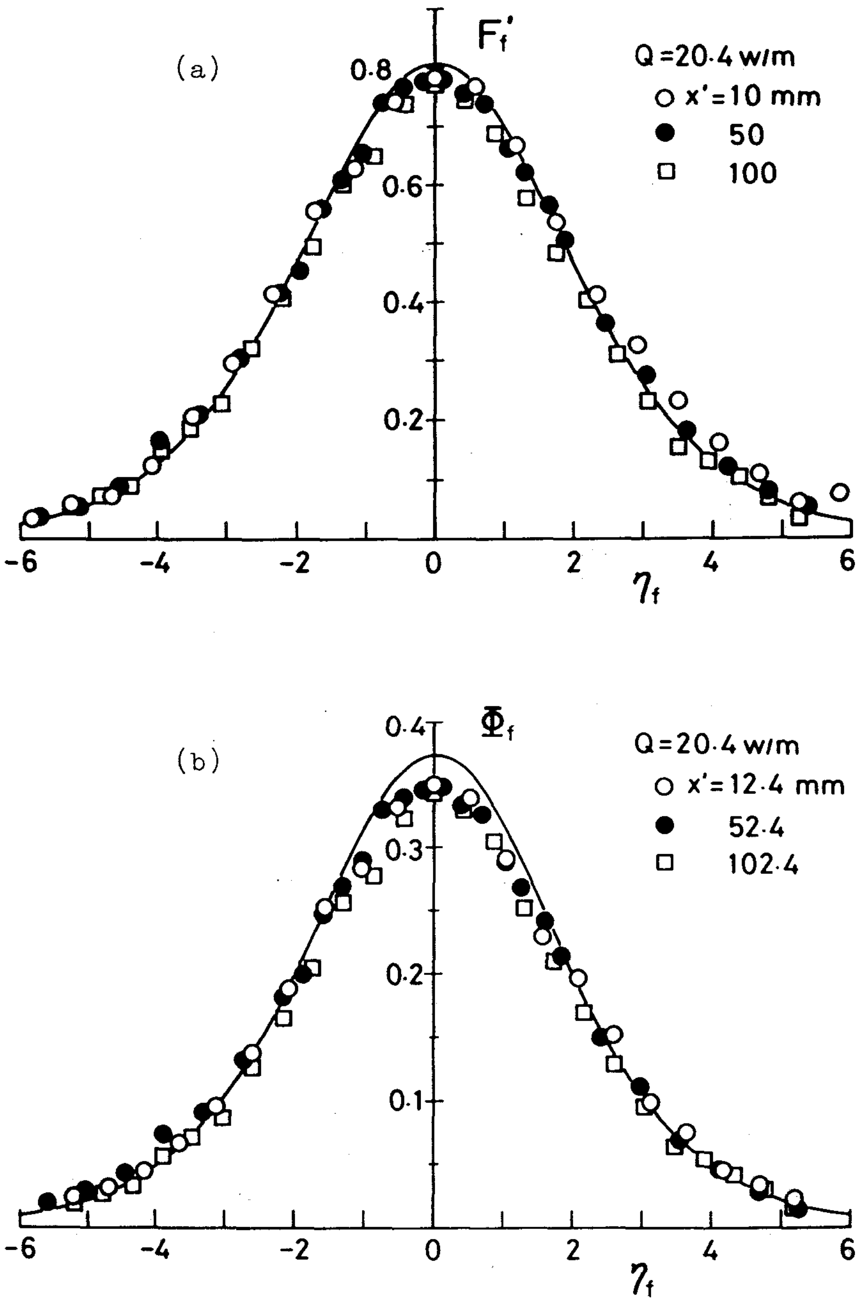


図 3.5　定常分布の測定結果 (a)速度の x 成分 (b)温度
　　　　実線は理論数値解 [15] (Pr=0.7)

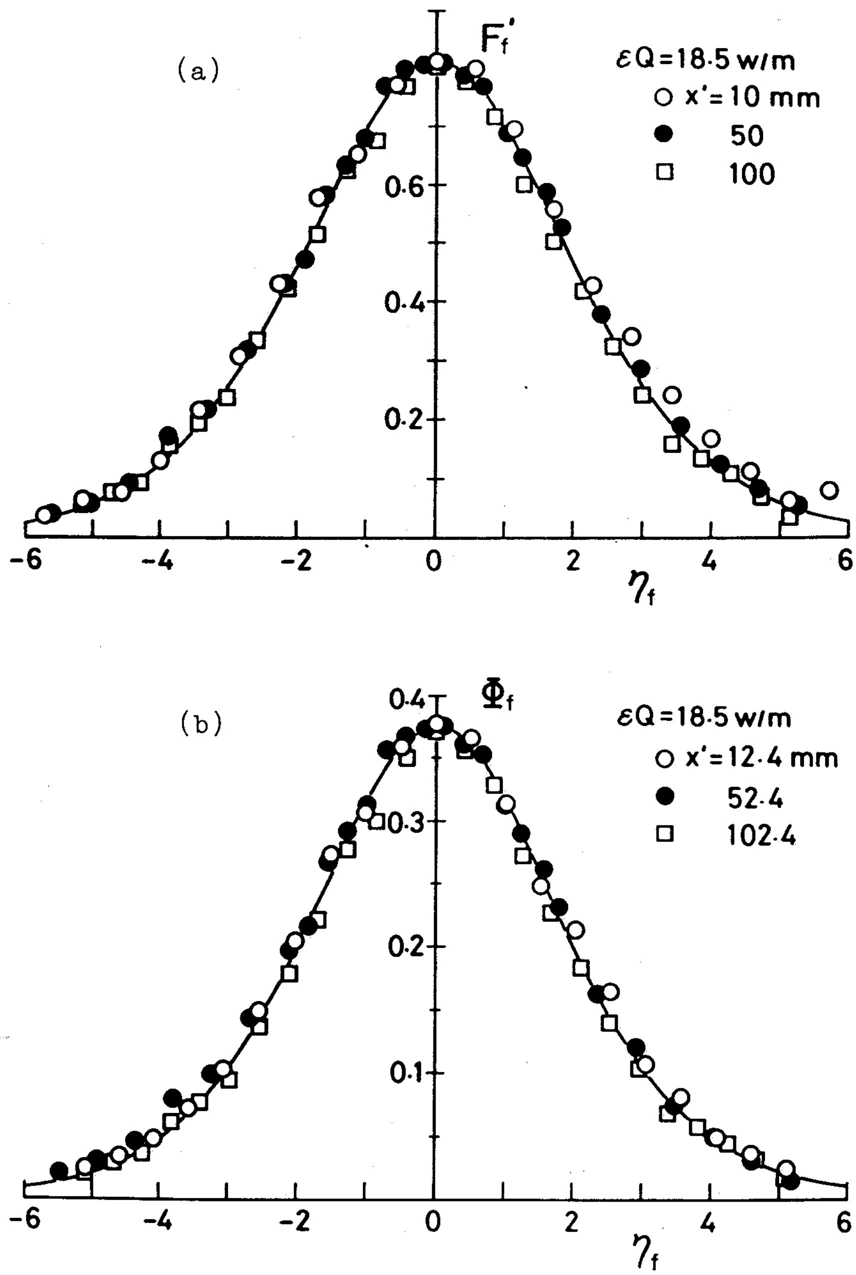


図 3.6　補正後の定常分布の測定結果 (a)速度の x 成分 (b)温度
実線は理論数値解 [15] (Pr=0.7)

3．3．2　安定性

前章の線型安定理論により得られた結果を、熱電対を用いた攪乱温度の測定から定量的に確かめる。反対称攪乱については網箱Ⅰを、対称攪乱については網箱Ⅱを使って実験を行った。

a）反対称攪乱

まず、線熱源をy方向に微小振動させる方法によって理論で取り扱ったような反対称攪乱が得られているかを確かめる必要がある。図 3.7は、熱源からの高さx′＝4 cmで、プルームの中心面（y＝0）に関して対称な位置y＝±2.2 mmで同時記録された攪乱温度であり、導入された攪乱が明らかに正弦波形の反対称攪乱であることを示している。攪乱温度が下流に伝わるにつれて増大しているか、減衰しているかの測定では、加熱量をQ＝10.7 W/m に固定し、プルームが十分に層流状態であるとみなせる、熱源からの高さx′＝1.5 cmから 11.5 cmの範囲で実験を行った。水平距離yが常に各高さでの定常温度分布の変曲点となる位置に測定点を設定し、最大振幅の攪乱温度を測定するようにした。これは線型安定理論の予測では定常温度分布の変曲点付近に攪乱温度の最大振幅が現れるからである。導入された攪乱の周波数はf＝ 0.3 Hz から5.5 Hz までであった。測温接点を鉛直方向に 1.01 cm 離した熱電対プローブにより攪乱波の時間遅れを測定し、位相速度を求めた。ただし、攪乱の振幅は下側（上流側）の熱電対のみで測定した。空間増幅型の線型安定理論によれば、基礎流に重ね合わされた攪乱が下流に伝わるにつれて減衰するか増大するかに従って、その流れは安定あるいは不安定であるといえる。攪乱温度の増大、減衰の測定結果を、 Pr=0.7 に対して計

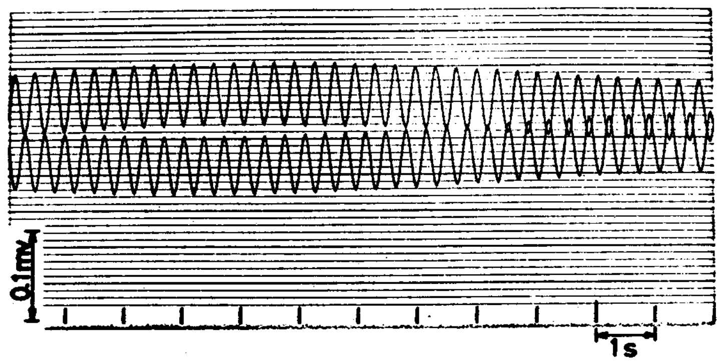


図 3.7　温度攪乱波の反対称性　　f＝3.0 Hz
Q＝14.6 W/m, x′＝4.0 cm, y＝±2.2 mm

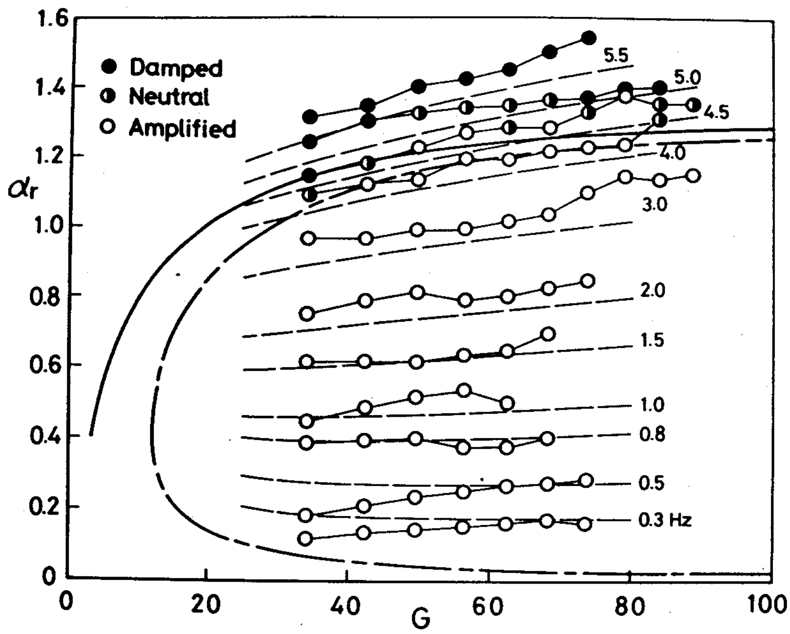


図 3.8　α_r －G面上の実験データ　（Q＝10.7 W/m ）
—— は理論中立曲線、― ― ―は Haaland & Sparrow [19] の中立曲線

算された中立曲線（図中の実線、ただし、 Pera と Gebhart [10] のものに一致する）とともに、図 3.8に示す。参考のために、図には Haalandと Sparrow [19] によって基礎流の非平行性を一部取り入れて得られた中立曲線（図中の一点鎖線）も描いてあるが、次章において示すように、彼らの解析は基礎流の非平行性を正しく評価していないので本章の実験結果とは比較しない。図の横軸Gは

$$G \equiv 2\sqrt{2}\, Gr_x^{1/4} \sim x^{3/5}, \tag{3.10}$$

$$Gr_x = g\beta^* x^3 (T_0 - T_\infty)/\nu^2 = \Phi_f(0) Gr_{x,f}^{4/5} \tag{3.11}$$

で定義される変形 Grashof数である。また、縦軸は

$$\alpha_r = (8\pi / G)\ x / \lambda \tag{3.12}$$

によって与えられる無次元波数である。ここで、λは攪乱の波長である。測定点のxは二つの熱電対の測温接点間の中点の、みかけの熱源位置からの高さをとり、Gの中の$T_0 - T_\infty$の値は前節において行った補正を加えたものである。測定された攪乱が増大か、減衰かは、それぞれ、二つの近接した高さx_1とx_2での無次元化された最大振幅A_1とA_2との比A_2/A_1から決定した。理論において、攪乱温度の振幅は代表温度差$(T_0 - T_\infty) \sim x^{-3/5}$によって無次元化されているので、無次元攪乱温度の振幅比は

$$A_2/A_1 = Amp(t_2)_{max}/Amp(t_1)_{max} \cdot (x_1/x_2)^{-3/5},$$

$$= Amp(t_2)_{max}/Amp(t_1)_{max} \cdot (G_2/G_1) \qquad (3.13)$$

で与えられる。無次元振幅比A_2/A_1が1より小さいか、大きいかに従って、流れが安定か不安定かが決まる。ただし、本実験では、A_2/A_1が 0.98 から 1.02 までの値を中立攪乱とした。図 3.8における破線は数値計算から求められた周波数 f が一定の経路を示す。これらの実験結果は理論とよく一致している。

同じ実験データを無次元振動数βと Grashof数Gの関係を表す特性面にプロットしたものを図 3.9に示す。ただし、βは

$$\beta = 32\pi f x^2/(\nu G^3)$$

$$\sim f G^{1/3} \qquad (3.14)$$

で与えられる。前章においても

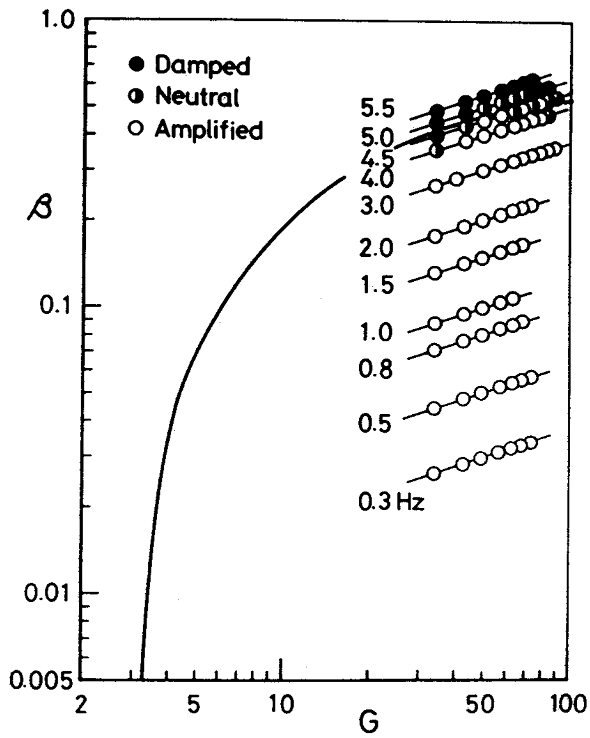


図 3.9 β－G面上の実験データ
Q＝10.7 W/m, 実線は理論中立曲線(Pr=0.7)

示したように、一定周波数の経路は$\beta G^{-1/3}$=const で定義され、図 3.9においては傾き 1/3の直線となる。

G＞70, α_r ＜0.8 の領域における実験データのほとんどに攪乱の非線型効果による高調波が現れるために、そこでのデータは図 3.8, 3.9 のプロットから除外した。本実験条件では、0.3 ＜α_r＜ 0.5の波数域における一定周波数(f＝0.8 Hz と 1.0 Hz)の経路に沿って伝わる攪乱が最も強く増幅された。この高調波出現の一例を図 3.10 に示す。

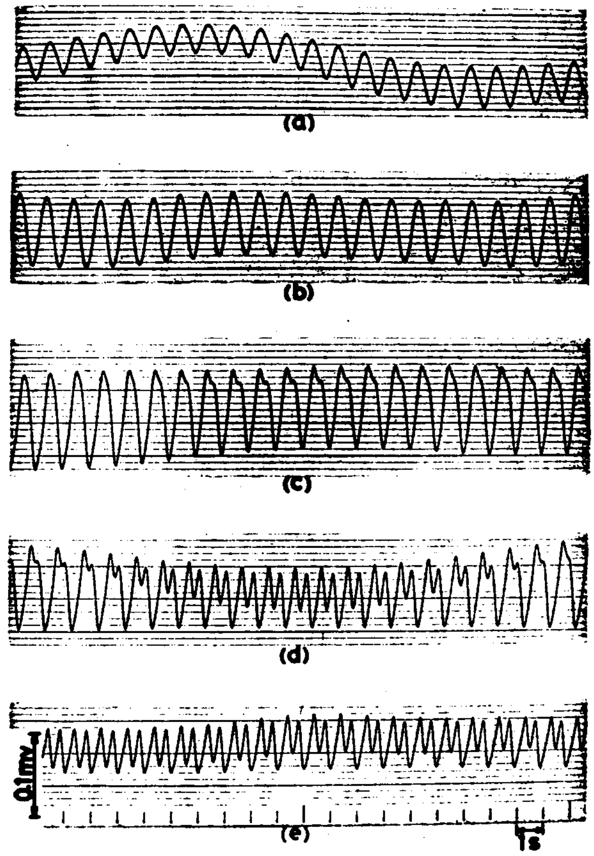


図 3.10 高調波の例
Q＝ 10.7 W/m, f＝1.0 Hz
(a) x′＝6.5 cm, G＝64.3
(b) x′＝8.5 cm, G＝75.1
(c) x′＝10.5 cm, G＝84.9
(d) x′＝12.5 cm, G＝94.0
(e) x′＝14.5 cm, G＝103

また、増大攪乱の例を図 3.11 に、減衰攪乱の例を図 3.12 に示す。これらの攪乱温度の波形が全体的にゆっくりと波打っているのは前述したスウェイング運動のためである。

0.3 Hzよりも小さな周波数の攪乱については、このスウェイング運動による影響が大きく、実験から波数α_r を求めることが困難であった。

図 3.8, 3.9 には中立曲線の下枝に対応する中立点の測定結果はないが、f＝0.3 Hzの周波数の攪乱の増幅はかなり小さくなり、中立曲線の下枝の存在が推測される。

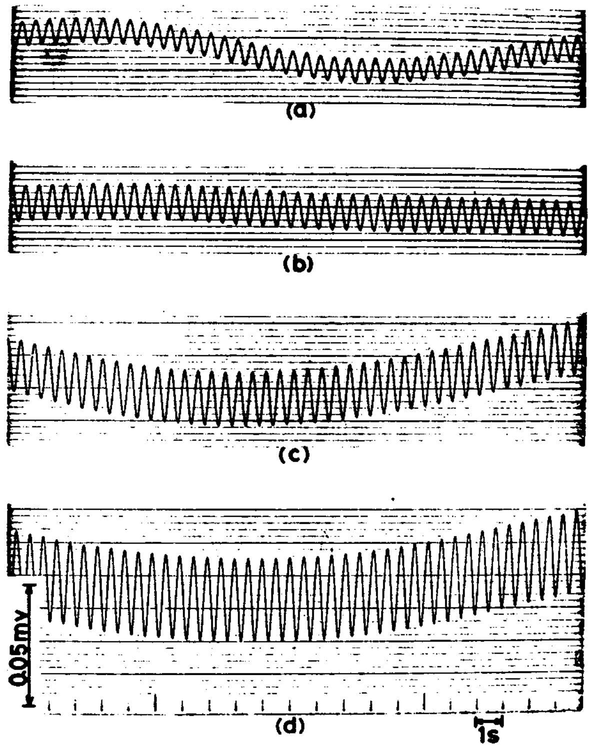


図 3.11 増大攪乱の例　Q＝10.7 W/m, f＝2.0 Hz
(a) x′＝2.5 cm, G＝37.8, (b) x′＝4.5 cm, G＝52.2
(c) x′＝6.5 cm, G＝64.3, (d) x′＝8.5 cm, G＝75.1

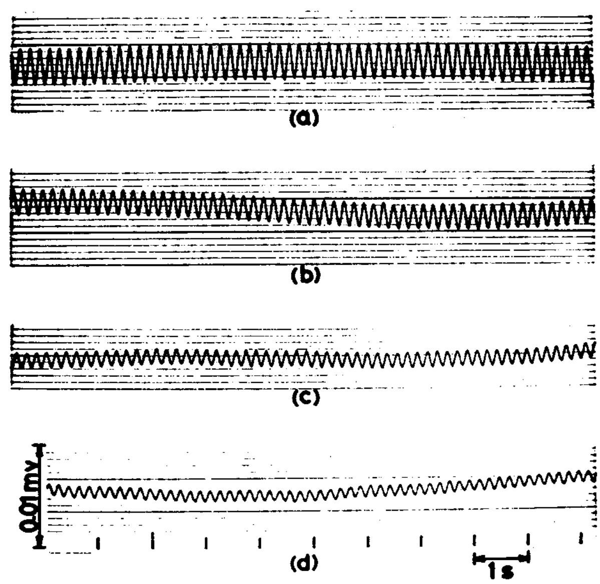


図 3.12 減衰攪乱の例　Q＝10.7 W/m, f＝5.5 Hz
(a) x′＝1.5 cm, G＝29.0, (b) x′＝2.5 cm, G＝37.8
(c) x′＝4.5 cm, G＝52.2, (d) x′＝6.5 cm, G＝64.3

無次元の空間増幅率（$-\alpha_i$）は二つの近接した高さでの攪乱温度の最大振幅を測定することにより以下のようにして求められる。無次元振幅比A_2/A_1は次元を持つ空間増幅率（$-\overline{\alpha}_i$）を用いて、

$$A_2/A_1 = \exp\left\{-\int_{x_1}^{x_2} \overline{\alpha}_i \, dx\right\}$$

と書ける。[9] 式（3.10）と$\alpha_i = 4x\overline{\alpha}_i/G$ より上式を無次元化すると、

$$A_2/A_1 = \exp\left\{-(5/12)\int_{G_1}^{G_2} \alpha_i \, dG\right\} \tag{3.15}$$

となる。攪乱温度の測定は$x_2 - x_1 = 5$ mm ごとに行ったので、$G_2 - G_1$は小さく、式（3.15）は

$$A_2/A_1 = \exp\{-(5/12)\alpha_i(G_2 - G_1)\}$$

と近似できる。したがって、式（3.13）より

$$-\alpha_i = 2.4/(G_2 - G_1)\ \ln\{(G_2/G_1)\mathrm{Amp}(t_2)_{max}/\mathrm{Amp}(t_1)_{max}\} \tag{3.16}$$

となる。式（3.16）を使って、攪乱温度の測定から得られた$-\alpha_i$の値をβに対してプロットしたものを図 3.13 に示す。最大振幅の測定は、攪乱の周波数 $f = 0.3$ Hzから 5.5 Hz の範囲で、加熱量$Q = 10.7$ W/m について、二点の高さ$x_1' = 3.2$ cm と$x_2' = 3.7$ cm で行った。これらx_1'とx_2'はそれぞれ、$G_1 = 43.3$ と $G_2 = 46.9$に対応し、測定結果はそれらの平均値 $G = 45.1$ での理論曲線（図中の実線）と比較されている。βの小さい値に対して、$-\alpha_i$は理論よりかなり小さくなってい

るが、全体としては理論とよく一致している。このβの小さな領域では非線型効果による高調波が現れやすく、熱源に加える振幅を 0.1 mm まで下げて実験を行った。しかしながら、大きな増幅率に対応する周波数域では非線型効果を完全になくすことは不可能である。このことはβの小さな領域での理論と実験との不一致の原因の一つと考えられるが、基礎流の非平行性の影響が原因している可能性も考えられる。

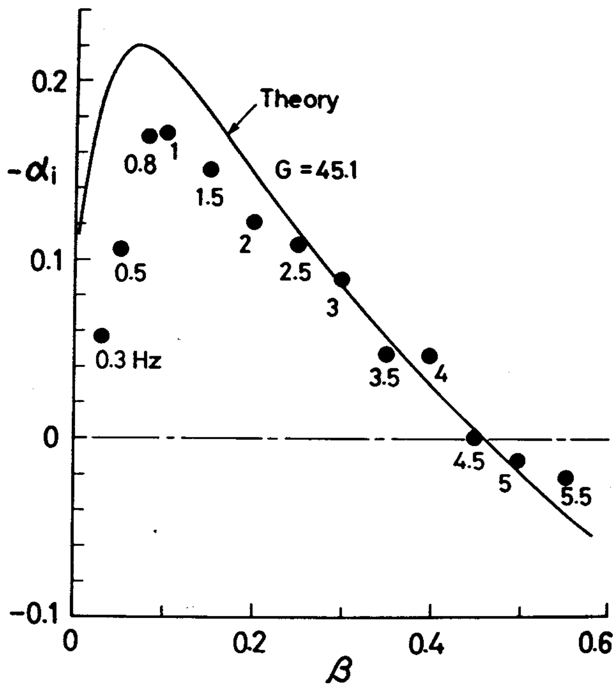


図 3.13 増幅率の測定結果
$x' = 3.5$ cm, $Q = 10.7$ W/m
実線は理論曲線 ($Pr = 0.7$)

プルームに導入された攪乱温度の相対振幅 $Amp(t)/Amp(t)_{max}$ と位相θ_tの分布の測定結果をプロットしたものを図 3.14 に示す。ここで、横軸ηは

$$\eta = (G/4)\ y/x \tag{3.17}$$

で与えられる相似変数である。実験は (3.7 cm, 4.6 Hz), (5.2 cm, 3.7 Hz) および (4.5 cm, 2.4 Hz)の三つの高さx'と攪乱周波数fの組み合わせについて行った。実線は図の説明欄に記された固有値α, β, Gに対する理論曲線であり、図 3.14(a)は中立攪乱、図 3.14(b),(c)は増大攪乱に対応する。図中のΦ_{inf}は定常温度分布の変曲点の位置を示す。振幅の小さなところでの位相の測定は困難であったため、位相分布は狭いηの範囲でしか得られなかった。また、理論と実験のβとGの値はやや異なってはいるが、結果は驚くほどよく一致している。

以上のように、低周波域での増幅率（$-\alpha_i$）が実験では理論よりも小さめに出るという点を除けば、攪乱温度についての実験結果を見渡すかぎり、実験で扱われた反対称な微小攪乱は前章の通常の線型安定理論の枠内にあり、この理論結果は十分現実的であると考えられる。

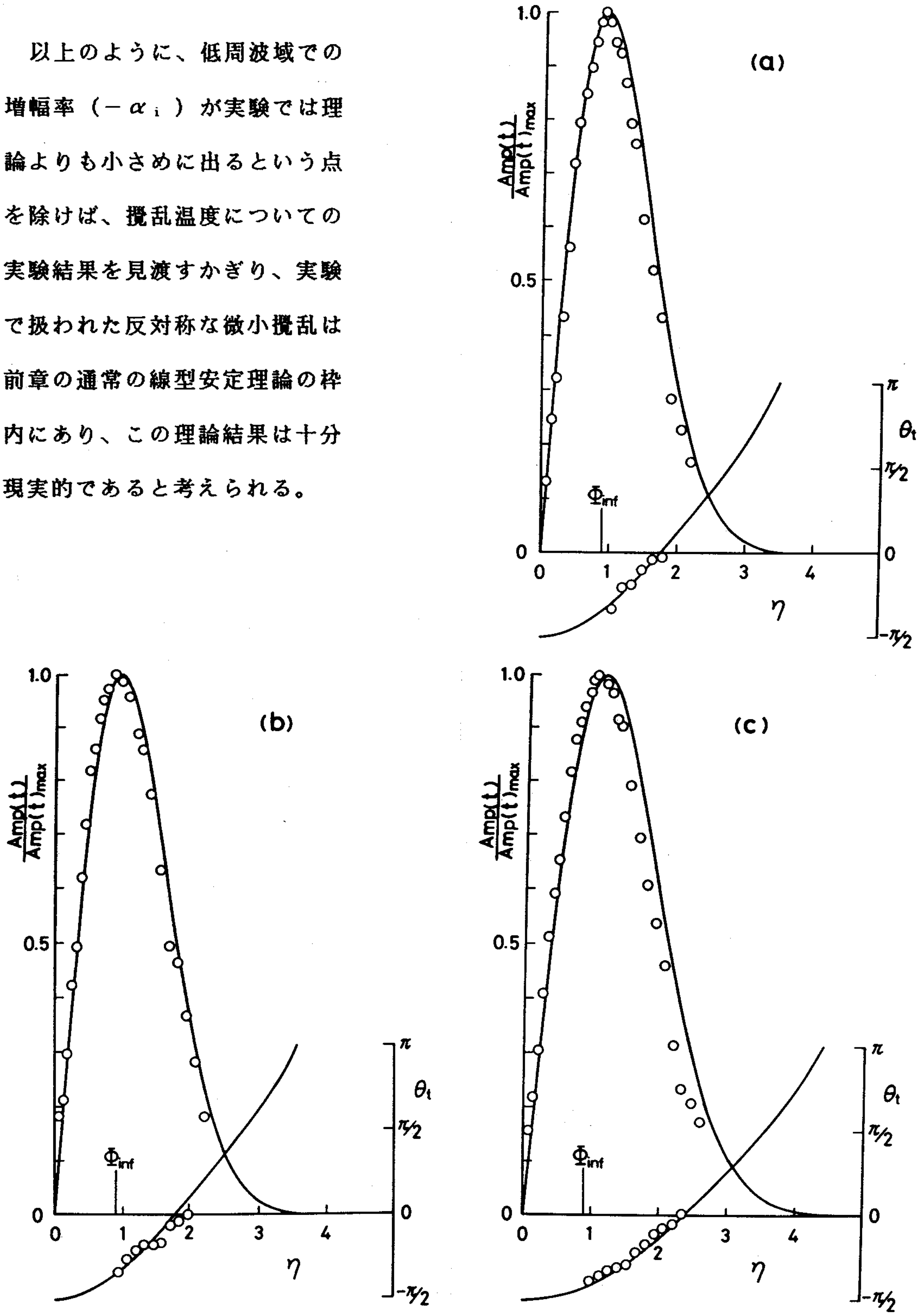


図 3.14 攪乱温度の振幅分布と位相分布の測定結果（Q＝10.7 W/m）
——：理論 ， ○：実験データ
(a) 理論：$\alpha=1.2$, $\beta=0.4613$, G＝46.27
実験：$\beta=0.464$, G＝46.8（x′＝3.7 cm, f＝4.6 Hz）
(b) 理論：$\alpha=1.1-0.04i$, $\beta=0.4003$, G＝56.48
実験：$\beta=0.398$, G＝56.5（x′＝5.2 cm, f＝3.7 Hz）
(c) 理論：$\alpha=0.84-0.12i$, $\beta=0.2507$, G＝51.25
実験：$\beta=0.251$, G＝52.2（x′＝4.5 cm, f＝2.4 Hz）

b）対称攪乱

熱源に脈動電流を流すことによりプルームに対称な攪乱を導入し、反対称攪乱の場合と同様に、熱電対を用いて攪乱温度の測定を行った。加熱量Q＝ 20.4 W/m について熱源からの高さが x ’＝2.0 cmから 8.0 cm の範囲で、プルーム中心面（y＝0）に関して対称な位置 y＝±2.5 mm で同時記録された温度波形を図 3.15 に示す。高さ x ’＝2.0 cm では y＝2.5 mm（図の上側）と y＝－2.5 mm（下側）の温度波形はほぼ同位相となっている。x ’＝4.0 cm では、ほぼ同位相ではあるが、y＝2.5 mm の攪乱温度の振幅が小さくなり、両波形の振幅にはかなりの差が生じている。x ’＝6.0 cm になると両波形にはほぼ π の位相差が現れており、さらに x ’＝8.0 cmでは y＝2.5 mmの攪乱の振幅が急速に大きくなっている。

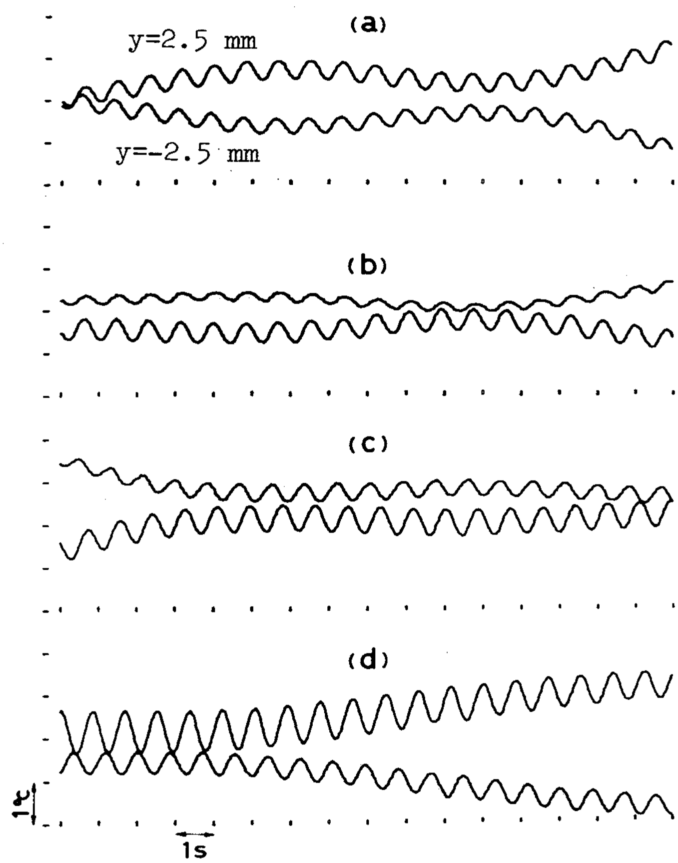


図 3.15 温度攪乱波形（y＝±2.5 mm）（対称攪乱を導入）

(a) x ’＝2.0 cm , $Gr_{x,f}=1.34\times10^{6}$ (G＝36.4)
(b) x ’＝4.0 cm , $Gr_{x,f}=9.91\times10^{6}$ (G＝54.4)
(c) x ’＝6.0 cm , $Gr_{x,f}=3.29\times10^{7}$ (G＝69.1)
(d) x ’＝8.0 cm , $Gr_{x,f}=7.62\times10^{7}$ (G＝81.8)

この導入された対称攪乱の下流方向の変化を詳しく調べるために、振幅（ただし、ここでは変動の強さ（$\overline{t^2}$）$^{1/2}$）と位相の分布を、プルーム中心面（y＝0）の両側の水平面で測定した。攪乱周波数 f＝1.2 Hzについての測定結果を図 3.16 に示す。振幅は（$\overline{t^2}$）$^{1/2}$/（T_0 －T_∞）で整理されており、下流方向の攪乱の増大、減衰の様子もこの図から知ることができる。結果は x′＝2.0 cm ではその振幅と位相の分布からこの方法で導入された攪乱がほとんど対称であることを示している。しかしながら、x′＝4.0 cmでは y の負の側で攪乱は主に増幅され、振幅分布は非対称な分布となっている。x′＝6.0 cm ではさらに振幅の非対称性が増し、y の負側と正側と

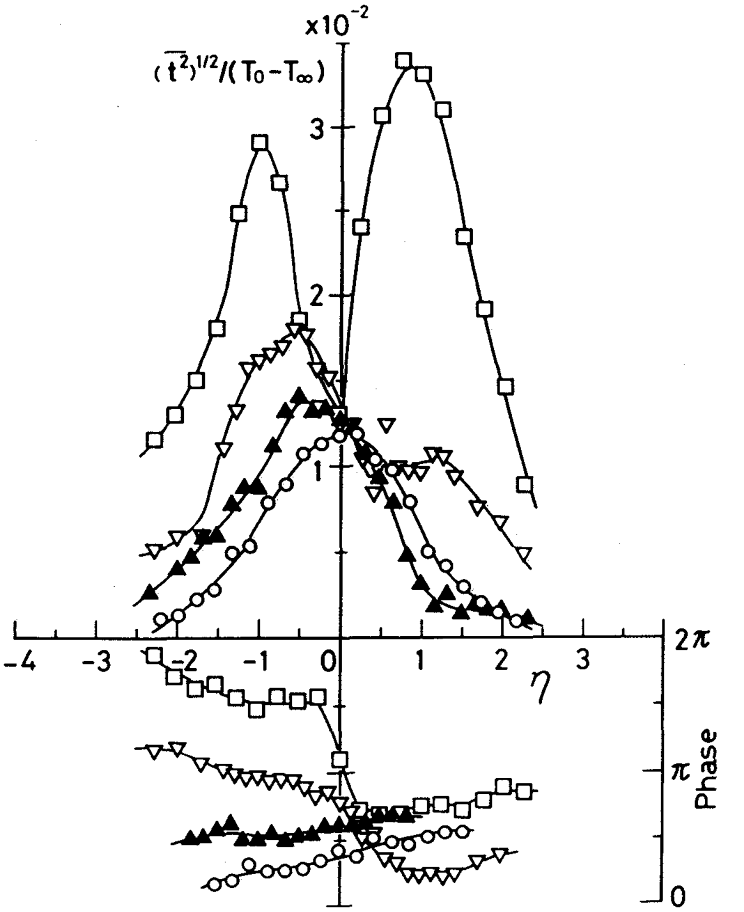


図 3.16 攪乱温度の振幅分布と位相分布の測定結果（対称攪乱を導入）
Q＝20.4 W/m, f＝1.2 Hz
○：x′＝2.0 cm, G＝36.4； ▲：x′＝4.0 cm, G＝54.4；
▽：x′＝6.0 cm, G＝69.1； □：x′＝8.0 cm, G＝81.8；

の位相差も大きくなっている。　$x'=8.0$ cmに至ると、攪乱は急激に増幅され、振幅と位相の分布はかなり反対称攪乱に近い分布となっている。このように、導入された対称攪乱はその対称性を下流まで維持できずに、遷移領域に至るまでに反対称攪乱となってしまう。ここでの実験条件では反対称攪乱に対する増幅率は大きく、$x'=2.0$ cmでの位相分布に見られるわずかな y の負側と正側との位相差のような対称攪乱の対称性の歪みが大きく影響していると考えられる。このため、対称攪乱についての安定特性を実験的に精しく調べることは不可能である。この対称攪乱の対称性が維持できないという現象は、対称攪乱の増幅率　$(-\alpha_i)$ が反対称攪乱の増幅率よりも一桁も小さいという線型安定理論の結果から予測できることである。

3．3．3　自然発生攪乱

これまで述べてきたような人工的な微小攪乱を導入することなく、外乱を極力なくすように十分注意深く実験を行っても、定常層流場に自然に攪乱が生じる。前述したスウェイング運動はこの自然発生攪乱の一つであり、二次元の反対称攪乱であることが分っている。このスウェイング運動は１分程度の、極めて長い周期のゆっくりとした振動で、 Grashof数　Ｇのかなり小さな、すなわち、高さの低いところから現れている。[12] 一方、下流の、Ｇ～100 程度のところで、スウェイング運動の低周波振動の上に、スウェイング運動とは別のもっと高い周波数（１Hz　程度）の小さな正弦波

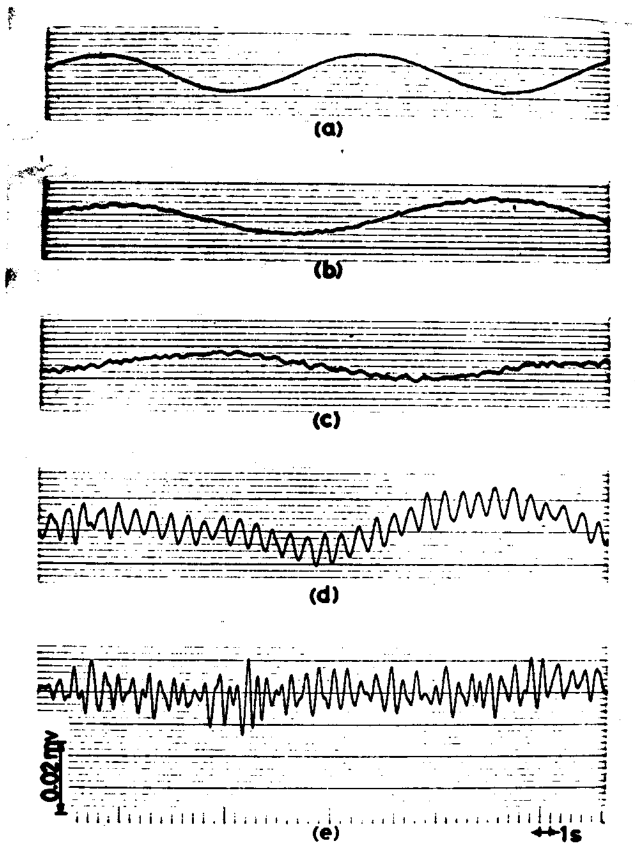


図 3.17 自然発生攪乱の例（Q＝10.9 W/m ）
(a)　x ′＝10 cm, $Gr_{x,f}=8.82\times10^{7}$　(G＝82.5)
(b)　x ′＝15 cm, $Gr_{x,f}=2.89\times10^{8}$　(G＝105)
(c)　x ′＝20 cm, $Gr_{x,f}=6.75\times10^{8}$　(G＝124)
(d)　x ′＝25 cm, $Gr_{x,f}=1.31\times10^{9}$　(G＝142)
(e)　x ′＝30 cm, $Gr_{x,f}=2.25\times10^{9}$　(G＝158)

状の攪乱が現れる。この攪乱についても、スウェイング運動と同様に、熱源の長さ方向（z 方向）に離れた二点での同時測定から二次元性が確かめられた。この高周波の攪乱はGが大きくなるにつれて増幅される。さらに下流では、この高周波攪乱も非線型効果のためにすぐにくずれてしまい、より高周波の高調波が現れて複雑な波形となる。その様子を図 3.17 に示す。実験は網箱 I を使って熱電対による温度測定を行った。細かい波が多くなった x ' = 30 cm（G＝158 ）の高さでは、熱電対の応答性の問題から、もっと細かい波を十分拾っていない恐れもあるため、はるかに応答性の高い熱線風速計を用いてみたが、記録された波形にはそれほど差はなかった。Forstrom と Sparrow [12] は $Gr_{x,f}=5\times10^{8}$ の付近で初めて"乱流バースト"が現れ、これをもって乱流への遷移の始まりと定義している。しかしながら、明らかに図 3.17 にはそれらしい現象はみられない。この遷移過程については、第 5 章で詳細に検討する。

種々の加熱量Qと高さ x ' について、スウェイング運動と高周波攪乱の周波数を測定し、それらの周波数の最大値と最小値を β－G面上にプロットしたものが図 3.18 である。正弦波状の高周波攪乱についての測定データにはかなりのバラツキが見られるが、これは、一つには、測定された攪乱の最大の周波数には非線型効果による高調波の攪乱のものも含まれている可能性があり、また、定常場に重ね合わされたスウェイング運動による基礎流の変形によるものとも考えられる。図中の下方のスウェイング運動の測定データについて、周波数 f が一定の線（傾き 1/3の直線）を求めると、これは図中

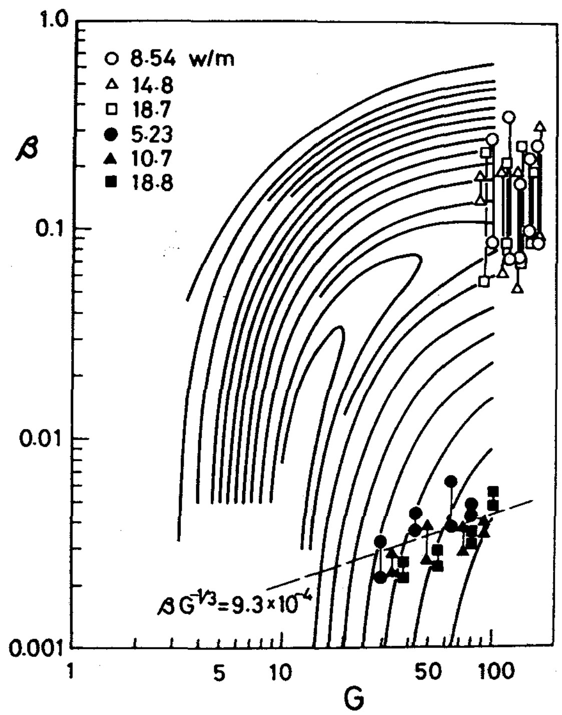


図 3.18 自然発生攪乱の測定結果
高周波攪乱：○，△，□
スウェイング運動：●，▲，■

の破線で示すように$\beta G^{-1/3}=9.3\times10^{-4}$で与えられる。この直線はG≒10のところで最大の増幅率（$-\alpha_i$）付近を通るようである。この増幅率が最大となる点は計算されておらず、またこの付近で、基礎流の平行流近似に基づく通常の線型安定理論が成立するかどうかの疑問もあり、正確なことは言えないが、おそらく、このスウェイング運動はGの小さな、すなわちx′の小さなところで自然発生した制御できない程の極めて小さな攪乱が最大増幅率の領域で強く増幅され成長したものと思われる。しかしながら、この攪乱は、下流に伝わるにつれて、増幅率の小さな領域に入ってしまい、あまり増幅されなくなる。さらに、下流のほぼG≧100の領域では、そこでの最大の増幅率に対応する、スウェイング運動よりもずっと高い、周波数の攪乱が強く増幅されるようになり、それが上述した高周波攪乱として発生しているものと考えられる。スウェイング運動の周期はこの高周波攪乱の周期に比べて、はるかに長いから、この高周波攪乱の成長は、厳密にはスウェイング運動によって少し歪められた定常層流に対する線型安定理論に従うものと推測される。

３．４　まとめ

空気中に置かれた水平線熱源から立ち昇る平面プルームの速度および温度分布の測定による定常場の実験と、攪乱温度の測定による安定性の実験を行って得られた結果を以下に示す。

（１）定常プルームの中心速度と温度の測定値は理論値よりも低目に出る。実験に用いた熱源の位置と理論上の原点の位置とは一致せず、みかけの熱源位置が存在する。これらの理論とのくい違いの大きさは実験条件に依存する。中心速度と温度についてのくい違いの原因が加熱量Ｑにあるとし、純粋にプルームに寄与する熱量をεＱとすると、εは速度と温度についてほぼ同じ値をとる。みかけの熱源を考慮し、この熱量に対する補正を行うと、定常速度と温度分布の測定結果は理論曲線とほとんど一致する。

２）人工的に導入された、反対称な攪乱温度の増大、減衰の安定特性は、基礎流の準平行流近似に基づく前章の線型安定理論の結果とよく一致する。攪乱温度の測定から得られた増幅率（$-\alpha_i$）の分布は低周波域では理論値よりもかなり低いが、全体としては理論とよく一致している。攪乱温度の振幅分布も理論結果とかなりよく一致している。

（３）人工的に導入された対称攪乱は、下流に伝わるにつれて、すぐに振幅の対称性を失って非対称な振幅分布となり、やがてはその振幅と位相の分布が反対称攪乱についての分布となる。この攪乱モードの移行は遷移領域に至るまでに起る。

（４）線型成長領域における自然発生攪乱としては、本実験条件では、Grashof 数Ｇがかなり小さな、すなわち、高さの低いところから現れる、１分程度の長周期のスウェイング運動と下流のＧ≒100 で現れる１Hz程度の高周波攪乱が観察された。これらはいずれも、二次元の反対称攪乱であり、これらの攪乱の出現は前章の線型安定理論により予測できる。

記　号

A_2/A_1 ：高さx_2とx_1での無次元攪乱温度の振幅比，式（3.13）

$Amp(t)$ ：攪乱温度の振幅

$Amp(t)_{max}$ ：攪乱温度の最大振幅

C_1, C_2 ：物性値のグループ，式（3.9）

c_p ：定圧比熱

F_f' ：無次元速度のx成分（定常流），式（3.1）

f ：攪乱周波数

G ：変形 Grashof数，式（3.10）

G_1, G_2 ：それぞれ$x = x_1$とx_2でのGの値

Gr_x ：局所 Grashof数，式（3.11）

$Gr_{x,f}$ ：局所 Grashof数，式（3.4）

g ：重力加速度

Pr ：Prandtl 数

Q ：加熱量 [W/m]

T ：温度（定常流）

T_0 ：$y = 0$の鉛直面での温度（定常流）

T_∞ ：周囲温度（定常流）

t ：攪乱温度

U ：速度のx成分（定常流）

U_0 ：$y = 0$の鉛直面での速度のx成分（定常流）

x ：みかけの熱源位置からの鉛直方向高さ

x' ：実際の線熱源からの鉛直方向高さ

y ：線熱源に垂直な水平方向距離

z ：線熱源の中点からの長さ方向距離

Φ_f ：無次元温度（定常流），式（3.2）

α_r ：無次元波数，式（3.12）

α_i　：無次元増幅率，4 x $\overline{\alpha}_i$/G

$\overline{\alpha}_i$　：次元のある増幅率

β　：無次元振動数，式（3.14）

β^*　：体膨張係数

ε　：熱量補正係数

η　：相似変数，式（3.17）

η_f　：相似変数，式（3.3）

θ_t　：攪乱温度の相対位相

ν　：動粘性係数

ρ　：密度

参 考 文 献

1) Taylor, G. I. : Phil. Trans. Roy. Soc. London A 223 (1923) 289.

2) Schubauer, G. B. and Skramstad, H. K. : J. Aero. Sci. 14 (1947) 69.

3) Tollmien, W. : Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, Math.-Phys. Kl. (1929) 21.

4) Schlichting, H. : Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, Math.-Phys. Kl. (1933) 181.

5) Colak-Antic, P. : Jahrb. Wiss. Ges. Luft- Raumfahrt (1964) 172.

6) Polymeropoulos, C. E. and Gebhart, B. : J. Fluid Mech. 30 (1967) 225.

7) Nachtsheim, P. R. : NASA Tech. Note, No. D-2089 (1963).

8) Knowles, C. P. and Gebhart, B. : Prog. Heat Mass Transfer 2 (1969) 99.

9) Dring, R. P. and Gebhart, B. : J. Fluid Mech. 36 (1968) 447.

10) Pera, L. and Gebhart, B. : Int. J. Heat Mass Transfer 14 (1971) 975.

11) Brodowicz, K. and Kierkus, W. T. : Int. J. Heat Mass Transfer 9 (1966) 81.

12) Forstrom, R. J. and Sparrow, E. M. : Int. J. Heat Mass Transfer 10 (1967) 321.

13) Schorr, A. W. and Gebhart, B. : Int. J. Heat Mass Transfer 13 (1970) 557.

14) Nawoj, H. J. and Hickman, R. S. : ASME J. Heat Transfer 99 (1977) 609.

15) Fujii, T., Morioka, I. and Uehara, H. : Int. J. Heat Mass Transfer 16 (1973) 755.

16) Lyakhov, Y. N. : Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz. 11 (1970) 169. (Translated in J. Appl. Mech. Tech. Phys. 11 (1972) 355.)

17) Fujii, T. : Int. J. Heat Mass Transfer 6 (1963) 597.

18) Yosinobu, H., Onishi, Y., Amano, S., Enyo, S. and Wakitani, S. : J. Phys. Soc. Jpn. 47 (1979) 312.

19) Haaland, S. E. and Sparrow, E. M. : ASME J. Heat Transfer 95 (1973) 295.

第４章　非平行安定性の検討

４．１　序論

第２章で、線型安定理論を線熱源上の平面プルームに適用した結果、このプルームは極めて不安定で、小さな Grashof数で不安定が起ることが分った。しかしながら、臨界 Grashof数は極めて小さくなり、数値計算上の困難さからその臨界 Grashof数の確かな値は得られていない。[1,2]　そこで用いた安定理論は、通常の境界層流の場合と同様に、基礎流に対して準平行流の近似を課しており、これは Grashof数が大きい場合は妥当であるが、小さい場合は怪しくなり、小さな Grashof数で得られた安定特性には信頼がおけなくなる恐れがある。なぜなら、そのような Grashof数では、基礎流の速度のｙ成分Ｖやｘ成分の微係数$\partial U/\partial x$を、もはや無視できなくなるからである。さらに、同様な問題が、通常の境界層近似の下に得られた定常解を使った基礎流自身にも生じてくる。

平行流では攪乱を支配する線型方程式は常微分方程式であるのに対して、非平行流では変数分離が不可能（non-separable)な偏微分方程式となる。主として、これが非平行流の線型安定問題を取り扱う上での困難な点となっている。以後、通常の準平行流近似に基づく線型安定理論を準平行流理論と呼ぶことにする。

Haaland と Sparrow [3] は、準平行流理論では無視された基礎流のＶや$\partial U/\partial x$を残すことによって、平面プルームの非平行性を一部取入れた線型安定性の解析を行った。このモデルでは攪乱を支配する方程式は変数分離が可能（separable)となり、方程式は、攪乱温度の相互作用のある、修正 Orr-Sommerfeld 方程式と攪乱エネルギー方程式の二つの常微分方程式に帰着される。速度成分Ｖを残すことによって攪乱速度と温度が境界層外の遠方にはみ出すことを抑制するという効果があることが見出されている。[4]　Haaland と Sparrowは臨界Grashof 数$G^*_{crit}\fallingdotseq 5.1$（第２章の記号では、$G_{crit}=12$となる）と中立曲線の下枝を得た。彼らの安定特性は準平行流理論よりも不安定領域が狭まり、より安定な結果となっている。しかしながら、他の境界層流に対しても用いられてきた、この修正 Orr-Sommerfeld 方程式の導出には矛盾があることが Ling と Reynolds [5]によって指摘されている。この平面プルームの非平行

安定性についての他の解析が Hieber と Nash [6]によってなされている。彼らは基礎流に境界層の高次項を考慮した摂動展開を使って線型安定性を解析した。しかしながら、導出された最低次の方程式は非粘性の Orr-Sommerfeld 方程式に過ぎず、それ以降の高次の方程式に、一部の非平行効果を表す項、粘性項および攪乱温度の相互作用を表す項が現れている。彼らの解析では不安定性がかなり減少し、臨界 Grashof数 $G^*_{crit}=7.3$ を得ている。このように、平面プルームの安定性に及ぼす基礎流の非平行効果を考慮した解析については、これまで、定評のあるものはなかった。

最近、平行流に近い流れの線型安定問題に、多重尺度法（method of multiple scales）が使われるようになり、非平行安定性の理論が急速に発展した。この方法の定式化は Bouthier [7]によって初めて行われ、平板に沿う流れの Blasius境界層について具体的な結果が求められた。[8] その後も、この Blasius境界層に対して、多重尺度法が適用され、準平行流理論よりも現存の実験値をよく再現する安定特性が得られた。[9,10] 準平行流理論では攪乱の増幅率は一意的に決定されたのに対して、この非平行安定理論では、どのような攪乱量の増幅率を考えるかによって増幅率が異なるという注目すべき結果が導かれた。これは、例えば、流れの中のある位置で攪乱流れ関数が下流方向に増大していても、攪乱速度は減衰しているという状況がありうることを意味している。したがって、中立曲線は増幅率を決めるのに用いた攪乱量に依存することになる。Blasius 境界層に対して、Saric と Nayfeh [10] は攪乱流れ関数に基づく増幅率を求め、実験値と極めてよく一致する中立曲線を得た。しかしながら、彼らは増幅率の表現に固有関数の下流方向（x方向）への変化を含めていないので、それらを考慮した Gaster [9]の理論結果よりも、実験値とのより良好な一致が得られたことは偶然に過ぎないと考えられる。

自由流の非平行安定性の理論にも多重尺度法の適用が試みられ、二次元ジェット（ Bickley jet ）の安定特性が計算された。[11,12,13] このジェットに対しては準平行流理論では 4.0という小さな臨界 Reynolds 数が求められることはよく知られている。Garg [12]は、ジェットの軸を横切って積分された時間平均の攪乱運動エネルギーに基づく増幅率を計算し、臨界 Reynolds 数が 4.0から 21.6 に増加することを導いた。しかしながら、これは、Saric と Nayfeh [10] と同様な増幅率の定義を用いて

得られた Garg と Round [11]の結果とは全く相反する結果である。このように、自由流では増幅率の定義に用いる攪乱量によってその安定特性は著しく異なる結果となるようである。したがって、実験値との定量的な比較の際には、実験で観測されたのと同じ攪乱量に基づく増幅率を使わなければならないことになる。上述のような非平行安定理論の現状については、Drazinと Reid [14] の著書に述べられており、さらに詳しい解説が藤村 [15]によってなされている。

本章では、Gaster [9] の理論に従い、摂動展開における各項のオーダ評価を行って準平行流近似に基づく Orr-Sommerfeld 方程式と攪乱エネルギー方程式の解を試行解（第１近似解）とする逐次近似法を用いて平面プルームの非平行安定性を解析する。この解析では、流れ方向（ｘ方向）座標の関数として固有関数を決定でき、プルーム基礎流の下流方向の変化がその安定特性に及ぼす影響を評価できる。[16] Prandtl 数 Pr ＝0.7 に対して得られた数値計算結果を第３章の実験結果と比較する。

4．2　解析

流れ関数$\Psi(x,y)$と温度$T(x,y)$によって記述される水平線熱源上の二次元定常プルーム（平面プルーム）の安定性を考える。ここで、xは熱源を原点とする鉛直方向座標、yは水平方向座標である（第2章、図 2.1参照）。基礎流に微小攪乱を重ね合せる通常の線型安定理論の手順に従うと、攪乱を伴う流れの流れ関数と温度は

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\phi}(x,y,\tau) &= \Psi(x,y) + \phi(x,y,\tau), \\ \tilde{t}(x,y,\tau) &= T(x,y) + t(x,y,\tau)\end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

と書ける。ここに、τは時間である。式 (4.1)を、Boussinesq近似を行った Navier-Stokes方程式とエネルギー方程式に代入し、基礎流に対する方程式を差し引き、攪乱量についての非線型項を無視すると、

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\Delta\phi) + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\Delta\Psi)\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

$$-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\Delta\phi) - \frac{\partial}{\partial y}(\Delta\Psi)\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$= g\beta^*\frac{\partial t}{\partial y} + \nu\Delta^2\phi, \qquad (4.2)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial y}$$

$$-\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x} = \kappa\Delta t \qquad (4.3)$$

の攪乱についての方程式が得られる。ここで、gは重力加速度、β^*は体膨張係数、νは動粘性係数、κは温度伝導率であり、$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$である。

初期の攪乱がx_0の位置にあるとし、解を$x > x_0$について求める。次の新しい座標（ξ, η）を導入する：[9]

$$\xi = \frac{x}{x_0}, \qquad \eta = \frac{y}{x}G^* = \frac{y}{\lambda G_0^{2/3}\xi^{2/5}} . \qquad (4.4)$$

ここで、

$$G^* \equiv \left(\frac{g \beta^* x^3 Q}{k \nu^2} \right)^{1/5} = G_0 \, \xi^{3/5}, \tag{4.5}$$

$$\lambda = \left(\frac{k \nu^2}{g \beta^* Q} \right)^{1/3} \tag{4.6}$$

である。ただし、G^* は変形 Grashof数、kは熱伝導率、Qは熱源の単位長さあたり単位時間に発生する熱量である。また、G_0 は $x = x_0$ での G^* の値である。ここで用いる無次元変数と第２章で用いたものとの違いについては、付録Ⅱに示す。

式 (4.4)で与えられる（ξ, η）を使うと、空間微分は

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\lambda G_0^{5/3}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{2}{5} \frac{\eta}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\lambda G_0^{2/3} \xi^{2/5}} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

に変換される。平面プルームについて、基礎流の流れ関数と温度は、境界層の高次項を含めて、

$$\Psi = \nu \{ G_0 \, \xi^{3/5} f_0(\eta) + f_1(\eta) + O(G_0^{-2/3}) \}, \tag{4.7}$$

$$T - T_\infty = \left(\frac{Q}{k} \right) (G_0 \, \xi^{3/5})^{-1} \{ h_0(\eta) + (G_0 \, \xi^{3/5})^{-1} h_1(\eta) + O(G_0^{-5/3}) \} \tag{4.8}$$

の級数形で書ける。[6] ここで、T_∞ は周囲の流体温度（一定）である。上式の f_0, f_1, h_0, h_1 を支配する方程式については付録Ⅰ参照。

攪乱については、次の形の一定周波数解を求める：

$$\psi = \nu G_0 \, \xi^{3/5} \phi(\xi, \eta) \exp(i\theta), \tag{4.9}$$

$$t = \left(\frac{Q}{k} \right) (G_0 \, \xi^{3/5})^{-1} s(\xi, \eta) \exp(i\theta), \tag{4.10}$$

$$\theta = G_0 \int_1^{\xi} \xi^{-2/5} \alpha(\xi) d\xi - \beta\tau . \tag{4.11}$$

ここで、βは攪乱の無次元振動数（実数）、αは分離パラメータとしての無次元波数（複素数）、τは無次元時間である。これらは、長さと時間のスケールとして、それぞれ$\lambda G_0^{2/3}\xi^{2/5}$，$\lambda^2 G_0^{1/3}\xi^{1/5}/\nu$　で無次元化されたものである。したがって、αの実部はプルームの局所厚さに基づく波長を与える。

式 (4.7)から (4.10) を方程式 (4.2)，(4.3) に代入すると、

$$\begin{aligned}
L_1 \phi &+ (G_0 \xi^{3/5})^{-1}\{ Ds - (\beta - 3\alpha f_0') (\xi \frac{d\alpha}{d\xi} - \frac{2}{5}\alpha)\phi \\
&- (2\alpha\beta - 3\alpha^2 f_0' - f_0''')(\xi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \frac{2}{5}\eta D\phi + \frac{3}{5}\phi) \\
&- i\alpha [f_1'(D^2 - \alpha^2) - f_1'''] \phi \\
&+ \frac{1}{5}[(f_0'' + 2\eta f_0''') D\phi + (3 f_0 - 2\eta f_0')(D^2 - \alpha^2) D\phi] \\
&- f_0' [\xi D^2(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}) - \frac{2}{5}\eta D^3 \phi - \frac{1}{5} D^2 \phi] \} = O(G_0^{-5/3}),
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
L_2 s &+ i\alpha h_0' \phi \\
&- (G_0 \xi^{3/5})^{-1} \{\xi (f_0' \frac{\partial s}{\partial \xi} - h_0' \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) + i\alpha(f_1' s - h_1' \phi) \\
&- \frac{3}{5}(h_0 D\phi + h_0' \phi + f_0 Ds + f_0' s) \} = O(G_0^{-5/3})
\end{aligned} \tag{4.13}$$

のϕ，sに対する方程式が得られる。ここで、微分オペレータL_1，L_2 は

$$\left.\begin{aligned}
L_1 &\equiv (G_0 \xi^{3/5})^{-1} (D^2 - \alpha^2)^2 - i\alpha[(f_0' - \frac{\beta}{\alpha}) (D^2 - \alpha^2) - f_0'''], \\
L_2 &\equiv (Pr\, G_0 \xi^{3/5})^{-1} (D^2 - \alpha^2) - i\alpha (f_0' - \frac{\beta}{\alpha})
\end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

であり、$' \equiv d/d\eta$, $D \equiv \partial / \partial \eta$, また $Pr \equiv \nu / \kappa$ は Prandtl数である。

準平行流理論に基づく第２章の平面プルームの安定計算から、対称攪乱よりも反対称攪乱の方がずっと大きな不安定の増幅率をとるという結果が得られ、しかも第３章の実験から、対称攪乱は下流まで維持できず、結局は反対称攪乱となることが分ったので、本章では、ϕ が偶関数、s が奇関数の反対称攪乱のみを考えることにする。したがって、攪乱に対する境界条件は

$$\left.\begin{array}{l} D\phi(0) = D^3\phi(0) = s(0) = 0, \\ \phi(\infty),\ D\phi(\infty),\ s(\infty) \to 0 \end{array}\right\} \qquad (4.15)$$

で与えられる。

4．3　解法

方程式（4.12），（4.13）はいくつかのG_0^{-1}のオーダーの項が無視されない限り変数分離できない。このため、解を

$$\left.\begin{aligned}\phi(\xi,\eta)&=A(\xi)\,\phi_0(\eta;\xi)+\varepsilon\,\phi_1(\xi,\eta)+o(\varepsilon),\\ s(\xi,\eta)&=A(\xi)\,s_0(\eta;\xi)+\varepsilon\,s_1(\xi,\eta)+o(\varepsilon)\end{aligned}\right\}\quad(4.16)$$

の形に求める。ここで、Aは波数と固有関数の下流方向の変化を考慮するために導入されたξについての弱い依存性の関数（複素振幅関数）で、今のところ未知の関数である。式（4.16）の右辺第1項は、G_0^{-1}のオーダーの項を無視することによって得られるので、εはG_0^{-1}のオーダーと考えられる。しかしながら、準平行流理論から導かれる Orr-Sommerfeld 方程式と攪乱エネルギー方程式の解を第1近似解とするためには、方程式(4.12)の粘性項と攪乱温度の相互作用を表す浮力項、および方程式(4.13)の拡散項を第1近似においては残さねばならない。式（4.16）を方程式(4.12)，(4.13)に代入し、$\varepsilon=(G_0\,\xi^{3/5})^{-1}$とおくと、以下の方程式が得られる：

$O(\varepsilon^0)$で

$$\mathbf{L}\Phi_0=0,\quad(4.17)$$

$O(\varepsilon^1)$で

$$\mathbf{L}\Phi_1=\mathbf{M}.\quad(4.18)$$

ここで、

$$\mathbf{L}\equiv\begin{pmatrix}L_1 & G_0^{-1}\,\xi^{-3/5}D\\ i\alpha h_0' & L_2\end{pmatrix},\quad(4.19)$$

$$\Phi_j\equiv\begin{pmatrix}\phi_j\\ s_j\end{pmatrix},\ (j=0,1),\quad(4.20)$$

$$\mathbf{M}\equiv\begin{pmatrix}F_1A+F_2\,\xi\dfrac{dA}{d\xi}\\ F_3A+F_4\,\xi\dfrac{dA}{d\xi}\end{pmatrix}\quad(4.21)$$

である。ただし、F_1, F_2, F_3, F_4 は以下の式で与えられる：

$$
\left.
\begin{aligned}
F_1 &= (2\alpha\beta - 3\alpha^2 f_0' - f_0''')\left(\xi\frac{\partial\phi_0}{\partial\xi} - \frac{2}{5}\eta D\phi_0 + \frac{3}{5}\phi_0\right) \\
&\quad + (\beta - 3\alpha f_0')\left(\xi\frac{d\alpha}{d\xi} - \frac{2}{5}\alpha\right)\phi_0 + i\alpha\left[f_1'(D^2-\alpha^2) - f_1'''\right]\phi_0 \\
&\quad - \frac{1}{5}\left[(f_0'' + 2\eta f_0''')D\phi_0 + (3f_0 - 2\eta f_0')(D^2-\alpha^2)D\phi_0\right] \\
&\quad + f_0'\left[\xi D^2\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial\xi}\right) - \frac{2}{5}\eta D^3\phi_0 - \frac{1}{5}D^2\phi_0\right], \\
F_2 &= (2\alpha\beta - 3\alpha^2 f_0' - f_0''')\phi_0 + f_0' D^2\phi_0, \\
F_3 &= \xi\left(f_0'\frac{\partial s_0}{\partial\xi} - h_0'\frac{\partial\phi_0}{\partial\xi}\right) + i\alpha(f_1' s_0 - h_1'\phi_0) \\
&\quad - \frac{3}{5}(h_0 D\phi_0 + h_0'\phi_0 + f_0 Ds_0 + f_0' s_0), \\
F_4 &= f_0' s_0 - h_0'\phi_0.
\end{aligned}
\right\} \quad (4.22)
$$

境界条件は式 (4.15) より、

$$
\left.
\begin{aligned}
& D\phi_j(0) = D^3\phi_j(0) = s_j(0) = 0, \\
& \phi_j(\infty),\ D\phi_j(\infty),\ s_j(\infty) \to 0, \quad (j = 0,\ 1)
\end{aligned}
\right\} \quad (4.23)
$$

となる。$G^* = G_0\,\xi^{3/5}$ であるので、方程式 (4.17) と境界条件 (4.23) は基礎流の準平行流近似に基づく通常の線型安定問題であり、方程式 (4.18) が安定性に及ぼす非平行効果を与える。

ところで、非同次方程式 (4.18) の同次解を与える $\mathbf{L}\Phi_1 = 0$ は方程式 (4.17) と全く同一であり、Φ_0 と Φ_1 の境界条件も同一である。したがって、方程式 (4.18) と境界条件 (4.23) からなる非同次問題は、方程式 (4.18) の非同次項がある可解条件を満たさない限り解を持たない。この可解条件は、随伴関数 Φ^* を利用して

$$
\int_0^\infty {}^{T}\Phi^* \mathbf{M}\, d\eta = 0, \quad (4.24)
$$

で与えられる。ここで、$^{T}\mathbf{\Phi}^* \equiv (\phi^*, s^*)$ は$\mathbf{\Phi}^*$の転置を示す。$\mathbf{\Phi}^*$は随伴問題の固有値αに対応する固有関数であるので、随伴方程式

$$\mathbf{L}^* \mathbf{\Phi}^* = 0, \tag{4.25}$$

と、式（4.23）と同等な境界条件

$$\left.\begin{array}{l} D\phi^*(0) = D^3 \phi^*(0) = s^*(0) = 0, \\ \phi^*(\infty),\ D\phi^*(\infty),\ s^*(\infty) \to 0 \end{array}\right\} \tag{4.26}$$

を満たす。ここで、

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{L}^* \equiv \begin{pmatrix} L_1^* & i\alpha h_0' \\ -G_0^{-1}\ \xi^{-3/5} D & L_2 \end{pmatrix}, \\ L_1^* \equiv (G_0\ \xi^{3/5})^{-1}\ (D^2-\alpha^2)^2 - i\alpha[(f_0' - \frac{\beta}{\alpha})(D^2-\alpha^2) + 2f_0'' D] \end{array}\right\} \tag{4.27}$$

である。随伴問題は元来の問題と同じ固有値を持つ。非同次方程式（4.18）は、可解条件（4.24）を満たさない限り、境界条件（4.23）を満たす解を持たない。したがって、可解条件（4.24）からAについての

$$\frac{\xi}{A}\frac{dA}{d\xi} = \frac{-\int_0^\infty (F_1\ \phi^* + F_3\ s^*)\, d\eta}{\int_0^\infty (F_2\ \phi^* + F_4\ s^*)\, d\eta} \tag{4.28}$$

という式が得られる。A（ξ）は、純粋の平行流では定数となるが、これは準平行流解の第１補正であり、すべてのξ（＞１）に対して、式（4.28）から求められる。

式（4.28）から$dA/d\xi$を求めるためには、$\partial\Phi_0/\partial\xi$とそれを支配する方程式の中に出てくる　$d\alpha/d\xi$が既知でなければならない。このため、方程式（4.17）をξで微分した方程式

$$\mathbf{L}\left(\xi\frac{\partial\Phi_0}{\partial\xi}\right)=\begin{pmatrix} g_1+\xi\dfrac{d\alpha}{d\xi}g_2 \\ \\ g_3+\xi\dfrac{d\alpha}{d\xi}g_4 \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

を作り、同じく、式（4.23）をξで微分した境界条件の下で解く。ここで、g_1, g_2, g_3, g_4はϕ_0とs_0の既知関数である。再び、この非同次問題に対しては、可解条件から　$d\alpha/d\xi$は

$$\xi\frac{d\alpha}{d\xi}=\frac{-\displaystyle\int_0^\infty(g_1\phi^*+g_3 s^*)\,d\eta}{\displaystyle\int_0^\infty(g_2\phi^*+g_4 s^*)\,d\eta} \tag{4.30}$$

により求められる。この　$\xi d\alpha/d\xi$を用いて、$\xi\partial\Phi_0/\partial\xi$は方程式（4.29）を例えば数値計算により解くことができる。

4．4　数値計算の手順

最初に、同次線型微分方程式（4.17）を境界条件（4.23）の下で、第2章と同じ方法を用いて解く。この解は3組の線型独立な解の和として

$$\left.\begin{aligned} \Phi_0 &= \Phi_{01} + B_2(\xi)\,\Phi_{02} + B_3(\xi)\,\Phi_{03}\,, \\ \Phi_{0j} &\equiv \begin{pmatrix} \phi_{0j} \\ s_{0j} \end{pmatrix}, \quad (j = 1,\ 2,\ 3) \end{aligned}\right\} \tag{4.31}$$

と書ける。ここで、Φ_{01}の係数を1とする規格化条件を用いている。$\eta \to \infty$での独立な解Φ_{0j}（j=1, 2, 3)の漸近形は第2章で与えられている。ただし、無次元化の相違から数値は異なる（付録I参照）。これらの漸近解を方程式（4.17）の初期値としてプルーム外縁$\eta = \eta_e$から中心面$\eta = 0$まで数値積分する。ある一つの Prandtl数Prについて、β, $G^*(= G_0\ \xi^{3/5})$を与え、α（複素数）の数値を推定し、Φ_{0j}（j=1, 2, 3）を4次の Runge-Kutta法を用いて計算する。$\eta = 0$でのΦ_{0j}（j=1, 2, 3)を用いて境界条件　$D\phi_0(0) = D^3\ \phi_0(0) = 0$から求められた複素係数$B_2$, B_3に対して残りの条件$s_0(0) = 0$は、αが固有値をとるときのみ満足される。このαの推定値は、第2章同様、残りの境界条件に Newton-Raphson 法を適用し、繰返し変えていく。この過程は$|s_0(0)| < 10^{-5}$を満たすまで繰返された。

次に、上述のようにして求められた固有値αを用いて、随伴関数Φ^*を得るために方程式（4.25）を数値積分する。随伴問題は同じ固有値を持つので、この場合、繰返しの過程は必要ではない。したがって、Φ^*の計算は固有値の精度をチェックするために用いられた。

式（4.30）から　$\xi d\alpha/d\xi$を計算し、$\xi\partial\Phi_0/\partial\xi$を求めるために非同次方程式(4.29)を数値積分する。以上のα, $\xi d\alpha/d\xi$, Φ_0, Φ^*および$\xi\partial\Phi_0/\partial\xi$の数値を用いて、式（4.28）から（$\xi$／A)dA/d$\xi$を計算する。すべての計算は倍精度で行い、きざみ値$\Delta\eta$と$\eta_e$が計算結果に及ぼす影響を調べた。主として、$\Delta\eta = 0.1$, $\eta_e = 10$（小さなβG^*の値については$\eta_e = 24$）の数値を用いた。

4．5　増幅率と波数

平行流では固有関数は下流の位置ξに依存せず、攪乱流れ関数あるいは温度の指数部から、一意的に波数と増幅率は決まる。しかしながら、非平行流に対してはこれらのパラメータは一意的に定義できない。そこでは、固有関数はξとともにゆっくりと変化し、そのために、波数および増幅率は、それらの定義にどのような攪乱量を用いるかによって異なってくる。これらの量が変るとG$_0^{-1}$ のオーダーだけ違った結果が生じる。

攪乱速度$u=\partial\psi/\partial y$と攪乱温度$t$の振幅はそれぞれ、

$$\left.\begin{aligned} |u| &= \left(\frac{\nu}{\lambda}\right) G_0^{1/3}\xi^{1/5}\,[\,|A||D\phi_0|\exp(-\theta_i)+O(G_0^{-1}),\\ |t| &= \left(\frac{Q}{k}\right)(G_0\,\xi^{3/5})^{-1}[\,|A||s_0|\exp(-\theta_i)+O(G_0^{-1}) \end{aligned}\right\} \quad (4.32)$$

によって与えられる。ここで、θ_iはθの虚部である。u，tの振幅に基づく増幅率を、それぞれ　$O(G_0^{-1})$まで

$$K(u) \equiv \frac{\xi^{2/5}}{G_0}\frac{\partial}{\partial\xi}\ln|u|$$

$$=-\alpha_i+(G_0\,\xi^{3/5})^{-1}\left[\left(\frac{\xi}{A}\frac{dA}{d\xi}\right)_r+\left(\frac{\xi}{D\phi_0}\frac{\partial D\phi_0}{\partial\xi}\right)_r+\frac{1}{5}\right], \quad (4.33)$$

$$k(t) \equiv \frac{\xi^{2/5}}{G_0}\frac{\partial}{\partial\xi}\ln|t|$$

$$=-\alpha_i+(G_0\,\xi^{3/5})^{-1}\left[\left(\frac{\xi}{A}\frac{dA}{d\xi}\right)_r+\left(\frac{\xi}{s_0}\frac{\partial s_0}{\partial\xi}\right)_r-\frac{3}{5}\right] \quad (4.34)$$

と定義する。ここで、添字 r，i はそれぞれ実部、虚部を示す。式 (4.33)，(4.44)の右辺第１項が準平行流理論によって与えられる増幅率（$-\alpha_i$）に一致するように、増幅率の定義には$\xi^{2/5}/G_0$ の項がかけられている。上式から、$\alpha_i=0$すなわち準平行流理論によって決まる中立点においても、高次の効果により、なお攪乱の増大、減衰があることが分る。$O(G_0^{-1})$の第２項はηに依存するので、増幅率を決めるた

めに、これらの項の値はある位置、例えば $|u|$, $|t|$ が最大となる位置で計算されねばならない。

基礎流の状態が下流方向に変化している場合にはその基礎流に相対的な振幅の尺度を導入すると便利である。[17] uとtの相対振幅をそれぞれ,

$$|\hat{u}| \equiv |u|/U_0, \quad |\hat{t}| \equiv |t|/(T_0 - T_\infty) \tag{4.35}$$

とする。ただし、U_0, T_0 はそれぞれ、プルーム中心面（$\eta=0$）上の基礎流の速度のx成分と温度である。したがって、$O(G_0^{-1})$まで

$$K(\hat{u}) = -\alpha_i + (G_0\,\xi^{3/5})^{-1}\left[\left(\frac{\xi}{A}\frac{dA}{d\xi}\right)_r + \left(\frac{\xi}{D\phi_0}\frac{\partial D\phi_0}{\partial \xi}\right)_r\right], \tag{4.36}$$

$$K(\hat{t}) = -\alpha_i + (G_0\,\xi^{3/5})^{-1}\left[\left(\frac{\xi}{A}\frac{dA}{d\xi}\right)_r + \left(\frac{\xi}{s_0}\frac{\partial s_0}{\partial \xi}\right)_r\right] \tag{4.37}$$

のように相対振幅に基づく増幅率が得られる。

さらに、安定性を特徴づけるための攪乱速度強度（運動エネルギー）および攪乱温度強度積分を用いる。これによって、中立曲線の定義におけるあいまいさを除くことができる。これらの積分量は上述の振幅に比べて測定は困難であるが、物理的に意味あるパラメータである。それらは

$$E \equiv \int_0^\infty (\overline{u^2} + \overline{v^2})\,dy, \quad H \equiv \int_0^\infty \overline{t^2}\,dy \tag{4.38}$$

で定義される。ここで、vは攪乱速度のy成分であり、$\overline{}$は1周期に渡る平均を意味する。これらの強度積分に基づく増幅率は、$O(G_0^{-1})$まで

$$K(E) \equiv \frac{\xi^{2/5}}{2G_0}\frac{d}{d\xi}\ln E$$

$$= -\alpha_i + (G_0\,\xi^{3/5})^{-1}\left[\left(\frac{\xi}{A}\frac{dA}{d\xi}\right)_r + \frac{\xi}{2e}\frac{de}{d\xi} + \frac{2}{5}\right], \tag{4.39}$$

$$K(H) \equiv \frac{\xi^{2/5}}{2G_0}\frac{d}{d\xi}\ln H$$

$$= -\alpha_i + (G_0\ \xi^{3/5})^{-1}\ [(\frac{\xi}{A}\frac{dA}{d\xi})_r + \frac{\xi}{2h}\frac{dh}{d\xi} - \frac{2}{5}] \qquad (4.40)$$

のように定義される。ここで、

$$e \equiv \int_0^\infty (\ |D\phi_0|^2 + |\alpha|^2\ |\phi_0|^2\ )d\eta, \qquad h \equiv \int_0^\infty |s_0|^2\ d\eta \qquad (4.41)$$

である。ここでも、相対的な攪乱速度強度と攪乱温度強度積分を

$$\hat{E} \equiv E \Big/ \int_0^\infty (\frac{\partial \Psi}{\partial y})^2 dy, \qquad \hat{H} \equiv H \Big/ \int_0^\infty (T - T_\infty)^2\ dy \qquad (4.42)$$

のように定義すると、増幅率は $O(G_0^{-1})$まで

$$K(\hat{E}) = -\alpha_i + (G_0\ \xi^{3/5})^{-1}\ [(\frac{\xi}{A}\frac{dA}{d\xi})_r + \frac{\xi}{2e}\frac{de}{d\xi}], \qquad (4.43)$$

$$K(\hat{H}) = -\alpha_i + (G_0\ \xi^{3/5})^{-1}\ [(\frac{\xi}{A}\frac{dA}{d\xi})_r + \frac{\xi}{2h}\frac{dh}{d\xi}] \qquad (4.44)$$

となる。

増幅率だけでなく波数に対する高次の補正も考えることにする。uとtの位相はそれぞれ、

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{ph}\ u &= \theta_r + \arg A + \arg D\phi_0 + O(G_0^{-1}), \\ \mathrm{ph}\ t &= \theta_r + \arg A + \arg s_0 + O(G_0^{-1}) \end{aligned}\right\} \qquad (4.45)$$

で与えられる。ここで、arg は偏角を示す。波数は攪乱位相をξで微分したものであるから、uとtについての波数は、$O(G_0^{-1})$まで

$$N(u) \equiv \frac{\xi^{2/5}}{G_0}\frac{\partial}{\partial \xi} \mathrm{ph}\ u$$

$$= \alpha_r + (G_0\ \xi^{3/5})^{-1}\ [(\frac{\xi}{A}\frac{dA}{d\xi})_i + (\frac{\xi}{D\phi_0}\frac{\partial D\phi_0}{\partial \xi})_i], \qquad (4.46)$$

$$N(t) \equiv \frac{\xi^{2/5}}{G_0}\frac{\partial}{\partial \xi} \mathrm{ph}\ t$$

$$= \alpha_r + (G_0\ \xi^{3/5})^{-1}\ [(\frac{\xi}{A}\frac{dA}{d\xi})_i + (\frac{\xi}{s_0}\frac{\partial s_0}{\partial \xi})_i] \qquad (4.47)$$

のように定義できる。式 (4.46),(4.47)の右辺第１項は、準平行流理論から求められる波数α_r に一致する。このように、波数もまた座標ηと攪乱量に依存する。

4．6　結果と議論

Prandtl 数 Pr ＝0.7 （空気）の場合について、前節で定義した種々の増幅率を数値計算により求めた。ここで、式（4.33)，(4.34)，(4.36)，(4.37) の、振幅に対する増幅率についてはそれらの振幅が最大となる位置ηで計算した。これらの増幅率から無次元振動数βと変形 Grashof数G* との関係を表す特性面（β－G* 面）内の、安定領域と不安定領域を分離する中立曲線を求めることができる。絶対的な攪乱量としての振幅 $|u|$，$|t|$ と攪乱速度強度積分E，攪乱温度強度積分Hに基づく中立曲線を図 4.1 に、それらの相対的な量 $|\hat{u}|$，$|\hat{t}|$，$\hat{E}$，$\hat{H}$ に基づく中立曲線を図 4.2 に示す。これらの図には、比較のために、α_i ＝0に対応する準平行流理論による中立曲線、Haaland と Sparrow [3] および Hieber と Nash [6] の非平行流理論による

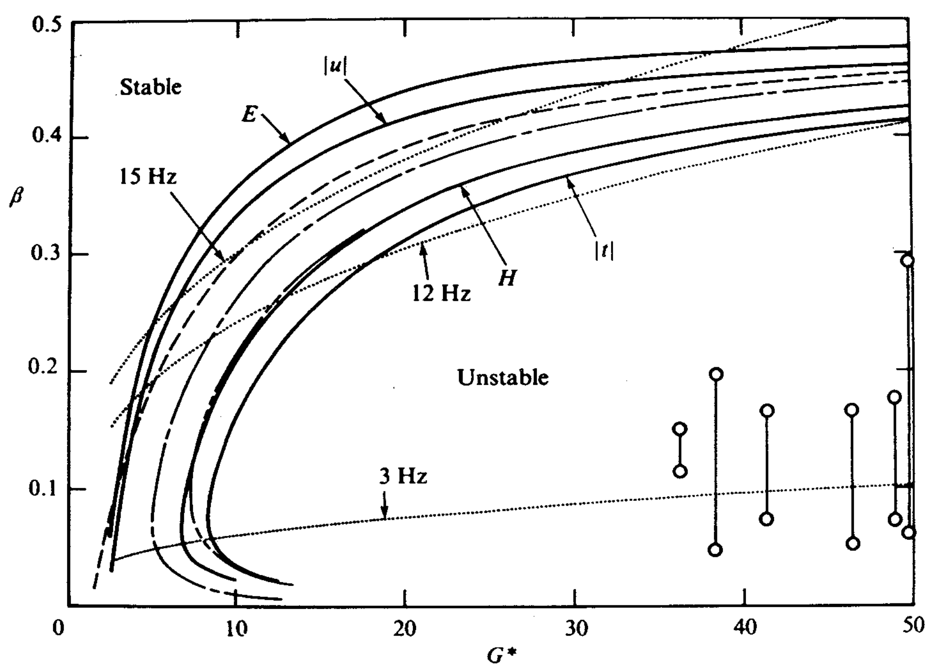


図 4.1　振幅と積分パラメータに基づく中立曲線（Pr=0.7）
－－－：準平行流理論；―――－――：Haaland & Sparrow [3]；
―――－－―――：Hieber & Nash [6] の中立曲線
……：一定周波数攪乱の経路（Pera & Gebhart [1] の実験条件，Q＝56.3 W/m）
○：高周波の自然発生攪乱温度（第３章の測定結果）

る中立曲線が描いてある。

図 4.1において、振幅 |u| と強度積分Eに基づく中立曲線は、極めて小さなG* の領域を除いては、準平行流理論の安定領域にある。このことは、|u| とEについて言えば、プルームの境界層の成長によって安定領域が減少することを示している。一方、|t| とHについては、安定領域が増加することを示している。さらに |t| とHに基づく中立曲線は、それぞれ臨界 Grashof数$G^*_{crit}\fallingdotseq 6.7$ と 8.4 を与えている。このように小さなG* では、主に、次の二つの問題が起る。一つは、安定解析に用いた基礎流が妥当かどうかであり、もう一つは、攪乱方程式 (4.12), (4.13) の解に対してなされた近似が妥当であるかどうかである。ここで用いた近似は、弱非平行流のプルームに対して、$O(G^{*-1})$まで妥当なものであり、意味のある結果が得られるためには $G^* \gg 1$ であることが必要となる。しかしながら、$G^* \fallingdotseq 6$ という小さな Grashof数においてでさえ、Forstromと Sparrow [18] の層流温度分布の測定結果は

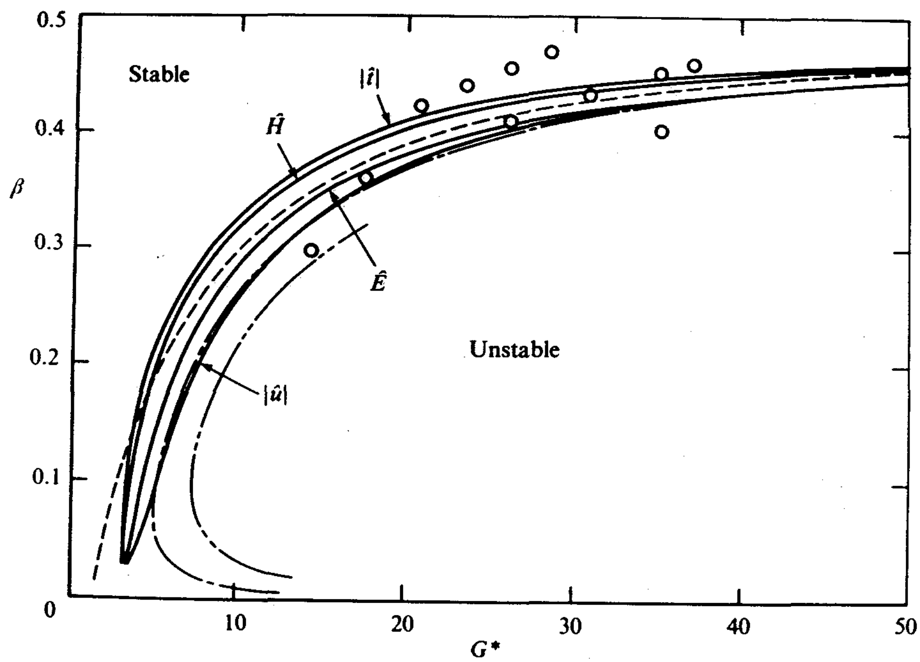


図 4.2 基礎流に相対的な振幅と積分パラメータに基づく中立曲線 (Pr=0.7)
– – – : 準平行流理論；——— – ———: Haaland & Sparrow [3]；
——— – – ———: Hieber & Nash [6] の中立曲線
○ : 中立攪乱温度のデータ（第3章の測定結果）

通常の境界層近似に基づく数値解に非常によく一致している。また、Bickley ジェットの安定解析において、Tatsumi と Kakutani [19] によって示されたように、低 Reynolds 数での安定特性は基礎流の速度分布の積分にのみ依存する。このようなことから、ここで得られた、小さな Grashof数での安定特性は、Haaland と Sparrow や Hieber と Nash のものと違って、それほど厳密なものとくい違ってはいないと考えられる。彼らは攪乱波の非平行効果を正しく取り扱っていない、例えば、彼らの解析では式 (4.16) の振幅関数A(ξ) は考慮されていない。

一定周波数の攪乱の経路は、これまでと同様に、$\beta G^{*-1/3}$ =const.によって与えられる。この経路が、Peraと Gebhart [1] の実験条件の下で、図 4.1にプロットされている。Peraと Gebhartは、人工的に導入された攪乱の観察を熱線風速計を用いて行い、12 Hz 以上の周波数の攪乱が下流では検出されないことを示した。しかしながら彼らによって観察されたものが攪乱速度のx成分であるかどうかは明らかではないので、理論結果との定量的な比較はできない。また、図 4.1には、G^* ≒40 (第2章の記号では、G≒100) で現れる高周波の自然発生攪乱についての第3章の測定データがプロットされている。これらの最大および最小周波数のデータはいずれも攪乱が増大する不安定領域に限られている。同様な結果は、Billと Gebhart [20]によって行われた、平面プルームの乱流遷移についての実験においても得られてはいるが、G^* ≒ 29 (G=68.8) の層流領域においてでさえ、彼らによって示された記録波形はガタガタであり、定常な層流プルームそのものが作られてはいなかったようである。

図 4.2の、基礎流に相対的な攪乱量に基づく中立曲線はいずれも、準平行流理論による中立曲線とあまり差がない。このことは、中立曲線が基礎流の下流方向の変化、すなわち、速度のx成分が $x^{1/5}$ で増加し、温度が $x^{-3/5}$で減少するという変化に強く影響されていることを示している。したがって、第3章の平面プルームの安定性の実験で行ったように、実験結果を準平行流理論の結果と比較する際に、基礎流に相対的な攪乱温度の増大、減衰を安定、不安定の判定基準に用いた方法が妥当であったことが分る。第3章では、基礎流に相対的な攪乱温度の最大振幅の増大、減衰を測定した。この中立攪乱の測定データを再び、図 4.2にプロットした。もしも絶対的な振幅が増大、減衰の測定に用いられたとすれば、これらの中立攪乱のデータは、基礎流温

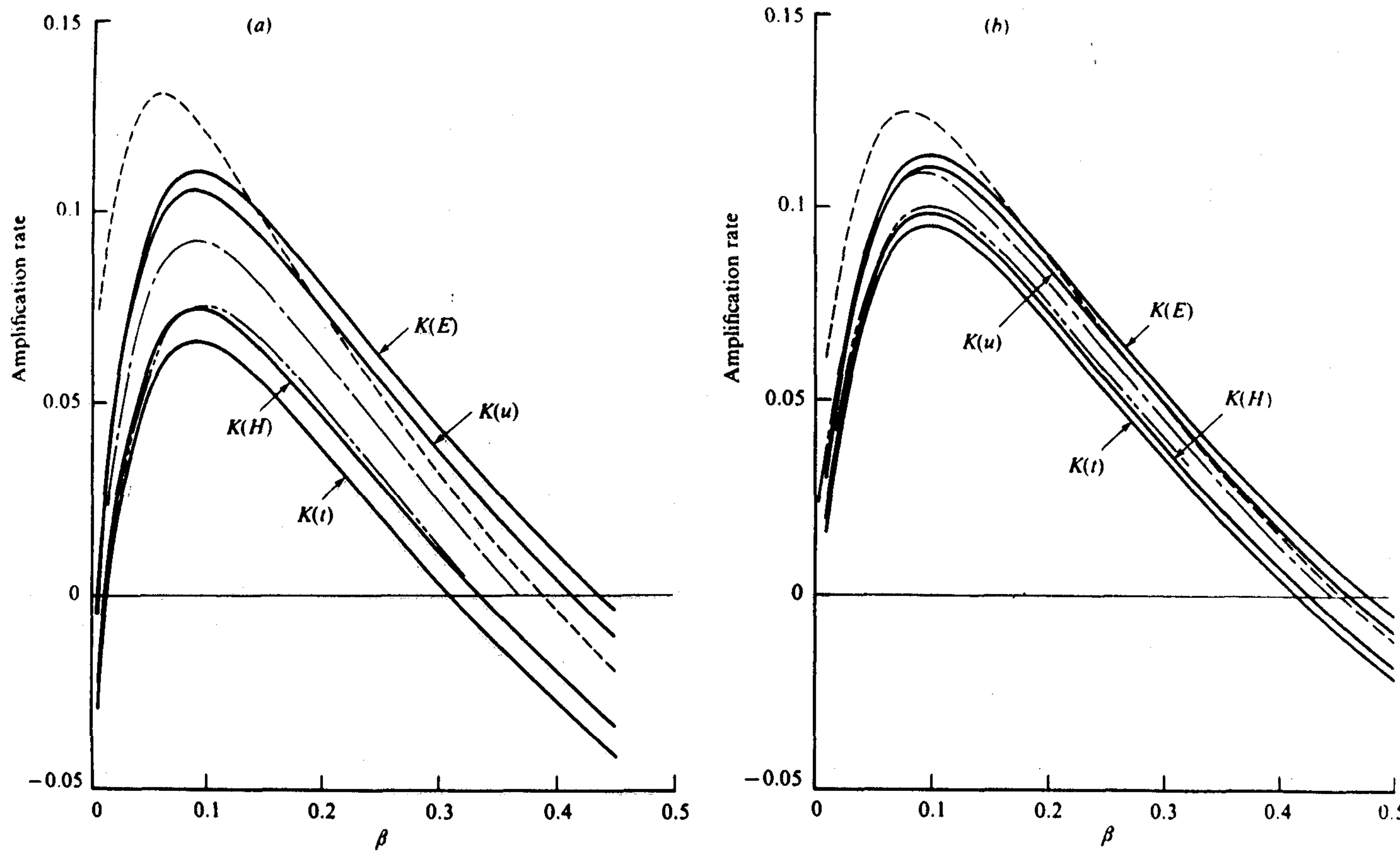


図 4.3　βの関数としての、振幅と積分パラメータについての増幅率 (Pr = 0.7)
(a) $G^* = 20$, (b) $G^* = 50$
− − − : ($-\alpha_i$) ; ——— − ———: Haaland & Sparrow [3] ; ——— − − —: Hieber & Nash [6]

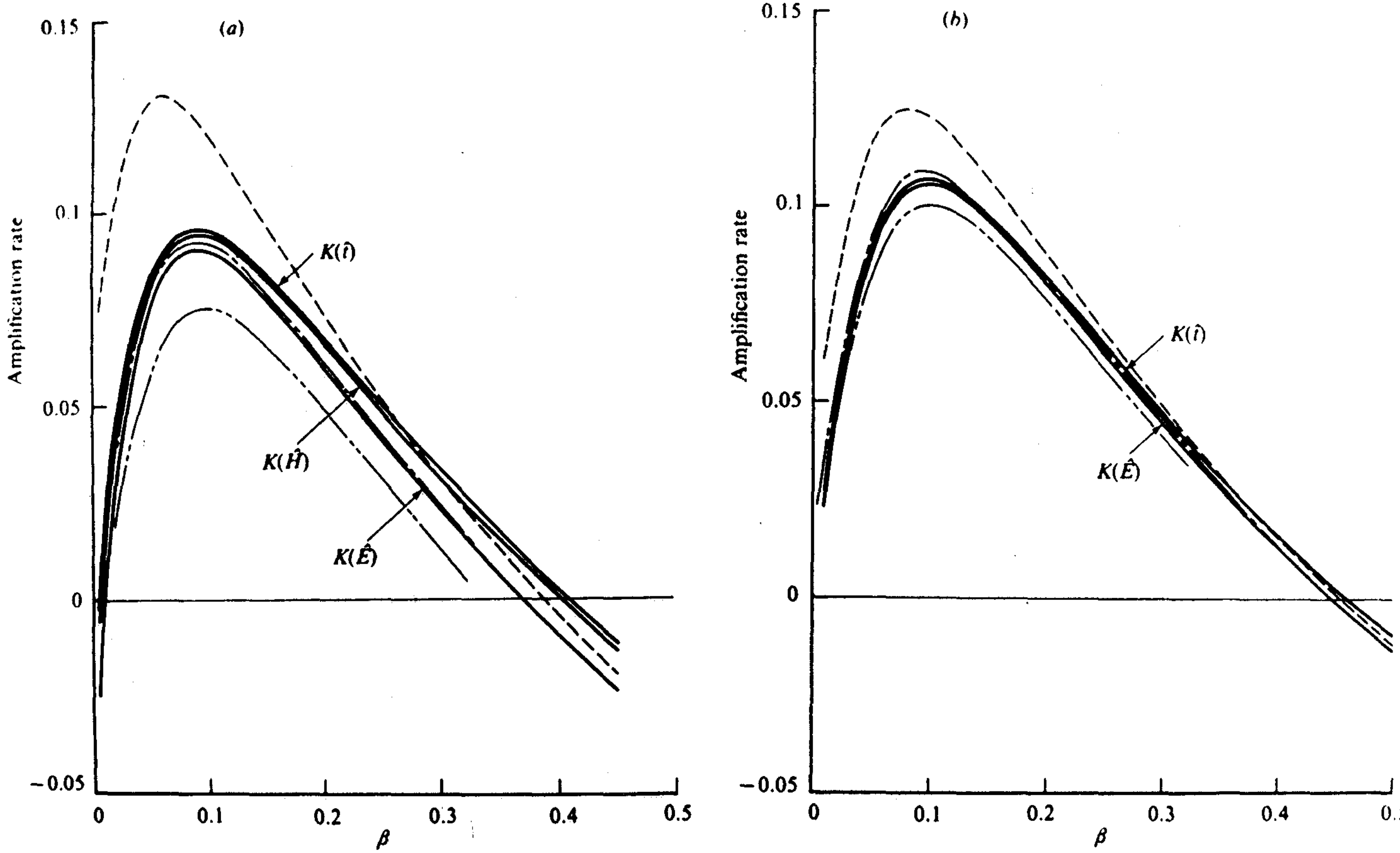


図 4.4　βの関数としての、基礎流に相対的な振幅と積分パラメータについての増幅率（Pr＝0.7）　(a)　G* ＝20，(b)　G* ＝50
－－－：$(-\alpha_i)$，　─ ─ ─：Haaland & Sparrow [3]，　─ - - ─：Hieber & Nash [6]

度の下流方向の減少のために、いずれも減衰攪乱のデータとなるであろう。このときには、図 4.1の |t| に基づく中立曲線とよく一致すると考えられる。このような状況は、準平行流理論だけでなく、Haaland と Sparrowや Hieber と Nash の理論によっても明らかに、説明できない。

絶対量についての種々の増幅率を、βの関数として、図 4.3に示す。ここで、K(u), K(t) は各々の振幅が最大となるηで計算した。高周波領域では、K(E) と K(u) は準平行流理論からの増幅率 ($-\alpha_i$) よりもわずかに大きくなっている。一方、K(H) , K(t) は全周波数領域で$-\alpha_i$ よりも小さい。しかしながら、低周波領域では、どの増幅率も$-\alpha_i$ より小さく、この領域では、プルームの非平行性がより

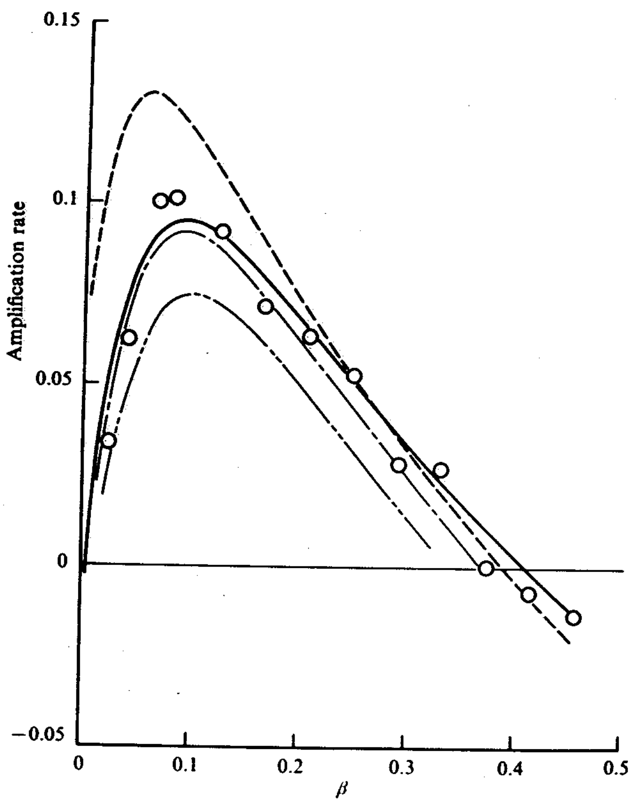


図 4.5 理論増幅率曲線（G* =20, Pr=0.7 ）と実験データの比較
——: $K(\hat{t})$; − − − : $(-\alpha_i)$; —— − —— : Haaland & Sparrow [3];
—— -- ——: Hieber & Nash [6]
○：実験データ G* =19（第３章の測定結果）

顕著にきいている。このことは、その領域が最大の増幅率の点を含んでいるので、攪乱の下流方向の発達を解析するためには重要な結果であると考えられる。

相対量についての種々の増幅率を図 4.4に示す。$K(\hat{E})$ と$K(\hat{t})$ が図 4.4(b) に、さらに$K(\hat{H})$ が図 4.4(a) に描かれている。他の曲線は、それらの描かれている曲線の近傍にある。準平行流理論、Haaland と Sparrowや Hieber と Nash による理論では、図 4.3と 4.4とでは何らの違いも起らない。このように、基礎流に相対的な攪乱量を用いることによって、本章で展開した非平行流理論から得られる増幅率にはほとんど差が現れなくなる。それでもやはり、それらの増幅率は低周波領域では$-\alpha_i$ よりもかなり小さい。$G^*=19$ ($G=45.1$) での攪乱温度の相対振幅の測定から得られた、第３章の増幅率の結果と理論結果 ($G^*=20$) との比較を図 4.5に示す。明らかに、増幅率に対する非平行流理論の第１次補正によって、理論と実験との一致がかなり改良されていることが分る。また、絶対的な振幅がその増幅率を求めるために用いられたならば、増幅率の測定値は約 0.03 だけ小さくなるということに注意すべきである。

$G^*=20$と 50 での、座標ηによる、uとtについての増幅率の変化を図 4.6に、波数の変化を図 4.7に示す。これらの図から、uについての増幅率と波数はηによって緩やかに変化しているが、tについてのそれらは大きく変化し、G^* が減少するにつれ、一層大きく変化している。

二つの、一定周波数の経路に沿う、uとtに基づく波数の下流方向の変化を図 4.8に示す。これらの波数はまた、各々の振幅が最大となる位置ηで計算されたものである。N(u) とN(t) はあまり差がなく、ほとんど等しいが、準平行流理論による波数α_r よりも小さい。このことは，増幅率と同様に，波数に対しても非平行流理論の第１次の補正がこの平面プルームには重要であることを示している。

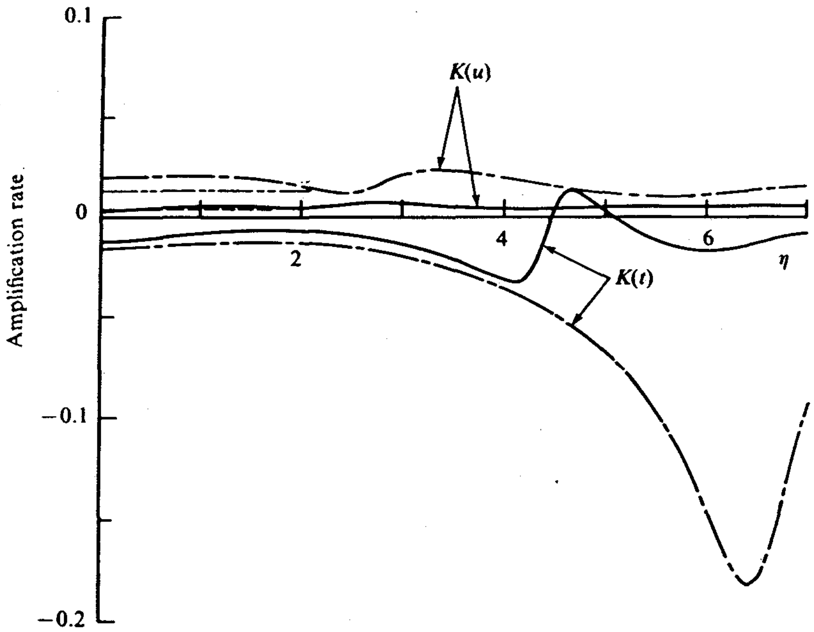


図 4.6　振幅についての増幅率のη分布 (Pr＝0.7)
K(u),K(t) ：———, G* ＝50, β＝0.44 ; —— - ——, G* ＝20, β＝0.35
(-α_i) : - - -, G* ＝50, β＝0.44 ; —— -- —— , G* ＝20, β＝0.35

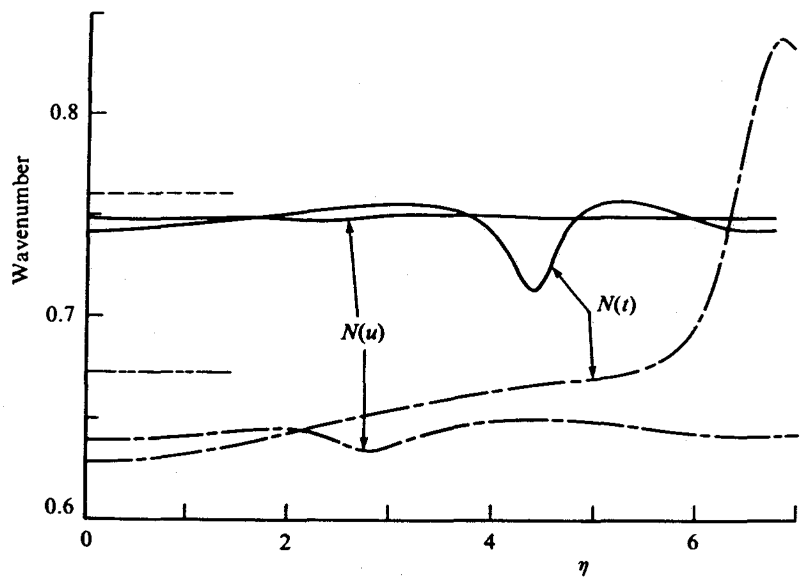


図 4.7　u と t についての波数のη分布 (Pr＝0.7)
N(u),N(t) ：———, G* ＝50, β＝0.44 ; —— - ——, G* ＝20, β＝0.35
α_r : - - -, G* ＝50, β＝0.44 ; —— -- —— , G* ＝20, β＝0.35

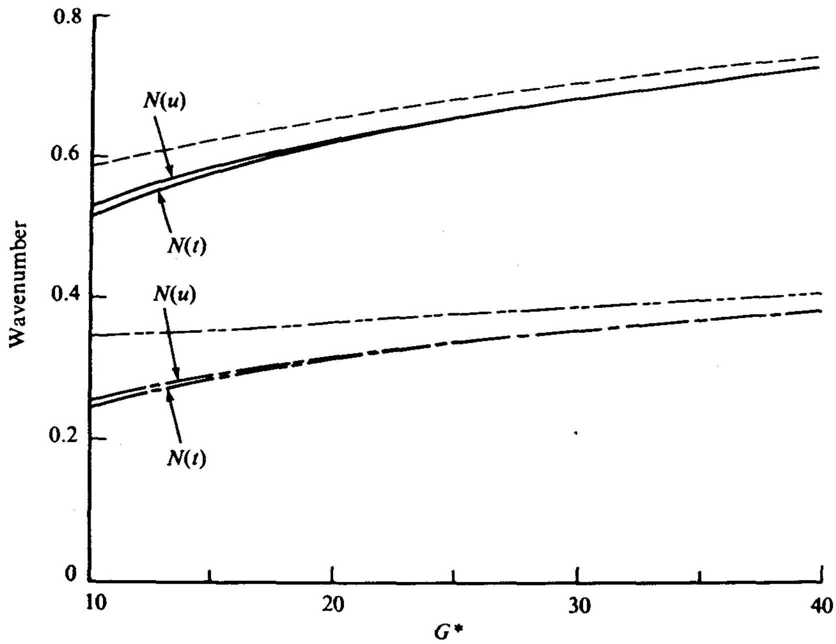


図 4.8　一定周波数の経路に沿う、uとtについての波数の下流方向変化 (Pr＝0.7)
N(u),N(t) ：———, $\beta G^{*-1/3}$ ＝0.1224； —— - ——, 0.04586
α_r ：- - -, $\beta G^{*-1/3}$ ＝0.1224； —— -- —— , 0.04586

4．7　まとめ

平面プルームの線型安定性に及ぼす基礎流の非平行性の影響を、Gasterの方法を用いて理論的に解析し、Prandtl 数が 0.7（空気）の場合について数値計算を行った。基礎流の水平速度成分、下流方向変化および境界層の高次の効果を、そして攪乱波の下流方向変化を考慮した安定特性が得られた。以下に結果を示す。

（1）増幅率（空間的）は下流方向座標だけでなく水平方向座標の関数でもある。さらに、増幅率は、速度成分、温度、運動エネルギーなど、どの攪乱量で定義するかによって変る。したがって、準平行流理論や他の直感的な非平行流理論とは異なり、一意的に中立曲線は決まらない。波数もまた、下流方向座標、水平方向座標および攪乱量の関数である。

（2）中立曲線は、種々の攪乱量に大きく依存し、準平行流理論によって得られる中立曲線との違いは、比較的広い Grashof数の範囲に渡って、顕著である。しかしながら、基礎流に相対的な攪乱量を用いることによって、非平行流理論の中立曲線は、いずれも準平行流理論の中立曲線にかなり近づく。このことは、主に、基礎流の下流方向変化が中立曲線の移動を惹き起しているということを示唆している。第３章の実験結果は、相対的な攪乱量に基づく理論結果の妥当性を確証している。準平行流理論や他の直感的な非平行流理論では、相対的な攪乱量が使われるかどうかによって起る実験データ間の相違を説明することはできない。

（3）相対的な攪乱量を用いても、低周波数領域のいずれの増幅率も準平行流理論の増幅率($-\alpha_i$)よりも小さい。しかしながら、相対量を用いることにより、非平行流理論の各増幅率にはほとんど差がなくなる。増幅率だけでなく波数についても基礎流の非平行性が及ぼす影響は大きい。図 4.5に示すように、非平行流理論の第１次補正で得られる増幅率は実験結果とよく一致する。

付　録　I

基礎流の境界層領域における流れ関数と温度の、高次項を含む級数展開は、それぞれ、式(4.7)，(4.8)によって与えられる。ここで、f_0, h_0 は

$$f_0''' + \frac{3}{5} f_0 f_0'' - \frac{1}{5} f_0'^2 + h_0 = 0, \tag{I-1}$$

$$h_0' + \frac{3}{5} \Pr f_0 h_0 = 0, \tag{I-2}$$

$$f_0(0) = f_0''(0) = f_0'(\infty) = 0, \quad \int_0^\infty f_0' h_0 \, d\eta = \frac{1}{2\Pr} \tag{I-3}$$

によって支配されている。式 (I-3)の積分条件は、熱源から発生した熱量が完全にプルームに運ばれるという第2章の式 (2.11) の無次元表現にほかならない。上式は、この積分条件を除いては、Fujii [21] による定式化から得られるものと同じである。

式 (4.7)，(4.8) の高次項における f_1, h_1 は

$$f_1''' + \frac{3}{5} f_0 f_1'' + \frac{1}{5} f_0' f_1' + h_1 = 0, \tag{I-4}$$

$$h_1'' + \Pr\left(\frac{3}{5} f_0 h_1' + \frac{6}{5} f_0' h_1 + \frac{3}{5} f_1' h_0\right) = 0, \tag{I-5}$$

$$\left.\begin{aligned} & f_1(0) = f_1''(0) = h_1'(0) = h_1(\infty) = 0, \\ & f_1'(\infty) = \frac{3}{5} \cot \frac{2\pi}{5} f_0(\infty) \end{aligned}\right\} \tag{I-6}$$

によって支配される。Hieberと Nash [6] は、$\Pr = 0.7$ に対して次の数値計算の結果を求めている。

$$\left.\begin{aligned} & f_0'(0) = 0.93273, \quad h_0(0) = 0.49654, \quad f_1'(0) = 0.09969 \\ & h_1(0) = -0.25111, \quad f_0(\infty) = 2.21121, \\ & \eta \to \infty \text{ で} \qquad f_1 \sim f_1'(\infty)\, \eta - 0.38089. \end{aligned}\right\} \tag{I-7}$$

f_0, f_1, h_0, h_1 とそれらの微係数は、式（I-1)から（I-7)を数値的に解くことにより容易に求めることができる。

付　録　II

第４章で用いた変形 Grashof数G^* は、第２章のGとはやや異なり、次の関係にある。

$$G^* = (Pr\ Gr_{x,f})^{1/5} = (Gr_x / h_0(0))^{1/4} = G / (2\sqrt{2}\ h_0(0)^{1/4}) .$$

ここで、Pr＝0.7 に対して　$h_0(0) = 0.49654$ である。以下の表に、主な変数の関係を示す。

第４章の記号	第２章の記号との関係	
		Pr＝0.7 の場合
G^*	$G / (2\sqrt{2}\ h_0(0)^{1/4})$	$0.4212G$
η	$\sqrt{2}\ h_0(0)^{-1/4}\ \eta$	1.685η
α	$(h_0(0)^{1/4} / \sqrt{2})\ \alpha$	0.5936α
β	$\sqrt{2}\ h_0(0)^{3/4}\beta$	0.8365β

記　号

$A(\xi)$ ：複素振幅関数，式 (4.16)

B_2, B_3 ：複素係数，式 (4.31)

D ：$\partial / \partial \eta$

E ：攪乱速度強度積分，式 (4.38)

$\hat{E}$ ：基礎流に相対的な攪乱速度強度積分，式 (4.42)

G^* ：変形 Grashof数，式 (4.5)

G_0 ：$x = x_0$ でのG^*，式 (4.5)

f_0, f_1 ：無次元流れ関数（基礎流），式 (4.7)および付録 I

g ：重力加速度

H ：攪乱温度強度積分，式 (4.38)

$\hat{H}$ ：基礎流に相対的な攪乱温度強度積分，式 (4.42)

h_0, h_1 ：無次元温度（基礎流），式 (4.8)および付録 I

K(　) ：(　)内の攪乱量に基づく無次元増幅率

k ：熱伝導率

$\mathbf{L}$, L_1, L_2 ：微分オペレータ，式 (4.19), (4.14)

$\mathbf{L}^*, L_1^*$ ：随伴微分オペレータ，式 (4.27)

N(　) ：(　)内の攪乱量に基づく無次元波数

Pr ：Prandtl 数，ν / κ

Q ：加熱量（線熱源の単位長さ、単位時間あたりの発生熱量）

s, s_0, s_1 ：固有関数（攪乱温度），式 (4.16)

T ：流体温度（基礎流）

T_0 ：$y = 0$ の鉛直面での流体温度（基礎流）

T_∞ ：流体の周囲温度

t ：攪乱温度

$|\hat{t}|$ ：基礎流に相対的な攪乱温度の振幅

u ：攪乱速度の x 成分

$|\hat{u}|$　：基礎流に相対的な攪乱速度のｘ成分の振幅

v　：攪乱速度のｙ成分

x　：線熱源を原点とする鉛直方向座標

y　：　〃　水平方向座標

Φ_0, Φ_1　：固有関数，式（4.20）

Ψ　：流れ関数（基礎流）

α_r　：準平行流理論の無次元波数，（$\alpha = \alpha_r + i\,\alpha_i$）

α_i　：　〃　無次元増幅率

β　：無次元振動数

β^*　：体膨脹係数

η　：相似変数，式（4.4）

θ　：式（4.11）

κ　：温度伝導率

λ　：式（4.6）

ν　：動粘性係数

ξ　：無次元高さ，x / x_0

τ　：無次元時間，$\bar{\tau}\,\nu / (\lambda^2\, G_0^{1/3}\, \xi^{1/5})$

$\bar{\tau}$　：時間

$\phi,\ \phi_0, \phi_1$　：固有関数（攪乱流れ関数），式（4.16）

ϕ　：攪乱流れ関数

$'$　：$d/d\eta$

参 考 文 献

1) Pera, L. and Gebhart, B. : Int. J. Heat Mass Transfer 14 (1971) 975.

2) Wakitani, S. and Yosinobu, H. : J. Phys. Soc. Jpn. 53 (1984) 1291.

3) Haaland, S. E. and Sparrow, E. M. : ASME J. Heat Transfer 95 (1973) 295.

4) Haaland, S. E. : Ph.D. thesis, University of Minnesota (1972).

5) Ling, C.-H. and Reynolds, W. C. : J. Fluid Mech. 59 (1973) 571.

6) Hieber, C. A. and Nash, E. J. : Int. J. Heat Mass Transfer 18 (1975) 1473.

7) Bouthier, M. : J. Mec. 11 (1972) 599.

8) Bouthier, M. : J. Mec. 12 (1973) 75.

9) Gaster, M. : J. Fluid Mech. 66 (1974) 465.

10) Saric, W. S. and Nayfeh, A. H. : Phys. Fluids 18 (1975) 945.

11) Garg, V. K. and Round, G. F. : ASME J. Appl. Mech. 45 (1978) 717.

12) Garg, V. K. : J. Fluid Mech. 102 (1981) 127.

13) Morris, P. J. : AIAA J. 19 (1981) 857.

14) Drazin, P. and Reid, W. : "Hydrodynamic Stability" Cambridge Univ. Press (1981).

15) 藤村 薫：ながれ 3-2 (1984) 94.

16) Wakitani, S. : J. Fluid Mech. 159 (1985) 241.

17) Eagles, P. M. and Weissman, M. A. : J. Fluid Mech. 69 (1975) 241.

18) Forstrom, R. J. and Sparrow, E. M. : Int. J. Heat Mass Transfer 10 (1967) 321.

19) Tatsumi, T. and Kakutani, T. : J. Fluid Mech. 4 (1958) 261.

20) Bill, R. G. and Gebhart, B. : Int. J. Heat Mass Transfer 18 (1975) 513.

21) Fujii, T. : Int. J. Heat Mass Transfer 6 (1963) 597.

第５章　乱流遷移過程の実験

５．１　序論

流体の運動には層流と乱流の二つの状態があることは古くから知られており、しかも Reynolds 数が大きくなると層流が乱流に変るという現象も、すでに 19 世紀に見出されていた。[1] しかしながらこの層流から乱流への遷移のこまかい機構は、実験面での測定技術の向上とデータ処理の発達により、また理論面での非線型方程式を取り扱う手法と計算機の発達により、比較的最近になってわかり始めたことである。種々の流れの遷移についての精しい実験が行われ、また攪乱の非線型干渉を理論的に解明する試みがなされている。しかし遷移現象の主な問題点は必然的な層流から偶然性を有する乱流に変ることにあり、この点に関しては実験結果は乏しく、理論的にもほとんど手付かずの状況である。

従来、境界条件にのみ支配される普遍的な乱流が、初期条件としての遷移過程によらずに存在するとする立場から、発達した乱流は遷移問題とは切り離されて取り扱われてきた。しかし最近、十分に発達していると思われる乱流の中に秩序運動の存在が見出され、その起源を遷移過程に求めようとする立場から遷移機構と乱流構造との関連を追求する試みがなされるようになった。

本論文で取り扱っている平面プルームのように固体壁を持たない流れ（自由流）が通常、線型安定理論において小さな臨界 Reynolds 数をとるという意味から、固体壁に沿う流れに比べずっと不安定であると考えられている。事実、平面プルームが鉛直加熱平板に沿う自然対流境界層に比べてずっと不安定であることは、本章までに、理論的にも、実験的にも確かめられた。しかしながら、二次元ジェット[2]、後流[3]、混合層（剝離層）[4,5] などの自由流の安定性と乱流遷移についての一連の実験研究から、佐藤[6] は、攪乱の線型成長の段階から非線型成長を経て、最終的に乱雑化に至る遷移過程が比較的に緩やかに進むことを見出し、自由流の乱流遷移を“緩慢な遷移”と呼んで特徴づけた。そこでは速度変動の正弦波状の波形は徐々に崩れ、平板境界層において見られる断続的な“乱流斑点（turbulent spot）”のようなものは出現せずに、連続的に典型的な乱流波形に変化している。また、速度変動は比較的下流に

まで、その二次元性が保たれている。

一方、平面プルームの乱流遷移について、 Forstrom と Sparrow [7] は Grashof数 $Gr_{x,f}=5\times10^{8}$ の付近で断続的に“乱流バースト(turbulent burst)*”が出現し、それをもって遷移の始まりと定義した。しかしながら、そのバーストの温度波形の記録は報告されていない。波形全体がバーストで覆われたところで遷移が終り、完全な乱流状態は $Gr_{x,f}\geqq 5\times10^{9}$ で得られるとしている。また Bill と Gebhart [8] は、明らかに層流領域と思われる $G=68.8$ の変形Grashof 数でさえ大きな変動を伴った不規則な波形の記録を示し、$G=160.3$ ではバーストかと思われる高周波攪乱が断続的に現れている波形を報告している。彼らの実験結果では $Gr_{x,f}=1.12\times10^{9}$ が遷移の始まり、$Gr_{x,f}=7.9\times10^{9}$ が遷移の終りに対応している。これらの結果は明らかに、上述した自由流の乱流遷移の特徴とは異なっている。しかしながら第3章において示したように我々の実験では、遷移領域において記録された自然発生攪乱温度の波形にはバーストのような断続的な破断は見られなかった。そこでは極力外乱を抑えた状況においても定常層流場に生ずるスウェイング運動の上に重なって、$G\fallingdotseq 100$ のところで正弦波状の攪乱が現れ、その波形は徐々に崩れ、連続的に不規則な波形に変化している。この実験事実は、自由流の乱流遷移が“緩慢な遷移”であるという佐藤の結論を支持していると思われる。このように定常層流場における初期攪乱に依存して、攪乱の非線型成長領域から乱流に至る遷移領域ではその特性がかなり異なったものになるようである。しかしながら、この非線型成長領域での速度や温度の変動分についての定量的な測定は全くなされていない現状である。

乱流平面プルームについては、速度、温度場の時間平均量の測定が Rouseら [9]、Kotsovinosと List [10] により、さらに変動量をも含む測定が Kotsovinos [11,12]、

---

* 通常、壁面に沿う乱流境界層中に、間欠的に出現する高周波変動を乱流バースト(turbulent burst) といい、層流境界層に現れるものを乱流斑点(turbulent spot)として区別しているが、ここでは Forstrom と Sparrow [7] や Bill と Gebhart [8] にならってバーストと呼んでおくことにする。

中込・平田[13]によりなされている。しかしながら、これらの測定データ間にはかなりの違いがあり[14]、これらの測定結果が自由流に特徴的な、自己保存の成立する完全な乱流状態に至るまでに得られている可能性も考えられる。

本章では層流から完全な乱流に至る広範囲の Grashof数で、速度、温度の時間平均量および変動量を測定する。人工的に正弦波撹乱をプルームに導入する場合（人工遷移）と何も導入しない場合（自然遷移）とについて実験を行う。次に、流れ場を可視化し、遷移領域における流れ場の構造を調べることにより定量的な測定結果との対比を行う。

5．2　実験装置と方法

第3章と同様に、実験室内に作られた小室（約 3.6×2.3 ×高さ3.2 m)の中に網箱を置き、その中で作られる上昇気流の速度と温度を測定した。本章で用いた網箱は内側寸法が線熱源の長さ方向が 51 cm、それと直角な水平方向が 47 cm、高さが 151cmで、第3章で用いた網箱Ⅱと同じものである。線熱源は直径 0.2 mm 、長さ19.8 cmのニクロム線で、その両端は直径 0.4 mm の銅の導線に接続され、網箱下底から35cmの高さに水平に張られている。そのニクロム線は直流安定化電源から供給される電力により加熱される。人工遷移の時には、第3章と同様に、反対称な、微小正弦波攪乱が、低周波スピーカを通して線熱源を水平方向に微小振動させることにより定常流に導入される。なお、座標系はこれまでと同じく線熱源の中点を z = 0 として線熱源方向に z 座標を、それに直角な水平方向に y 座標を、鉛直方向に x 座標をとる（詳細は第3章の図 3.1を参照）。

速度の測定は1チャンネル差動型の前方散乱方式レーザ・ドップラ流速計（ LDV, KANOMAX 1900)を用いて行った。このLDV は 15 mW He-Neレーザ、光学系（収束レンズ焦点距離 433.6 mm ）およびフォトマルからなり、ドップラ信号はバンドパスフィルタを通した後、周波数トラッカ（KANOMAX 1095）で処理される。光学系は第3章と同じであり、散乱粒子としては線香の煙を用いた。

上昇気流温度の測定には素線径 0.025 mm のクロメルーアルメル熱電対を、周囲温度の測定には素線径 0.32 mmのクロメルーアルメル熱電対を用いた。速度と温度の同時測定を行うときには、上昇気流温度測定用の熱電対の測温接点は LDVの測定点上、2～3 mm の位置に設定し、冷接点は常に測温接点と同じ高さの網箱外の周囲流体中に設けた。周囲温度測定用の熱電対の冷接点は0℃とした。

LDV および熱電対プローブの三次元方向のトラバースは、パルス・モータ駆動により、0.0125 mm の分解能で小室外からマイクロ・コンピュータ（8ビット）を使って遠隔操作した。周波数トラッカと熱電対の出力はすべて直流増幅器、ローパスフィルタ（遮断周波数 20 Hz）を通して、12ビットA/D 変換器により 50 Hzでサンプリングされ、A/D 変換の後、ディジタル化されたデータはマイクロ・コンピュータに転送され、フロッピーディスクに記録された。

なお、すべての実験データの整理には周囲温度での物性値を用いた。

流れ場を可視化する方法としては、プルームに煙を注入して、その流脈を観察する煙注入法、油を塗布した金属細線を瞬間的に加熱することによって発生するミストのタイムラインを観察するスモーク・ワイヤ法およびそれら二つを併用したものを用いた。

図 5.1に示すように、煙注入法の場合、直径約5cm、長さ約 50 cmの塩ビ管の煙発生器の中で数本の線香を点火し、小型送風機で煙をビニールパイプに接続したノズルからプルーム内に注入した。この時、ノズル先端は熱源下方数 cm の位置に設け、小型送風機の風量を調節して極力プルームを乱さぬように微風速の煙を送り込んだ。ノズルの形状としては、図に示すような直径2 mm （内径 1.5 mm)、長さ22 mm の30本の真ちゅう管を2列に並べたものと長さ 20 cm、幅1mmのスリットからなる2種類のものを用いた。、後者は特にプルームの三次元性を調べるために用いた。照明用光源としては、15 mW He-Ne レーザあるいはストロボを用いた。レーザ光源の場合、円柱レンズ（直径3mmのガラス棒）を使って、線熱源に直角なシート状のレーザ光を作り、熱源中点（$z=0$）を通る断面上の流脈を可視化した。またストロボは網箱外の上部に設置し、上部網から網箱内に挿入した約2mm幅のスリットを通して照明を行い、主にプルームの三次元性を調べるときに用いた。

一方、スモーク・ワイヤ法で用いた金属細線は直径 0.05 mm、長さ 33 cmのニクロム線であり、図 5.2に示すように線熱源に直角な、$z=0$上の鉛面内に熱源からの高さx'が 15 cmの位置から 5 cm 間隔で水平に6本張り、それらに灯油を少量混入した流動パラフィンを塗布して、6本の内1本だけを発煙させて観察した。このスモーク・ワイヤを電気的に加熱する方法としてはコンデンサからの放電を利用し、ワイヤ1本に流す電流の大きさと通電時間はコンデンサへの印加電圧を 150 V, コンデンサ容量を 100μF として供給した。照明にはマルチ・ストロボを用い、図のように観察方向に対して斜め逆光（約 135°）の位置に設置した。カメラのシャッタ（あるいは手動スイッチ）と連動して閉じるリレーを通して、ワイヤに電流が流れ、同時に信号が遅延回路に入る。この回路で設定された出力の遅延パルスをマルチ・ストロボの外部トリガ入力として用いた。本実験では発煙時からの遅延時間を50 ms とし、同じく

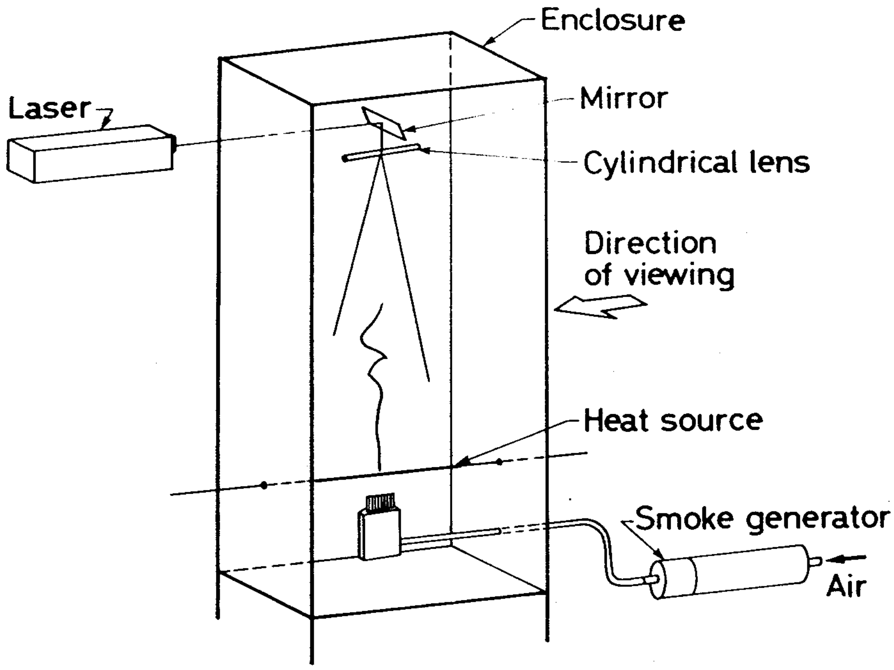


図 5.1　流れの可視化の概略図（煙注入法）

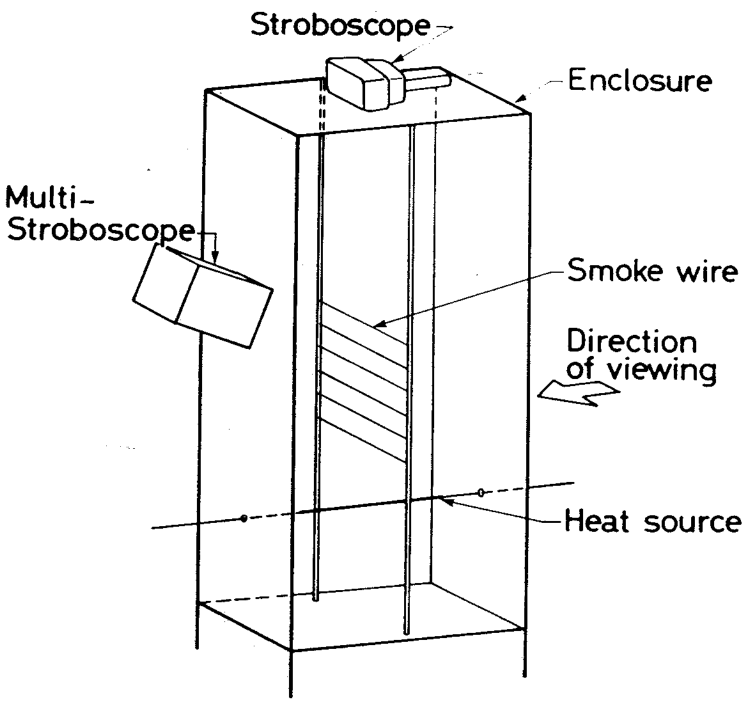


図 5.2　流れの可視化の概略図（スモーク・ワイヤ法）

50 ms 間隔で3回発光させてタイムラインの多重写真を撮影した。この方法によりワイヤ近傍の速度分布のおおよその様子がわかる。またカメラのシャッタは微小攪乱を導入するための低周波発振器の出力信号に同期して作動させることができ、人工遷移の場合には攪乱の任意の位相での写真撮影が可能である。

煙注入法とスモーク・ワイヤ法の二つを併用した方法では、上述の線香の煙をプルームに注入するとともにスモーク・ワイヤを同時に6本発煙させた。このとき照明には網箱外上部のストロボを用い、遅延時間 150 ms で1回発光させた。

5．3　実験結果と議論

5．3．1　時間平均中心速度と温度

プルーム中心面（y＝0）上の定常層流場における垂直速度成分U_0と温度T_0はFujii [15] によれば

$$U_0/F^{1/3} = F_f'(0)\ Gr_{x,f}^{1/15} \sim x^{1/5}, \tag{5.1}$$

$$(T_0 - T_\infty)/\Theta = \Phi_f(0)\ Gr_{x,f}^{-1/5} \sim x^{-3/5} \tag{5.2}$$

で与えられ、乱流領域におけるそれらの時間平均量は Batchelor [16]によれば

$$U_0/F^{1/3} = B_u \sim x^0, \tag{5.3}$$

$$(T_0 - T_\infty)/\Theta = B_t\ Gr_{x,f}^{-1/3} \sim x^{-1} \tag{5.4}$$

で与えられる。ここで、$F = g\beta^* Q/(\rho c_p)$、$\Theta = Q/(\rho c_p \nu)$であり、Fは速度の３乗の次元を持ち、Θは温度の次元を持つ。ただし、gは重力加速度、β^*は体膨張係数、ρは密度、c_pは定圧比熱、νは動粘性係数、Qは熱源の単位長さ当りの加熱量、T_∞は周囲温度である。$Gr_{x,f}$は局所 Grashof数

$$Gr_{x,f} = g\beta^*\ x^3\ \Theta/\nu^2 \tag{5.5}$$

であり、$F_f'(0)$，$\Phi_f(0)$はそれぞれプルーム中心面での無次元定常速度成分と温度で、Fujii ら [17]によれば、Prandtl 数 Pr ＝0.7(空気) に対して、$F_f'(0)$ = 0.80872, $\Phi_f(0)$ ＝0.37328 の値をとる。一方、乱流領域についての式(5.3) と(5.4) の係数は、空気中での実験から Rouseら [9] によりB_u ＝1.8，B_t ＝2.6 、水中での実験からKotsovinos [12]によりB_u ＝1.66, B_t ＝2.38と求められている。

自然遷移と人工遷移について、プルーム中心面上の時間平均温度および垂直速度成

分の測定結果を図 5.3に示す。ただし、測定は熱源の中央部（z = 0）で行った。図のGは変形 Grashof数（すなわち Reynolds 数）であり、

$$G = 2\sqrt{2}\ \Phi_f(0)^{1/4}\ Gr_{x,f}^{1/5} \tag{5.6}$$

で与えられる。第３章において述べたように、加熱量と高さについての二つの補正を用いてデータを整理している。すなわち、加熱量を熱源で実際に発生する熱量Qの代りにεQとし、xを実際の熱源からの高さx′の代りに定常層流場についてのみかけの熱源位置からの高さx＝x′＋δを用いて整理している。ここでは、第３章の結果からε＝0.908 とし、速度に対してはδ＝－1.3 mm、温度に対してはδ＝0.8 mmとしている。ただし、他の論文のデータとの比較を容易にするために、ここでは $Gr_{x,f}$

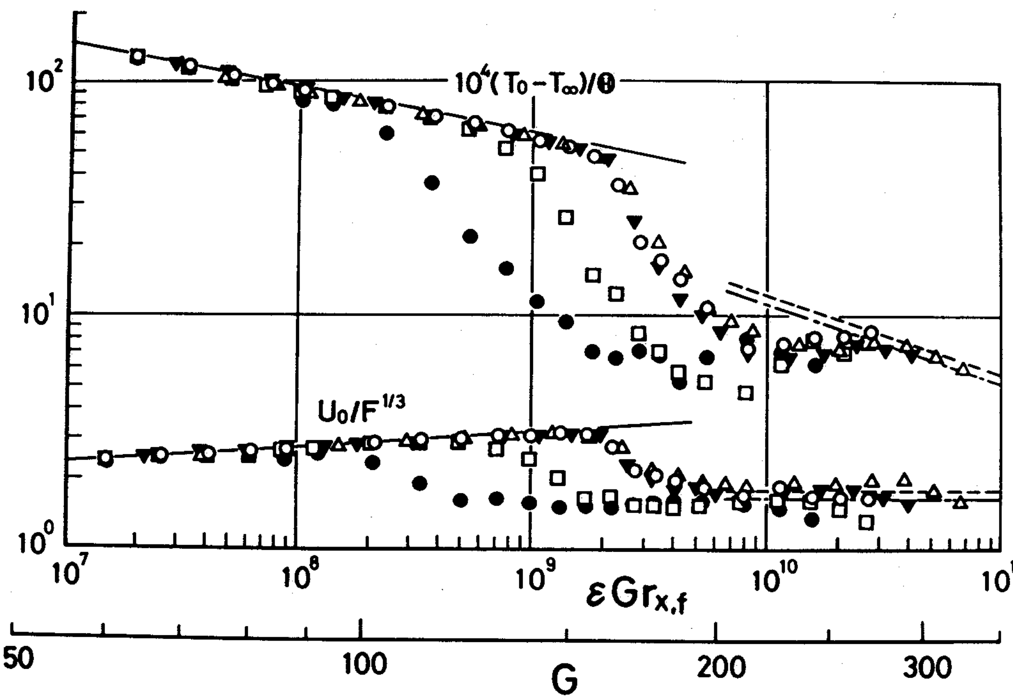


図 5.3　プルーム中心面の時間平均垂直速度成分と温度
自然遷移－○：Q＝20.4 W/m；　▼：30.6 W/m；　△：50.8 W/m
人工遷移－□，●：Q＝20.4 W/m，f＝0.8 Hz
———：層流理論；－－－：Rouse ら[9]；—— - ——：Kotsovinos[12]

については補正のないQのままで計算された値で表示することにする（Gは常にε補正したものとする）。

図には、式（5.1），（5.2）で与えられる層流理論の結果と乱流領域での Rouseら[9]および Kotsovinos [12] によって得られた実験結果を各直線で描いてある。式(5.3)，(5.4) から分るように、乱流領域では時間平均の中心垂直速度成分は x に依存しないが、温度差は x^{-1}に比例して減少する。この x は乱流についての相似則が成立する原点（実際は仮想的な乱流の始点）からの高さを意味するが、ここでは層流についてのみかけの熱源位置からの高さを用いて測定結果を整理しているので、乱流領域での時間平均温度の測定結果を Rouseら [9] や Kotsovinos [12] の実験結果と比較するには問題がある。ただし、速度成分については何ら問題はない。この乱流の仮想原点は通常、時間平均速度あるいは温度の分布の半値幅が0となる高さとして求められる。

プルームに導入された反対称な正弦波人工攪乱の周波数は、用いた加熱量に対して攪乱の線型領域内で、線型安定理論により最も増幅されると予測される攪乱の周波数にほぼ対応している。図に示すように人工遷移については二つの実験結果が得られているが、これらは初期攪乱の大きさを変えて得られた結果であり、当然、初期攪乱の大きい場合のほうが早く非線型効果が現れ、$\varepsilon Gr_{x,f} \fallingdotseq 1 \times 10^8$ （G≒88）という低い Grashof数で層流理論から離脱している。自然遷移の場合には、ほとんど加熱量に依らず、$\varepsilon Gr_{x,f} \fallingdotseq 1.5 \times 10^9$ （G≒150 ）で層流理論からの離脱が起り、遷移が始まっている。このように遷移の始まりは初期攪乱の大きさに依存するため、遷移の始まりを単に Grashof数で定義することはあまり意味がないと考えられる。自然遷移の始まりを Forstrom と Sparrow [7] では $Gr_{x,f} = 5 \times 10^8$ 、Billと Gebhart [8] では $Gr_{x,f} = 1.12 \times 10^9$ としているが、いずれもバーストの出現をもって遷移の始まりとしているために、本結果との定量的な比較は困難である。$\varepsilon Gr_{x,f} \fallingdotseq 10^{10}$付近で中心温度にはオーバーシュートが現れており、上述のこともあって温度から遷移の終りを知ることは困難であるが、中心速度成分で見る限り、遷移の終りは自然遷移、人工遷移ともに $\varepsilon Gr_{x,f} \fallingdotseq 8 \times 10^9$ （G≒210 ）で起っている。すなわち、遷移の終りは初期攪乱の大きさに依存していない。

５．３．２　攪乱の二次元性

第３章で述べたように実験的に実現されているプルームが定常層流場においてその二次元性が保たれており、また自然発生微小攪乱についてもそうであった。変動の三次元性は完全に発達した乱流の特徴の一つであり、平板上に発達する境界層では攪乱の線型成長の後の非線型初期の段階ですでに強い三次元性が現れ、平均流速は横方向に大きく変化する。しかしながら自由流の遷移過程では、攪乱の二次元性はかなり遷移が進んだ段階まで保たれ、平板境界層におけるような攪乱の強い三次元化は通常見

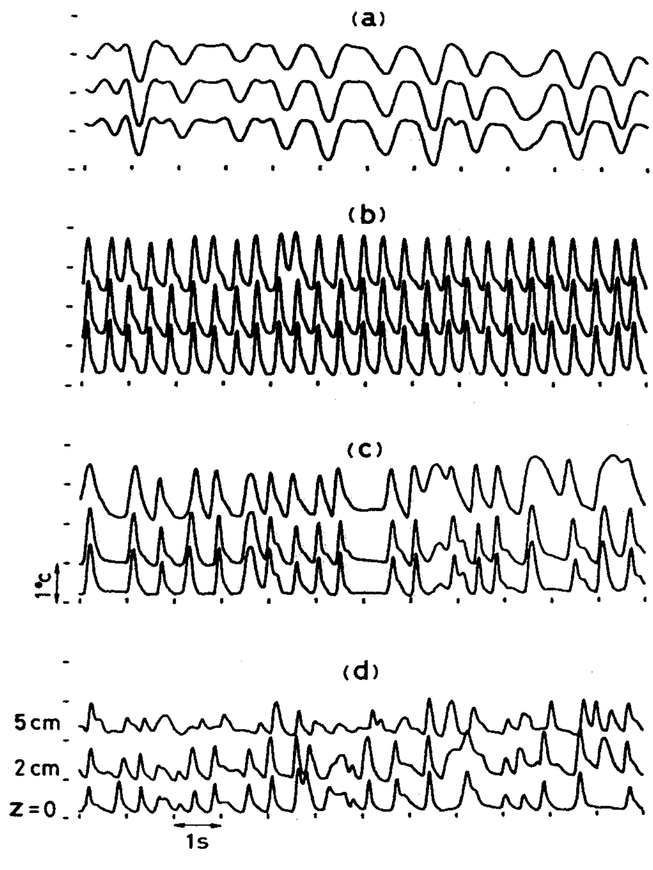


図 5.4　温度変動の二次元性（自然遷移）Q＝20.1 W/m
(a)　x′＝25 cm,　y＝5.9 mm,　G＝160
(b)　x′＝30 cm,　y＝6.4 mm,　G＝178
(c)　x′＝35 cm,　y＝6.9 mm,　G＝195
(d)　x′＝40 cm,　y＝7.4 mm,　G＝211

られない。[6] 遷移領域における速度や温度変動の定量的な測定を行う前に、この特徴が平面プルームについても見られるかどうか調べる必要がある。図 5.4, 5.5 にそれぞれ自然遷移と人工遷移（攪乱周波数 f ＝0.8 Hz）の場合における、熱源方向の位置 z ＝ 0， 2， 5 cmの三点での温度変動の同時記録を示す。各高さにおける水平距離 y は定常層流温度分布の変曲点の位置にほぼ対応している。図から明らかに、x ′ ＝ 25 cm （G＝160 ）では自然遷移、人工遷移ともに温度変動の二次元性はかなりよく保たれている。この高さは、前節の結果から、自然遷移が始まる Grashof数にほぼ対

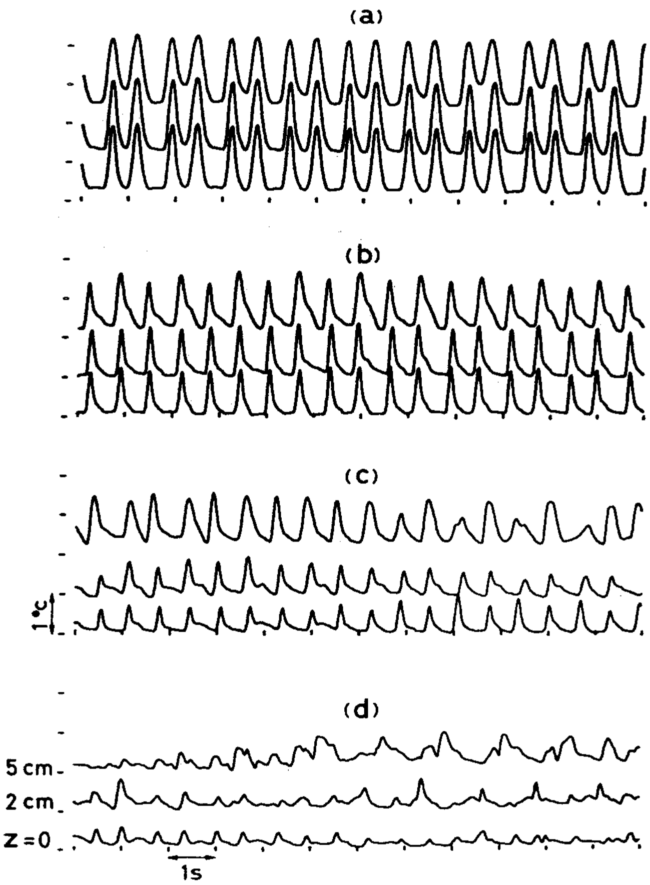


図 5.5 温度変動の二次元性（人工遷移）Q＝20.1 W/m, f ＝0.8 Hz
(a) x ′ ＝25 cm, y ＝5.9 mm, G＝160
(b) x ′ ＝30 cm, y ＝6.4 mm, G＝178
(c) x ′ ＝35 cm, y ＝6.9 mm, G＝195
(d) x ′ ＝40 cm, y ＝7.4 mm, G＝211

応しており、攪乱の非線型効果が現れ始めたところである。人工遷移では、この高さですでに強い非線型効果が現れている。x′＝30 cm においても自然遷移、人工遷移ともに波形の二次元性はよく保たれてはいるが、三点での波形にはわずかながら位相差が見られる。x′＝35 cm では両遷移過程においてわずかな三次元性が現れ、さらにx′＝40 cm になると三次元性が顕著になっている。dでの Grashof数は遷移の終りにほぼ対応しており、遷移がかなり進んだ段階まで攪乱の二次元性が保たれるという一般的な自由流の特徴が平面プルームについても成り立っている。

5．3．3　速度と温度変動強さの下流方向変化

垂直速度の変動成分uの強さ（ rms値，$(\overline{u^2})^{1/2}$ ）の、各高さでの最大値を LDV の出力から求めた。ただし、自然発生攪乱の一つであるスウェイング運動の極低周波成分の寄与は除去している。その最大値の下流方向変化を、自然遷移と人工遷移の両遷移過程について、図 5.6に示す。また、人工遷移における速度変動uの基本波、第二高調波および第三高調波についての強さ（ rmsスペクトル，$(\overline{u_f^2})^{1/2}$ ）の最大値も同図にプロットしている。これらは FFT（高速フーリエ変換）演算処理から得られたもので、バンド幅を 0.3 Hz ととった。実験は加熱量Q＝20.4 W/mについて行い、横軸に変形 Grashof数Gを用いて実験結果を整理している。同じようにして、温度変動tについて得られた結果を図 5.7に示す。

温度変動の全成分の強さは、両遷移過程で、下流に向かうにつれてそのピーク値まで急激に成長し、その後、単調に減少している。当然、初期攪乱の大きい人工遷移の方が早くピーク値に達していることが分る。一方、速度変動の全成分の強さは、温度

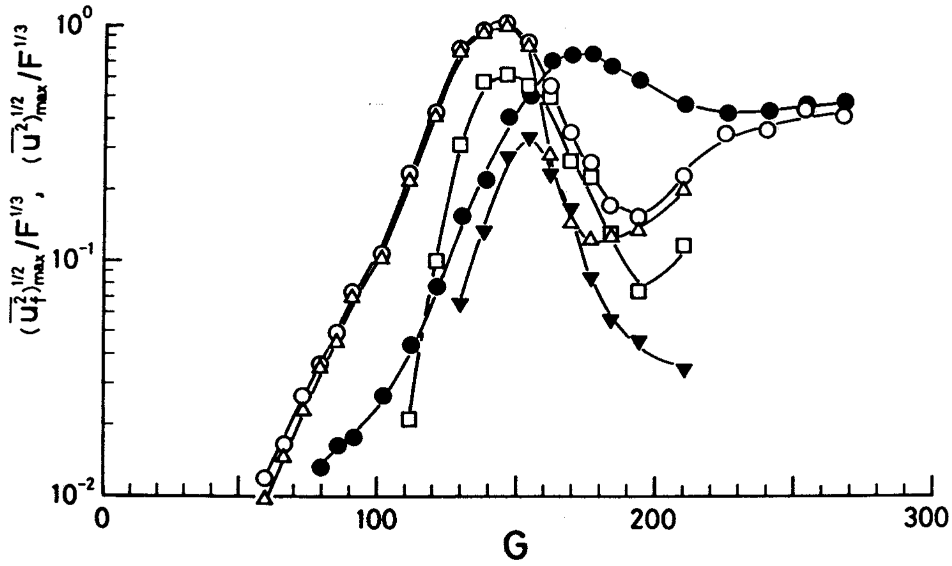


図 5.6　速度変動の変化　Q＝20.4 W/m
自然遷移－●：全成分
人工遷移－○：全成分，△：基本波(0.8 Hz)
〃　－□：第二高調波(1.6 Hz)，▼：第三高調波(2.4 Hz)

変動の場合と同様に急激にそのピーク値にまで達するが、その後、自然遷移では緩やかに減少してある一定値に近づいていき、人工遷移では一旦極小値にまで急激に減少し、再び大きくなって自然遷移のときと同じ一定値に近づいている。この速度変動の強さが極小値まで減少して再び大きくなる部分は人工遷移に存在する偶然化領域と考えられる。[6]　このように下流で温度変動の強さが単調に減少し、速度変動の強さが一定値に近づくということは、乱流領域では式 (5.3), (5.4) より、プルーム中心面の時間平均温度が x^{-1} で減少し、時間平均の垂直速度成分が一定となることから G≧220 の領域では自己保存が成立している可能性を示唆しているようである。時間平均中心速度と温度の測定結果から得られた自然遷移が始まる Grashof数はG≒150 であるので、変動強さがピーク値に達する（G≒170 ）前に遷移が始まっていることが分る。遷移の始まりでは、速度と温度変動の全成分の強さはそれぞれ、プルーム中心面での時間平均量のほぼ 12 ％と14％となり、かなり大きな値となっている。

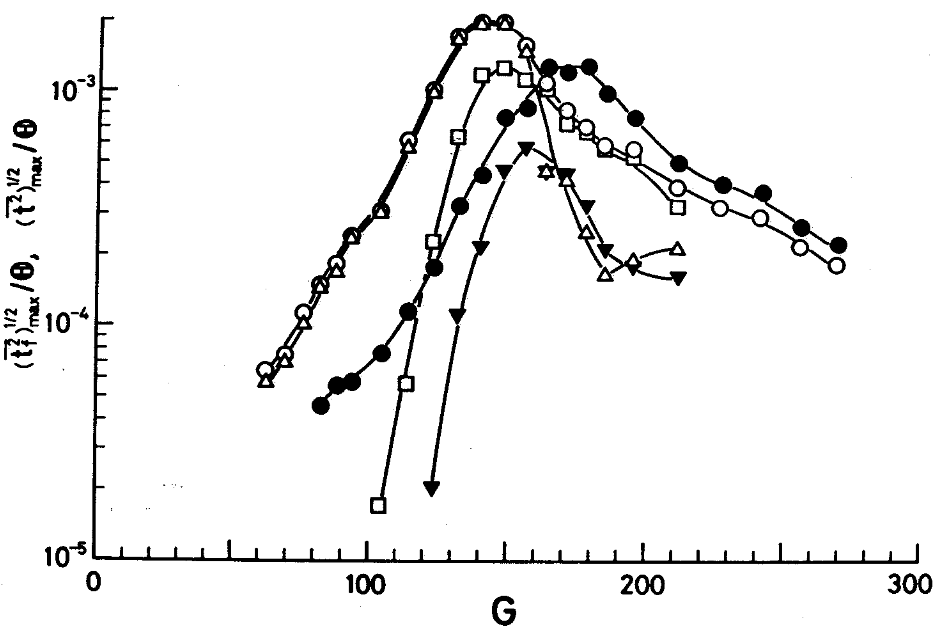


図 5.7　温度変動の変化　Q＝20.4 W/m
自然遷移－●：全成分
人工遷移－○：全成分，△：基本波(0.8 Hz)
〃　－□：第二高調波(1.6 Hz)，▼：第三高調波(2.4 Hz)

人工遷移において、温度変動の基本波成分はピーク値に達した後、著しく減少しており、第二高調波成分が主に全成分の強さに寄与していることが分る。速度変動についても、その基本波成分はピーク値に達した後、一旦、第二高調波成分以下にまで減少してはいるが、温度変動の場合ほどではなく、全成分に対する寄与は大きい。このことは撹乱エネルギーが、基本波モードで熱源を振動させることにより、運動エネルギーの形で供給されているのに対して、撹乱温度は撹乱速度によって付随的に惹き起されているためと考えられる。

5．3．4　速度と温度変動のパワースペクトル

自然遷移と人工遷移の両遷移過程における垂直速度と温度変動のパワースペクトル（密度）をデータ数 2048 の FFT（高速フーリエ変換）演算を用いて求めた。一つの測定点でのパワースペクトルを計算するために使用した総データ数は16384（基本周波数：0.0244 Hz，Nyquist 周波数：25 Hz，自由度：40，変異係数：0.224）であり、2048個のデータの前後1/10の部分に cosine 型の窓関数を適用した。

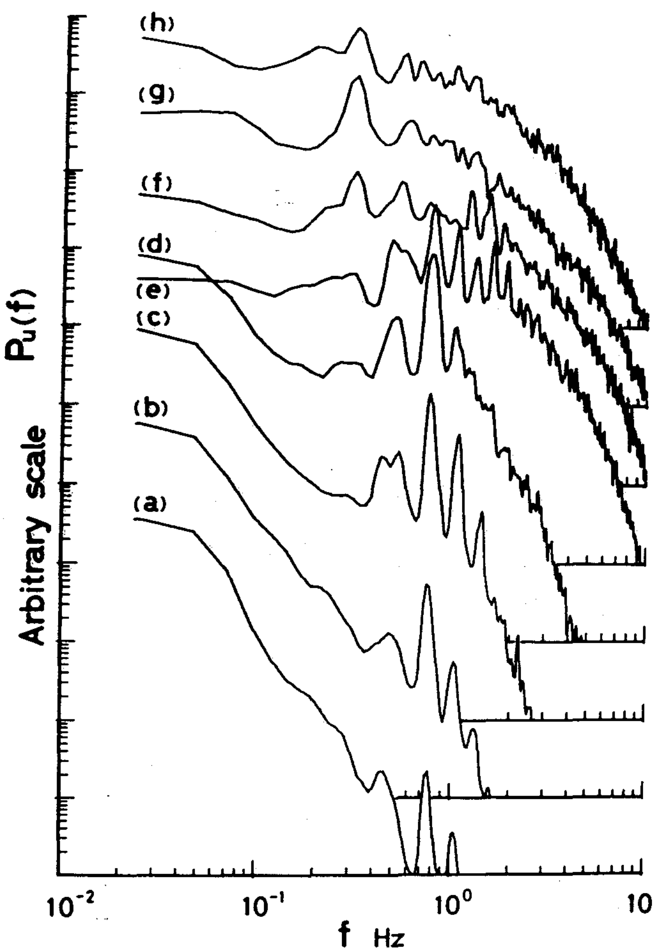


図 5.8　垂直速度変動のパワースペクトル（自然遷移）Q＝20.5 W/m
(a) x'=10.0 cm, y=4.0 mm, G=91.6; (b) x'=15.0 cm, y=4.7 mm, G=117
(c) x'=20.0 cm, y=5.3 mm, G=139; (d) x'=25.0 cm, y=5.8 mm, G=159
(e) x'=30.0 cm, y=6.5 mm, G=177; (f) x'=35.0 cm, y=7.0 mm, G=195
(g) x'=40.0 cm, y=7.5 mm, G=211; (h) x'=50.0 cm, y=8.5 mm, G=241

自然遷移における垂直速度および温度変動のパワースペクトルの下流方向変化をそれぞれ図 5.8, 5.9 に示す。また、これらのパワースペクトルの計算に用いた速度と温度データの波形の一部を図 5.10 に示す。図 5.8と 5.9から分るように、ほぼ自然遷移の始まりに対応する Grashof数（G≒160 ）までの速度と温度変動のパワースペクトル（図のａからｄ）にはほとんど差は見られない。図 5.8, 5.9 のａ（G≒90）のスペクトルには f_1 ≒0.8 Hzの鋭いピークが見られるが、これは第３章において示

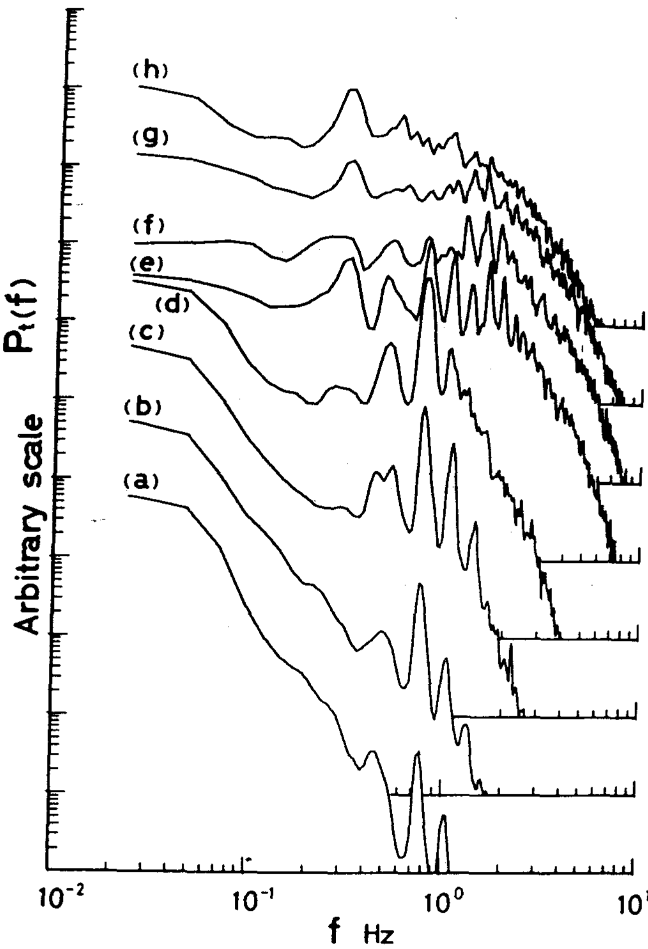


図 5.9 温度変動のパワースペクトル（自然遷移） Q＝20.5 W/m
(a) x'=10.2 cm, y=4.0 mm, G=94.0; (b) x'=15.2 cm, y=4.7 mm, G=119
(c) x'=20.2 cm, y=5.3 mm, G=141; (d) x'=25.2 cm, y=5.8 mm, G=161
(e) x'=30.2 cm, y=6.5 mm, G=179; (f) x'=35.2 cm, y=7.0 mm, G=196
(g) x'=40.2 cm, y=7.5 mm, G=212; (h) x'=50.2 cm, y=8.5 mm, G=242

したように、選択増幅の結果として、G≒100 でスウェイング運動の極低周波攪乱に重なって現れる自然発生の反対称攪乱に対応している。低周波域での高いスペクトルはスウェイング運動の寄与によるものである。また、f_1 よりも高い周波数の f_2 ≒ 1.1 Hzのピークが見られる。この f_2 のピークは、別の攪乱モード、例えば対称攪乱が選択増幅されて現れている可能性も考えられる。このことについては、後で線型安定理論との比較から検討することにする。また、f_1 よりも低い周波数のところに弱

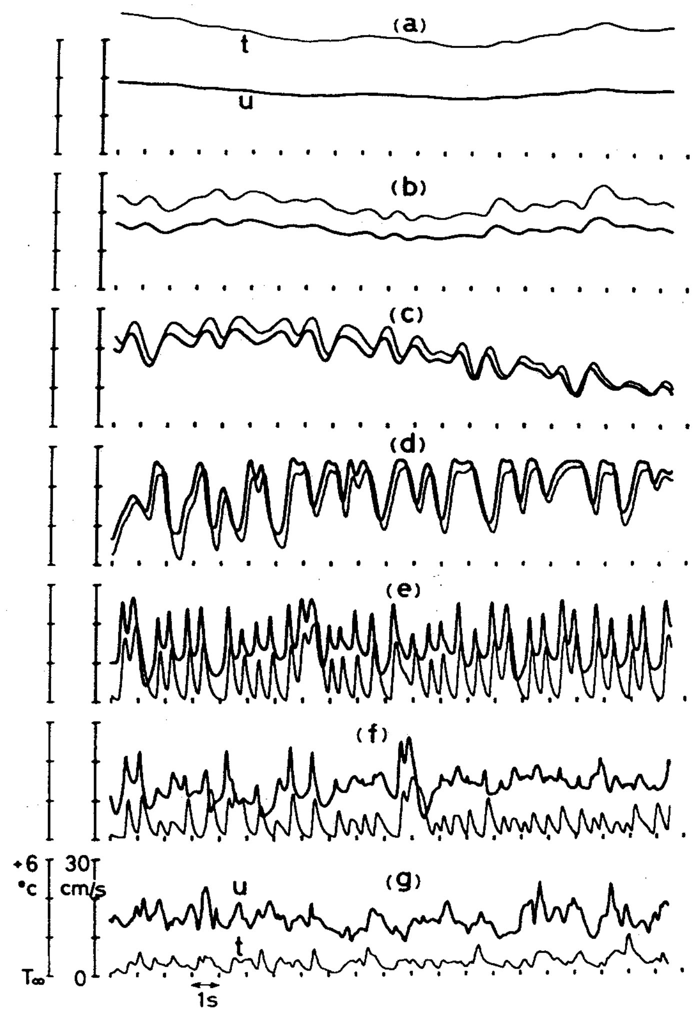


図 5.10 垂直速度および温度変動波形（自然遷移）Q＝20.5 W/m
(a) x'=10.0 cm, y=4.0 mm; (b) x'=15.0 cm, y=4.7 mm
(c) x'=20.0 cm, y=5.3 mm; (d) x'=25.0 cm, y=5.8 mm
(e) x'=30.0 cm, y=6.5 mm; (f) x'=35.0 cm, y=7.0 mm
(g) x'=50.0 cm, y=8.5 mm　（温度の測定点は x'+0.2 cm）

いピークが現れているが、これは f_1 と f_2 の非線型干渉の結果現れているもので、その周波数は $2f_1-f_2$ に対応している。これが非線型干渉によるものであることは下流のb（G≒120）のスペクトルから明らかである。そこではおよそ 0.5 Hz ($2f_1-f_2$), 0.8 Hz (f_1), 1.1 Hz (f_2), 1.4 Hz ($2f_2-f_1$), 1.6 Hz ($2f_1$) のピークが現れている。図のc（G≒140）では、これらのピークが大きく発達しているが、非線型干渉の結果現れているピークの高さは f_1, f_2 の基本モードのピークの高さに比べて小さく、図 5.10 のcの波形から見てもこの領域はなお攪乱の線型成長が主要な役割を演じている範囲内にあると考えられる。さらに下流のd（G≒160）では約 0.3 Hz (f_2-f_1) のピークが現れているが、非線型干渉が急速に進んだ結果、1.1 Hz (f_2)より高周波域では顕著なピークは見られずにほとんど連続スペクトルとなっている。ところがe（G≒180）に至ると、高周波域が大きく発達し、そこには 1.6 Hz ($2f_1$), 1.9 Hz (f_1+f_2), 2.2 Hz ($2f_2$) 等のいくつかの顕著なピークが現れている。この高周波域の急速な発達は図 5.10 のdとeの波形の相違からうなずけることである。f（G≒200）ではいくらかピークは残ってはいるが連続スペクトルに近い形となっており、ほぼ遷移の終りに至っている。最終的に、h（G≒240）ではスペクトルから見る限り、完全な乱流状態になっていると考えられる。同様な結果は MEM（最大エントロピー法）を用いたパワースペクトル解析から得られてはいるが、MEM の欠点の一つである自己回帰モデルの次数の推定のまずさからか $2f_2-f_1$に対応する顕著なピークは現れていない。[18)]

自然遷移の過程におけるパワースペクトルに現れた顕著なピークを示す周波数を、第２章で得られた安定特性を表す β－G面にプロットしてみた。これを図 5.11 に示す。ここで、β は無次元振動数であり、攪乱の周波数 f を用いて

$$\beta=32\pi f x^2/(\nu G^3) \tag{5.7}$$

で与えられる。図中の点線は基本周波数 $f_1(=0.8\ \mathrm{Hz})$, $f_2(=1.1\ \mathrm{Hz})$ と f_2-f_1, $2f_1-f_2$, $2f_2-f_1$, $2f_1$ の一定周波数の攪乱の経路を示す。基本周波数 f_1 と f_2 のプロットされたデータはいずれも、そこでは反対称攪乱に対しても、対称攪乱に対

しても増幅率の大きなGの領域にある。ただし、そこでは対称撹乱に対する増幅率は反対称撹乱のものに比べて一桁小さい。次に、これらの基本周波数 f_1 と f_2 の撹乱が対称なのか反対称なのかを調べるために、プルーム中心面に対称な二点で温度変動を同時測定し、FFT 演算処理を用いて周波数 f_1 と f_2 の撹乱成分の波形を取り出してみた。ただし、周波数バンド幅は 0.2 Hz とした。結果を生の温度変動波形とともに図 5.12 に示す。図から明らかに、周波数 f_1 と f_2 の撹乱成分はともに反対称であることが分る。前にも述べたように、撹乱の線型成長領域から弱い非線型成長領域において最も高いスペクトルのピークを示す周波数 f_1 の撹乱はGの小さな定常層流中に自然に存在するごく弱い反対称撹乱が選択増幅されたものであると考えられる。しかしながら、f_2 の撹乱もその起源が f_1 の場合と同じであるとすれば、図 5.11 の反対称撹乱に対する増幅率曲線（破線）から判断して、スペクトルとしては f_1 と f_2 を含む帯域幅を持つ一つの帯スペクトルができるはずである。したがって、f_2

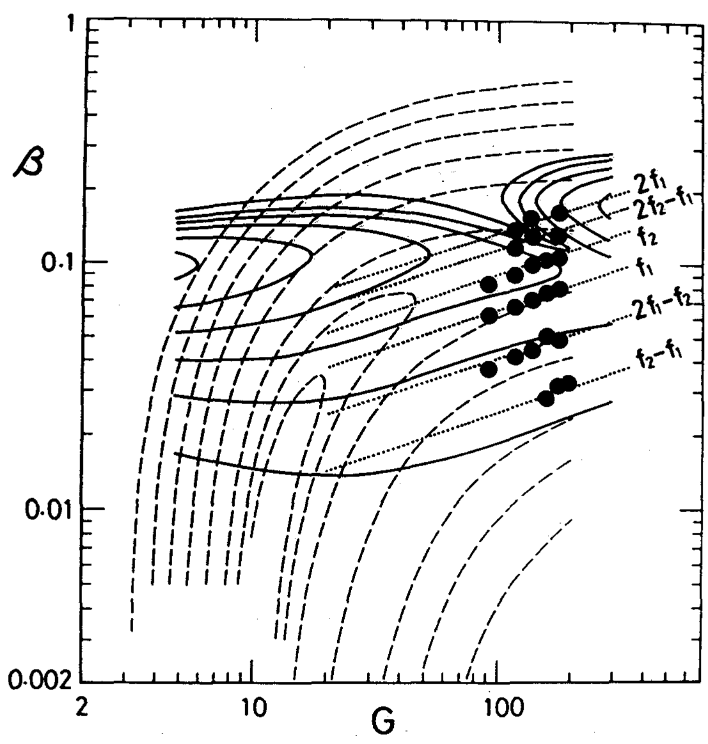


図 5.11　β－G面上のスペクトルのピーク周波数プロット
――――：対称撹乱；　－－－：反対称撹乱に対する増幅率曲線
・・・・・・・：一定周波数撹乱の経路（f_1 ＝0.8 Hz，f_2 ＝1.1 Hz）

の攪乱はGの小さな領域で反対称攪乱とは違ったごく弱い攪乱が一旦、選択増幅され、後に同じ周波数の、増幅率の大きな反対称攪乱が下流で選択増幅されたものと考えることができる。この別のモードとしては対称攪乱モードの可能性が今のところ最も高い。図 5.11 の増幅率曲線は基礎流の準平行流近似に基づく増幅率曲線であるため正確なことは言えないが、図からGの小さなところでは反対称攪乱に対しては安定ではあるが、対称攪乱に対して不安定な領域が存在し、しかも対称攪乱に対しては f_1 よりも高い周波数の攪乱が強く増幅される。また、第3章において対称な攪乱をプルームに導入したときの安定性についての実験で見られたように、自然発生攪乱が現れる G≒100 では、すでに攪乱はその対称性を保持できずに反対称攪乱となっている。

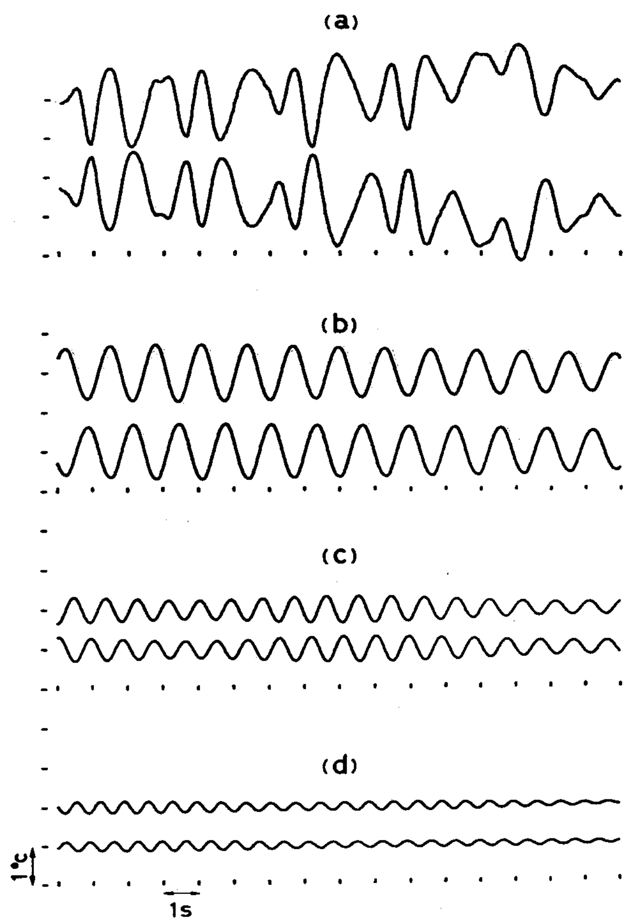


図 5.12 温度攪乱波形　Q＝20.4 W/m,　x′＝20 cm,　y＝±5 mm（G＝147）
(a) 生の温度変動波形；　(b) f_1(＝0.8 Hz) 成分
(c) f_2(＝1.1 Hz) 成分；　(d) $2f_1$ 成分

しかしながら、上に述べたことを実証することは現在のところ不可能である。例えば実験では線熱源が有限の長さであり、そのことにより、Gの小さな領域では検出不可能な、理論では考慮されなかったモードの不安定攪乱が生じているかもしれないからである。

人工遷移における垂直速度および温度変動のパワースペクトルの下流方向変化をそれぞれ図 5.13, 5.14 に示す。プルームに導入された攪乱はプルーム中心面に関して

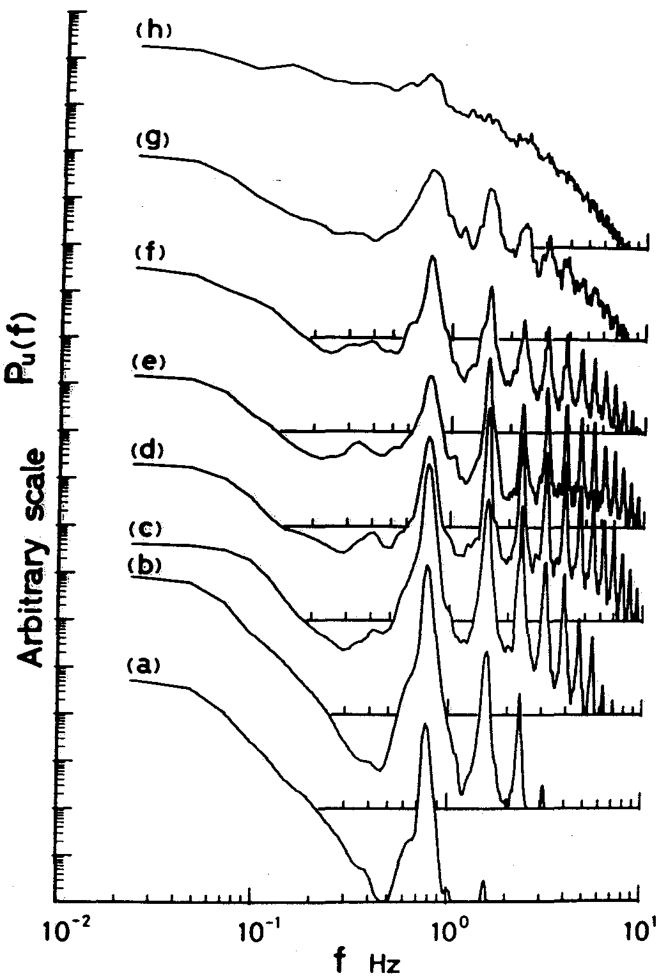


図 5.13 垂直速度変動のパワースペクトル（人工遷移） Q＝20.5 W/m, f=0.8 Hz
(a) x'=10.0 cm, y=4.0 mm, G=91.6; (b) x'=15.0 cm, y=4.7 mm, G=117
(c) x'=20.0 cm, y=5.3 mm, G=139; (d) x'=25.0 cm, y=5.8 mm, G=159
(e) x'=30.0 cm, y=6.5 mm, G=177; (f) x'=35.0 cm, y=7.0 mm, G=195
(g) x'=40.0 cm, y=7.5 mm, G=211; (h) x'=50.0 cm, y=8.5 mm, G=241

反対称な正弦波状の攪乱であり、その周波数は 0.8 Hz である。また、これらのパワースペクトルの計算に用いた速度と温度データの波形の一部を図 5.15 に示す。この人工遷移の場合、スペクトルの発達過程は自然遷移に比べて単純で、基本周波数は導入した攪乱の周波数（0.8 Hz）のみである。図 5.13, 5.14 の a（G≒90）のスペクトルには基本波成分の顕著なピークとともに、わずかな第二高調波成分（1.6 Hz）のピークが見られる。下流の c（G≒140 ）では 7 ～ 9 個の、基本周波数の整数倍の周

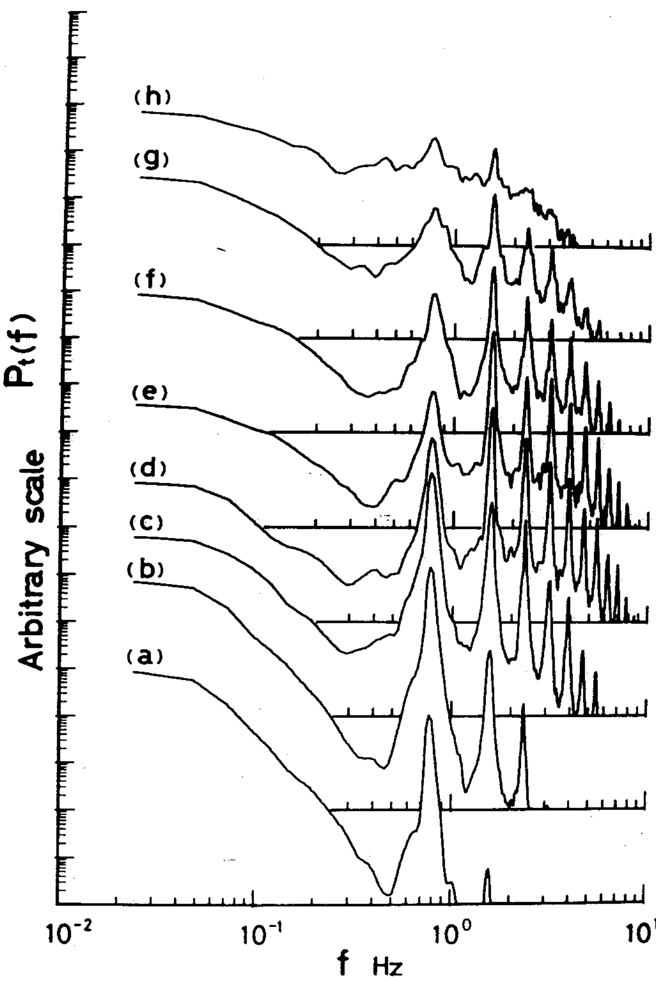


図 5.14 温度変動のパワースペクトル（人工遷移） Q＝20.5 W/m, f=0.8 Hz
(a) x'=10.2 cm, y=4.0 mm, G=94.0; (b) x'=15.2 cm, y=4.7 mm, G=119
(c) x'=20.2 cm, y=5.3 mm, G=141; (d) x'=25.2 cm, y=5.8 mm, G=161
(e) x'=30.2 cm, y=6.5 mm, G=179; (f) x'=35.2 cm, y=7.0 mm, G=196
(g) x'=40.2 cm, y=7.5 mm, G=212; (h) x'=50.2 cm, y=8.5 mm, G=242

波数ピーク（周期成分）が現れている。d（G≒160）に至ると、基本波成分の急激な減衰が始まっており、とくに高周波領域で、周期成分の間のいわゆる偶然成分が増大していることが分る。このG≒160 の領域では、速度と温度のパワースペクトルの基本波成分は第二高調波成分よりも小さくなっており、このことは先に示した速度と温度変動強さの測定結果（図 5.6, 5.7）と一致している。e（G≒180）ではさらに基本波成分が減少している。この状態は図 5.15 のeの速度波形からも明らかであ

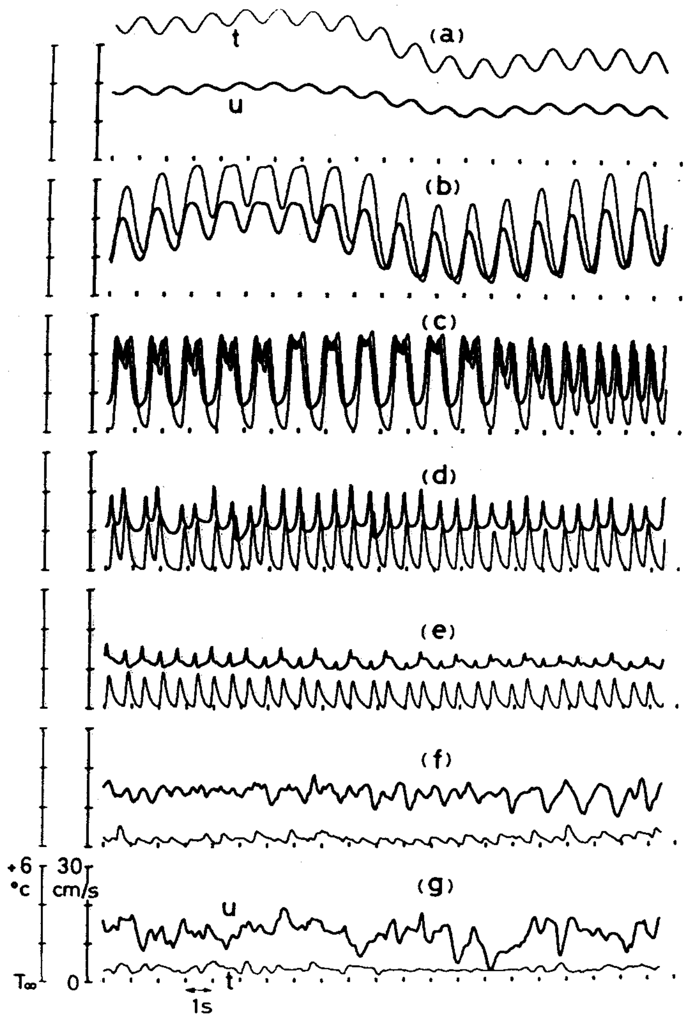


図 5.15 垂直速度および温度変動波形（人工遷移）Q＝20.5 W/m, f=0.8 Hz
(a) x'=10.0 cm, y=4.0 mm; (b) x'=15.0 cm, y=4.7 mm
(c) x'=20.0 cm, y=5.3 mm; (d) x'=25.0 cm, y=5.8 mm
(e) x'=30.0 cm, y=6.5 mm; (f) x'=35.0 cm, y=7.0 mm
(g) x'=50.0 cm, y=8.5 mm　（温度の測定点は x'+0.2 cm）

る。下流のｆ（Ｇ≒200），ｇ（Ｇ≒210）においてもなお著しいピークが見られ、自然遷移の場合に比べて遷移が遅れていることが明らかである。これは非線型干渉の成長抑制効果[6)]であり、導入された大きな増幅率の攪乱の成長によって偶然変動の成長が抑制された結果である。しかしながら、最終的にｈ（Ｇ≒240）では、自然遷移におけるスペクトルとはそれ程異なってはおらず、ほぼ完全な乱流状態になっている。

以上のように、平面プルームの乱流遷移の過程はかなり緩慢で系統的であり、通常の自由流の遷移過程に見られる特徴を示している。

5．3．5　時間平均温度と温度変動強さの分布

遷移領域における速度と温度の時間平均量や変動分についての水平方向（y方向）分布はこれまでほとんど測定されておらず、わずかに Forstrom と Sparrow [7] による遷移の始まり付近での時間平均温度分布の測定があるだけである。本実験で用いたLDV は周波数シフタを備えていないために、逆流を検出することは不可能で、時間平均速度が0に近く、しかも比較的大きな変動をともなうプルーム外縁付近での速度の測定は無理であった。したがって、遷移領域では温度分布の測定に限った。また、その測定は線熱源の中央部（$z=0$）で、自然遷移の過程についてのみ行った。

遷移の始まり付近での時間平均温度分布の測定結果を図 5.16 に示す。図の横軸には定常層流場の相似変数

$$\eta_f = Gr_{x,f}^{1/5}\, y / x \tag{5.8}$$

を、縦軸には無次元温度

$$\Phi_f(\eta_f) = (T - T_\infty)\, Gr_{x,f}^{1/5} / \Theta \tag{5.9}$$

を用い、加熱量と高さについては前述の補正を行って測定データを整理した。図中の実線は定常層流温度分布の理論数値解 [17]である。$x'=15.2$ cm （$G=123$）での測定結果はほとんど層流の分布となっている。$x'=20.2$ cm （$G=145$）のほぼ遷移の始まりに対応する高さにおいても、わずかにプルーム中心温度が低下してはいるが、なお層流分布にかなり近い。しかしながら、$x'=25.0$ cm （$G=167$）のすでに遷移が始まっている高さでは、中心温度が急激に低くなり、その分プルームの厚さが増加している分布となっている。$x'=30.0$ cm （$G=187$）ではさらに中心温度が低くなり、一層、プルームの厚さが増加し、層流分布とはかなり異なった分布となっている。

一方、同じ測定範囲の高さにおける温度変動強さ（rms 値）の分布を図 5.17 に示す。ただし、この変動強さにはスウェイング運動の極低周波成分からの寄与は除いて

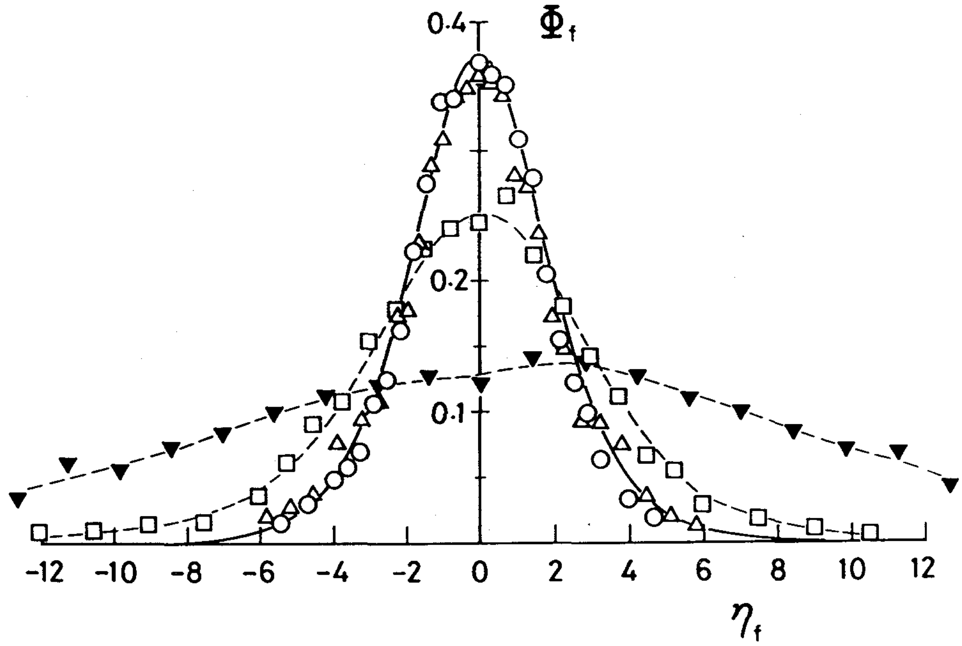


図 5.16 時間平均温度分布（自然遷移），実線は層流の理論数値解 [17)]
Q＝20.4 W/m ○：x′＝15.2 cm, G＝123 ；△：x′＝20.2 cm, G＝145
Q＝20.5 W/m □：x′＝25.0 cm, G＝167 ；▼：x′＝30.0 cm, G＝187

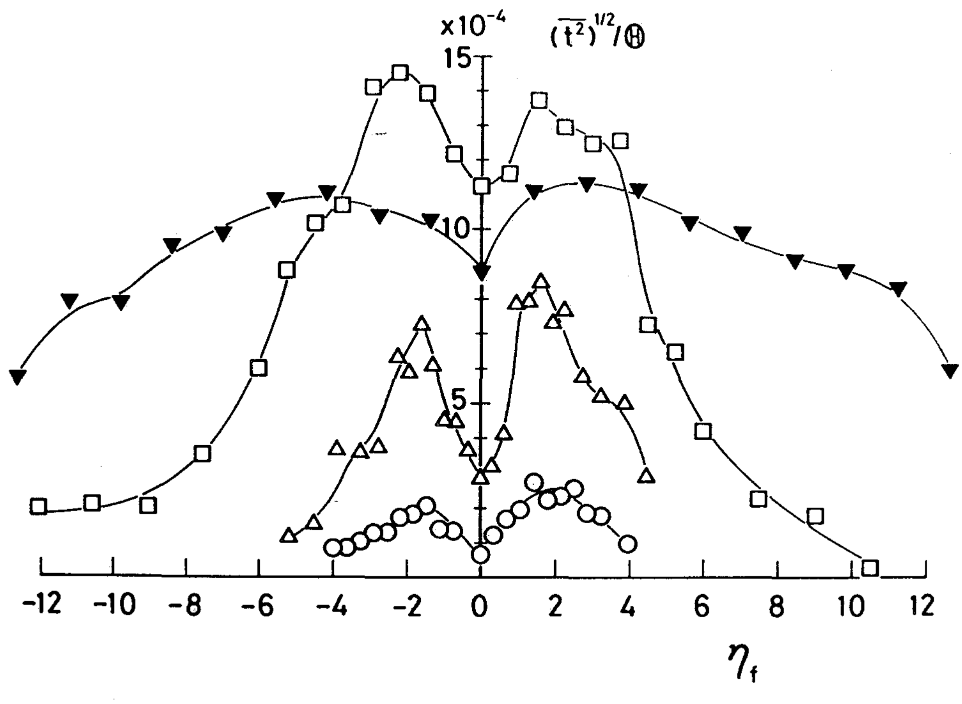


図 5.17 温度変動強さの分布（自然遷移）
Q＝20.4 W/m ○：x′＝15.2 cm, G＝123 ；△：x′＝20.2 cm, G＝145
Q＝20.5 W/m □：x′＝25.0 cm, G＝167 ；▼：x′＝30.0 cm, G＝187

いる。x′=15.2 cm （G=123 ）では、第2章で取り扱った理論的な反対称攪乱の振幅分布と類似の分布となっており、自然発生攪乱が反対称攪乱であることを示している。下流に向かうにつれて急速に変動が成長し、x′=25.0 cm （G=167 ）ではほぼその強さの最大値はピークに達し、時間平均分布に対応して、変動もy方向に大きく拡がっている。この高さではプルーム中心における変動強さもかなり大きくなっている。x′=30.0 cm （G=187 ）になるとさらに変動はy方向に拡がるが、中心部の強さは減少しており、前に示した温度変動強さの下流変化の結果（図 5.7）と一致している。

自然遷移の終りに対応する Grashof数（G≒200 ）以上ではもはや層流理論との比較は意味がなく、乱流についてのスケールでデータを整理する必要がある。自己保存の成立する完全に発達した乱流平面プルームに対して、Batchelor [16] は相似解を仮定して次元解析から、$T-T_\infty=F^{2/3}/(g\beta^* x)\times$（y／xの関数）の形の時間平均温度分布を求め、プルームの厚さがxとともに直線的に増加することを示した。ただし、高さxは乱流場についての原点（実際は乱流の仮想的な始点であり、時間平

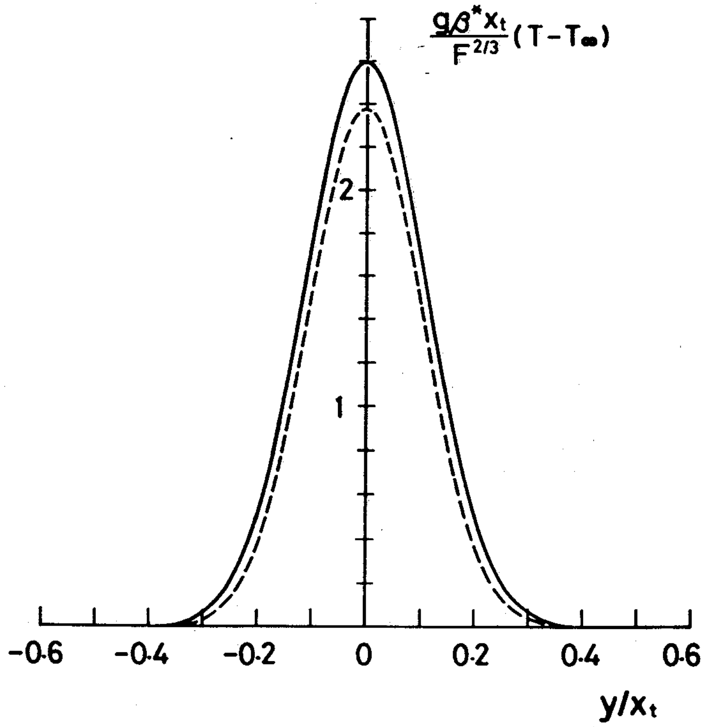


図 5.18 他の研究者による時間平均温度分布の測定結果
――― : Rouse ら[9] ; ― ― ― : Kotsovinos [12]

均分布の半値幅が0となる高さに対応する）からの高さを意味する。実験では熱源は有限の大きさであり、また層流および遷移領域が存在するため、熱源からのある高さ x_0 が乱流の始点となる。したがって、乱流の始点からの高さを x_t とすれば、

$$x_t = x' - x_0 \qquad (5.10)$$

となる。乱流平面プルームの具体的な時間平均温度分布は実験から

$$T - T_\infty = B_t\ F^{2/3} / (g \beta^*\ x_t) \exp(-K_t\ y^2 / x_t^2) \qquad (5.11)$$

の Gauss分布の形に与えられ、係数は Rouseら [9] により $B_t = 2.6$, $K_t = 41$、Kotsovinos [12] により $B_t = 2.38$, $K_t = 47$ と求められている。彼らによって得られた時間平均温度分布を参考のために図 5.18 に示す。

乱流の始点 x_0 を得るために、加熱量を $Q = 20.5$ W/m に固定して、乱流状態にある思われる $G > 200$ の領域で時間平均温度分布を測定し、半値半幅 b_T を求めた。ただし、b_T は時間平均温度差 $T - T_\infty$ が最大値の1/2 となるプルームの半幅と定義す

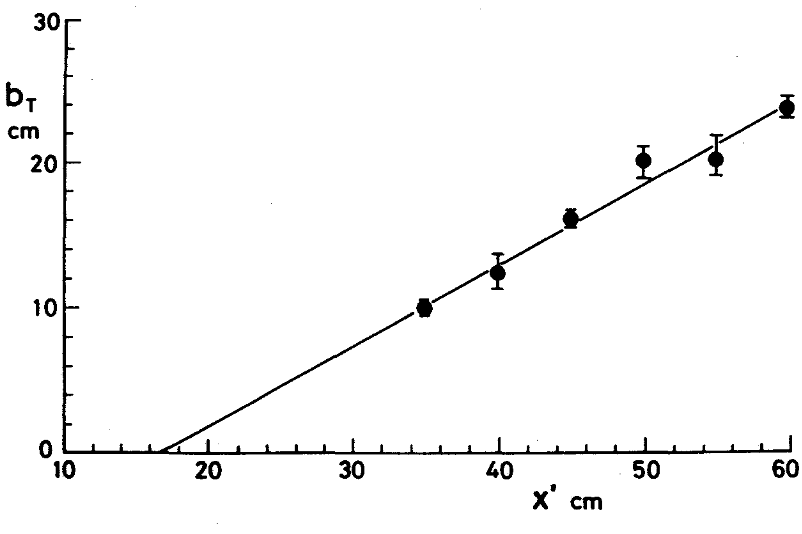


図 5.19 半値半幅の測定結果（自然遷移）$Q = 20.5$ W/m
直線は $b_T = 0.548(x' - 16.6\ \mathrm{cm})$

る。結果を図 5.19 に示す。図中の実線は測定値に最小二乗法を適用して得られた直線であり、半値半幅 b_T が熱源からの高さ x' とともにほぼ直線的に増加していることが分る。この直線から $b_T = 0$ となる乱流の始点 x_0 は 16.6 cmと求められる。当然、Qが変れば遷移の始まりや終りに対応する熱源からの高さは変り、x_0 は異なった値をとると考えられる。一方、直線の傾きは 0.548となり、Rouse ら [9] および Kotsovinos [12]によって求められた値よりもおよそ4倍も大きく、この結果はプルームの厚さが急速に増していることを意味する。

上述のようにして求められた x_0 からの高さ x_t を用いて整理した時間平均温度分布の測定結果を図 5.20, 5.21 に示す。図 5.20 の温度分布はいずれもプルーム中心部分で大きくへこみ、かなり厚くなっており、図 5.18 の Rouseらや Kotsovinos の測定結果とはまったく異なった分布となっている。しかしながら、この $x' = 35$ cm（G＝202 ）から $x' = 45$ cm （G＝236 ）の温度分布は明らかに自己保存が成立しおらず、十分に発達した乱流とはなっていないと考えられる。図 5.21 の温度分布はいずれも中心部分のわずかな低下は見られるが、前図で見られたような大きなへこみはなくなっている。このように図 5.20 と 5.21 の温度分布から中心温度が一度、低下した後上昇することは、前に図 5.3で示した、遷移の終り付近で時間平均中心温度に見られたオーバーシュートに対応している。図 5.21 の温度分布はすべて一つの相似な分布となっており、G＞250 の領域では自己保存の成立したほぼ完全な乱流とみなすことができる。しかしながら、Rouse らや Kotsovinos の測定結果に比べて、中心温度は 1/2程度で、プルームはずっと厚く、かなりだれた形の分布となっている。

乱流場における Rouseら [9] や Kotsovinos [12] の温度分布と異なる原因となっているかもしれない、周囲流体の温度成層化の影響も調べたが、上述のような違いを起すほど大きくはなかった。したがって、この分布が異なる原因の一つとして、乱流に対する初期条件としての遷移過程の違いが考えられる。ガスバーナーからの火炎を熱源として用いた Rouseらの実験では、加熱量Qは本実験に比べて100 倍も大きく、層流領域だけでなく乱流への遷移領域もほとんど存在せず、いきなり乱流の状態が得られている。また、Kotsovinosの実験でもQはかなり大きく、ノズルから噴出する高い温度の乱流ジェットの下流に形成される、乱流プルームについての測定であり、やは

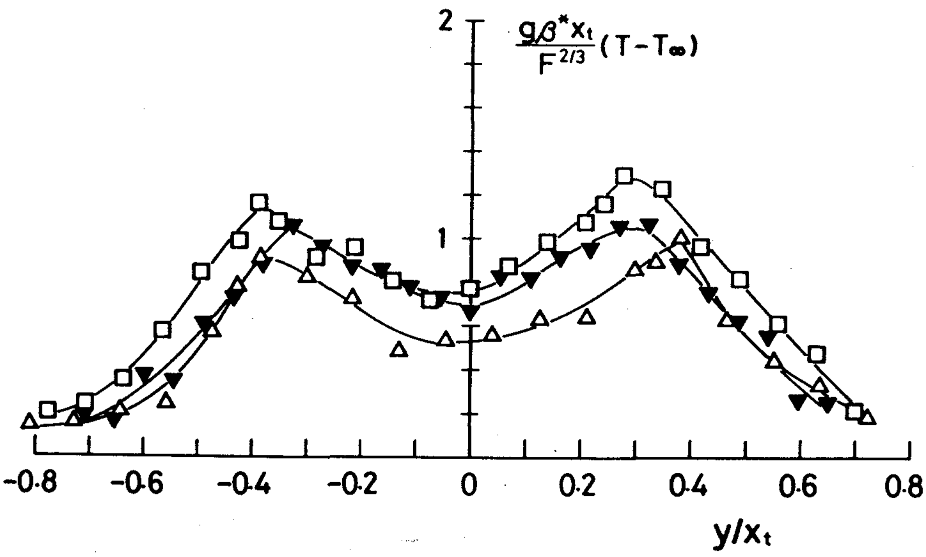


図 5.20 時間平均温度分布（自然遷移）Q＝20.5 W/m
▼：x′＝35 cm,　G＝202　；△：x′＝40 cm,　G＝220
□：x′＝45 cm,　G＝236

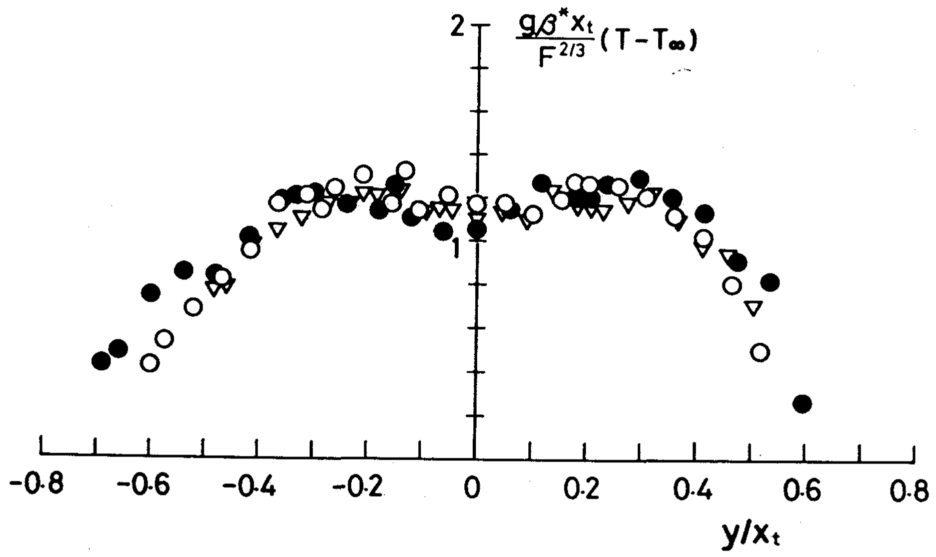


図 5.21 時間平均温度分布（自然遷移）Q＝20.5 W/m
●：x′＝50 cm,　G＝251　；○：x′＝55 cm,　G＝267
▽：x′＝60 cm,　G＝281

り乱流への遷移領域はほとんど存在しない。これらのことから、乱流平面プルームは初期条件としての遷移過程に強く依存していると考えざるを得ない。

次に、G＞200 の領域での温度変動強さ（rms 値）の分布を図 5.22 に示す。いずれの分布もプルーム中心部で低くなっており、下流に向かうにつれて全体の強さが減少している。これらの温度変動強さを時間平均値の場合と同じスケールで無次元化を行って、整理したものを図 5.23 に示す。バラツキはやや大きいが、いずれもほぼ相似な分布となっており、時間平均温度分布に見られたような 200＜G＜250 の領域と G≧250 の領域での明確な違いはない。

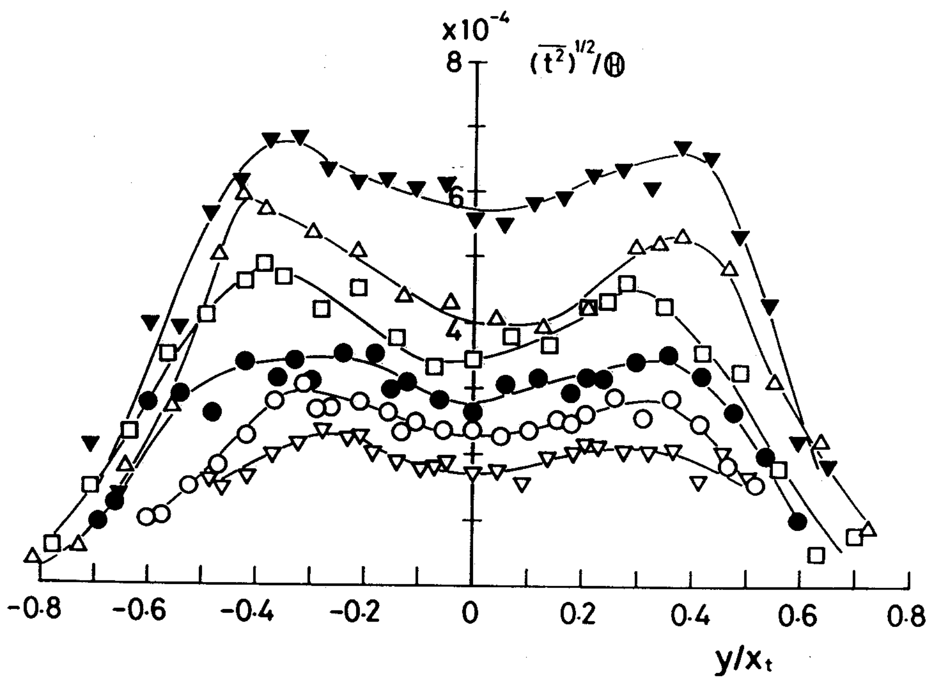


図 5.22 温度変動強さの分布（自然遷移）Q＝20.5 W/m
▼：x′＝35 cm，G＝202；△：x′＝40 cm，G＝220
□：x′＝45 cm，G＝236；●：x′＝50 cm，G＝251
○：x′＝55 cm，G＝267；▽：x′＝60 cm，G＝281

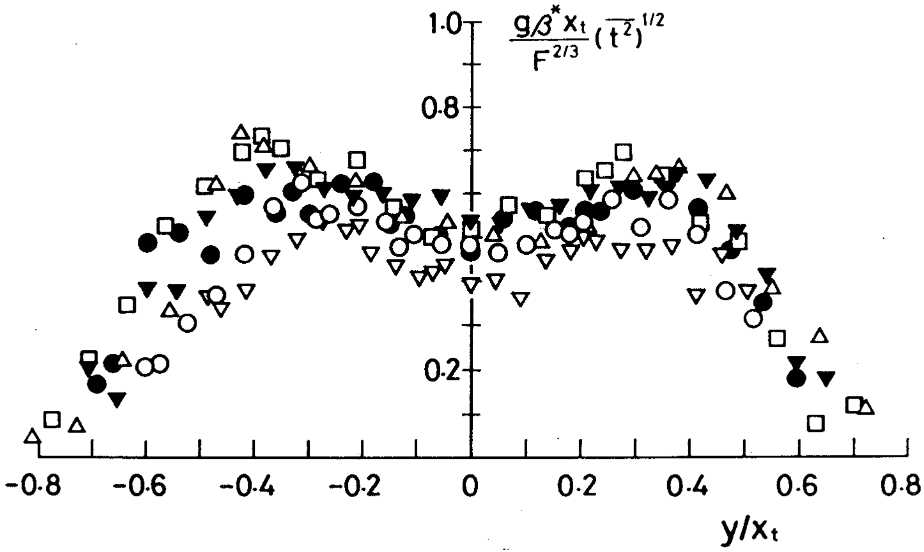


図 5.23 温度変動強さの分布（自然遷移）Q＝20.5 W/m
▼：x′＝35 cm,　G＝202　；△：x′＝40 cm,　G＝220
□：x′＝45 cm,　G＝236　；●：x′＝50 cm,　G＝251
○：x′＝55 cm,　G＝267　；▽：x′＝60 cm,　G＝281

5．3．6　流れ場の可視化

平面プルームの乱流への遷移過程において、これまで行ってきた速度や温度の測定結果を定性的に確かめ、さらにそれらの点測定からは十分に得られなかった流れ場の大まかな構造を知るために可視化実験を行った。実験は自然遷移と人工遷移の両遷移過程について行い、人工遷移では周波数 $f=0.8$ Hzの反対称な正弦波攪乱をプルームに導入した。

照明用光源としてレーザ光を用いた煙注入法による、線熱源の中点（$z=0$）を通る $x-y$ 鉛直面内の流脈の可視化写真を図 5.24, 5.25 に示す。図 5.24 は自然遷移、図 5.25 は人工遷移の場合であり、両図ともaからdまで0.25秒間隔で撮影した連続写真である。図 5.24 の自然遷移において、高さ $x'=20$ cm 付近で流脈がプルーム左右（y方向）にわずかに波打っているのが分る。しかしながら、$x'=30$ cm に至ると流脈は急激に大きく波打ち始め、図のaから分るように、すぐ下流で流脈は渦巻いている。この流脈が渦巻く現象はプルーム左右の両側で、周波数がほぼ 0.8 Hz の自然発生攪乱に同期して、その半周期ごとに交互に起っていることが観察から確かめられた。図のaでは回転方向は反対ではあるが、あたかも円柱の後流に発生するKármán渦のようなものが見られる。しかしながら、$x'=40$ cm よりも下流ではかなり乱れた流脈となり、流れは乱流の状態になっていると考えられる。この状況は人工遷移の図 5.25 でより明確になっている。ここでは自然遷移の場合に比べて初期攪乱が大きいため、$x'=30$ cm 以下の高さで流脈はすでに渦巻いている。またその渦巻も自然遷移の場合に比べてはるかに強いようである。この場合も $x'=40$ cm 付近では流脈は乱れており、一旦、上流で渦巻いた煙はそのまま下流に運ばれるとともに流れの変動によって崩壊している。いずれも流れの流脈を可視化したものであるから、渦巻いた流脈が見られるところで実際に Kármán 渦に類似の孤立渦が発生しているかどうかは明らかではない。

次にスモーク・ワイヤ法を用いて一本のワイヤから生じるタイムラインを可視化した合成写真を図 5.26, 5.27 に示す。自然遷移の場合の図 5.26 は任意の時間タイミングで高さごと各々撮影したものであるが、人工遷移の場合の図 5.27 は導入した正弦波攪乱の位相 θ に同期させて各々撮影したものである。自然遷移では図 5.26 から

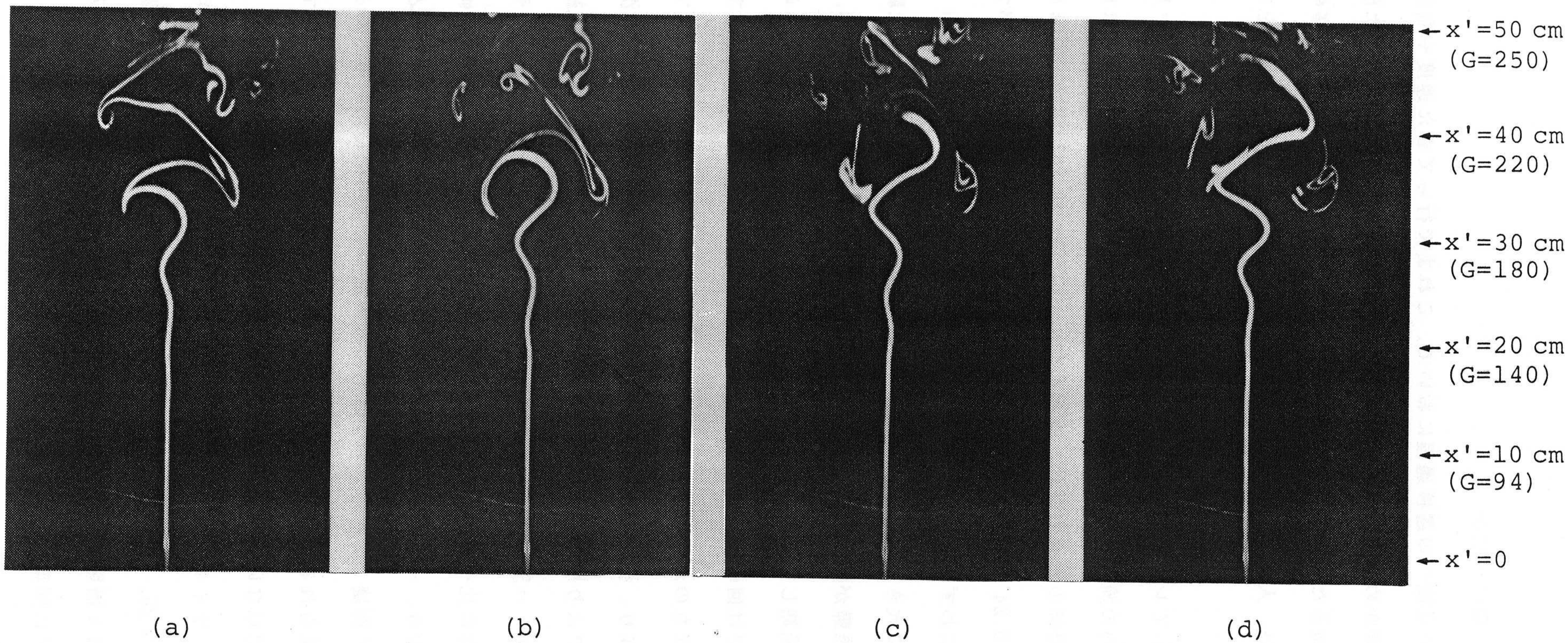


図 5.24 流脈の可視化写真（自然遷移）Q＝20.4 W/m
（aからdまで 0.25 秒間隔の連続写真）

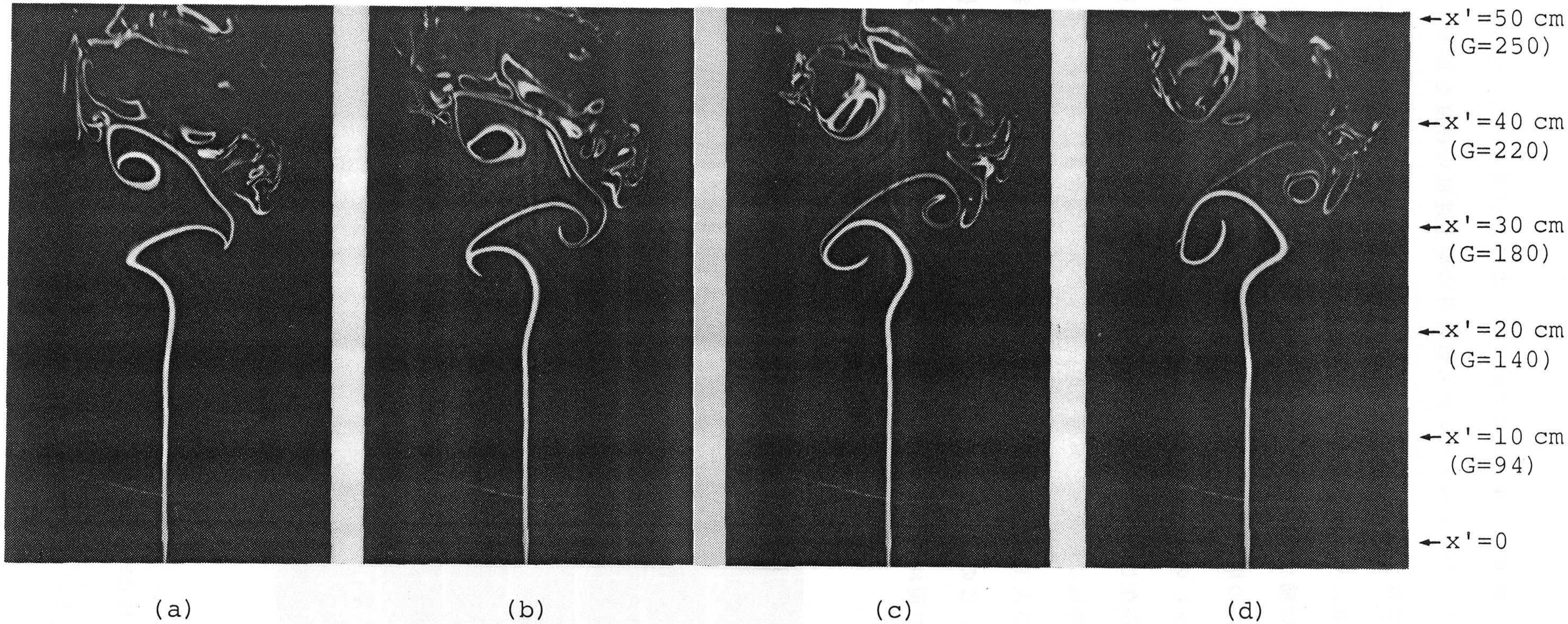


図 5.25 流脈の可視化写真（人工遷移）Q＝20.4 W/m, f＝0.8 Hz
（aからdまで 0.25 秒間隔の連続写真）

x′=15 cm でほぼ層流のプルームに対応する速度分布が見られる。なお、水平距離 y が十分大きなところのタイムラインから煙自身の浮上速度の程度を知ることができる。x′=25 cm ではプルームがやや厚くなり、タイムラインの形状から変動が大きいことが推察できる。それより下流ではプルームは急速にその厚さを増していることが分る。このことは前小節の時間平均温度分布の定量的な測定結果を裏付けている。図 5.27 の人工遷移の場合には、x′=25 cm でプルームはすでにかなり厚くなっている。また、図（a）の x′=25 cm では煙の浮上速度から判断して明らかにプルーム外縁に逆流部が存在していることが分る。x′=35 cm でもこの逆流部が見られるがやはりプルーム外縁に限られ、外縁で周囲流体の大きな巻き込みが起っていることを示している。この人工遷移における x′=20 cm での $\pi/4$ごとの位相の可視化写真を図 5.28 に示す。この図から明らかに、上述の逆流部が、導入した反対称攪乱の基本モードに同期して現れているのが分る。位相 $\theta=0$ と π のタイムラインが示す速度

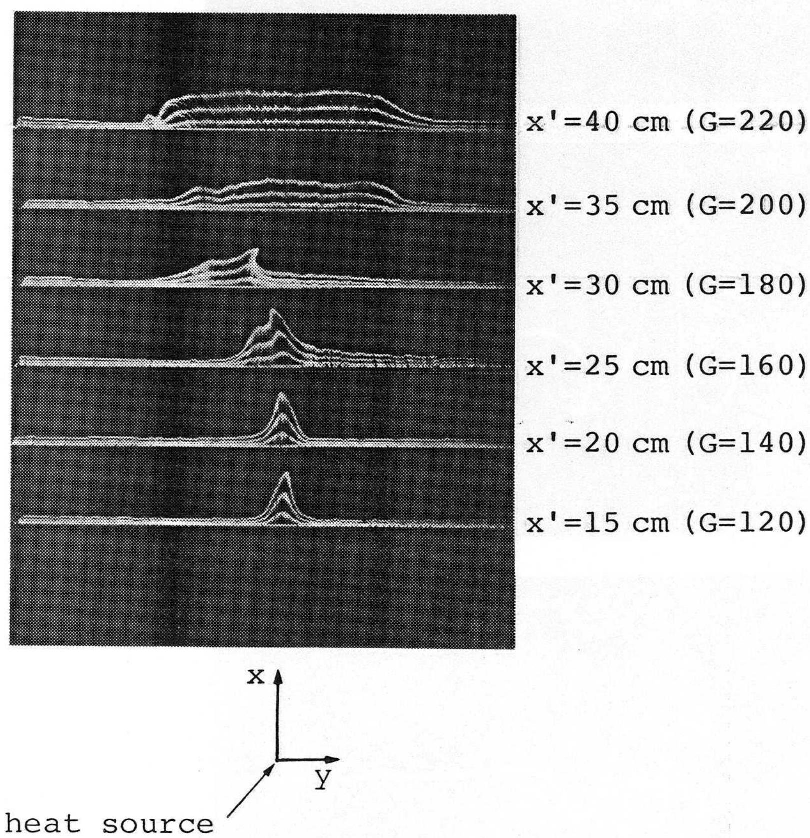
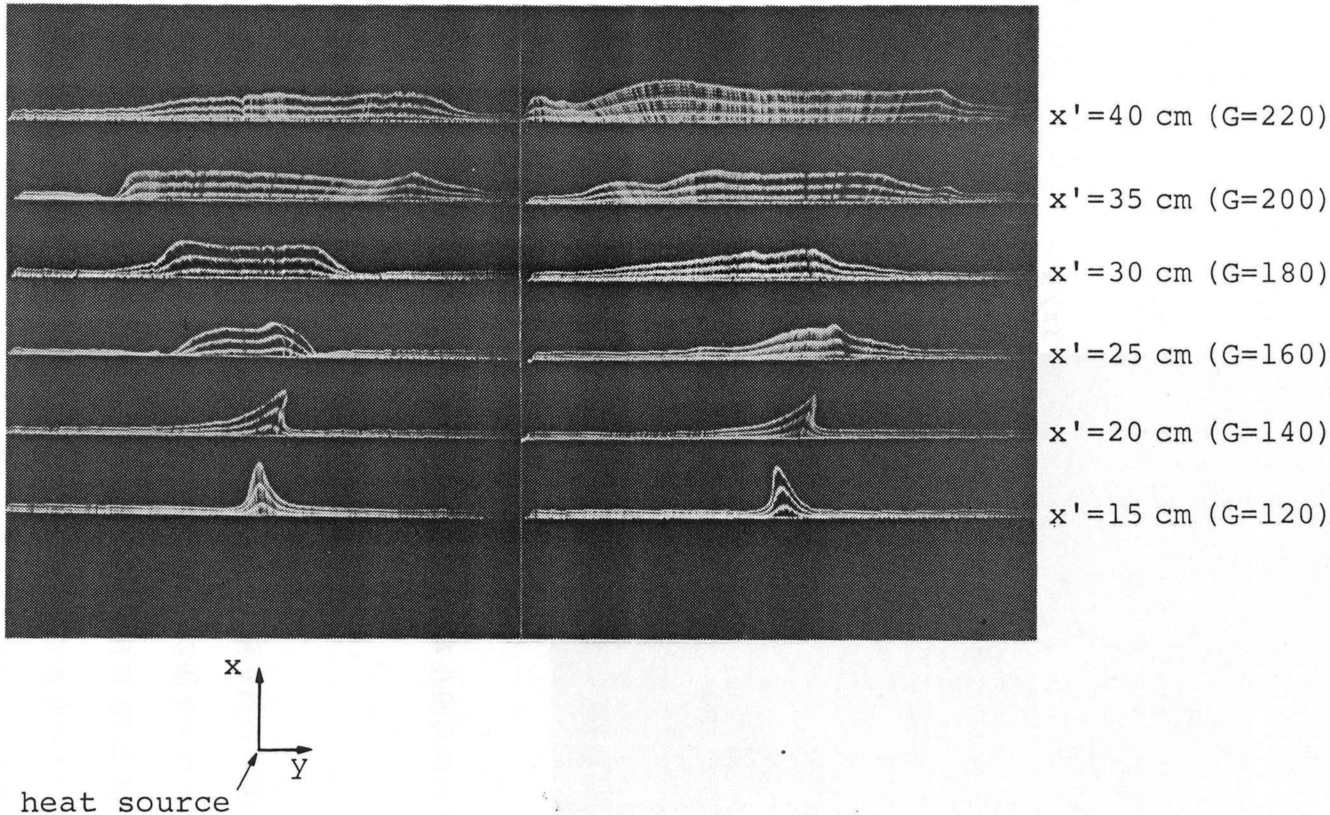


図 5.26 タイムラインの可視化写真（自然遷移）Q=20.6 W/m



(a) (b)

図 5.27 タイムラインの可視化写真（人工遷移）Q＝20.6 W/m, f＝0.8 Hz
(a) $\theta=0$; (b) $\theta=\pi/4$

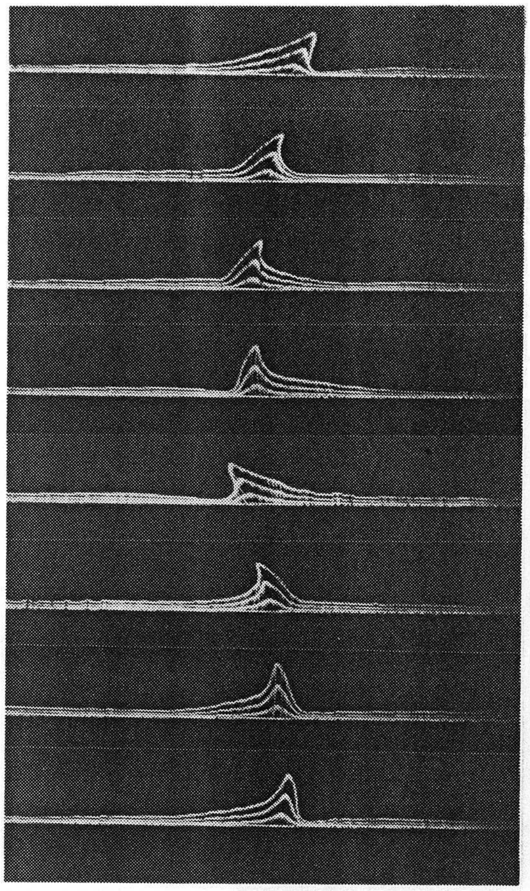


図 5.28 タイムラインの可視化写真（人工遷移） Q＝20.6 W/m, x′=20 cm, f =0.8 Hz

分布には高せん断層が見られ渦が発生しやすい状況にある。

煙注入法とスモーク・ワイヤ法の二つの方法を併用して得られた可視化写真を図5.29, 5.30 に示す。図 5.29 は自然遷移、図 5.30 は人工遷移の場合である。図5.29からx′＝25 cm までの高さでは流脈が最大速度の位置を通る軌跡に対応していることが分る。しかしながら、両遷移過程のいずれの図においても渦巻いた流脈が見られる位置には予測されるような孤立渦に対応する明確な速度分布は現れていない。したがって、自然発生攪乱や人工攪乱に同期して、プルーム外縁で周囲流体の大きな巻き込みが起り、そこには速度分布の高せん断層ができ瞬間的に渦が発生するが、弱

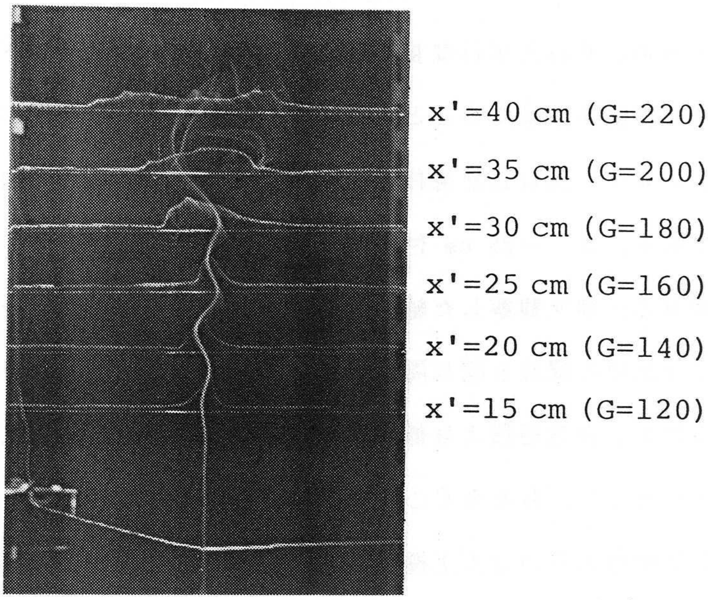


図 5.29 流脈とタイムラインの可視化写真（自然遷移） Q＝20.6 W/m

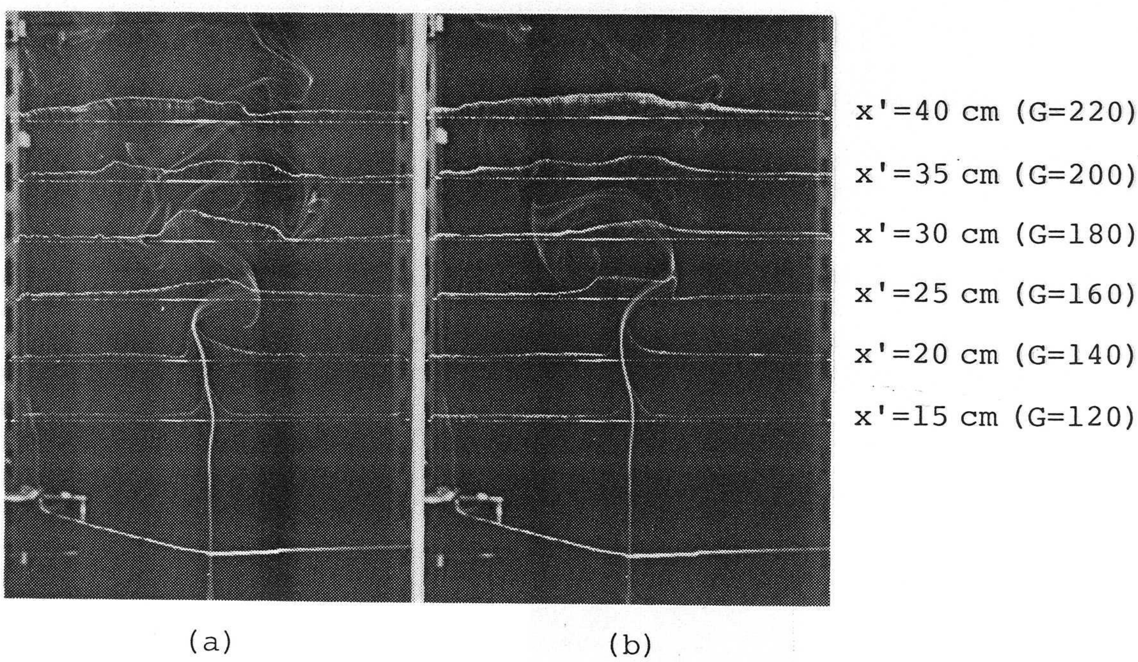


図 5.30 流脈とタイムラインの可視化写真（人工遷移） Q＝20.6 W/m,
f＝0.8 Hz (a) $\theta = 3/4\pi$; (b) $\theta = \pi/2$

く不安定な渦であり、すぐ下流で崩壊していると考えられる。

線熱源の下方の、それと平行な長さ 20 cm、幅 1 mm のスリットから煙をプルームに注入し、その流脈を観察することにより流れ場の三次元性を調べた。この可視化写真を図 5.31 に示す。図は自然遷移の場合であり、熱源の長さ方向（z 方向）から撮影したものである。x′=20 cm 付近から流脈が熱源の長さ方向にわずかに波打ち始めているのが分る。種々観察した結果、この波はほぼ熱源の長さを半波長とするもので、0.8 Hzの自然発生攪乱と同じ周期で振動していることが確かめられた。また、人工遷移の場合にも、自然遷移より低い高さで起るが、導入した攪乱と同じ周期で振動していることが分った。おそらくこれは熱源の長さが有限であるために起る不安定であり、自然発生攪乱あるいは人工攪乱の成長により誘発されたものと思われる。前に示したように、遷移領域において、熱源の長さ方向の三点で同時記録された温度変動波形（図 5.4, 5.5)に見られた位相差はこの不安定による結果と考えられる。

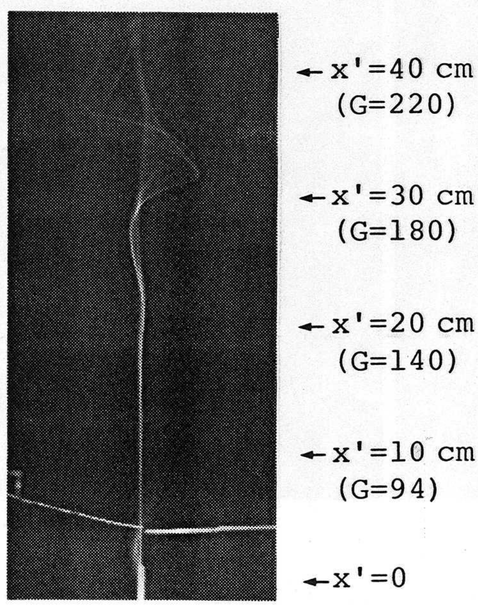


図 5.31 流脈の可視化写真　Q＝20.4 W/m（自然遷移）

5．4　まとめ

空気中に置かれた水平線熱源から立ち昇る平面プルームの層流から乱流への遷移過程における速度および温度変動の測定と、流れ場の可視化を行って得られた結果を以下に示す。

（1）プルーム中心面上（y＝0）の垂直速度成分と温度の時間平均値は、極力外乱を抑えた自然遷移の過程では、加熱量に依らず、変形 Grashof数G≒150 で定常層流理論から離脱し、遷移が始まる。遷移の始まりは初期攪乱の大きさに依存するが、この時間平均量から見る限り、遷移の終りは初期攪乱の大きさにほとんど依らずG≒210 で起る。

（2）自然遷移、人工遷移の両遷移過程で、攪乱の二次元性は遷移がかなり進んだ段階まで保たれ、通常の自由流の特徴と一致する。しかしながら、攪乱の三次元性が顕著になるまでに、熱源の長さ方向（z 方向）に、その長さを半波長とする波が現れる。これは自然発生攪乱や人工攪乱の成長の結果、熱源の有限長さによって起る二次不安定と考えられる。

（3）温度変動の強さ（全成分）は、自然遷移と人工遷移の両遷移過程で、下流に向かうにつれて急激に成長し、ピークに達した後、単調に減少する。垂直速度変動の強さも急激にピーク値まで成長するが、その後、自然遷移では緩やかに減少して一定値に近づき、人工遷移では極小値まで急激に減少し、再び成長して同じ一定値に近づく。人工遷移では、変動の強さがピーク値に達した後の下流における温度変動の強さには主に第二高調波成分が寄与しているが、速度変動の強さには基本波および第二高調波成分がともに大きく寄与している。

（4）自然遷移では、速度および温度変動のパワースペクトルには二つの基本周波数（f_1，f_2）のピークが現れ、下流に向かうにつれて、f_1，f_2 のピークと非線型干渉の結果である、それらの整数倍の和と差の周波数ピークが発達する。周波数 f_1（≒0.8 Hz）の攪乱は自然に存在する弱い反対称攪乱が選択増幅されたものであるが、f_2（≒1.1 Hz）の攪乱は弱い対称攪乱が一旦、選択増幅された後に、同じ周波数の反対称攪乱が下流で増幅されたものと考えられる。この自然遷移では、基本周波数間の非線型干渉が進んだ結果G≒200 でほぼ滑らかな連

続スペクトルが得られ、遷移が終る。一方、人工遷移では導入した反対称攪乱の基本周波数（基本波成分）の整数倍に顕著なピーク（周期成分）が現れ、下流のG≒160 で基本波成分が減衰して周期成分間の偶然成分が増大し始める。しかしながら、非線型干渉の成長抑制効果のためにG≒210 においても顕著なピークが残り、自然遷移に比べて、遷移は遅れる。最終的に　G≒240 で滑らかな連続スペクトルとなり、乱流状態に至る。このパワースペクトルの結果は平面プルームの乱流遷移の過程がかなり緩慢で系統的であることを示しており、通常の自由流の遷移過程に見られる特徴と一致する。

（5）自然遷移の過程では、遷移が始まるG≒150 で時間平均温度分布はほとんど定常層流場の分布と変らないが、それより下流で急激に中心温度が低下しプルームは厚くなる。また、温度変動の強さが増大するとともに水平方向（y方向）に拡がる。自然遷移の終りに到達していると思われる 200＜G＜250 の領域では、プルーム中心部で大きくへこんだ時間平均温度分布となり、自己保存は成立していない。しかしながら、ほぼG≧250 で自己保存は成立し、完全に発達した乱流となる。温度変動の強さはG＞200 ではいずれも相似な分布となり、温度分布のような明確な違いは見られない。完全に発達した乱流の時間平均温度分布は、乱流への遷移領域のほとんど存在しない Rouseらや Kotsovinos の測定結果とはかなり異なり、乱流に対する初期条件としての遷移過程の違いにより別の乱流状態が得られたものと思われる。

（6）遷移領域において、自然発生攪乱あるいは人工攪乱に同期して、その半周期ごとに交互に、両側のプルーム外縁に逆流を伴う速度分布の高せん断層が生じる。その結果、渦が発生するようであるが、すぐ下流で崩壊し、その結果、遷移が進むとともにプルームは急速に厚さを増す。

記　号

B_t ：係数，式 (5.4)，(5.11)

B_u ：係数，式 (5.3)

b_T ：半値半幅

c_p ：定圧比熱

f ：周波数 [Hz]

F ：$g\beta^* Q/(\rho c_p)$

F_f' ：無次元速度のx成分（定常層流），式 (5.1)

G ：変形 Grashof数，式 (5.6)

$Gr_{x,f}$ ：局所 Grashof数，式 (5.5)

g ：重力加速度

Q ：加熱量 [W/m]

T ：時間平均温度

T_0 ：$y=0$の鉛直面での時間平均温度

T_∞ ：周囲温度

t ：温度変動

U_0 ：$y=0$の鉛直面での時間平均速度のx成分

u ：速度変動のx成分

x ：定常層流場についてのみかけの熱源位置からの鉛直方向高さ

x' ：実際の線熱源からの鉛直方向高さ

x_0 ：仮想的な乱流の始点（半値幅が0となる高さ）

x_t ：x_0からの鉛直方向高さ

y ：線熱源に垂直な水平方向距離

z ：線熱源の中点からの長さ方向距離

Θ ：$Q/(\rho c_p \nu)$

Φ_f ：無次元温度（定常層流），式 (5.2)，(5.9)

β ：無次元振動数，式 (5.7)

β^*　：体膨脹係数

ε　：熱量補正係数

η_f　：相似変数，式 (5.8)

θ　：位相

ν　：動粘性係数

ρ　：密度

参 考 文 献

1) Hagen, G. H. L. : Math. Abh. Akad. Wiss. Berlin aus 1854 (1855) 17.

2) Sato, H. : J. Fluid Mech. 7 (1960) 53.

3) Sato, H. and Kuriki, K. : J. Fluid Mech. 11 (1961) 321.

4) Sato, H. : J. Phys. Soc. Jpn. 11 (1956) 702.

5) Sato, H. : J. Phys. Soc. Jpn. 14 (1959) 1797.

6) 佐藤　浩：流体力学の進歩"乱流"，谷　一郎編，丸善 (1980) 47.

7) Forstrom, R. J. and Sparrow, E. M. : Int. J. Heat Mass Transfer 10 (1967) 321.

8) Bill, R. G. and Gebhart, B. : Int. J. Heat Mass Transfer 18 (1975) 513.

9) Rouse, H., Yih, C. S. and Humphrey, H. W. : Tellus 4 (1952) 201.

10) Kotsovinos, N. E. and List, E. J. : J. Fluid Mech. 81 (1977) 25.

11) Kotsovinos, N. E. : J. Fluid Mech. 81 (1977) 45.

12) Kotsovinos, N. E. : Rept. No. KH-R-32, Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources, Caltech, Pasadena (1975).

13) 中込秀樹，平田　賢：日本機械学会論文集 46-410 (1980) 2023.

14) Chen, C. J. and Rodi, W. : "Vertical turbulent buoyant jets, a review of experimental data" Pergamon Press (1980).

15) Fujii, T. : Int. J. Heat Mass Transfer 6 (1963) 597.

16) Batchelor, G. K. : Quart. J. Roy. Met. Soc. 80 (1954) 339.

17) Fujii, T., Morioka, I. and Uehara, H. : Int. J. Heat Mass Transfer 16 (1973) 755.

18) Yosinobu, H. and Wakitani, S. : "Recent studies on turbulent phenomena" edited by Tatsumi, T., Maruo, H. and Takami, H., Association for science documents information (1985) 179.

第6章　結言

本研究は空気中に水平に置かれた線熱源から立ち昇る二次元自然対流（平面プルーム）の層流の安定性から乱流への遷移の機構および遷移過程の構造を理論的、実験的に解明したものである。

第1章では通常の流体力学における乱流遷移の問題に関する研究の現況と、固体壁を持たない自由流に類する自然対流の乱流遷移に関する研究の必要性を述べた。

第2章では境界層近似と Boussinesq 近似に基づいてこれまで解析されてきた層流平面プルームの定常解に言及した。次に、境界層型の基礎流に対して行われる準平行流近似に基づく通常の、空間増幅型の線型安定理論を定常層流平面プルームに適用した。Prandtl 数が 0.7（空気）の場合に、反対称攪乱と対称攪乱の二つの攪乱モードについて数値計算を行い、種々の安定特性を得た。その結果、極端に小さな Grashof数の領域では対称攪乱の方が反対称攪乱よりも不安定であるが、それ以外では全般的に、反対称攪乱の方が一桁大きな増幅率をとり、対称攪乱よりもずっと不安定であることが判明した。

第3章では平面プルームの層流定常場における速度と温度分布の測定を行った結果、みかけの熱源位置を考慮し、加熱量に対して補正を行うことにより実験結果は理論数値解と一致し、この補正によって実験的に実現されている場を理論の枠組の中に組込み、理論定常場を基礎流として用いて計算された第2章の安定特性と、実験結果との比較が可能であることがわかった。

プルームに人工的に導入された反対称攪乱温度の増大、減衰についての実験によって得られた安定特性は、低周波域での攪乱が安定理論よりも小さい増幅率をとるという点を除けば、第2章の安定理論の結果とよく一致する。また、人工的に導入された対称攪乱温度は、下流に伝わるにつれてその振幅分布に非対称性が現れ、最終的に攪乱の線型成長領域内で反対称攪乱モードに移行することが判明した。極力外乱を抑えた状況においても自然に存在する弱い攪乱の選択増幅の結果、Grashof 数の小さなところで1分程度の周期のスウェイング運動が現れ、さらに下流ではそれに重なって1Hz程度の周波数の自然発生攪乱が現れた。これらはいずれも二次元の反対称攪乱であり、第2章で計算された安定特性からそれらの出現が予測できることを示した。

第４章では平面プルームの線型安定特性に及ぼす基礎流の非平行性を、Gasterの方法を用いて解析し、Prandtl 数が 0.7 の場合について数値計算により種々の安定特性を求めた。その結果、増幅率と波数は下流方向座標だけでなく水平方向座標と速度成分、温度、運動エネルギーなどの攪乱量の関数であり、第２章のような基礎流の準平行流近似に基づく線型安定理論（準平行流理論）や一般性のない直感的な非平行流理論とは異なり、一意的に中立曲線が決定できないことがわかった。しかしながら、基礎流に相対的な攪乱量を増幅率の定義に用いることによって、この非平行流理論では種々の攪乱量に基づく中立曲線がいずれも準平行流理論による中立曲線にかなり近づき、この結果、基礎流の温度に相対的な攪乱温度の増大、減衰の測定による第３章の実験結果と第２章の準平行流理論による安定特性とを比較検討することの妥当性が確証できた。このことは安定性の実験結果を準平行流近似の安定特性と比較する際に、実験では基礎流に相対的な攪乱量を採用しなければならないことを意味する。この相対的な攪乱量に基づく増幅率分布はいずれも低周波域で準平行流理論の結果よりも小さくなり、第３章において基礎流の温度に相対的な攪乱温度を測定することによって得られた増幅率分布とかなりよく一致することが判明した。

第５章では平面プルームの層流から完全に発達した乱流に至る広範囲の Grashof数で、既知の反対称攪乱を人工的に導入して遷移を起す場合（人工遷移）と何も導入しない場合（自然遷移）の二通りの乱流遷移過程について速度、温度の時間平均量と変動量を測定し、遷移の機構を解明した。さらに流れ場の可視化実験を行って、速度や温度の測定結果を定性的に確かめるとともにそれらの測定からは得られない遷移領域における流れ場の構造を明らかにした。

プルーム中心面上の時間平均量の測定から、遷移の始まりは初期攪乱の大きさに依存するが、自然遷移の過程では、加熱量に関係なく、ほぼ一定のGrashof 数で遷移が始まり、一方、遷移の終りはほとんど初期攪乱の大きさに依らずほぼ一定のGrashof 数で起ることがわかった。また、この遷移過程では攪乱の二次元性は、遷移がかなり進んだ段階まで保持され、通常の自由流の乱流遷移に見られる特徴と一致している。ただし、攪乱の三次元性が顕著になるまでに、熱源の有限長さによって起る二次不安定と思われる波が、自然発生攪乱や人工攪乱に同期して、熱源の長さ方向に現れる。

人工遷移の過程から、速度と温度の変動強さがピーク値に達した後の遷移領域では、速

度変動の強さには攪乱の基本波成分と第二高調波成分がともに同程度で寄与しているが、温度変動の強さには主に第二高調波成分が寄与していることが明らかになった。

速度と温度変動のパワースペクトルの測定から、自然遷移と人工遷移ではその遷移機構が異なっていることが判明した。自然遷移では二つの基本周波数のピークが現れ、それらの攪乱の間の非線型干渉が下流に進むにつれて発達して乱流に遷移する。準平行流理論による安定特性から、それらの二つの基本周波数の攪乱の一つは自然に存在する弱い反対称攪乱が単純に選択増幅されたものと、他の一つは一旦、対称攪乱が選択増幅された後に、同じ周波数の反対称攪乱が下流で増幅されたものと考えることができる。一方、人工遷移では反対称な人工攪乱の基本周波数（基本波成分）の整数倍に顕著なピーク（周期成分）が現れ、下流での基本波成分の減衰につれて周期成分間のいわゆる偶然成分が増大し、乱流に遷移する。これらのパワースペクトルの結果は、平面プルームの乱流遷移の過程がかなり緩慢でしかも系統的であり、一般的な自由流の遷移の特徴と一致している。

自然遷移の過程を経て得られた、自己保存の成立する、完全に発達した乱流における時間平均温度分布は、層流領域および乱流への遷移領域のほとんど存在しない状況で得られた従来の乱流平面プルームの温度分布に比べてずっと厚く、かつ、かなり異なっている。これは乱流に対する初期条件としての遷移過程の違いにより異なった乱流状態が得られたと考えられ、乱流が遷移過程に依存するとし、最近、完全に発達した乱流中に見出されている秩序運動の起源を遷移過程に求めようとする立場を支持する一つの結果であると考えられる。

可視化実験から遷移領域では、自然発生攪乱や人工攪乱に同期してプルームの左右の両側の外縁に逆流を伴う速度分布の高せん断層が生じていることが判明した。これにより瞬間瞬間、渦が発生していると思われるが、すぐ下流で崩壊しているようであり、このことによってプルームが急速に厚さを増していることを説明することができる。この遷移領域での秩序運動が完全に発達した乱流領域にまで消滅せずに残っているかどうかを検証するまでには至らなかった。

以上本研究は、平面プルームの乱流遷移の機構と遷移過程の構造を詳細に解明した。この単純な幾何学的配置について得られた結果が、その修正や拡張によって、工学、気象学、

地球物理学などの現実のより複雑な現象に適用され、さらに遷移論の確立、発展のための一助となれば筆者の望外の喜びとするところである。

謝　　辞

本研究を行うにあたり、終始かわらぬ御理解と暖かい御指導、御鞭達を賜りました大阪大学基礎工学部　吉信宏夫教授に深甚なる謝意を表します。また、本論文の完成に多くの適切な御助言を賜りました大阪大学基礎工学部　角谷典彦教授、吉川孝雄教授にも深甚なる謝意を表します。

本研究の遂行中、絶えず有益かつ適切な御指導、御助言を頂きました大阪府立大学工学部　楠井　健助教授、佐野孝郎助教授、大西善元講師、ならびに実験に際して熱心な御協力を頂きました当時大阪府立大学学生であった各位に厚く御礼申し上げます。

なお本研究の数値計算は、大阪府立大学計算センターおよび岡山大学計算機センターを利用して行ったことを付記し、謝意を表します。