



Title	Sur une totalisation dans les espaces de plusieurs dimensions. II
Author(s)	Enomoto, Shizu
Citation	Osaka Mathematical Journal. 1955, 7(2), p. 157-178
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/11310
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

Sur une Totalisation dans les Espaces de Plusieurs Dimensions. II

Par Shizu ENOMOTO

Dans le mémoire précédente "Sur une totalisation dans les espaces plusieurs dimensions. I",¹⁾ nous avons donné une totalisation dans les espaces de plusieurs dimensions, qui a été dite l'intégrale ($\mathfrak{D}$). Nous avons montré dans le mémoire qu'on peut ramener toute intégrale ($\mathfrak{D}$) dans un intervalle de n dimensions aux intégrations au sens de Denjoy n -plement itérées sur des segments d'une dimension.

Dans ce mémoire nous examinerons surtout les propriétés de l'intégrale ($\mathfrak{D}$).

On verra d'abord dans §5 que l'intégrale ($\mathfrak{D}$) est une extension de l'intégrale au sens de Denjoy à l'espace (euclidien) de plusieurs dimensions et que, comme le cas de l'intégrale au sens de Denjoy, il y a, pour une fonction $f(p)$ intégrable ($\mathfrak{D}$) sur un intervalle R_0 de plusieurs dimensions, une suite d'ensembles fermés $F_n (n=1, 2, \dots)$ non-décroissante, de presque total R_0 et telle que l'intégrale ($\mathfrak{D}$) sur R_0 est la limite de l'intégrale au sens de Lebesgue de $f(p)$ sur F_n lorsque n tend vers ∞ . On verra de plus que pour une fonction $f(p)$ intégrable ($\mathfrak{D}$) la fonction d'intervalle $F(I) = (\mathfrak{D}) \int_I f(p) dp$ est extérieurement et intérieurement continue.

Dans §6, nous montrerons que si une fonction d'intervalle $F(I)$ finiaitive et définie dans un intervalle R_0 , est partout dérivable au sens strict dans R_0 , la fonction $F'_s(p)$ est intégrable ($\mathfrak{D}$) dans R_0 et $F(I) = (\mathfrak{D}) \int_I F'_s(p) dp$. Montrons enfin que si $f(p)$ est une fonction intégrable ($\mathfrak{D}$) dans un intervalle R_0 et si $F(I)$ est la fonction d'intervalle définie par $F(I) = (\mathfrak{D}) \int_I f(p) dp$, la dérivée ordinaire $F'(p)$ existe presque partout dans R_0 et on a $F'(p) = f(p)$.

Désormais, nous gardons, sauf indication contraire, la terminologie et les notations de le mémoire I.

1) Shizu Enomoto: Sur une totalisation dans les espaces de plusieurs dimensions. I, Osaka Math. J. 7 (1955), 69–102.

§ 5. Quelques propriétés de l'intégrale (D).

Avant d'examiner les propriétés de l'intégrale (D), nous montrerons que l'intégrale (D) est une extension de l'intégrale au sens de Denjoy à l'espace de plusieurs dimensions. En effet, nous avons en plus du Théorème 3 et du Théorème 4 le Théorème suivant.

Théorème 7. *Si pour une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_{n_0})$ définie dans un intervalle $R_0 = [a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_{n_0}, b_{n_0}]$ il y a une fonction $g(x_1)$ intégrable au sens de Denjoy sur $[a_1, b_1]$ telle qu'on ait*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n_0}) = g(x_1) \text{ pour tout } (x_1, \dots, x_{n_0}) \in [a_2, b_2; \dots; a_{n_0}, b_{n_0}],$$

alors, la fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_{n_0})$ est aussi intégrable (D) dans R_0 .

Démonstration. Montrons simplement le cas où $n_0 = 2$ seul. Posons $f(x, y) = f(x_1, x_2)$ et $g(x) = g(x_1)$. Puisque $g(x)$ est intégrable au sens de Denjoy sur $[a_1, b_1]$, il y a du Théorème 1 une suite d'ensembles fermés non-décroissante $F_n (n=1, 2, \dots)$ de total $[a_1, b_1]$, qui satisfait aux conditions suivantes :

1) $g(x)$ est sommable sur tout F_n .

2) Pour tout F_n , la condition telle que $J_i \cap F_n \neq \emptyset$ pour tout i entraîne $|\sum_{i=1}^{i_0} G(J_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{J_i \cap F_n} g(x) dx| < 1/n(b_2 - a_2)$, quel que soit le système des intervalles $J_i (i=1, 2, \dots, i_0)$ contenus dans $[a_1, b_1]$ et n'empiétant pas les uns sur les autres, $G(J)$ étant l'intégrale au sens de Denjoy de $g(x)$ sur $J \subseteq [a_1, b_1]$.

Montrons que si l'on pose $F(I) = G(proj._x(I)) \times |proj._y(I)|$ pour tout intervalle $I \subseteq R_0$ et $M_n = F_n \times [a_2, b_2]$ ($n=1, 2, \dots$), $F(I)$ est l'intégrale (D) de $f(x, y)$ sur I et $M_n (n=1, 2, \dots)$ est une suite caractéristique et fondamentale de $f(x, y)$.

Il est évident que $F(I)$ est fini-additive, $M_n (n=1, 2, \dots)$ est une suite d'ensembles fermés non-décroissante de total R_0 et $f(x, y)$ est sommable sur tout M_n .

Soit $I_i (i=1, 2, \dots, i_0)$ un système d'intervalles contenus dans R_0 tel que $I_i \cap M_n \neq \emptyset$ pour tout i . Puisqu'alors pour tout $y \in [a_2, b_2]$ le système d'intervalles $proj._x((I_i)^y)$ ($i=1, 2, \dots, i_0$) dans $[a_1, b_1]$, pouvant être vide, n'empiètent pas les uns sur les autres, et puisqu'on a $proj._x((I_i)^y) \cap F_n \neq \emptyset$ pour tout I_i tel que $(I_i)^y \neq \emptyset$, il résulte

$$|\sum_{i=1}^{i_0} G(proj._x((I_i)^y)) - \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{proj._x((I_i)^y) \cap F_n} g(x) dx| < 1/n(b_2 - a_2).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{i=1}^{i_0} F(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{I_i \cap M_n} f(x, y) d(x, y) \right| \\
 &= \left| \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{a_2}^{b_2} G(\text{proj.}_x((I_i)^y)) - \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{a_2}^{b_2} \text{proj.}_x((I_i)^y) \cap F_n g(x) dx \right| \\
 &\leq (L) \int_{a_2}^{b_2} \left| \sum_{i=1}^{i_0} G(\text{proj.}_x((I_i)^y)) - \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{\text{proj.}_x((I_i)^y) \cap F_n} g(x) dx \right| \\
 &< (1/n(b_2 - a_2)) \times (b_2 - a_2) = 1/n.
 \end{aligned}$$

Soient ε un nombre positif quelconque et $m(n, \varepsilon)$ un indice tel que $m(n, \varepsilon) \geq n$ et $1/m(n, \varepsilon) < \varepsilon/2$. Puisque $f(x, y)$ est sommable sur $M_{m(n, \varepsilon)}$, il y a un $\delta(n, \varepsilon) > 0$ dont on a $|(L) \int_{M_{m(n, \varepsilon)} \cap E} f(x, y) d(x, y)| < \varepsilon/2$ pour tout ensemble $E \subseteq R_0$. Soit I_i ($i = 1, 2, \dots, i_0$) un système élémentaire dans R_0 , qui satisfait aux conditions suivantes :

- 1') $I_i \cap M_n \neq 0$ pour tout i ,
- 2') $\mu_2(\bigcup_{i=1}^{i_0} I_i - M_n) < \delta(n, \varepsilon)$.

Comme $M_n \subseteq M_{m(n, \varepsilon)}$, on a $I_i \cap M_{m(n, \varepsilon)} \neq 0$ pour tout i . On a donc

$$\left| \sum_{i=1}^{i_0} F(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{I_i \cap M_{m(n, \varepsilon)}} f(x, y) d(x, y) \right| < 1/m(n, \varepsilon) < \varepsilon/2.$$

D'autre part, comme on a

$$\mu_2((\bigcup_{i=1}^{i_0} I_i) \cap (M_{m(n, \varepsilon)} - M_n)) \leq \mu_2((\bigcup_{i=1}^{i_0} I_i) - M_n) < \delta(n, \varepsilon),$$

on a

$$\left| \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{I_i \cap (M_{m(n, \varepsilon)} - M_n)} f(x, y) d(x, y) \right| < \varepsilon/2.$$

Conséquemment, il résulte

$$\left| \sum_{i=1}^{i_0} F(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{I_i \cap M_n} f(x, y) d(x, y) \right| < \varepsilon.$$

En effet, on voit que $f(x, y)$ est intégrable ($\mathfrak{D}$) dans R_0 et M_n ($n = 1, 2, \dots$) est une suite caractéristique et fondamentale pour l'intégrale ($\mathfrak{D}$) de $f(x, y)$.

Dans la définition de l'intégrale ($\mathfrak{D}$), on peut voir que l'intégrale ($\mathfrak{D}$) est déterminée d'une façon univoque par la fonction à intégrer et ne change pas de valeur, quand on modifie cette fonction dans un ensemble de mesure nulle.

Car, en vertu du Théorème 6, on peut ramener toute intégrale

($\mathfrak{D}$) dans un intervalle de n dimensions à n intégrations au sens de Denjoy consécutives sur des segments d'une dimension. On sait de plus que l'intégrale au sens de Denjoy est déterminée d'une façon univoque par la fonction à intégrer et ne change pas de valeur, quand on modifie cette fonction dans un ensemble de mesure nulle. De plus, on peut voir aussitôt de la définition que si $f(p)$ est intégrable ($\mathfrak{D}$), une fonction $g(p)$, dont on a $g(p)=f(p)$ presque partout, est aussi intégrable ($\mathfrak{D}$) et l'intégrale ($\mathfrak{D}$) de $f(p)$ est aussi celle de $g(p)$.

En outre, on peut entendre de la définition que toute fonction intégrable ($\mathfrak{D}$) est mesurable et presque partout finie.

Théorème 8. *Si deux fonctions $f_1(p)$ et $f_2(p)$ sont intégrables ($\mathfrak{D}$) dans un intervalle R_0 , il en est autant de toute combinaison linéaire de ces fonctions (à coefficients constants α et β) et on a*

$$(\mathfrak{D}) \int_{R_0} (\alpha f_1 + \beta f_2) dp = \alpha (\mathfrak{D}) \int_{R_0} f_1 dp + \beta (\mathfrak{D}) \int_{R_0} f_2 dp.$$

Démonstration. Pour $j=1$ ou 2 , soient M_{jn} ($n=1, 2, \dots$) une suite caractéristique de l'intégration ($\mathfrak{D}$) de f_j et F_{jn} ($n=1, 2, \dots$) une suite fondamentale de l'intégrale ($\mathfrak{D}$) de f_j . Posons $M_n = M_{1n} \cap M_{2n}$ et $F_n = F_{1n} \cap F_{2n}$ pour tout n . Alors, on verra aussitôt de la définition que M_n ($n=1, 2, \dots$) est une suite caractéristique de $f_1 + f_2$ et F_n ($n=1, 2, \dots$) est une suite fondamentale de $f_1 + f_2$. En vertu de la remarque mentionnée plus haut, on verra de plus que l'égalité voulue est vraie.

Ensuite, remarquons le

Corollaire 1. *Désignons respectivement par $R_{n_0+m_0}$, R_{n_0} et R_{m_0} les intervalles $[a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_{n_0+m_0}, b_{n_0+m_0}]$ dans l'espace $E_{n_0+m_0}$, $[a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_{n_0}, b_{n_0}]$ dans l'espace E_{n_0} et enfin l'intervalle $[a_{n_0+1}, b_{n_0+1}; \dots; a_{n_0+m_0}, b_{n_0+m_0}]$ dans l'espace E_{m_0} . Pour une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_{n_0+m_0})$ intégrable ($\mathfrak{D}$) dans $R_{n_0+m_0}$, la fonction*

$$g(x_{n_0+1}, \dots, x_{n_0+m_0}) = (\mathfrak{D}) \int_{a_{n_0}}^{b_{n_0}} (\dots (\mathfrak{D}) \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_{n_0+m_0}) d(x_1)) \dots) d(x_{n_0}),^{2)}$$

est intégrable ($\mathfrak{D}$) dans R_{m_0} et on a

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{D}) \int_{R_{m_0}} g(x_{n_0+1}, \dots, x_{n_0+m_0}) d(x_{n_0+1}, \dots, x_{n_0+m_0}) \\ &= (\mathfrak{D}) \int_{R_{n_0+m_0}} f(x_1, \dots, x_{n_0+m_0}) d(x_1, \dots, x_{n_0+m_0}). \end{aligned}$$

2) Plus précisément, pour presque toutes les valeurs de $(x_{n_0+1}, \dots, x_{n_0+m_0})$ de R_{m_0} ,

$$g(x_{n_0+1}, \dots, x_{n_0+m_0}) = (\mathfrak{D}) \int_{a_{n_0}}^{b_{n_0}} (\dots ((\mathfrak{D}) \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_{n_0+m_0}) d(x_1)) \dots) d(x_{n_0}),$$

et pour toutes les autres valeurs $(x_{n_0+1}, \dots, x_{n_0+m_0})$ de R_{m_0} ,

$$g(x_{n_0+1}, \dots, x_{n_0+m_0}) = \text{un nombre quelconque.}$$

On peut le voir dans la démonstration du Théorème 6.

Théorème 9.³⁾ Pour toute fonction $f(p)$ intégrable $(\mathfrak{D})$ sur un intervalle R_0 de l'espace E_{r_0} , il y a une suite d'ensembles fermés B_i ($i=1, 2, \dots$), non-décroissante, de presque total R_0 et telle que :

- 1) $f(p)$ soit sommable sur tout B_i ,
- 2) on ait

$$(\mathfrak{D}) \int_{R_0} f(p) dp = \lim_{i \rightarrow \infty} (L) \int_{B_i} f(p) dp.$$

Démonstration. Pour le cas où $n_0=1$, on a vu selon Théorème 1 le résultat voulu. Donc, il s'agit d'établir que : si l'on suppose que le résultat voulu est vrai pour tout $n' < n_0$, cela reste vrai pour n_0 . Posons $R_0 = [a_1, b_1; \dots; a_{n_0}, b_{n_0}]$. En vertu du Théorème 6, il y a une suite d'ensembles fermés D_i ($i=1, 2, \dots$) non-décroissante, de presque total R_0 et telle que :

- 1') $f(p)$ soit sommable sur tout D_i ,⁴⁾
- 2') en presque tout point $q' = (x_1', \dots, x_{n_0-1}')$ d'intervalle $K_0 = [a_1, b_1; \dots; a_{n_0-1}, b_{n_0-1}]$, on peut déterminer pour tout $\varepsilon > 0$ un indice $i_0(q', \varepsilon)$ de façon qu'on ait

$$|(D) \int_{a_{n_0}}^{b_{n_0}} f(x_1', \dots, x_{n_0-1}', x_{n_0}) d(x_{n_0}) - (L) \int_{D_i^{q'}} f(x_1', \dots, x_{n_0-1}', x_{n_0}) d(x_{n_0})| < \varepsilon,$$

pour tout $i \geq i_0(q', \varepsilon)$.

Posons

$$g(x_1, \dots, x_{n_0-1}) = (D) \int_{a_{n_0}}^{b_{n_0}} f(x_1, \dots, x_{n_0}) d(x_{n_0}),$$

alors, en vertu du Corollaire 1, la fonction $g(x_1, \dots, x_{n_0-1})$ est intégrable $(\mathfrak{D})$ dans l'intervalle K_0 et on a

$$(\mathfrak{D}) \int_{R_0} f(x_1, \dots, x_{n_0}) d(x_1, \dots, x_{n_0}) = (\mathfrak{D}) \int_{K_0} g(x_1, \dots, x_{n_0-1}) d(x_1, \dots, x_{n_0-1}).$$

Par suite, par hypothèse de l'induction, il y a pour la fonction $g(x_1, \dots, x_{n_0-1})$ une suite d'ensembles fermés B_j ($j=1, 2, \dots$), non-décroissante, de presque total K_0 et telle que

- 1'') $g(x_1, \dots, x_{n_0-1})$ soit sommable sur tout B_j ,
- 2'') pour $\varepsilon > 0$ quelconque, on peut choisir un indice $j_0(\varepsilon)$ tel que $j_0(\varepsilon) < j_0(\varepsilon')$ si $\varepsilon > \varepsilon'$ et qu'on ait

3) Voir Théorème 2.

4) On peut le voir en vertu de la démonstration du Théorème 6.

$$|(\mathfrak{D}) \int_{K_0} g(x_1, \dots, x_{n_0-1}) d(x_1, \dots, x_{n_0-1}) - \\ (L) \int_{B_{j_0(\varepsilon_n)}} g(x_1, \dots, x_{n_0-1}) d(x_1, \dots, x_{n_0-1})| < \varepsilon.$$

Soit ε_n ($n=1, 2, \dots$) une suite quelconque telle que $\varepsilon_n \downarrow 0$. On peut déterminer pour ε_n un nombre positif δ_n de façon que $\delta_n < \delta_{n'}$ si $n > n'$ et qu'on ait

$$|(L) \int_{B \cap B_{j_0(\varepsilon_n/3)}} g(x_1, \dots, x_{n_0-1}) d(x_1, \dots, x_{n_0-1})| < \varepsilon_n/3,$$

quel que soit l'ensemble B contenu dans K_0 dont la mesure est inférieure à δ_n .

En raisonnant de la même manière, on peut voir qu'il y a pour tout ε_n un indice $i_0(\varepsilon_n)$ et un ensemble fermé H_n contenu dans $B_{j_0(\varepsilon_n/3)}$ tels que $i_0(\varepsilon_n) > i_0(\varepsilon_{n'})$ ($n > n'$), $H_n \supseteq H_{n'}$ ($n > n'$), $\mu_{n_0-1}(B_{j_0(\varepsilon_n/3)} - H_n) < \min(\delta_n, 1/n)$ et on ait

$$|g(x'_1, \dots, x'_{n_0-1}) - (L) \int_{(D_{j_0(\varepsilon_n)})^{q'}} f(x'_1, \dots, x'_{n_0-1}, x_{n_0}) d(x_{n_0})| \\ < \varepsilon_n/3 \cdot \mu_{n_0-1}(K)$$

pour tout $q' = (x'_1, \dots, x'_{n_0-1}) \in H_n$.

Posons $F_n = (H_n \times [a_{n_0}, b_{n_0}]) \cap D_{i_0(\varepsilon_n)}$ pour tout n . Alors on a

$$|(\mathfrak{D}) \int_{K_0} f(x_1, \dots, x_{n_0}) d(x_1, \dots, x_{n_0}) - \\ (L) \int_{F_n} f(x_1, \dots, x_{n_0}) d(x_1, \dots, x_{n_0})| \\ \leq |(\mathfrak{D}) \int_{K_0} g(x_1, \dots, x_{n_0-1}) d(x_1, \dots, x_{n_0-1}) - \\ (L) \int_{B_{j_0(\varepsilon_n/3)}} g(x_1, \dots, x_{n_0-1}) d(x_1, \dots, x_{n_0-1})| \\ + |(L) \int_{B_{j_0(\varepsilon_n/3)}} g(x_1, \dots, x_{n_0-1}) d(x_1, \dots, x_{n_0-1}) - \\ (L) \int_{H_n} g(x_1, \dots, x_{n_0-1}) d(x_1, \dots, x_{n_0-1})| \\ + |(L) \int_{H_n} g(x_1, \dots, x_{n_0-1}) d(x_1, \dots, x_{n_0-1}) - \\ (L) \int_{H_n} ((L) \int_{(D_{i_0(\varepsilon)})^{(x_1, \dots, x_{n_0-1})}} f(x_1, \dots, x_{n_0}) d(x_{n_0})) d(x_1, \dots, x_{n_0-1})| \\ < \varepsilon_n/3 + \varepsilon_n/3 + (\varepsilon_n/3 \cdot \mu_{n_0-1}(K_0)) \times \mu_{n_0-1}(H_n) < \varepsilon_n.$$

On verra que F_n ($n=1, 2, \dots$) est une suite voulue.

Examinons maintenant la continuité de l'intégrale $(\mathfrak{D})$.

Nous disons qu'une fonction d'intervalle $F(I)$ définie dans un intervalle R_0 est *continue* (α) dans R_0 (à un point $p \in R_0$) quand elle tend vers zéro avec l'aire d'intervalle I (renfermant p) dont la norme est inférieure à α .

Théorème 10. *Lorsque $f(p)$ est intégrable $(\mathfrak{D})$ dans un intervalle R_0 , la fonction d'intervalle*

$$F_{M_n}(I) = \begin{cases} (\mathfrak{D}) \int_I f(p) dp & \text{si } I \cap M_n \neq 0, \\ 0 & \text{si } I \cap M_n = 0 \end{cases}$$

est continue $(1/n)$ pour tout n , $M_n (n=1, 2, \dots)$ étant une suite caractéristique pour l'intégration $(\mathfrak{D})$ de $f(p)$.

Démonstration. Soit $F_n (n=1, 2, \dots)$ une suite fondamentale pour l'intégrale $(\mathfrak{D})$ de $f(p)$. Pour $\varepsilon > 0$ quelconque, on peut déterminer pour F_n un nombre $\delta' = \delta'(n, \varepsilon)$ de façon qu'on ait

$$|(L) \int_{E \cap F_n} f(p) dp| < \varepsilon/2,$$

quel que soit l'ensemble E dont la mesure est inférieure à δ . Posons $\eta = \eta(n, \varepsilon) = \min(\delta', \delta(n, \varepsilon/2))$, où $\delta(n, \varepsilon/2)$ est le nombre mentionné dans 2) de la définition de l'intégrale $(\mathfrak{D})$ pour $M_n (n=1, 2, \dots)$ et $F_n (n=1, 2, \dots)$. Alors, pour tout intervalle I tel que $|I| < \eta$ et que *norme* $(I) < 1/n$, on a

$$|F_{M_n}(I) - (L) \int_{I \cap F_n} f(p) dp| < \varepsilon/2$$

lorsque $I \cap M_n \neq 0$ et on a $|F_{M_n}(I)| = 0$ lorsque $I \cap M_n = 0$. Par suite, $|F_{M_n}(I)| < |(L) \int_{I \cap F_n} f(p) dp| + \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Donc, $F_{M_n}(I)$ est continue $(1/n)$.

Concernant la continuité de l'intégrale $(\mathfrak{D})$, on aura de plus le théorème suivant.

Pour cela, nous montrons d'abord le

Lemme 6. *Désignons respectivement par $R_{n_0+m_0}$, R_{n_0} et R_{m_0} les intervalles $[a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_{n_0+m_0}, b_{n_0+m_0}]$ dans l'espace $E_{n_0+m_0}$, $[a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_{n_0}, b_{n_0}]$ dans l'espace E_{n_0} et enfin l'intervalle $[a_{n_0+1}, b_{n_0+1}; \dots; a_{n_0+m_0}, b_{n_0+m_0}]$ dans l'espace E_{m_0} . Pour une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_{n_0+m_0})$ intégrable $(\mathfrak{D})$ dans $R_{n_0+m_0}$, il y a une suite non-décroissante d'ensembles fermés $N_h (h=1, 2, \dots)$, de total R_{m_0} et telle que :*

À tout h et tout $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un nombre $\tau(h, \varepsilon) > 0$ tel que $\tau(h, \varepsilon) > \tau(h', \varepsilon)$ pour tout $h < h'$ et que les conditions suivantes

- 1) $\text{proj}_{E_{m_0}} \cdot y(I_l) \cap N_h \neq 0$ pour tout l ,
- 2) $\sum_{l=1}^{l_0} |\text{proj}_{E_{m_0}} \cdot y(I_l)| < \tau(h, \varepsilon)$,
- 3) norme $(\text{proj}_{E_{m_0}} \cdot y(I_l)) < 1/h$ pour tout l

entraînent

$$\left| \sum_{l=1}^{l_0} (\mathfrak{D}) \int_{I_l} f(x_1, \dots, x_{n_0+m_0}) d(x_1, \dots, x_{n_0+m_0}) \right| < \varepsilon,$$

quel que soit le système élémentaire I_l ($l=1, 2, \dots, l_0$) tel que $\text{proj}_{E_{n_0}} \cdot x(I_l) = R_{n_0}$ pour tout l .

Démonstration. Pour le cas où $n_0=1$ et m_0 est un nombre quelconque, on a vu selon Lemme 3 le résultat voulu. Donc, il s'agit d'établir que: si l'on suppose que le résultat voulu est vrai pour tout $n' < n_0$ et m_0 quelconque, cela reste vrai pour n_0 et m_0 . En vertu du Théorème 6, la fonction $f(x_1, \dots, x_{n_0+m_0})$ considérée comme fonction de x_1 dans l'intervalle $[a_1, b_1]$ est intégrable au sens de Denjoy presque partout dans l'intervalle $[a_2, b_2; \dots; a_{n_0+m_0}, b_{n_0+m_0}]$. Posons

$$g(x_2, \dots, x_{n_0+m_0}) = (D) \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_{n_0+m_0}) d(x_1).$$

Puisqu'alors en vertu du Corollaire 1 $g(x_2, \dots, x_{n_0+m_0})$ est intégrable $(\mathfrak{D})$ dans l'intervalle $[a_2, b_2; \dots; a_{n_0+m_0}, b_{n_0+m_0}]$, par hypothèse de l'induction, il y a une suite non-décroissante d'ensembles fermés N_h ($h=1, 2, \dots$), de total R_{m_0} et telle que:

à tout h et tout $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un nombre $\tau(h, \varepsilon) > 0$ tel que $\tau(h, \varepsilon) > \tau(h', \varepsilon)$ pour tout $h < h'$ et que les conditions suivantes

- 1') $\text{proj}_{E_{m_0}} \cdot y(I'_l) \cap N_h \neq 0$ pour tout l ,
- 2') $\sum_{l=1}^{l_0} |\text{proj}_{E_{m_0}} \cdot y(I'_l)| < \tau(h, \varepsilon)$,
- 3') norme $(\text{proj}_{E_{m_0}} \cdot y(I'_l)) < 1/h$ pour tout l

entraînent

$$\left| \sum_{l=1}^{l_0} (\mathfrak{D}) \int_{I'_l} g(x_2, \dots, x_{n_0+m_0}) d(x_2, \dots, x_{n_0+m_0}) \right| < \varepsilon,$$

quel que soit le système élémentaire I'_l ($l=1, 2, \dots, l_0$) dans l'intervalle $[a_2, b_2; \dots; a_{n_0+m_0}, b_{n_0+m_0}]$ de n_0+m_0-1 dimensions tel que $\text{proj}_{E_{n_0-1}} \cdot_x(I'_l) = [a_2, b_2; \dots; a_{n_0}, b_{n_0}]$ pour tout l .

Soit I_l ($l=1, 2, \dots, l_0$) un système élémentaire dans $R_{n_0+m_0}$ tel que

- 1'') $\text{proj}_{E_{m_0}} \cdot_y(I_l) \cap N_h \neq 0$ pour tout l ,
- 2'') $\sum_{l=1}^{l_0} |\text{proj}_{E_{m_0}} \cdot_y(I_l)| < \tau(h, \varepsilon)$,
- 3'') $\text{norme}_{E_{m_0}}(\text{proj}_{E_{m_0}} \cdot_y(I_l)) < 1/h$ pour tout l ,
- 4'') $\text{proj}_{E_{n_0}} \cdot_x(I_l) = R_{n_0}$ pour tout l .

Puisqu'alors $\text{proj}_{E_{m_0}} \cdot_y(I_l)$ ($l=1, 2, \dots, l_0$) est un système élémentaire dans R_{m_0} , si l'on pose

$$I'_l = [a_2, b_2; \dots; a_{n_0}, b_{n_0}] \times \text{proj}_{E_{m_0}} \cdot_y(I_l)$$

pour tout l , le système élémentaire I'_l ($l=1, 2, \dots, l_0$) dans $[a_2, b_2; \dots; a_{n_0+m_0}, b_{n_0+m_0}]$ possède les propriétés 1') 2') et 3') d'en haut. Donc, on a

$$\left| \sum_{l=1}^{l_0} (\mathfrak{D}) \int_{I'_l} g(x_2, \dots, x_{n_0+m_0}) d(x_2, \dots, x_{n_0+m_0}) \right| < \varepsilon.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{l=1}^{l_0} (\mathfrak{D}) \int_{I_l} f(x_1, \dots, x_{n_0+m_0}) d(x_1, \dots, x_{n_0+m_0}) \right| \\ &= \left| \sum_{l=1}^{l_0} (\mathfrak{D}) \int_{I'_l} ((D) \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_{n_0+m_0}) d(x_1)) d(x_2, \dots, x_{n_0+m_0}) \right| \\ &= \left| \sum_{l=1}^{l_0} (\mathfrak{D}) \int_{I'_l} g(x_2, \dots, x_{n_0+m_0}) d(x_2, \dots, x_{n_0+m_0}) \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Nous disons qu'une fonction d'intervalle $F(I)$ définie dans un intervalle R_0 de l'espace E_{n_0} est *extérieurement*, resp. *intérieurement*, *continue en un intervalle* I situé dans R_0 , lorsque pour tout intervalle I il y a pour $\varepsilon > 0$ un nombre $\delta(\varepsilon, I) > 0$ tel que si $I' \supseteq I$, resp. $I \supseteq I'$, et $\mu_{n_0}(I' - I) < \delta(\varepsilon, I)$, resp. $\mu_{n_0}(I - I') < \delta(\varepsilon, I)$, on a $|F(I) - F(I')| < \varepsilon$.

Théorème 11. *Pour une fonction intégrable $(\mathfrak{D})$ dans un intervalle R_0 de l'espace E_{n_0} , la fonction d'intervalle $F(I) = (\mathfrak{D}) \int_I f(p) dp$ est extérieurement et intérieurement continue en tout intervalle $I \subseteq R_0$.*

Démonstration. Montrons seulement que $F(I)$ est extérieurement continue pour le cas où $n_0 = 3$. Soient $I_0 = [a_{01}, b_{01}; a_{02}, b_{02}; a_{03}, b_{03}]$ un

intervalle quelconque situé dans $R_0 = [a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3]$ et ε un nombre positif quelconque.

1°) Puisque $f(p)$ est intégrable ($\mathfrak{D}$) dans l'intervalle $[a_{01}, b_{01}; a_{02}, b_{02}; a_3, b_3]$, en vertu du Lemme 6 il y a une suite d'ensembles $N_h (h=1, 2, \dots)$, non-décroissante, de total $[a_3, b_3]$ et telle que :

à tout h on peut faire correspondre un nombre positif $\tau_3(h, \varepsilon)$ tel que les conditions suivantes

- 1') $\text{proj.}_y(I_l) \cap N_h \neq 0$ pour tout l ,
- 2') $\sum_{l=1}^{l_0} |\text{proj.}_y(I_l)| < \tau_3(h, \varepsilon)$,
- 3') $\text{norme}(\text{proj.}_y(I_l)) < 1/h$ pour tout l

entraînent

$$|\sum_{l=1}^{l_0} F(I_l)| < \varepsilon/9,$$

quel que soit le système d'intervalles $I_l (l=1, 2, \dots, l_0)$ tel que $\text{proj.}_x(I_l) = E_2$ $[a_{01}, b_{01}; a_{02}, b_{02}]$ pour tout l .

Comme $N_h (h=1, 2, \dots)$ est une suite non-décroissante et de total $[a_3, b_3]$, il y a un ensemble N_{h_0} renfermant les points a_{03} et b_{03} . Donc, si l'on pose $\tau_3(\varepsilon) = \min(1/h_0, \tau_3(h_0, \varepsilon)/2)$, pour toute couple (a''', b''') telle que $a_0 \leq a''' \leq a_{03} < b_{03} \leq b''' \leq b_3$, $a_{03} - a''' < \tau_3(\varepsilon)$ et $b''' - b_{03} < \tau_3(\varepsilon)$, on a

$$|\sum_{l=1}^2 F(I_l)| < \varepsilon/9,$$

où $I_1 = [a_{01}, b_{01}; a_{02}, b_{02}; a''', a_{03}]$ et $I_2 = [a_{01}, b_{01}; a_{02}, b_{02}; b_{03}, b''']$.

Lorsqu'on y remplace l'axe z par l'axe y , resp. l'axe x , on peut déterminer un nombre $\tau_i(\varepsilon)$ ($i=2$, resp. $i=1$) tel que :

pour toute couple $(a^{(i)}, b^{(i)})$ ($i=2$, resp. $i=1$) telle que $a_i \leq a^{(i)} \leq a_{0i} < b_{0i} \leq b^{(i)} \leq b_i$, $(a_{0i} - a^{(i)}) < \tau_i(\varepsilon)$ et $(b^{(i)} - b_{0i}) < \tau_i(\varepsilon)$, on a

$$|\sum_{l=1}^2 F(I_l)| < \varepsilon/9,$$

où $I_1 = [a_{01}, b_{01}; a'', a_{02}; a_{03}, b_{03}]$ et $I_2 = [a_{01}, b_{01}; b_{02}, b''; a_{03}, b_{03}]$, resp. $I_1 = [a', a_{01}; a_{02}, b_{02}; a_{03}, b_{03}]$ et $I_2 = [b_{01}, b'; a_{02}, b_{02}; a_{03}, b_{03}]$.

2°) Puisque $f(p)$ est intégrable ($\mathfrak{D}$) dans l'intervalle $[a_{01}, b_{01}; a_2, b_2; a_3, b_3]$, en vertu du Lemme 6 il y a une suite d'ensembles $N'_h (h=1, 2, \dots)$, non-décroissante, de total $[a_2, b_2; a_3, b_3]$ et telle que :

à tout h on peut faire correspondre un nombre positif $\tau_1'(h, \varepsilon)$ tel que les conditions suivantes

- 1') $\text{proj.}_y(I_l) \cap N_h' \neq 0$ pour tout l ,

$$E_2$$

 2') $\sum_{i=1}^{l_0} |\text{proj.}_y(I_l)| < \tau_1'(h, \varepsilon)$,

$$E_2$$

 3') $\text{norme}(\text{proj.}_y(I_l)) < 1/h$ pour tout l

$$E_2$$

entraînent

$$|\sum_{l=1}^{l_0} F(I_l)| < \varepsilon/9,$$

quel que soit le système d'intervalles $I_l (l=1, 2, \dots, l_0)$ tel que $\text{proj.}_x(I_l) = [a_{01}, b_{01}]$ pour tout l .

Pour la suite $N_h' (h=1, 2, \dots)$, il y a un ensemble N_h' renfermant les points (a_{02}, a_{03}) , (a_{02}, b_{03}) , (b_{02}, a_{03}) et (b_{02}, b_{03}) . Donc, si l'on pose $\tau_1'(\varepsilon) = \min(1/h', (\tau_1'(h', \varepsilon))^{1/2}/2)$, pour toutes les couples (a'', b'') et (a''', b''') telles que $a_i \leq a^{(i)} \leq a_{0i} < b_{0i} \leq b^{(i)} \leq b_i$, $(a_{0i} - a^{(i)}) < \tau_1'(\varepsilon)$ et $(b^{(i)} - b_{0i}) < \tau_1'(\varepsilon)$ pour $i=2, 3$, on a

$$|\sum_{l=1}^4 F(I_l)| < \varepsilon/9,$$

où $I_1 = [a_{01}, b_{01}; a'', a_{02}; a''', a_{03}]$, $I_2 = [a_{01}, b_{01}; a'', a_{02}; b_{03}, b''']$, $I_3 = [a_{01}, b_{01}; b_{02}, b''; a''', a_{03}]$ et $I_4 = [a_{01}, b_{01}; b_{02}, b''; b_{03}, b''']$.

Lorsqu'on y remplace les axes y, z par z, x , resp. x, y , on peut déterminer un nombre positif $\tau_2'(\varepsilon)$, resp. $\tau_3'(\varepsilon)$, dont il résulte le même résultat que celui d'en haut.

3°) De même, on peut déterminer selon Théorème 10 un nombre positif $\tau''(\varepsilon)$ tel que :

pour toutes trois couples (a', b') (a'', b'') et (a''', b''') telles que $a_i \leq a^{(i)} \leq a_{0i} < b_{0i} \leq b^{(i)} \leq b_i$, $(a_{0i} - a^{(i)}) < \tau''(\varepsilon)$ et $(b^{(i)} - b_{0i}) < \tau''(\varepsilon)$ pour $i=1, 2, 3$, on a

$$|\sum_{l=1}^8 F(I_l)| < \varepsilon/3,$$

où $I_l (l=1, 2, \dots, 8)$ désignent tous les intervalles $[J_{1i}; J_{2j}; J_{3k}]$ ($i, j, k=1$ ou 2) tels que $J_{h1} = [a^{(h)}, a_{0h}]$, $J_{h2} = [b_{0h}, b^{(h)}]$ ($h=1, 2, 3$).

Posons $\kappa(\varepsilon) = \min(\tau_i(\varepsilon) (i=1, 2, 3), \tau_i'(\varepsilon) (i=1, 2, 3), \tau''(\varepsilon)) \times \min((b_{02} - a_{02})(b_{03} - a_{03}), (b_{03} - a_{03})(b_{01} - a_{01}), (b_{01} - a_{01})(b_{02} - a_{02}))$. Alors, à cause de 1°) 2°) et 3°), on peut voir que

$$|F(I) - F(I_0)| < \varepsilon,$$

quel que soit l'intervalle I tel que $I \supseteq I_0$ et $\mu_3(I - I_0) < \kappa(\varepsilon)$.

Passons encore à la définition de l'intégrale ($\mathfrak{D}$).

On verra aussitôt que, $f(p)$ étant une fonction intégrable $(\mathfrak{D})$, on peut choisir une suite fondamentale $F_n (n=1, 2, \dots)$ pour l'intégrale $(\mathfrak{D})$ de $f(p)$, de telle sorte que $f(p)$ soit mesurable et bornée sur tout F_n .

Soit $f(p)$ une fonction intégrable $(\mathfrak{D})$ dans un intervalle R_0 de l'espace E_{n_0} . Soient $M_n (n=1, 2, \dots)$ une suite caractéristique pour l'intégrale $(\mathfrak{D})$ de $f(p)$ et $F_n (n=1, 2, \dots)$ une suite fondamentale pour l'intégrale $(\mathfrak{D})$ de $f(p)$ et $F_n (n=1, 2, \dots)$ une suite fondamentale pour l'intégrale $(\mathfrak{D})$ de $f(p)$. Alors on voit que :

2*) À tout n et tout $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un nombre $\delta^*(n, \varepsilon) > 0$ tel que les conditions suivantes

$$2*1) \quad (I_i)^\circ \cap M_n \neq 0 \quad \text{pour tout } i,$$

$$2*2) \quad \mu_{n_0} \left(\bigcup_{i=1}^{i_0} I_i - M_n \right) < \delta^*(n, \varepsilon),$$

$$2*3) \quad \text{norme}(I_i) < 1/n \quad \text{pour tout } i$$

entraînent

$$\left| \sum_{i=1}^{i_0} F(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{I_i \cap F_n} f(p) dp \right| < \varepsilon,$$

quel que soit le système d'intervalles $I_i (i=1, 2, \dots, i_0)$ contenus dans R_0 et n'empiétant pas les uns sur les autres.

Car, soit $\delta(n, \varepsilon)$ un nombre positif mentionné à 2) de la définition de l'intégration $(\mathfrak{D})$ pour $M_n (n=1, 2, \dots)$ et $F_n (n=1, 2, \dots)$. Posons $\delta^*(n, \varepsilon) = \delta(n, \varepsilon/2)$. Soit $I_i (i=1, 2, \dots, i_0)$ un système d'intervalles contenus dans R_0 et n'empiétant pas les uns sur les autres. Supposons que le système satisfasse aux conditions 2*1), 2*2) et 2*3). En vertu du Théorème 11, il y a pour le système un système d'intervalles $I'_i (i=1, 2, \dots, i_0)$ tel que :

$$1') \quad I'_i \cap M_n \neq 0 \quad \text{pour tout } i,$$

$$2') \quad I'_i \subseteq I_i \quad \text{pour tout } i,$$

$$3') \quad \left| \sum_{i=1}^{i_0} F(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} F(I'_i) \right| < \varepsilon/4 \quad \text{et} \quad \left| \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{(I_i - I'_i) \cap F_n} f(p) dp \right| < \varepsilon/4.$$

Selon 2'), on a $\mu_{n_0} \left(\bigcup_{i=1}^{i_0} I'_i - M_n \right) < \delta^*(n, \varepsilon) = \delta(n, \varepsilon/2)$ et $\text{norme}(I'_i) \leq \text{norme}(I_i) < 1/n$ pour tout i . Donc, en vertu de la définition on a

$$\left| \sum_{i=1}^{i_0} F(I'_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{I'_i \cap F_n} f(p) dp \right| < \varepsilon/2.$$

Par conséquent, il vient que

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{i=1}^{i_0} F(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{I_i \cap F_n} f(p) dp \right| \\
 & \leq \left| \sum_{i=1}^{i_0} F(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} F(I'_i) \right| + \left| \sum_{i=1}^{i_0} F(I'_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{I'_i \cap F_n} f(p) dp \right| \\
 & \quad + \left| \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{I'_i \cap F_n} f(p) dp - \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{I_i \cap F_n} f(p) dp \right| \\
 & < \varepsilon/4 + \varepsilon/2 + \varepsilon/4 = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

§ 6. Rapport à la dérivation.

Commençons par deux théorèmes suivants, qui pourront être regardés comme point de départ de nos études sur l'intégrale $(\mathfrak{D})$.

Par dérivée au sens strict $F'_s(p)$ au point p d'une fonction d'intervalle $F(I)$, nous entendons la limite de l'expression $F(I)/|I|$, où I désigne un intervalle renfermant p et dont *norme* (I) tend vers 0.

Théorème 12. *Si $F(I)$ est une fonction d'intervalle fini-additive définie dans un intervalle R_0 de l'espace E_{n_0} tel qu'il y ait $F'_s(p)$ en tout point p de R_0 , la fonction $F'_s(p)$ est intégrable $(\mathfrak{D})$ dans R_0 et on a*

$$F(I) = (\mathfrak{D}) \int_I F'_s(p) dp \quad \text{pour tout } I \subseteq R_0.$$

Démonstration. Simplement, nous nous bornons au cas de $n_0=2$. Désignons par $f(p)$ la fonction $F'_s(p)$. Pour tout n , A_n désigne l'ensemble de tous les points p tels qu'on ait $\frac{|F(I)|}{|I|} < n$, quel que soit l'intervalle $I \subseteq R_0$ refermant p et tel que *norme* $(I) < 4/n$. Posons $M_n = \bar{A}_n$ ($n=1, 2, \dots$). On voit aussitôt que M_n ($n=1, 2, \dots$) est une suite d'ensembles fermés non-décroissante et de total R_0 . Montrons que ce sera une suite caractéristique pour l'intégration $(\mathfrak{D})$ de $f(p)$ et fondamentale pour l'intégrale $(\mathfrak{D})$ de $f(p)$. Nous allons montrer d'abord $M_n \subseteq A_{2n}$ pour tout n . Pour cela, il suffit de prouver $\bar{A}_n - A_n \subseteq A_{2n}$ pour tout n . Soient p un point de $\bar{A}_n - A_n$ et I un intervalle renfermant p et tel que *norme* $(I) < 2/n$. Alors, il y a une suite des points p_j ($j=1, 2, \dots$) telle que $p_j \in A_n$ et $\lim_{j \rightarrow \infty} p_j = p$. Pour cela, les deux cas suivants peuvent être considérés.

i) Le cas où il y a p_{j_0} tel que $p_{j_0} \in I$: Comme $p_{j_0} \in A_n$, on voit aussitôt que $|F(I)|/|I| < n < 2n$.

ii) Le cas où il n'y a aucun point p_j tel que $p_j \in I$: Dans le cas, sans restreindre la généralité, il suffit de considérer les deux cas suivants qui sont montrés dans fig. 2.

Pour a), on peut construire comme fig. 2 un intervalle I' tel que :

- 1) $I \cup I'$ soit un intervalle,
- 2) il y ait un $p_{j_0} \in I'$,
- 3) $\text{norme}(I') < 2/n$,
- 4) $|I'| \leq |I|/2$.

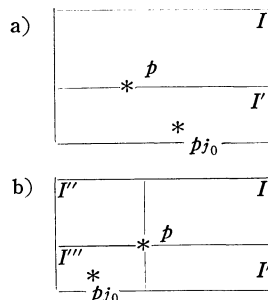


Fig. 2

Parce qu'il en résulte $\text{norme}(I \cup I') < 4/n$ et $I \cup I' \ni p_{j_0}$, on a $|F(I \cup I')| < |I \cup I'| \cdot n$ et $|F(I')| < |I'| \cdot n$. Donc, $|F(I)| \leq |F(I \cup I')| + |F(I')| < (|I \cup I'| + |I'|) \cdot n \leq 2n|I|$. Pour b), on peut construire comme fig. 2 trois intervalles $I^{(i)}$ ($i=1, 2, 3$) n'empiétant pas les uns sur les autres et tels que :

- 1) $I \cup (\bigcup_{i=1}^3 I^{(i)})$ soit un intervalle.
- 2) il y ait pour I''' un $p_{j_0} \in I'''$.
- 3) $\text{norme}(I^{(i)}) < 2/n$ pour tout i .
- 4) $\sum_{i=1}^3 |I^{(i)}| < |I|/4$.

De la même manière que a), on peut démontrer que $|F(I)| < 2n|I|$. Donc, le point p appartient à A_{2n} .

D'après ce qu'on a $M_n \subseteq A_{2n}$, $|f(p)| \leq 2n$ pour tout $p \in M_n$. Par conséquent, $f(p)$ est sommable sur tout M_n .

Pour montrer la propriété 2) de la définition de l'intégrale ($\mathfrak{D}$), commençons par les préparatifs suivants.

Désignons par $\mathfrak{R}_m(R_0)$ toutes les mailles du m^e -réseau de l'intervalle R_0 pour tout $m=1, 2, \dots$. Posons $G_n = I_0 - M_n$ et choisissons : dans $\mathfrak{R}_1(R_0)$ les mailles qui sont contenues dans G_n , dans $\mathfrak{R}_2(R_0)$ les mailles qui sont contenues dans G_n et qui ne sont pas contenue dans les mailles précédemment choisies et ainsi de suite. On les désigne par R_j^n ($j=1, 2, \dots$). Ils possèdent les trois propriétés suivantes :

1°) $\bigcup_{j=1}^{\infty} R_j^n = G_n$ et R_j^n ($j=1, 2, \dots$) n'empiètent pas les unes sur les autres.

2°) Pour tout intervalle $I \subseteq R_0$, on a $\sum_{j=1}^{\infty} |F(I \cap R_j^n)| < \infty$. En outre, pour tout intervalle $I \subseteq R_0$ dont $\text{norme}(I) < 1/n$, on a $\sum_{j=1}^{\infty} |F(I \cap R_j^n)| \leq 18n \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |R_j^n \cap I|$.

On voit aisément la propriété 1°). Montrons la propriété 2°). Soit j_0 un indice tel que $\text{norme}(R_j^n) < 1/n$ pour tout $j \leq j_0$. Si R_j^n est

une maille de m^e -réseau, la maille de $(m-1)^e$ -réseau qui contient R_j^n possède au moins un point p_{nj} de M_n . Pour tout R_j^n ($j \geq j_0$), désignons par Q_j^n la maille. Alors, sans restreindre la généralité, on peut considérer seulement les trois cas suivants qui sont montrés dans fig. 3. Soient

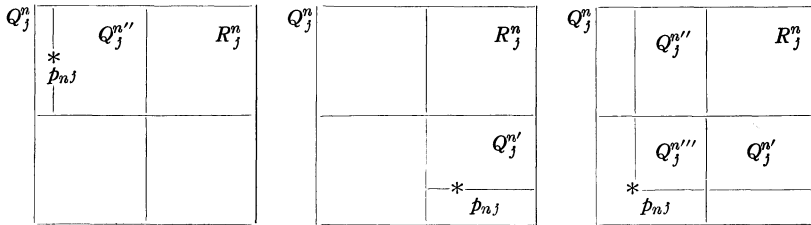


Fig. 3

$Q_j^{n(i)}$ ($i=1, 2, 3$) des intervalles construits comme fig. 3. Puisque $\text{norme}(Q_j^{n(i)}) < 1/n$ et $p_{nj} \in A_{2n}$ pour tout $j \geq j_0$, on a $|F(R_j^n)| \leq 18n \cdot |R_j^n|$, $j \geq j_0$, de la même manière que le cas de fig. 2. On a donc

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} |F(R_j^n)| \leq 18n \cdot \sum_{j=j_0}^{\infty} |R_j^n|.$$

Par suite,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |F(R_j^n)| \leq \sum_{j=1}^{j_0-1} |F(R_j^n)| + 18n \cdot \sum_{j=j_0}^{\infty} |R_j^n| < \infty.$$

De même, on peut prouver le reste de la propriété 2°).

Définissons maintenant une fonction d'intervalle $G_n(I)$ de manière que

$$G_n(I) = (L) \int_{I \cap M_n} f(p) dp + \sum_{j=1}^{\infty} F(R_j^n \cap I), \quad I \subseteq R_0.$$

Alors, cela possède les propriétés suivantes :

- 1') $G_n(I)$ est fini-additive.
- 2') On a $G_n(I) = F(I)$ pour tout intervalle I contenu dans G_n .
- 3') $(G_n)_s'(p) = f(p)$ presque partout dans M_n .

On voit facilement la propriété 1'). Pour 2') : Comme $I \subseteq G_n$, on a $I \cap M_n = 0$ pour l'ensemble fermé M_n , de sorte que $\text{dist.}(I, M_n) > 0$.⁵⁾ Donc, on peut choisir un intervalle $I' = [a, a'; b, b']$ tel que les points (a, b) , (a', b) , (a, b') , (a', b') soient des points de division d'un m^e -réseau. Pour cet intervalle I' , on peut choisir un indice j_0 tel que I' n'empiètent

5) Pour deux ensembles A et B quelconques, $\text{dist.}(A, B)$ désigne le nombre borne sup $\sup_{p \in A, q \in B} \text{dist.}(p, q)$.

aucune R_j^n pour tout $j > j_0$. On a $I' = \bigcup_{j=1}^{j_0} (R_j^n \cap I')$, de sorte que $I = \bigcup_{j=1}^{j_0} (R_j^n \cap I)$. Donc, $G_n(I) = \sum_{j=1}^{\infty} F(R_j^n \cap I) = \sum_{j=1}^{j_0} F(R_j^n \cap I) = F(I)$, puisque $F(I)$ est fini-additive. Pour 3'): Posons $\Phi(I) = (L) \int_{I \cap M_n} f(p) dp$, $I \subseteq R_0$. Alors, on a $\Phi_s'(p) = f(p)$ presque partout dans M_n . Soient p un point de dispersion de l'ensemble complémentaire de M_n dont on a $\Phi_s'(p) = f(p)$ au point p et I un intervalle renfermant p et dont la norme est inférieure à $1/n$. Alors, on a selon 2°)

$$\frac{\sum_{j=1}^{\infty} |F(R_j^n \cap I)|}{|I|} \leq 18n \frac{\sum_{j=1}^{\infty} |R_j^n \cap I|}{|I|} = 18n \frac{\mu_2(I - M_n)}{|I|}.$$

Par suite,

$$\lim_I \left| \frac{\sum_{j=1}^{\infty} F(R_j^n \cap I)}{|I|} \right| \leq 18n \cdot \lim_I \frac{\mu_2(I - M_n)}{|I|} = 0,$$

où I désigne un intervalle arbitraire renfermant p et dont la norme tend vers 0. Il en résulte $\lim_I \frac{\sum_{j=1}^{\infty} F(R_j^n \cap I)}{|I|} = 0$. On a donc

$$\begin{aligned} \lim_I \frac{G_n(I)}{|I|} &= \lim_I \frac{(L) \int_{I \cap M_n} f(p) dp}{|I|} + \lim_I \frac{\sum_{j=1}^{\infty} F(R_j^n \cap I)}{|I|} \\ &= \Phi_s'(p) + 0 = \Phi_s'(p) = f(p). \end{aligned}$$

En effet, $(G_n)_s'(p) = f(p)$ presque partout dans M_n .

Considérons ensuite une fonction d'intervalle définie par $H_n(I) = G_n(I) - F(I)$, $I \subseteq R_0$. On verra qu'elle possède les propriétés suivantes :

1'') $H_n(I)$ est fini-additive.

2'') $(H_n)_s'(p) = 0$ presque partout dans R_0 .

3'') $H_n(I)$ est absolument continue sur R_0 , c.-à-d. étant donné $\varepsilon > 0$, on peut déterminer un nombre $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ de façon qu'on ait

$$\sum_{i=1}^{i_0} |F(I_i)| < \varepsilon,$$

quel que soit le système d'intervalles I_i ($i=1, 2, \dots, i_0$) n'empiétant pas les uns sur les autres et dont la mesure $\sum_{i=1}^{i_0} |I_i|$ est inférieure à η .

On voit aussitôt la propriété 1'). Pour 2'') : Comme $(G_n)_s'(p) = f(p)$ et $F_s'(p) = f(p)$ presque partout dans M_n , $(H_n)_s'(p) = 0$ presque partout dans M_n . D'autre part, pour le point p de $R_0 - M_n$ il y a un intervalle I_0 contenant p et contenu dans $R_0 - M_n$. On a selon 2'') $G_n(I) = F(I)$

pour tout $I \subseteq I_0$. Donc, $(H_n)'(p) = 0$. Pour 3'') : Comme la fonction $f(p)$ est sommable sur M_n , il y a pour tout $(1 >) \varepsilon > 0$, un nombre $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout ensemble E la condition $\mu_2(E) < \delta$ entraîne $|(L) \int_{E \cap M_n} f(p) dp| < \varepsilon/4$. Posons $\eta = \min(\delta, \varepsilon/(18 \times 4)n)$. Soit I_i ($i = 1, 2, \dots, i_0$) un système d'intervalles dont les intervalles n'empiètent pas les uns sur les autres et $\sum_{i=1}^{i_0} |I_i| < \eta$.

Désignons par I'_i ($i = 1, 2, \dots, i_1$) tous les intervalles tels que $I_i \cap M_n \neq 0$ parmi des I_i ($i = 1, 2, \dots, i_0$) et par I''_i ($i = 1, 2, \dots, i_2$) tous les autres intervalles. Pour I'_i ($i = 1, 2, \dots, i_1$), on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i_1} |G_n(I'_i)| &\leq \sum_{i=1}^{i_1} |(L) \int_{I'_i \cap M_n} f(p) dp + \sum_{j=1}^{\infty} F(R_j^n \cap I'_i)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{i_1} |(L) \int_{I'_i \cap M_n} f(p) dp| + \sum_{i=1}^{i_1} \sum_{j=1}^{\infty} |F(R_j^n \cap I'_i)| \\ &< \varepsilon/4 + \sum_{i=1}^{i_1} (18n \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |R_j^n \cap I'_i|) \\ &\leq \varepsilon/4 + 18n \cdot \sum_{i=1}^{i_1} |I'_i| < \varepsilon/4 + 18n (\varepsilon/(18 \times 4)n) = \varepsilon/2 \end{aligned}$$

En notant $M_n \subseteq A_{2n}$ et $I'_i \cap M_n \neq 0$, on a

$$\sum_{i=1}^{i_1} |F(I'_i)| < \sum_{i=1}^{i_1} (|I_i| \times 4n) \leq (\varepsilon/(18 \times 4)n) \times 4n < \varepsilon/2.$$

Donc, on a $\sum_{i=1}^{i_1} |H_n(I'_i)| < \varepsilon$. D'autre part, pour I''_i ($i = 1, 2, \dots, i_2$), on a $G_n(I''_i) = F(I''_i)$ pour tout i , puisque $I''_i \subseteq G_n$. Donc, on a $\sum_{i=1}^{i_2} |H_n(I''_i)| = 0$. Conséquemment, il s'ensuit que $\sum_{i=1}^{i_0} |H_n(I_i)| < \varepsilon$.

En vertu de 1') 2'') et 3''), il résulte $G_n(I) = F(I)$ pour tout intervalle $I \subseteq R_0$.⁶⁾

Or, montrons que la fonction d'intervalle $F(I)$ possède la propriété 2) de la définition de l'intégrale ($\mathfrak{D}$) pour la suite M_n ($n = 1, 2, \dots$). Pour tout indice n et tout $\varepsilon > 0$, on prend le nombre $\varepsilon/18n$ comme $\delta(n, \varepsilon)$. Soit I_i ($i = 1, 2, \dots, i_0$) un système élémentaire d'intervalles dans R_0 , possédant les propriétés suivantes :

- 1*) $I_i \cap M_n \neq 0$ pour tout i ,
- 2*) $\mu_2(\bigcup_{i=1}^{i_0} I_i - M_n) < \delta(n, \varepsilon)$,
- 3*) $\text{norme}(I_i) < 1/n$ pour tout i .

6) Voir, S. Saks : Theory of the Integral (1937), p. 121.

Alors, on a

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{i=1}^{i_0} F(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{I_i \cap M_n} f(p) dp \right| \\
 &= \left| \sum_{i=1}^{i_0} G_n(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{I_i \cap M_n} f(p) dp \right| \\
 &= \left| \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{I_i \cap M_n} f(p) dp + \sum_{i=1}^{i_0} \left(\sum_{j=1}^{\infty} F(R_j^n \cap I_i) \right) - \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{I_i \cap M_n} f(p) dp \right| \\
 &= \left| \sum_{i=1}^{i_0} \sum_{j=1}^{\infty} F(R_j^n \cap I_i) \right| \leq \sum_{i=1}^{i_0} (18n \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |R_j^n \cap I_i|) \\
 &\leq 18n \cdot \sum_{i=1}^{i_0} |I_i| < 18n \cdot \delta(n, \varepsilon) = 18n \cdot (\varepsilon/18n) = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Mais il est remarquable que, pour une fonction d'intervalle $F(I)$ fini-additive définie dans un intervalle R_0 et telle que $F'_s(p)$ existe sauf pour un seul point p_0 , la fonction

$$f(p) = \begin{cases} F'_s(p) & \text{pour tout } p \neq p_0, \\ 0 & \text{pour } p = p_0, \end{cases}$$

n'est pas toujours intégrable ($\mathfrak{D}$). En effet, nous pouvons le voir par un exemple très simple comme il suit :

Exemple. Lorsque $F(I)$ est la fonction d'intervalle définie dans un intervalle $R_0 = [0, 1; 0, 1]$ de la manière que

$$F(I) = (L) \int_c^a ((L) \int_a^b \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} dx) dy,$$

où $I = [a, b; c, d]$ contenu dans R_0 , la fonction d'intervalle $F(I)$ n'est pas continue (α) au point $p_0 = (0, 0)$, quel que soit le nombre positif α .

Car, pour tout intervalle $I = [0, \beta; 0, \delta]$ contenu dans R_0 , on a

$$\begin{aligned}
 F(I) &= (L) \int_0^\delta ((L) \int_0^\beta \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} dx) dy \\
 &= (L) \int_0^\delta \frac{\beta}{\beta^2 + y} dy = \tan^{-1} \frac{y}{\beta} \Big|_0^\delta = \tan^{-1} \frac{\delta}{\beta}.
 \end{aligned}$$

Fixons un nombre quelconque β . Alors, $F(I) = \tan^{-1} \frac{\delta}{\beta}$ tend vers $\pi/2$ lorsque δ tend vers 0. Donc, $F(I)$ n'est pas continue (α) au point p_0 pour tout $\alpha > 0$.

Par suite, pour la fonction d'intervalle $F(I)$, sa dérivée au sens strict n'existe pas en p_0 .

En outre, la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

n'est pas intégrable $(\mathfrak{D})$ dans R_0 . Puisque

$$(L) \int_0^1 ((L) \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} dx) dy = \pi/4,$$

$$(L) \int_0^1 ((L) \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} dy) dx = -\pi/4,$$

on peut le voir en vertu du Théorème 6.

D'ailleurs, si l'on ajoute la propriété d'être continue (α) pour une fonction d'intervalle, on a le

Théorème 13. *Soit $F(I)$ une fonction d'intervalle fini-additive définie dans un intervalle R_0 , qui satisfait à la condition: $F'_s(p)$ existe pour tout point p de R_0 sauf tout au plus une infinité dénombrable N et à tout point p de N on peut faire correspondre un nombre positif $\alpha = \alpha(p)$ dont $F(I)$ est continue (α) au point p . Alors, la fonction*

$$f(p) = \begin{cases} F'_s(p) & \text{si } p \notin N \text{ et } p \in R_0, \\ \text{un nombre arbitraire} & \text{si } p \in N \end{cases}$$

est intégrable $(\mathfrak{D})$ dans R_0 .

Démonstration. Désignons par A_n l'ensemble de tous les points p tels qu'on ait $|F(I)|/|I| < n$, quel que soit l'intervalle $I \subseteq R_0$ renfermant p et tel que *norme* $(I) < 4/n$. Désignons par $p_i (i=1, 2, \dots)$ l'ensemble N . On verra alors que si l'on pose $M_n = \bar{A}_n \cup N_n (n=1, 2, \dots)$, où $N_n = \{p_i; i \leq n, \alpha(p_i) \geq 1/n\}$, $M_n (n=1, 2, \dots)$ est une suite caractéristique pour l'intégration $(\mathfrak{D})$ de $f(p)$ et fondamentale pour l'intégrale $(\mathfrak{D})$ de $f(p)$. En notant que l'ensemble N_n est fini et que $F(I)$ est continue $(1/n)$ à tout point $p \in N_n$, on peut le démontrer de la même manière que la démonstration de Théorème 12.

Nous entendons par $p(I)$ le paramètre de régularité de l'intervalle I , c.-à-d. le nombre $|I|/|K|$, K étant le plus petit carré contenant I . Par $\bar{F}_p(p)$ et $\underline{F}_p(p)$ au point p d'une fonction d'intervalle $F(I)$, nous entendons respectivement la limite supérieure et inférieure de l'expression $F(I)/|I|$, où I désigne un intervalle arbitraire tel que $I \ni p$ et $p(I) \geq \rho$, lorsque l'aire $|I|$ tend vers 0. Dans le cas où $\lim_{\rho \rightarrow 0} \bar{F}_p(p) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \underline{F}_p(p)$, ce

nombre porte le nom dérivée ordinaire de la fonction $F(I)$ au point p ; on la désigne par $F'(p)$.

Théorème 14. Lorsque $f(p)$ est une fonction intégrable $(\mathfrak{D})$ dans un intervalle R_0 de l'espace E_{n_0} et $F(I)$ est la fonction d'intervalle définie par $F(I) = (\mathfrak{D}) \int_I f(p) dp (I \subseteq R_0)$, on a $F'(p) = f(p)$ presque partout dans R_0 .

Démonstration. Pour la simplicité, montrerons seulement le cas où $n_0 = 2$. Soit $F_n (n=1, 2, \dots)$ une suite fondamentale pour l'intégrale $(\mathfrak{D})$ de $f(x, y)$. Considérons pour tout F_n la fonction d'intervalle :

$$G_n(I) = \begin{cases} F(I) & \text{si } (I)^\circ \cap F_n \neq 0 \\ 0 & \text{si } (I)^\circ \cap F_n = 0. \end{cases}$$

Pour montrer le résultat voulu, nous allons voir d'abord que la fonction d'intervalle $G_n(I)$ est intégrable au sens de Burkill dans tout intervalle $I_0 \subseteq R_0$, plus précisément, si l'on désigne par $\int_{I_0}^* G_n(I)$ l'intégrale au sens de Burkill de $G_n(I)$ dans I_0 , on a $\int_{I_0}^* G_n(I) = (L) \int_{I_0 \cap F_n} f(x, y) d(x, y)$.

Comme cela est noté dans § 5, à tout F_n et tout $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un nombre positif $\delta^*(n, \varepsilon)$ tel que les conditions suivantes :

- 1) $(I_i)^\circ \cap F \neq 0$ pour tout i .
- 2) $\mu_2(\bigcup_{i=1}^{i_0} I_i - F_n) < \delta^*(n, \varepsilon)$,
- 3) norme $(I_i) < 1/n$ pour tout i

entraînent

$$|\sum_{i=1}^{i_0} F(I_i) - \sum_{i=1}^{i_0} (L) \int_{I_i \cap F_n} f(x, y) d(x, y)| < \varepsilon,$$

quel que soit le système d'intervalles $I_i (i=1, 2, \dots, i_0)$ contenus dans R_0 et n'empiétant pas les uns sur les autres.

Puisque, pour I_0 tel que $I_0 - F_n \neq 0$, l'ensemble $I_0 - F_n$ est ouvert dans I_0 , on peut choisir une suite des intervalles $R_j (j=1, 2, \dots)$ qui n'empiètent pas les uns sur les autres, telle que $\bigcup_{j=1}^{\infty} R_j = I_0 - F_n$. On a un indice j_0 tel que $\mu_2((I_0 - F_n) - \bigcup_{j=1}^{j_0} R_j) < \delta^*(n, \varepsilon)$. Posons $\tau(\varepsilon) = 1/2 \cdot \min(1/n, \text{dist.}(F_n \cap I_0, \bigcup_{j=1}^{j_0} R_j)) > 0$. Montrons que pour toute subdivision⁷⁾

7) Quand un système d'intervalles est composé d'intervalles contenus dans un intervalle I , contenant tous les points de I et n'empiétant pas les uns sur les autres, nous disons que le système est une subdivision de I .

$I_i (i=1, 2, \dots, i_0)$ de I_0 dont la norme de I_i est inférieure à $\tau(\varepsilon)$ pour tout i , on a

$$|\sum_{i=1}^{i_0} G_n(I_i) - (L) \int_{I_0 \cap F_n} f(x, y) d(x, y)| < \varepsilon.$$

On a d'abord $I_i \subseteq I_0 - \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$ pour tout intervalle I_i tel que $(I_i)^\circ \cap F_n \neq 0$. Car, si (x, y) est un point d'un tel intervalle I_i , $\text{dist.}(F_n \cap I_0, (x, y)) \leq \text{dist.}(F_n \cap I_i, (x, y)) < 2 \cdot \text{norme}(I_i) < 2\tau(\varepsilon)$. Il en résulte $(x, y) \notin \bigcup_{j=1}^{j_0} R_j$. Par suite, on a $I_i \subseteq I_0 - \bigcup_{j=1}^{j_0} R_j$. Conséquemment, si l'on pose $I'_i (i=1, 2, \dots, i')$ tous les intervalles I_i tels que $(I_i)^\circ \cap F_n \neq 0$, on a $\bigcup_{i=1}^{i'} I'_i \subseteq I_0 - \bigcup_{j=1}^{j_0} R_j$. On a de plus $\mu_2(\bigcup_{i=1}^{i'} I'_i - F_n) \leq \mu_2((I_0 - \bigcup_{j=1}^{j_0} R_j) - F_n) = \mu_2((I_0 - F_n) - \bigcup_{j=1}^{j_0} R_j) < \delta^*(n, \varepsilon)$ et $\text{norme}(I'_i) < \tau(\varepsilon) \leq \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$. Il s'ensuit que

$$|\sum_{i=1}^{i'} F(I'_i) - \sum_{i=1}^{i'} (L) \int_{I'_i \cap F_n} f(x, y) d(x, y)| < \varepsilon.$$

En effet, on a

$$|\sum_{i=1}^{i_0} G(I_i) - (L) \int_{I_0 \cap F_n} f(x, y) d(x, y)| < \varepsilon.$$

Pour un intervalle I_0 tel que $I_0 \subseteq F_n$, on a $F(I) = (L) \int_{I \cap F_n} f(x, y) d(x, y)$ pour tout intervalle $I \subseteq I_0$. On a par suite pour toute subdivision $I_i (i=1, 2, \dots, i_0)$ de I_0

$$\sum_{i=1}^{i_0} G_n(I_i) = (L) \int_{I_0 \cap F_n} f(x, y) d(x, y).$$

Conséquemment, la fonction d'intervalle $G_n(I)$ est intégrable au sens de Burkill dans tout intervalle $I_0 \subseteq R_0$ et on a

$$\int_{I_0}^* G_n(I) = (L) \int_{I_0 \cap F_n} f(x, y) d(x, y).$$

Posons maintenant $V_n(I) = (L) \int_{I \cap F_n} f(x, y) d(x, y)$ pour tout $I \subseteq R_0$. On a alors $V'_n(x, y) = f(x, y)$ presque partout dans F_n , de sorte qu'on ait $G'_n(x, y) = f(x, y)$ presque partout dans F_n ⁸⁾. En notant la définition de $G_n(I)$, on voit facilement que si $G'_n(x, y)$ existe pour un point de densité (x, y) de F_n , on a $G'_n(x, y) = F'(x, y)$. Donc, il s'ensuit que $F'(x, y) = f(x, y)$ presque partout dans F_n . Puisque $F_n (n=1, 2, \dots)$ est une suite dont le presque total est R_0 , on a $F'(x, y) = f(x, y)$ presque partout dans R_0 .

8) Voir, S. Kempisty: Fonctions d'intervalle non additives (1939), p. 21.

Théorème 15. *Pour une fonction $f(p)$ intégrable $(\mathfrak{D})$ dans un intervalle R_0 de l'espace E_{n_0} , s'il y a un nombre positif δ_n , dépendant seulement de l'indice n , de telle sorte qu'on puisse prendre $\delta_n \times \varepsilon$ comme $\delta(n, \varepsilon)$ qui est mentionné à 2) de la définition de l'intégrale $(\mathfrak{D})$, on a $F'_s(p) = f(p)$ presque partout dans R_0 .*

Démonstration. Soit $F_n (n=1, 2, \dots)$ une suite fondamentale pour l'intégrale $(\mathfrak{D})$ de $f(p)$. Comme $\mu_{n_0}(R_0 - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = 0$, il s'agit d'établir que $F'_s(p) = f(p)$ presque partout dans tout F_n . Considérons un point p de densité de F_n auquel on a $V'_s(p) = f(p)$, $V(I)$ étant la fonction d'intervalle définie de la manière suivante

$$V(I) = (L) \int_{I \cap F_n} f(p) dp, \quad I \subseteq R_0.$$

Nous montrerons que, en tel point p , il se trouve $F'_s(p) = f(p)$. Puisque p est un point de densité de F_n , il y a pour $\varepsilon > 0$ quelconque un nombre $\kappa(\varepsilon) > 0$ tel qu'on ait

$$\mu_{n_0}(I - F_n) / |I| < (\varepsilon \times \delta_n) / 2,$$

quel que soit l'intervalle I renfermant p et dont la norme est inférieure à $\kappa(\varepsilon)$. Posons $\eta(\varepsilon) = \min(1/n, \kappa(\varepsilon))$. Soit I un intervalle renfermant p et dont la norme est inférieure à $\eta(\varepsilon)$. Pour cela, on a $I \cap F_n \neq 0$, $\text{norme}(I) < 1/n$ et de plus, si l'on pose $\varepsilon' = 2\mu_{n_0}(I - F_n) / \delta_n$, on a $\mu_{n_0}(I - F_n) = (\delta_n \times \varepsilon') / 2 < \delta_n \times \varepsilon'$. il en résulte $|F(I) - (L) \int_{I \cap F_n} f(p) dp| < \varepsilon'$.

On a donc

$$\left| \frac{F(I)}{|I|} - \frac{V(I)}{|I|} \right| < \frac{\varepsilon'}{|I|} = \frac{2 \cdot \mu_{n_0}(I - F_n)}{|I| \times \delta_n} < \frac{\varepsilon \times \delta_n}{2} \times \frac{2}{\delta_n} = \varepsilon$$

Comme nous avons $V'_s(p) = f(p)$ au point p , il s'ensuit que $F'_s(p) = f(p)$ en ce point p .

Pour le cas où il y a pour le point p un intervalle I_0 renfermant p et contenu dans F_n , il vient $F(I) = V(I)$ pour tout intervalle $I \subseteq I_0$. Donc, il résulte évidemment $F'_s(p) = V'_s(p) = f(p)$ en ce point p .

(Reçu le 29 Septembre, 1955)