



Title	Solutions ramifiées à croissance lente de certaines équations de Fuchs quasi-linéaires
Author(s)	Pongérard, Patrice
Citation	Osaka Journal of Mathematics. 2010, 47(1), p. 157-176
Version Type	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/11540">https://doi.org/10.18910/11540</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

# SOLUTIONS RAMIFIÉES    CROISSANCE LENTE DE CERTAINES ÉQUATIONS DE FUCHS QUASI-LINÉAIRES

PATRICE PONGÉRARD

(Received June 10, 2008, revised September 29, 2008)

## Abstract

We consider a class of quasilinear fuchsian operators  $Q$  of order  $m \geq 1$ , holomorphic in a neighborhood of the origin in  $\mathbf{C}_t \times \mathbf{C}_x^n$ , and having a simple characteristic hypersurface transverse to  $S: t = 0$ . Under an assumption on the linear part of  $Q$ , we construct solutions of the problem  $Qu = v$  in spaces of ramified functions of slow growth. The result is an extension of [15] to the quasilinear case.

## 1. Notations et résultat

Les coordonnées d'un point de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$  étant not  es  $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n)$ , les dérivations en  $t$  et en  $x$  sont désignées par  $D_t^l$ ,  $l \in \mathbf{N}$  et  $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ . On pose, pour tout  $\beta = (l, \alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^n$ ,

$$\mathcal{D}^\beta = t^{(|\beta|+2-m)_+} D_t^l D^\alpha \quad \text{où} \quad (\bullet)_+ = \max(\bullet, 0), \quad |\beta| = l + |\alpha| \quad \text{et} \quad |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j.$$

On considère un opérateur quasi-linéaire  $Q$  de la forme

$$(1.1) \quad \begin{aligned} Q(t, x; D_t, D)u &= tA(t, x; D_t, D)u + B(t, x; D_t, D)u \\ &+ \sum_{|\beta| \leq m} a_\beta(t, x, \mathcal{D}^\Gamma u) \mathcal{D}^\beta u \end{aligned}$$

où  $A$  (resp.  $B$ ) est un opérateur différentiel linéaire, à coefficients holomorphes au voisinage de l'origine de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ , d'ordre  $m \geq 1$  (resp.  $m - 1$ ) de symbole principal  $g_A$  (resp.  $g_B$ ) avec  $g_A(\bullet; 1, 0) \equiv 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\Gamma u &= (\mathcal{D}^\gamma u)_{\gamma \in \Gamma}, \quad \Gamma = \{(l, \alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^n; l + |\alpha| < m\}, \\ n' &= \text{Card } \Gamma, \quad y = (y_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in \mathbf{C}^{n'}, \end{aligned}$$

chaque  $a_\beta$  étant une fonction holomorphe au voisinage de l'origine de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^{n'}$  vérifiant

$$(1.2) \quad a_\beta(t, x, 0) = 0 \quad \text{pour tout } (t, x).$$

On observe que  $u \equiv 0$  est solution de l'équation  $Qu = 0$ . On note  $\mathcal{O}_0 = \mathcal{D}_0 \times \Omega_0$  un voisinage ouvert de l'origine de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$  sur lequel les coefficients des opérateurs  $A$  et  $B$  sont définis et holomorphes.

Vérifions que  $Q$  est un opérateur de Fuchs. En posant  $L \equiv tA + B$  et

$$(1.3) \quad a(t, x, D_t) \equiv g_A(0, x; 1, 0)tD_t^m + g_B(0, x; 1, 0)D_t^{m-1},$$

on obtient

$$\begin{aligned} L(t, x; D_t, D) &= a(t, x; D_t) + \sum_{l=p}^m b_l(t, x)t^{(l+1-p)_+} D_t^l \\ &\quad + \sum_{\substack{\beta=(l,\alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^n; |\beta| \leq m \\ \beta \neq (m,0), \beta \neq (m-1,0)}} c_\beta(t, x)t^{(|\beta|+1-m)_+} D_t^l D^\alpha \end{aligned}$$

où  $p = m - 1$ , les coefficients  $b_l$  et  $c_\beta$  étant holomorphes au voisinage de l'origine de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ . De plus, on a  $(|\beta| + 1 - m)_+ \geq (l + 1 - p)_+$ . En effet, si  $|\beta| = m$ , alors  $l < |\beta|$  car  $\beta \neq (m, 0)$ , d'où  $l + 1 - p \leq |\beta| + 1 - m$ ; si  $|\beta| \leq m - 1$ , alors  $l < m - 1$  car  $\beta \neq (m - 1, 0)$ , d'où  $(|\beta| + 1 - m)_+ = 0 = (l + 1 - p)_+$ . En outre, vu que  $(|\beta| + 2 - m)_+ \geq (l + 1 - p)_+$  pour tout  $\beta = (l, \alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^n$ , il en résulte que l'opérateur  $Q$  est de la forme

$$Q(t, x; D_t, D)u = a(t, x; D_t)u - f(t, x, \{t^{(l+1-p)_+} D_t^l D^\alpha u\}_{l+|\alpha| \leq m})$$

où  $f$  est une fonction holomorphe au voisinage de l'origine de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^{n''}$ ,  $n'' = \text{Card}\{\beta \in \mathbf{N}^{n+1}; |\beta| \leq m\}$ . Autrement dit,  $Q$  est un opérateur différentiel non linéaire du type de Fuchs, d'ordre  $m$  et de poids  $p$ , au sens de Baouendi-Goulaouic ([1] et [2]). Indiquons par ailleurs qu'un opérateur de poids  $p$  se ramène simplement à un opérateur de poids 0 (de la forme [2, (3.2)] ou [14, (1.1)] par exemple). Soit  $\mathcal{C}(x, \lambda)$  le polynôme caractéristique de la partie fuchsienne  $a(t, x; D_t, D)$ , on pose  $V = \bigcup_{\substack{\lambda \in \mathbf{N} \\ \lambda \geq p}} \{x \in \Omega_0; \mathcal{C}(x, \lambda) = 0\}$ . Rappelons ([2]) que pour toutes fonctions  $(w_h)_{0 \leq h < p}$  et  $v$  holomorphes au voisinage de  $x = \alpha \notin V$  et  $(t, x) = (0, \alpha) \in S$  respectivement, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Q(t, x; D_t, D)u(t, x) = v(t, x), \\ D_t^h u(0, x) = w_h(x) \quad \text{pour } 0 \leq h < p, \end{cases}$$

admet une unique solution holomorphe au voisinage de  $(t, x) = (0, \alpha)$ . L'existence et l'unicité d'une solution pour ce type de problème est encore vraie ([14]) dans des classes

de fonctions suffisamment différentiables par rapport à la variable fuchsienne et de classe de Gevrey par rapport aux autres variables.

Nous supposons que le polynôme  $\tau \mapsto g_A(0; \tau, 1, 0, \dots, 0)$  admet une racine simple  $\bar{\tau}$ . On a donc

$$(1.4) \quad D_{\bar{\tau}} g_A(0; \bar{\tau}, 1, 0, \dots, 0) \neq 0$$

et le problème

$$(1.5) \quad \begin{cases} g_A(t, x; \nabla k(t, x)) = 0, \\ \nabla k(0) = (\bar{\tau}, 1, 0, \dots, 0), \\ k(0, x) = x_1, \end{cases}$$

admet une unique solution holomorphe au voisinage de l'origine de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ ; on peut donc supposer que la fonction  $k$  est définie et holomorphe sur  $\mathcal{O}_0$  et que  $D_1 k(t, x) \neq 0$  pour tout  $(t, x) \in \mathcal{O}_0$ . Ceci permet de définir une hypersurface  $K = \{(t, x) \in \mathcal{O}_0; k(t, x) = 0\}$  transverse à  $S$ . En notant  $T$  l'hyperplan de  $S$  d'équation  $t = x_1 = 0$ , on a  $K \cap S = \Omega_0 \cap T$  : l'ensemble  $K$  est une hypersurface caractéristique simple issue de  $T$  et transverse à  $S$ .

Pour tout  $\delta > 0$ , on pose  $D_\delta = \{z \in \mathbf{C}; |z| < \delta\}$  et on note  $\mathcal{R}_\delta$  le revêtement universel du disque pointé  $\dot{D}_\delta = \{z \in \mathbf{C}; 0 < |z| < \delta\}$ . Si  $v$  est une fonction holomorphe ramifiée autour de  $K$ , on peut trouver un réel  $\delta > 0$  et un voisinage ouvert connexe  $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_0$  de l'origine de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$  tels que  $v$  soit de la forme

$$(1.6) \quad v(t, x) = \tilde{v}(z, t, x)|_{z=k(t, x)}$$

où  $\tilde{v}$  est une fonction holomorphe sur  $\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}$ ; quitte à réduire  $\mathcal{O}$ , on peut supposer que  $|k(t, x)| < \delta$  pour tout  $(t, x) \in \mathcal{O}$ . La fonction (1.6) est alors définie et holomorphe sur le revêtement universel de  $\mathcal{O} - K$ .

On se propose de construire une solution de l'équation

$$(1.7) \quad Q(t, x; D_t, D)u(t, x) = v(z, t, x)|_{z=k(t, x)}$$

sans hypothèse particulière sur l'opérateur  $a(t, x; D_t, D)$ . On utilise ([15]) la partie fuchsienne d'ordre 1 et de poids 0

$$(1.8) \quad b(t, x, D_t) \equiv D_{\bar{\tau}} g_A(0, x; \nabla k(0, x)) t D_t + g_B(0, x; \nabla k(0, x))$$

à coefficients définis et holomorphes sur  $\Omega_0$ . On associe à  $b$  son polynôme caractéristique

$$P(x, \lambda) = D_{\bar{\tau}} g_A(0, x; \nabla k(0, x)) \lambda + g_B(0, x; \nabla k(0, x)),$$

qui vérifie  $P(x, t D_t) = b(t, x, D_t)$ , et on suppose que

$$(1.9) \quad P(0, \lambda) \neq 0 \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbf{N}.$$

NOTE. Il n'y a en général aucune relation entre (1.3) et (1.8) sauf lorsque  $m = 1$ , auquel cas, on a  $a(t, x, D_t) = b(t, x, D_t)$  et la condition (1.9) n'est autre que la condition usuelle  $\mathcal{C}(0, \lambda) \neq 0$  pour tout entier  $\lambda \geq p$ .

En outre, cette construction nécessite comme dans [7] et [8] des hypothèses de croissance que nous allons préciser.

Soient  $a \in \mathbf{R}$ ,  $\delta > 0$  et  $\mathcal{O}$  un voisinage ouvert de l'origine de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ . On note  $\mathcal{H}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$  l'espace vectoriel des fonctions à croissance lente d'exposant  $a$  c'est-à-dire des fonctions  $u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$  pour lesquelles il existe  $c \geq 0$  tel que

$$|u(z, t, x)| \leq c|z|^a \quad \text{pour tout } (z, t, x) \in \mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}.$$

D'autre part, on note  $\mathcal{G}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$  l'espace vectoriel des fonctions  $u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$  pour lesquelles il existe  $c \geq 0$  tel que

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad |D_z^p u(z, t, x)| \leq c^{p+1} p! |z|^{a-p} \quad \text{pour tout } (z, t, x) \in \mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}.$$

REMARQUE 1.1. On a  $\mathcal{G}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}) \subset \mathcal{H}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$  et, [8, Proposition 1.1],  $\mathcal{H}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}) \subset \mathcal{G}^a(\mathcal{R}_{\delta'} \times \mathcal{O})$  si  $\delta' \in ]0, \delta[$ .

On définit un inverse à droite de l'opérateur  $D_z$  en posant, pour tout  $u \in \mathcal{H}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$  (resp.  $\mathcal{G}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$ ),

$$D_z^{-1}u(z, t, x) = \int_0^z u(\sigma, t, x) d\sigma = \int_0^1 u(sz, t, x)z ds$$

et on vérifie aisément que  $D_z^{-1}u \in \mathcal{H}^{a+1}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$  (resp.  $\mathcal{G}^{a+1}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$ ). On considère alors l'équation

$$(1.10) \quad Q(t, x; D_t, D)[D_z^{1-m}u(z, t, x)]|_{z=k(t,x)} = v(z, t, x)|_{z=k(t,x)}.$$

**Théorème 1.1.** Soient  $a \geq 1$ ,  $\delta > 0$ ,  $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_0$  un voisinage ouvert de l'origine de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$  et  $v \in \mathcal{G}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$ , alors il existe  $\delta' > 0$ ,  $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$  un voisinage ouvert de l'origine de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$  et une solution  $u \in \mathcal{G}^a(\mathcal{R}_{\delta'} \times \mathcal{O}')$  de l'équation (1.10).

REMARQUE 1.2. Dans ce théorème, on peut remplacer les espaces  $\mathcal{G}^a$  par les espaces  $\mathcal{H}^a$  d'après le remarque 1.1.

REMARQUE 1.3. Lorsque les fonctions  $a_\beta$  sont identiquement nulles, alors  $Q = L$  est l'opérateur linéaire étudié dans [15] (qui peut être rapproché de [4], [9] ou [16] et qui construit pour l'équation  $Lu = v$  une solution ramifiée autour de  $K$ ); comme expliqué dans [15], le problème [15, (1.6)-(1.8)] contient le problème [7, (2.6)-(2.7)]. En ce qui concerne [8], nous reprenons ici des outils qui s'y trouvent mais le problème

[8, (1.7)-(1.8)] et notre équation (1.10) sont en général différents. Il est toutefois possible de les relier; expliquons brièvement de quelle manière. Rappelons que l'opérateur [8, (1.1)] s'écrit

$$P(t, x; D_t, D)u = \sum_{\beta=(l,\alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^n; |\beta| \leq m} A_\beta(t, x, D^\Gamma u) D_t^l D^\alpha u$$

où  $D^\Gamma u = (D_t^l D^\alpha u)_{(l,\alpha) \in \Gamma}$ , les fonctions  $A_\beta$  sont holomorphes au voisinage de l'origine de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^{n'}$ , la partie linéarisée  $A(t, x; D_t, D) \equiv \sum_{\beta=(l,\alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^n; |\beta| \leq m} A_\beta(t, x, 0) D_t^l D^\alpha$  vérifie (1.4) (en notant encore  $g_A$  le symbole principal de  $A$ ) et le problème (1.5) admet une unique solution  $k$  holomorphe au voisinage de l'origine de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ . Considérons le problème [8, (1.7)-(1.8)] :

$$(1.11) \quad \begin{cases} P(t, x; D_t, D)[D_z^{m-1} u(z, t, x)|_{z=k(t,x)}] = w_1(k(t, x), t, x), \\ u(z, t, x) - w_0(z, t, x) = 0 \end{cases} \quad \text{pour } t = 0,$$

dans lequel on peut supposer, pour simplifier, que  $w_0 = 0$ . En posant  $C_\beta(t, x, y) = A_\beta(t, x, y) - A_\beta(t, x, 0)$ , on a

$$\begin{aligned} P(tu) &= tAu + D_\tau Au \\ &+ \sum_{\beta=(l,\alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^n; |\beta| \leq m} C_\beta(t, x, D^\Gamma tu)(t D_t^l D^\alpha u + l D_t^{l-1} D^\alpha u). \end{aligned}$$

On note alors que, si  $|\beta| < m$ , on a  $1 \geq (|\beta| + 2 - m)_+$  et  $0 = ((l-1) + |\alpha| + 2 - m)_+$ ; on en déduit que les termes figurant dans  $D^\Gamma tu$  sont de la forme  $D^\gamma u$  ou  $t D^\gamma u$ ,  $\gamma \in \Gamma$ .

Supposons que

$$(1.12) \quad C_\beta(0, x, y) = 0 \quad \text{pour } |\beta| = m \quad \text{et pour tout } x, y,$$

alors on peut écrire  $C_\beta = t a_\beta$ ,  $a_\beta$  étant holomorphe au voisinage de l'origine de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^{n'}$ ; donc, en multipliant par  $t$ , on obtient pour  $|\beta| = m$ , les termes  $t^2 D_t^l D^\alpha$  et  $l t D_t^{l-1} D^\alpha$  qui sont clairement de la forme  $t^{(h+|\alpha|+2-m)_+} D_t^h D^\alpha$ . Ces considérations montrent que  $tu$  est solution de (1.11) si  $u$  vérifie l'équation (1.10) où  $Q$  est de la forme (1.1) avec  $L = tA + D_\tau A$ . Pour cette équation, la condition (1.9) s'écrit simplement  $D_\tau g_A(0; \nabla k(0))(\lambda + 1) \neq 0$  pour tout  $\lambda \in \mathbf{N}$ , soit  $D_\tau g_A(0; \nabla k(0)) \neq 0$ ; autrement dit, la condition (1.9) est vide dans ce cas. Finalement, sous l'hypothèse (1.12), le problème (1.11) est un cas particulier du problème (1.9)-(1.10). Par exemple, lorsque  $Q$  est simplement semi-linéaire, auquel cas on a  $C_\beta \equiv 0$  pour  $|\beta| = m$ , alors le problème (1.11), c'est-à-dire le problème [7, (2.8)-(2.9)], est un cas particulier du problème (1.9)-(1.10); indiquons que dans ce cas, il est possible (quitte à adapter les calculs qui vont suivre) d'établir le théorème 1.1 dans les espaces  $\mathcal{H}^a$  pour  $a > 0$ .

## 2. Réduction

Posons

$$Fu = \sum_{|\beta| \leq m} a_\beta(t, x, D^\Gamma u) D^\beta u.$$

Pour expliciter l'équation (1.10), c'est-à-dire  $(L + F)[D_z^{1-m} u(z, t, x)|_{z=k(t, x)}] = v(z, t, x)|_{z=k(t, x)}$ , on utilise le lemme suivant [10, Lemme 6.1].

**Lemme 2.1.** *Soient  $M(t, x; D_t, D)$  un opérateur différentiel linéaire d'ordre  $m$  à coefficients holomorphes dans un ouvert  $\mathcal{O}$  de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$  et  $k : \mathcal{O} \mapsto \mathbf{C}$  une fonction holomorphe. Il existe des opérateurs différentiels linéaires  $M_q(t, x; D_t, D)$ ,  $0 \leq q \leq m$ , d'ordre  $\leq q$  à coefficients holomorphes dans  $\mathcal{O}$  tels que, pour tout  $a \in \mathcal{O}$  et tout germe  $u$  au point  $(k(a), a) \in \mathbf{C} \times \mathcal{O}$ , on ait*

$$M(t, x; D_t, D)u(k(t, x), t, x) = \sum_{q=0}^m M_q(t, x; D_t, D) D_z^{m-q} u(z, t, x)|_{z=k(t, x)}$$

pour  $(t, x)$  voisin de  $a$ .

En outre, les coefficients de  $M_q$  sont des combinaisons linéaires de ceux de  $M$  dont les coefficients sont des polynômes en les dérivées de  $k$ . Si  $g$  est le symbole principal de  $M$ , le symbole principal de  $M_q$ , en tant qu'opérateur d'ordre  $q$ , est donné par la formule

$$(2.1) \quad \sigma(M_q)(t, x; \tau, \xi) = \sum_{h+|\alpha|=q} D_t^h D_\xi^\alpha g(t, x; \nabla k(t, x)) \frac{\tau^h \xi^\alpha}{h! \alpha!}.$$

D'après ce lemme, on a

$$(2.2) \quad \begin{cases} A(t, x; D_t, D)u(k(t, x), t, x) = \sum_{q=0}^m A_q(t, x; D_t, D) D_z^{m-q} u(z, t, x)|_{z=k(t, x)}, \\ B(t, x; D_t, D)u(k(t, x), t, x) = \sum_{q=0}^{m-1} B_q(t, x; D_t, D) D_z^{m-1-q} u(z, t, x)|_{z=k(t, x)}, \end{cases}$$

où les opérateurs  $A_q$  et  $B_q$  sont d'ordre  $\leq q$ ; vu (1.4) et (2.1), on constate que  $A_0 = \sigma(A_0) = 0$  et on en déduit que

$$L[D_z^{1-m} u(z, t, x)|_{z=k(t, x)}] = \sum_{q=0}^{m-1} (t A_{q+1} + B_q) D_z^{-q} u(z, t, x)|_{z=k(t, x)}.$$

En outre, d'après (2.1), on a

$$B_0(t, x) = g_B(t, x; \nabla k(t, x))$$

et

$$\sigma(A_1)(t, x; \tau, \xi) = D_\tau g_A(t, x; \nabla k(t, x))\tau + \sum_{j=1}^n D_{\xi_j} g_A(t, x; \nabla k(t, x))\xi_j.$$

En utilisant la notation (1.8), il en résulte que

$$(tA_1 + B_0)(t, x, D_t, D) = b(t, x; D_t) + \sum_{l+|\alpha| \leq 1} a_{l,\alpha}(t, x) t^{l+1} D_t^l D^\alpha$$

où les  $a_{l,\alpha}$  sont des fonctions holomorphes sur  $\mathcal{O}_0$ . En notant, pour  $1 \leq q \leq m-1$ ,

$$A_q^{l+q} = \begin{cases} B_q & \text{si } l = 0, \\ A_{q+1} & \text{si } l = 1, \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned} L[D_z^{1-m} u(z, t, x)|_{z=k(t,x)}] &= \left( b(t, x; D_t) + \sum_{l+|\alpha| \leq 1} a_{l,\alpha}(t, x) t^{l+1} D_t^l D^\alpha \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{0 \leq l \leq 1 \\ 1 \leq q \leq m-1}} t^l A_q^{l+q}(t, x; D_t, D) D_z^{-q} \right) u(z, t, x)|_{z=k(t,x)} \end{aligned}$$

où l'ordre des opérateurs  $A_q^{l+q}$  est  $\leq l+q$ .

Posons  $\mathcal{Q} = \{q \in \mathbb{N}; 0 \leq q \leq m-1\}$  et pour tout  $q \in \mathcal{Q}$ , notons  $R_q$  l'opérateur défini par

$$(2.3) \quad R_q = \begin{cases} \sum_{l+|\alpha| \leq 1} a_{l,\alpha}(t, x) t^{l+1} D_t^l D^\alpha & \text{si } q = 0, \\ \sum_{0 \leq l \leq 1} t^l A_q^{l+q}(t, x; D_t, D) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut alors écrire

$$L[D_z^{1-m} u(z, t, x)|_{z=k(t,x)}] = \left( b(t, x; D_t) + \sum_{q \in \mathcal{Q}} R_q D_z^{-q} \right) u(z, t, x)|_{z=k(t,x)}.$$



Considérons ensuite les opérateurs  $\mathcal{D}^\beta$ ,  $\beta \in \mathbf{N}^n$ . D'après le lemme 2.1, on a

$$D^\beta D_z^{1-m} u(k(t, x), t, x) = t^{(|\beta|+2-m)_+} \sum_{q=0}^{|\beta|} M_q^\beta D_z^{|\beta|+1-m-q} u(z, t, x)|_{z=k(t,x)}$$

où les  $M_q^\beta$  sont des opérateurs différentiels linéaires holomorphes sur  $\mathcal{O}_0$  d'ordre  $q$ . En posant

$$(2.4) \quad Y_\beta = t^{(|\beta|+2-m)_+} \sum_{q=0}^{|\beta|} M_q^\beta D_z^{|\beta|+1-m-q} \quad \text{et} \quad Y_\Gamma u = (Y_\gamma u)_{\gamma \in \Gamma},$$

on obtient donc

$$\begin{aligned} & (L + F)[D_z^{1-m} u(z, t, x)|_{z=k(t,x)}] \\ &= \left( b(t, x; D_t) + \sum_{q \in \mathcal{Q}} R_q D_z^{-q} + \sum_{|\beta| \leq m} a_\beta(t, x, Y_\Gamma u(z, t, x)) Y_\beta \right) u(z, t, x)|_{z=k(t,x)}. \end{aligned}$$

Étant donné que  $k(0, a) = a_1$  d'après (1.5), l'équation (1.10) sera a fortiori vérifiée si pour  $(z, t, x)$  voisin de  $(a_1, 0, a)$ , on a

$$\left( b(t, x; D_t) + \sum_{q \in \mathcal{Q}} R_q D_z^{-q} + \sum_{|\beta| \leq m} a_\beta(t, x, Y_\Gamma u) Y_\beta \right) u = v.$$

Autrement dit, quitte à changer de notation, il suffit d'étudier une équation de la forme

$$(2.5) \quad P(x, t D_t) u = \left( \sum_{q \in \mathcal{Q}} R_q D_z^{-q} + \sum_{|\beta| \leq m} a_\beta(t, x, Y_\Gamma u) Y_\beta \right) u + v.$$

D'après l'hypothèse (1.9), il existe [15, Lemme 2.3-a] un voisinage ouvert  $\Omega_1 \subset \Omega_0$  de l'origine de  $\mathbf{C}^n$  et une constante  $c_0 > 0$  tels que :

$$(2.6) \quad |P(x, k)| \geq c_0(k+1) \quad \text{pour tout } x \in \Omega_1 \quad \text{et tout } k \in \mathbf{N}.$$

En outre, le polynôme  $\lambda \mapsto P(x, \lambda)$  étant d'ordre 1, on peut supposer qu'il existe une constante  $c_1 > 0$  telle que

$$(2.7) \quad |P(x, k)| \leq c_1 k \quad \text{pour tout } x \in \Omega_1 \quad \text{et tout } k \in \mathbf{N}.$$

Pour tout  $R > 0$ , on pose

$$D_R = \{t \in \mathbf{C}; |t| < R\}.$$

Soient  $a \in \mathbf{R}$ ,  $\delta > 0$ ,  $R > 0$  et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{C}^n$ , on désigne par  $\mathcal{E}^a(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$  l'espace vectoriel des fonctions  $u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$  qui appartiennent à l'espace  $\mathcal{G}^a(\mathcal{R}_\delta \times D_r \times \Omega)$  pour tout  $r \in ]0, R[$ .

**Lemme 2.2.** *Soit  $\Omega \subset \Omega_1$  un ouvert de  $\mathbf{C}^n$ . L'opérateur  $P \equiv P(x, tD_t)$  est une bijection linéaire de l'espace  $\mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$  (resp.  $\mathcal{E}^a(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$ ) sur lui même et*

$$(2.8) \quad (P^{-1}u)(z, t, x) = \sum_{k \in \mathbf{N}} \frac{t^k}{k!} \frac{D_t^k u(z, 0, x)}{P(x, k)};$$

de plus, les opérateurs  $P^{-1}$  et  $D_z^q$  commutent quel que soit  $q \in \mathbf{Z}$ .

Preuve. Il est clair que l'application  $P : \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$  est linéaire. Étant donné que  $(tD_t)^l t^k = k^l t^k$  pour tout  $k, l \in \mathbf{N}$ , on a  $P(x, tD_t)u(z, t, x) = \sum_{k \in \mathbf{N}} (t^k/k!) P(x, k) D_t^k u(z, 0, x)$ . L'opérateur  $P$  est donc injectif d'après (2.6); son inverse est formellement donné par la série (2.8). Soit  $u \in \mathcal{E}^a(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$ , montrons que  $Pu$ ,  $P^{-1}u \in \mathcal{E}^a(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$  et que  $P \circ P^{-1}u = u$ . Soient  $0 < r < s < R$  et  $\mathcal{K}$  un compact de  $\mathcal{R}_\delta \times \Omega$ . Si  $u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$ , il existe  $c = c(s, \mathcal{K}) \geq 0$  tel que  $|(t^k/k!) D_t^k u(z, 0, x)| \leq c(r/s)^k$  pour tout  $(z, t, x) \in \mathcal{R}_\delta \times D_r \times \Omega$ . Ceci prouve que la série (2.8) converge dans  $\mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$  puisque  $|1/P(x, k)| \leq 1/c_0$  d'après (2.6); (2.8) étant aussi une série entière de  $t$ , son image par  $P$  est bien égale à  $u$ . Les opérateurs  $D_z^q$  et  $P$  commutent dans  $\mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$ , il en est de même des opérateurs  $P^{-1}$  et  $D_z^q$ . Soit  $u \in \mathcal{E}^a(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$ , il reste à montrer que  $Pu$ ,  $P^{-1}u \in \mathcal{E}^a(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$ . D'après les inégalités de Cauchy et d'après (2.7), on a

$$\left| \frac{t^k}{k!} P(x, k) D_t^k D_z^p u(z, 0, x) \right| \leq c^{p+1} p! |z|^{a-p} c_1 k \left( \frac{|t|}{R} \right)^k$$

pour tout  $(z, t, x) \in \mathcal{R}_\delta \times D_r \times \Omega$ .

Soit  $r \in ]0, R[$ , la série  $\sum_{k=0}^{\infty} k(r/R)^k$  étant convergente, ceci prouve que  $Pu \in \mathcal{G}^a(\mathcal{R}_\delta \times D_r \times \Omega)$ . De même, en utilisant (2.6), on vérifie que  $P^{-1}u \in \mathcal{E}^a(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$ , d'où le lemme.  $\square$

En remplaçant  $u$  par  $P^{-1}u$ , on en déduit que l'équation (2.5) est équivalente à

$$(2.9) \quad u = \mathcal{A}u + \mathcal{F}u + v \quad \text{où} \quad \mathcal{A} = \sum_{q \in \mathcal{Q}} R_q P^{-1} D_z^{-q} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}u = \sum_{|\beta| \leq m} a_\beta(t, x, Y_\Gamma P^{-1}u) Y_\beta P^{-1}u.$$

NOTE. Notre solution de l'équation initiale (1.7) est donc de la forme  $(D_z^{1-m} P^{-1}u)(k(t, x), t, x)$ .

Le théorème 1.1 résulte finalement de la proposition suivante.

**Proposition 2.3.** Soient  $a \geq 1$ ,  $\delta > 0$ ,  $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_0$  un voisinage ouvert de l'origine de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$  et  $v \in \mathcal{G}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$ , alors il existe  $\delta' > 0$ ,  $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$  un voisinage ouvert de l'origine de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$  et une unique solution  $u \in \mathcal{G}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}')$  de l'équation (2.9).

La démonstration de cette proposition repose sur le théorème du point fixe dans des espaces de Banach que nous allons maintenant définir; indiquons qu'il s'agit d'espaces analogues à ceux introduits dans [8].

### 3. Cadre fonctionnel et estimation des opérateurs linéaires $\mathcal{A}$ et $Y_\delta P^{-1}$

Nous utiliserons les variables  $\xi = \sum_{j=1}^n x_j$  et  $\tau = \rho t$  où  $\rho$  est un paramètre  $\geq 1$ .

**DÉFINITION 3.1.** Soient  $a \in \mathbf{R}$ ,  $L, \rho, \omega \geq 1$ ,  $\delta > 0$  et  $\phi \in \mathbf{R}_+\{\xi\}$  une fonction majorante de rayon de convergence  $\geq R > 0$  tel que  $\omega\delta < R$ , on note  $\mathcal{G}_\phi^a$  l'espace vectoriel des fonctions  $u$  holomorphes au voisinage de  $\mathcal{R}_\delta \times \{0\}$  pour lesquelles il existe  $c \geq 0$  tel que

$$(3.1) \quad \forall p \in \mathbf{N}, \quad \forall z \in \mathcal{R}_\delta, \quad D_z^p u(z, t, x) \ll c L^p |z|^{a-p} D^p \phi(\tau + \xi + \omega|z|).$$

Il est clair que  $\mathcal{G}_\phi^a$  est un espace vectoriel et que la plus petite constante  $c \geq 0$  pour laquelle (3.1) a lieu est une norme sur cet espace vectoriel, notée  $\|\bullet\|_{\mathcal{G}_\phi^a}$ . Posons

$$\mathcal{O}(R, \rho, \omega, \delta) = \left\{ (t, x) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n; \rho|t| + \sum_{j=1}^n |x_j| < R - \omega\delta \right\}.$$

**Lemme 3.2.** Soit  $u \in \mathcal{G}_\phi^a$ , alors  $u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(R, \rho, \omega, \delta))$  et  $u \in \mathcal{G}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(s, \rho, \omega, \delta))$  pour tout  $s \in ]\omega\delta, R[$ .

Preuve [7, Lemme 4.2]. On a

$$u(z, t, x) \ll \|u\|_{\mathcal{G}_\phi^a} |z|^a \phi(\tau + \xi + \omega|z|) \ll c \phi(\tau + \xi + \omega\delta) \quad \text{où} \quad c = \|u\|_{\mathcal{G}_\phi^a} \delta^a.$$

Autrement dit, pour tout  $(h, \alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^n$ , on a

$$|D_t^h D^\alpha u(z, 0, 0)| \leq \|u\|_{\mathcal{G}_\phi^a} \rho^h D^{h+|\alpha|} \phi(\omega\delta).$$

L'ouvert  $\mathcal{O}(R, \rho, \omega, \delta)$  étant contenu dans le domaine de convergence de la fonction majorante  $\phi(\tau + \xi + \omega\delta)$ , on en déduit que la série  $u(z, t, x) = \sum_{(h, \alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^n} (t^h x^\alpha / (h! \alpha!)) \times D_t^h D^\alpha u(z, 0, 0)$  converge normalement sur tout compact de  $\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(R, \rho, \delta, \omega)$  et que  $u$  est holomorphe dans  $\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(R, \rho, \delta, \omega)$ . Soit  $s \in ]\omega\delta, R[$ , on a

$$|D_z^p u(z, t, x)| \leq c L^p |z|^{a-p} D^p \phi(s) \quad \text{pour tout} \quad (z, t, x) \in \mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(s, \rho, \omega, \delta)$$

et il existe  $c \geq 0$  tel que  $|D^p \phi(s)| \leq c^{p+1} p!$ , d'où  $u \in \mathcal{G}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(s, \rho, \omega, \delta))$ , ce qui prouve le lemme.  $\square$

**Lemme 3.3.** *L'espace  $\mathcal{G}_\phi^a$  est un espace de Banach.*

Preuve. Soit  $(u_n)$  une suite de Cauchy de l'espace  $\mathcal{G}_\phi^a$ . Il existe un entier  $N \in \mathbf{N}$  tel que pour tout  $n, n' \geq N$  et tout  $z \in \mathcal{R}_\delta$ ,

$$(3.2) \quad \forall p \in \mathbf{N}, \quad D_z^p(u_n - u_{n'})(z, t, x) \ll \varepsilon L^p |z|^{a-p} D^p \phi(\tau + \xi + \omega|z|).$$

Si  $K$  est une partie compacte de  $\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(R, \rho, \omega, \delta)$ , on a donc

$$\max_K |u_n - u_{n'}| \leq \varepsilon C_K$$

$$\text{où } C_K = \max_{(z,t,x) \in K} |z|^a \phi \left( \rho|t| + \sum_{j=1}^n |x_j| + \omega|z| \right) \text{ est } < +\infty$$

car l'application  $(z, t, x) \mapsto |z|^a \phi(\rho|t| + \sum_{j=1}^n |x_j| + \omega|z|)$  est continue sur  $\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(R, \rho, \omega, \delta)$ . Ceci prouve que la suite  $(u_n)$  est de Cauchy dans l'espace  $\mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(R, \rho, \omega, \delta))$ , elle converge donc uniformément vers une fonction  $u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(R, \rho, \omega, \delta))$  sur tout compact de  $\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(R, \rho, \omega, \delta)$ ; a fortiori, pour tout  $z \in \mathcal{R}_\delta$  et tout  $(p, h, \alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ , la suite  $(D_z^p D_t^h D^\alpha u_n(z, 0, 0))_n$  converge vers  $D_z^p D_t^h D^\alpha u(z, 0, 0)$ . On peut alors passer à la limite sur  $n'$  dans la relation (3.2) et on en déduit que  $(u_n)$  converge vers  $u$  dans  $\mathcal{G}_\phi^a$ .  $\square$

**Lemme 3.4.** *L'application  $D_z : \mathcal{G}_\phi^a \rightarrow \mathcal{G}_{D\phi}^{a-1}$  est linéaire continue de norme  $\leq L$ .*

Preuve. Soient  $u \in \mathcal{G}_\phi^a$  et  $p \in \mathbf{N}$ . On a  $D_z^{p+1} u \ll \|u\|_{\mathcal{G}_\phi^a} L^{p+1} |z|^{a-(p+1)} D^{p+1} \phi$  c'est-à-dire le résultat voulu,

$$D_z^p D_z u \ll L \|u\|_{\mathcal{G}_\phi^a} L^p |z|^{a-1-p} D^p D \phi. \quad \square$$

**Lemme 3.5.** *L'application  $D_z^{-1} : \mathcal{G}_{D\phi}^a \rightarrow \mathcal{G}_\phi^a$  est linéaire continue de norme  $\leq \max(\delta L^{-1}, \omega^{-1})$ .*

Preuve. Soient  $u \in \mathcal{G}_{D\phi}^a$  et  $p \in \mathbf{N}$ . Si  $p \geq 1$ , on a

$$D_z^p D_z^{-1} u = D_z^{p-1} u \ll \|u\|_{\mathcal{G}_{D\phi}^a} L^{p-1} |z|^{a+1-p} D^p \phi \ll \delta L^{-1} \|u\|_{\mathcal{G}_{D\phi}^a} L^p |z|^{a-p} D^p \phi.$$

Supposons ensuite  $p = 0$ . Pour tout  $z \in \mathcal{R}_\delta$  et tout  $(h, \alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^n$ , on a

$$|D_t^h D^\alpha u(z, 0, 0)| \leq \|u\|_{\mathcal{G}_{D\phi}^a} |z|^a \rho^h D^{h+|\alpha|+1} \phi(\omega|z|)$$

d'où

$$\begin{aligned} |D_t^h D^\alpha D_z^{-1} u(z, 0, 0)| &\leq \|u\|_{\mathcal{G}_{D\phi}^a} |z|^a \rho^h \int_0^1 D^{h+|\alpha|+1} \phi(\omega s|z|) |z| ds \\ &\leq \omega^{-1} \|u\|_{\mathcal{G}_{D\phi}^a} |z|^a \rho^h D^{h+|\alpha|} \phi(\omega|z|) \end{aligned}$$

soit  $D_z^{-1} u \ll \omega^{-1} \|u\|_{\mathcal{G}_{D\phi}^a} \phi(\tau + \xi + \omega|z|)$ , ce qui prouve le lemme.  $\square$

Indiquons maintenant le choix de  $\phi$ . Rappelons ([17]) que si  $\theta$  désigne la fonction majorante  $\theta(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n / (n+1)^2$ , il existe  $K > 0$  tel que  $\theta^2 \ll K\theta$ ; la fonction majorante  $\phi(\xi) = K^{-1}\theta(\xi/R)$ ,  $R > 0$ , vérifie alors

$$\phi(0) = K^{-1} \quad \text{et} \quad \phi^2 \ll \phi.$$

Rappelons [17, Lemme 2.4] que, pour tout  $\eta > 1$ , il existe  $c = c(\eta) > 0$  tel que  $\eta R / (\eta R - \bullet) \ll c\phi$ , d'où  $(\eta R / (\eta R - \bullet))\phi \ll c\phi$  et, par dérivation,

$$(3.3) \quad \forall p \in \mathbf{N}, \quad \frac{\eta R}{\eta R - \bullet} D^p \phi \ll c D^p \phi.$$

Pour tout  $R > 0$ , on pose

$$\Delta_R = \left\{ x \in \mathbf{C}^n; \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| < R \right\}.$$

On fixe une fois pour toutes  $\eta > 1$  et  $R_0 > 0$  tels que  $\mathcal{D}_0 \times \Omega_1 (\subset \mathcal{D}_0 \times \Omega_0 = \mathcal{O}_0)$  contienne le polydisque  $\overline{\mathcal{D}}_{\eta R_0} \times \overline{\Delta}_{\eta R_0}$ . D'après (2.6) et les inégalités de Cauchy, on a

$$(3.4) \quad \frac{1}{P(x, k)} \ll \frac{c_0^{-1}}{k+1} \frac{\eta R}{\eta R - \xi} \quad \text{pour tout } R \in ]0, R_0] \quad \text{et tout } k \in \mathbf{N}.$$

Il est clair que  $\mathcal{O}(R, \rho, \Lambda, \omega) \subset D_R \times \Delta_R \subset \mathcal{D}_0 \times \Omega_1$ . Voici alors une estimation de  $P^{-1}$ .

**Lemme 3.6.** *Il existe une constante  $c (= c_0^{-1}c(\varepsilon)) > 0$  telle que : soient  $b \in \mathbf{R}$ ,  $R \in ]0, R_0]$  et  $l \in \mathbf{N}$ , si  $u \in \mathcal{G}_{D^l\phi}^b$ , alors  $P^{-1}u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(R, \rho, \delta, \omega))$  vérifie*

$$(3.5) \quad \begin{aligned} &\forall p \in \mathbf{N}, \quad \forall z \in \mathcal{R}_\delta, \\ &D_z^p P^{-1} u(z, t, x) \ll c \|u\|_{\mathcal{G}_{D^l\phi}^b} L^p |z|^{b-p} \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k \frac{D^{k+p+l} \phi(\xi + \omega|z|)}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Preuve. Soit  $u \in \mathcal{G}_{D^l\phi}^b$ , alors d'après le lemme 3.2,  $u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(R, \rho, \omega, \delta))$ . En posant pour tout  $R > 0$ ,  $\Omega_R = \{x \in \mathbb{C}^n; \sum_{j=1}^n |x_j| < R\}$ , on observe que

$$\mathcal{O}(R, \rho, \omega, \delta) = \bigcup_{r \in ]0, R-\omega\delta[} D_{r/\rho} \times \Omega_{R-\omega\delta-r}.$$

D'après le lemme 2.2, on en déduit que  $P^{-1}u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(R, \rho, \omega, \delta))$ . En outre, on a

$$D_z^p P^{-1}u = P^{-1}D_z^p u = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{t^k}{k!} \frac{D_t^k D_z^p u(z, 0, x)}{P(x, k)},$$

soit  $D_t^k(D_z^p P^{-1}u)(z, 0, x) = D_t^k D_z^p u(z, 0, x)/P(x, k)$ . Par ailleurs, d'après (3.1), on a

$$D_t^k D_z^p u(z, 0, x) \ll \|u\|_{\mathcal{G}_{D^l\phi}^a} L^p |z|^{b-p} \rho^k D^{k+p+l} \phi(\xi + \omega|z|) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

D'après (3.3) et (3.4), on en déduit

$$D_t^k(D_z^p P^{-1}u)(z, 0, x) \ll c \|u\|_{\mathcal{G}_{D^l\phi}^a} L^p |z|^{b-p} \rho^k \frac{D^{k+p+l} \phi(\xi + \omega|z|)}{k+1} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N},$$

c'est-à-dire le résultat voulu.  $\square$

Afin de contrôler les opérateurs  $R_q P^{-1}$ , rappelons [14, Lemme 2.8] que

$$(3.6) \quad \frac{D^k \phi}{k!} \ll R^l (l+1)^2 \frac{D^{k+l} \phi}{(k+l)!} \quad \text{pour tout } k, l \in \mathbb{N}.$$

Dans les majorations qui vont suivre, toute constante qui dépend des paramètres  $c_0, \eta, R_0$  déjà fixés, sera notée  $c$ , sauf mention expresse. Étant donné que  $\overline{D}_{\eta R_0} \times \overline{\Delta}_{\eta R_0} \subset \mathcal{O}_0$ , tous les coefficients des opérateurs  $R_q$  sont holomorphes et bornés sur  $D_{\eta R_0} \times \Delta_{\eta R_0}$ . Soit  $R \in ]0, R_0]$ , si  $b$  désigne l'un de ces coefficients, on a d'après les inégalités de Cauchy

$$(3.7) \quad b(t, x) \ll c \frac{\eta R}{\eta R - (\tau + \xi)}.$$

Le lemme 3.6 de [15] prend ici la forme suivante.

**Lemme 3.7.** *Il existe  $c > 0$  tel que, pour tout  $R \in ]0, R_0]$ , l'opérateur  $R_q P^{-1}$  induise une application linéaire continue de  $\mathcal{G}_\phi^a$  dans  $\mathcal{G}_{D^q\phi}^a$  de norme*

$$\|R_q P^{-1}\| \leq \begin{cases} c \rho^{-1} & \text{si } q = 0, \\ c \rho^q & \text{si } q > 0. \end{cases}$$

Preuve. Soit  $u \in \mathcal{G}_\phi^a$ ; d'après le lemme précédent et vu (2.3),  $R_q P^{-1}u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(R, \rho, \omega, \delta))$ . Si  $q = 0$ ,  $R_q$  est une somme finie de termes de la forme

$$b(t, x)t^{l+1}D_t^l D^\alpha P^{-1} \quad \text{où } l + |\alpha| \leq 1.$$

Grâce à (3.4) et (3.7), nous pouvons faire abstraction du coefficient  $b(t, x)$ . Vu (3.5), on a pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et tout  $z \in \mathcal{R}_\delta$ ,

$$D_z^p(t^{l+1}D_t^l D^\alpha P^{-1}u) \ll c\|u\|_\phi^a \rho^{-1} \sum_{k \geq l} \tau^{k+1} \frac{k!}{(k-l)!} \frac{D^{k+p+|\alpha|}\phi(\xi + \omega|z|)}{(k+1)!}.$$

Étant donné que  $|\alpha| \leq 1$ , on a d'après (3.6),

$$\frac{D^{k+p+|\alpha|}\phi}{(k+p+|\alpha|)!} \ll (4R)^{1-|\alpha|} \frac{D^{k+p+1}\phi}{(k+p+1)!}.$$

On note que  $(4R)^{1-|\alpha|} \leq (4R_0)^{1-|\alpha|} \leq c$ ; on remarque ensuite que

$$\frac{k!}{(k-l)!} \frac{(k+p+|\alpha|)!}{(k+p+1)!} \leq 1 \quad \text{pour tout } k \geq l$$

car  $l + |\alpha| \leq 1$ . Il en résulte que

$$D_z^p(t^{l+1}D_t^l D^\alpha P^{-1}u) \ll c\|u\|_\phi^a \rho^{-1} \sum_{k \geq l} \tau^{k+1} \frac{D^{k+1+p}\phi(\xi + \omega|z|)}{(k+1)!}$$

d'où le résultat voulu dans ce cas.

Lorsque  $q$  est  $> 0$ , rappelons que l'ordre des opérateurs  $A_q^{l+q}$  est  $\leq l + q$ ; à nouveau, on en déduit qu'il s'agit de majorer les opérateurs

$$t^l D_t^h D^\alpha P^{-1} \quad \text{où } h + |\alpha| \leq l + q, \quad 0 \leq l \leq 1.$$

Vu (3.5), on a

$$D_z^p(t^l D_t^h D^\alpha P^{-1}u) \ll c\|u\|_\phi^a \rho^{h-l} \sum_{k \geq h} \tau^{k-h+l} \frac{k!}{(k-h)!} \frac{D^{k+p+|\alpha|}\phi(\xi + \omega|z|)}{(k+1)!}.$$

Étant donné que  $h + |\alpha| \leq l + q$ , on a  $\rho^{h-l} \leq \rho^q$  et, d'après (3.6),

$$D^{k+p+|\alpha|}\phi \ll c D^{k+p-h+l+q}\phi \quad \text{où } c = R_0^{l+q-(h+|\alpha|)}(l+q-(h+|\alpha|)+1)^2.$$

On observe alors que

$$\frac{k!}{(k-h)!} \frac{(k-h+l)!}{(k+1)!} \leq 1 \quad \text{pour tout } k \geq h$$

car  $0 \leq l \leq 1$ . On obtient donc

$$t^l D_t^h D^\alpha P^{-1} u \ll c \|u\|_\phi^a \rho^q \sum_{k \geq h} \tau^{k-h+l} \frac{D^{k-h+l+p+q} \phi(\xi + \omega|z|)}{(k-h+l)!},$$

d'où le lemme.  $\square$

Les lemmes 2.2 et 3.5 permettent d'en déduire immédiatement le corollaire suivant.

**Lemme 3.8.** *Il existe  $c > 0$  tel que, pour tout  $R \in ]0, R_0]$ , l'opérateur  $\mathcal{A}$  induise un endomorphisme continu de l'espace  $\mathcal{G}_\phi^a$  de norme  $\leq c[\rho^{-1} + \sum_{q \in \mathbb{Q}} (\max(\delta L^{-1}, \omega^{-1}) \rho)^q] \equiv \varepsilon_1(L, \rho, \omega, \delta)$ .*

On peut ensuite établir le

**Lemme 3.9.** *Il existe  $c > 0$  tel que, pour tout  $R \in ]0, R_0]$ , chaque opérateur  $Y_\gamma P^{-1}$ ,  $\gamma \in \Gamma$  (resp.  $Y_\beta P^{-1}$ ,  $|\beta| \leq m$ ) induise une application linéaire continue de  $\mathcal{G}_\phi^a$  dans  $\mathcal{G}_\phi^a$  (resp.  $\mathcal{G}_\phi^{a-1}$ ) de norme  $\leq \varepsilon_1(L, \rho, \omega, \delta)$  (resp.  $\leq c[\rho^{-1} L + \sum_{q \in \mathbb{Q}} (\max(\delta L^{-1}, \omega^{-1}) \rho)^q] \equiv \varepsilon_2(L, \rho, \omega, \delta)$ ).*

Preuve. Vu (2.4), si  $|\beta| = m$ , alors

$$Y_\beta = M_0 t D_z + t^2 M_1^\beta + \sum_{q=1}^{m-1} t M_{q+1} D_z^{-q} \quad \text{où} \quad M_q = t M_q^\beta \quad \text{pour} \quad q = 0, 2, \dots, m.$$

Pour  $|\beta| = m-1$ , on a

$$Y_\beta = t M_0 + \sum_{q=1}^{m-1} M_q D_z^{-q} \quad \text{où} \quad M_q = t M_q^\beta, \quad 1 \leq q \leq m-1.$$

Enfin, lorsque  $|\beta| \leq m-2$ , on obtient (en remplaçant  $q$  par  $|\beta| + 1 - m + q$ )

$$Y_\beta = \sum_{q=m-1-|\beta|}^{m-1} M_{|\beta|+1-m+q}^\beta D_z^{-q} \quad \text{où} \quad m-1-|\beta| \geq 1 \quad \text{et} \quad |\beta| + 1 - m + q \leq q-1$$

soit

$$Y_\beta = \sum_{q=1}^{m-1} A_q D_z^{-q}$$

où  $A_q$  désigne un opérateur différentiel linéaire holomorphe sur  $\mathcal{O}_0$  d'ordre  $\leq q$ .



Autrement dit,

$$(3.8) \quad Y_\beta \quad \text{est une somme finie d'opérateurs de la forme} \quad M_0 t D_z, \quad S_q D_z^{-q}, \quad q \geq 0$$

et, vu que  $|\gamma| \leq m - 1$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,

$$(3.9) \quad Y_\gamma \quad \text{est une somme finie d'opérateurs de la forme} \quad S_q D_z^{-q}, \quad q \geq 0.$$

On en déduit que l'opérateur  $Y_\gamma P^{-1}$  agit et se majore comme l'opérateur  $\mathcal{A}$ ; le résultat voulu est donc une conséquence du lemme 3.8.

Il est clair que l'injection  $\mathcal{G}_\phi^a \hookrightarrow \mathcal{G}_\phi^{a-1}$  est linéaire continue de norme  $\leq \delta$ . Vu (3.8), on en déduit qu'il suffit d'étudier l'opérateur  $t P^{-1} D_z$ . Soit donc  $u \in \mathcal{G}_\phi^a$ . D'après les lemmes 3.4 et 3.6, on a

$$D_z^p P^{-1}(D_z u) \ll c L \|u\|_{\mathcal{G}_\phi^a} L^p |z|^{a-1-p} \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k \frac{D^{k+p+1} \phi}{(k+1)!}$$

d'où

$$D_z^p (t P^{-1} D_z u) \ll c \rho^{-1} L \|u\|_{\mathcal{G}_\phi^a} L^p |z|^{a-1-p} \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{k+1} \frac{D^{k+1+p} \phi}{(k+1)!}$$

ce qui permet de conclure. □

Pour contrôler l'opérateur  $\mathcal{F}$ , nous aurons besoin des lemmes qui suivent [8, Proposition 3.3 et 3.4].

**Lemme 3.10.** *Soient  $a, b \in \mathbf{R}$  et  $(u, v) \in \mathcal{G}_\phi^a \times \mathcal{G}_\phi^b$ , alors  $uv \in \mathcal{G}_\phi^{a+b}$  où  $\|uv\|_{\mathcal{G}_\phi^{a+b}} \leq \|u\|_{\mathcal{G}_\phi^a} \|v\|_{\mathcal{G}_\phi^b}$ .*

*Preuve.* Soit  $p \in \mathbf{N}$ , on a

$$\begin{aligned} D_z^p uv &= \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} D_z^j u D_z^{p-j} v \\ &\ll \|u\|_{\mathcal{G}_\phi^a} \|v\|_{\mathcal{G}_\phi^b} L^p |z|^{a+b-p} \left( \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} D^j \phi D^{p-j} \phi \right) (\tau + \xi + \omega |z|) \end{aligned}$$

et on conclut en dérivant  $\phi^2 \ll \phi$  à l'ordre  $p$ , d'où le lemme. □

**Lemme 3.11.** *Soient  $f$  une fonction holomorphe et bornée par  $M$  sur le polydisque ouvert, centré à l'origine de  $\mathbf{C}_t \times \mathbf{C}_x^n \times \mathbf{C}^N$ , de rayon  $\eta R$ ,  $R > 0$ ,  $\eta \geq 1$  et*

$u_1, \dots, u_N \in \mathcal{G}_\phi^0$  tels que  $K \|u_i\|_\phi^0 < R$ , alors  $v \equiv f(t, x, u_1, \dots, u_N) \in \mathcal{G}_\phi^0$  et

$$\|v\|_\phi^0 \leq cM \prod_{i=1}^N \frac{R}{R - \|u_i\|_\phi^0}$$

où la constante  $c$  ne dépend que de  $\eta$ .

Preuve. Comme  $u_i \in \mathcal{G}_\phi^0$ , on a en particulier

$$\forall z \in \mathcal{R}_\delta, \quad u_i(z, 0, 0) \ll \|u_i\|_\phi^0 \phi(\omega|z|) \leq \|u_i\|_\phi^0 \phi(R) = \|u_i\|_\phi^0 \theta(1).$$

On déduit de la relation  $\theta^2 \ll K\theta$  que  $\theta(1) \leq K$ , d'où  $|u_i(z, 0, 0)| \leq K \|u_i\|_\phi^0 < R$ . La fonction  $v$  est donc bien définie et holomorphe au voisinage de  $\mathcal{R}_\delta \times \{0\}$  et on a

$$v = \sum_{\lambda \in \mathbf{N}^N} f_\lambda(t, x) \prod_{i=1}^N u_i^{\lambda_i}$$

où les fonctions  $f_\lambda$  sont holomorphes, bornées par  $MR^{-|\lambda|}$  sur le polydisque  $D_{\eta R} \times \Delta_{\eta R}$ ; elles appartiennent donc à l'espace  $\mathcal{G}_\phi^0$  et sont de norme  $\leq cMR^{-|\lambda|}$  où  $c = c(\eta)$  est la constante figurant dans la relation  $\eta R/(\eta R - \bullet) \ll c\phi$ . D'après le lemme précédent,  $u^\lambda \in \mathcal{G}_\phi^0$  et  $\|u^\lambda\| \leq \prod_{i=1}^N \|u_i\|^{\lambda_i}$ , d'où  $f_\lambda u^\lambda \in \mathcal{G}_\phi^0$  et  $\|f_\lambda u^\lambda\| \leq cM \prod_{i=1}^N (\|u_i\|/R)^{\lambda_i}$ . Il en résulte que la famille  $(f_\lambda u^\lambda)$  est absolument sommable dans l'espace  $\mathcal{G}_\phi^0$  et que

$$\|v\| \leq cM \prod_{i=1}^N \frac{R}{R - \|u_i\|},$$

ce qui prouve le lemme. □

#### 4. Preuve de la proposition 2.3

On pose

$$f(t, x, Z) = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} a_\beta(t, x, Z_\Gamma) Z_\beta$$

où

$$Z = (Z_\beta)_{\beta \in \mathcal{B}}, \quad \mathcal{B} = \{\beta \in \mathbf{N}^n; |\beta| \leq m\} \quad \text{et} \quad Z_\Gamma = (Z_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}, \quad \Gamma \subset \mathcal{B}.$$

D'après (1.2), on peut écrire

$$\begin{aligned} f(t, x, Z) - f(t, x, Z') &= \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{B} \\ \gamma \in \Gamma}} g_{\beta, \gamma}(t, x, Z_\Gamma, Z'_\Gamma) Z_\gamma (Z_\beta - Z'_\beta) \\ &\quad + h_{\beta, \gamma}(t, x, Z_\Gamma, Z'_\Gamma) Z'_\beta \text{eta}(Z_\gamma - Z'_\gamma) \end{aligned}$$

où les fonctions  $g_{\beta,\gamma}, h_{\beta,\gamma}$  sont holomorphes au voisinage de l'origine de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^{n'} \times \mathbf{C}^{n'}$ . On peut évidemment supposer ces fonctions holomorphes et bornées sur le polydisque ouvert de rayon  $\eta R_0$  centré à l'origine de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^{n'} \times \mathbf{C}^{n'}$ .

Soient  $a \geq 1$ ,  $\delta > 0$ ,  $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_0$  un voisinage ouvert de l'origine de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ . On choisit  $R \in ]0, R_0]$  tel que  $\overline{D}_{\eta R} \times \overline{\Delta}_{\eta R} \subset \mathcal{O}$ . Soit  $v \in \mathcal{G}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$ , alors d'après les inégalités de Cauchy, on a

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \forall z \in \mathcal{R}_\delta, \quad D_z^p v \ll c^{p+1} p! |z|^{a-p} \frac{\eta R}{\eta R - (\tau + \xi)}.$$

Or, on sait que  $\eta R / (\eta R - \bullet) \ll c(\eta)\phi$  et, d'après (3.6),

$$\phi \ll R^p (p+1)^2 \frac{D^p \phi}{p!} \ll (4R)^p \frac{D^p \phi}{p!}.$$

En prenant par exemple  $L = 1 + c(4R)$ , il en résulte que  $v$  appartient à l'espace  $\mathcal{G}_\phi^a$  associé aux paramètres  $L, \rho, \omega \geq 1$  et  $\delta' \in ]0, \delta]$  tel que  $\omega\delta' < R$ ; sa norme étant une constante ( $\leq cc(\eta)$ ) indépendante de  $\delta'$ .

On pose

$$\varepsilon = \varepsilon(L, \rho, \omega, \delta') \equiv \max(\varepsilon_1(L, \rho, \omega, \delta'), \varepsilon_2(L, \rho, \omega, \delta'))$$

où les  $\varepsilon_i$  sont les expressions figurant dans les lemmes 3.8 et 3.9; étant donné que  $L$  est  $\geq 1$ , on constate que

$$(4.1) \quad \varepsilon \leq c \left[ \rho^{-1} L + \sum_{q \in \mathbb{Q}^*} (\max(\delta', \omega^{-1}) \rho)^q \right].$$

Soit  $r \geq 2\|v\|_{\mathcal{G}_\phi^a}$  et  $u, u'$  appartenant à la boule fermée  $B'(0, r) = \{u \in \mathcal{G}_\phi^a; \|u\|_{\mathcal{G}_\phi^a} \leq r\}$  de l'espace  $\mathcal{G}_\phi^a$ . Posons, pour tout  $\beta \in \mathcal{B}$ ,

$$Z_\beta = Y_\beta P^{-1}u \quad \text{et} \quad Z'_\beta = Y_\beta P^{-1}u'.$$

Le lemme 3.9 montre que, si  $\gamma \in \Gamma$ , alors

$$Z_\gamma, Z'_\gamma \in \mathcal{G}_\phi^a \quad \text{et} \quad \|Z_\gamma\|_{\mathcal{G}_\phi^a}, \|Z'_\gamma\|_{\mathcal{G}_\phi^a} \leq \varepsilon r;$$

l'injection  $\mathcal{G}_\phi^a \hookrightarrow \mathcal{G}_\phi^0$  est linéaire continue de norme  $\leq \delta'^a$ , il en résulte que

$$Z_\gamma, Z'_\gamma \in \mathcal{G}_\phi^0 \quad \text{et} \quad \|Z_\gamma\|_{\mathcal{G}_\phi^0}, \|Z'_\gamma\|_{\mathcal{G}_\phi^0} \leq \varepsilon r \delta'^a.$$

Supposons

$$(4.2) \quad K \varepsilon r \delta'^a \leq \frac{R}{2}$$

de sorte que l'hypothèse du lemme 3.11 soit vérifiée, ce qui garantit que les fonctions  $g_{\beta,\gamma}(t, x, Z_\Gamma, Z'_\Gamma)$  et  $h_{\beta,\gamma}(t, x, Z_\Gamma, Z'_\Gamma)$  appartiennent à l'espace  $\mathcal{G}_\phi^0$  et qu'elles sont de norme  $\leq c$ .

D'autre part, pour tout  $\gamma \in \Gamma$  et tout  $\beta \in \mathcal{B}$ , on a d'après les lemmes 3.9 et 3.10,

$$\begin{cases} Z_\gamma(Z_\beta - Z'_\beta), Z'_\beta(Z_\gamma - Z'_\gamma) \in \mathcal{G}_\phi^{2a-1}, \\ \|Z_\gamma(Z_\beta - Z'_\beta)\|_{\mathcal{G}_\phi^{2a-1}}, \|Z'_\beta(Z_\gamma - Z'_\gamma)\|_{\mathcal{G}_\phi^{2a-1}} \leq \varepsilon^2 r \|u - u'\|_{\mathcal{G}_\phi^a}. \end{cases}$$

L'hypothèse  $a \geq 1$  signifiant  $a \leq 2a - 1$ , il est clair que l'injection  $\mathcal{G}_\phi^{2a-1} \hookrightarrow \mathcal{G}_\phi^a$  est linéaire continue de norme  $\leq \delta'^{a-1} \leq \delta^{a-1} = c$ . Par conséquent, on a

$$\begin{cases} Z_\gamma(Z_\beta - Z'_\beta), Z'_\beta(Z_\gamma - Z'_\gamma) \in \mathcal{G}_\phi^a, \\ \|Z_\gamma(Z_\beta - Z'_\beta)\|_{\mathcal{G}_\phi^a}, \|Z'_\beta(Z_\gamma - Z'_\gamma)\|_{\mathcal{G}_\phi^a} \leq c\varepsilon^2 r \|u - u'\|_{\mathcal{G}_\phi^a}. \end{cases}$$

En utilisant à nouveau le lemme 3.10, on en déduit que

$$\mathcal{F}u - \mathcal{F}u' \in \mathcal{G}_\phi^a \quad \text{où} \quad \|\mathcal{F}u - \mathcal{F}u'\|_{\mathcal{G}_\phi^a} \leq c\varepsilon^2 r \|u - u'\|_{\mathcal{G}_\phi^a}.$$

Vu que  $\mathcal{F}(0) = 0$ , on a donc

$$\mathcal{F}u \in \mathcal{G}_\phi^a \quad \text{où} \quad \|\mathcal{F}u\|_{\mathcal{G}_\phi^a} \leq c\varepsilon^2 r \|u\|_{\mathcal{G}_\phi^a}.$$

En notant  $Tu = \mathcal{A}u + \mathcal{F}u + v$ , on obtient finalement,

$$(4.3) \quad \begin{cases} \|Tu\|_{\mathcal{G}_\phi^a} \leq \left(\varepsilon + c\varepsilon^2 r + \frac{1}{2}\right)r, \\ \|Tu - Tu'\|_{\mathcal{G}_\phi^a} \leq (\varepsilon + c\varepsilon^2 r)\|u - u'\|_{\mathcal{G}_\phi^a}. \end{cases}$$

Vu (4.1), il est alors possible de fixer  $\rho \geq 1$ ,  $\omega \geq 1$  et  $0 < \delta' < \min(\delta, R/\omega)$  satisfaisant à la condition (4.2), tels que  $\varepsilon + c\varepsilon^2 r \leq 1/2$ . D'après (4.3), on en déduit que  $T : B'(0, r) \rightarrow B'(0, r)$  est une contraction stricte, ce qui prouve l'existence d'une solution  $u \in \mathcal{G}_\phi^a$ ; en choisissant un  $s \in ]\omega\delta, R]$ , cette solution appartient d'après le lemme 3.2 à  $\mathcal{G}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}')$  où  $\mathcal{O}' = \mathcal{O}(s, \rho, \omega, \delta')$ . On a également l'unicité car, si  $u'$  appartient à  $\mathcal{G}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}')$  et vérifie l'équation (2.9), on peut encore choisir  $0 < R \leq R_0$  tel que  $u, u' \in \mathcal{G}_\phi^a$  pour un certain  $L \geq 1$ , puis  $r \geq 2\|v\|_{\mathcal{G}_\phi^a}$ ,  $\rho \geq 1$ ,  $\omega \geq 1$  et  $\delta'' > 0$  tel que  $T$  soit une contraction stricte dans  $B'(0, r)$ , ce qui prouve que  $u' = u$ .  $\square$

## Références

- [1] M.S. Baouendi and C. Goulaouic : *Cauchy problems with characteristic initial hypersurface*, Comm. Pure Appl. Math. **26** (1973), 455-475.

- [2] M.S. Baouendi and C. Goulaouic : *Singular nonlinear Cauchy problems*, J. Differential Equations **22** (1976), 268-291.
- [3] S. Fujiié : *Représentation hypergéométrique des singularités de la solution du problème de Cauchy caractéristique à données holomorphes*, Comm. Partial Differential Equations **18** (1993), 1589-1629.
- [4] S. Fujiié : *Solutions Ramifiées des Problèmes de Cauchy Caractéristiques et Fonctions Hypergéométriques à deux Variables*, Tohoku Mathematical Publications **6**, Dissertation, Tohoku University, Sendai, 1994, Tohoku Univ., Sendai, 1997.
- [5] Y. Hamada, J. Leray and C. Wagschal : *Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy ramifié ; hyperbolicité partielle*, J. Math. Pures Appl. (9) **55** (1976), 297-352.
- [6] J. Leray : *Problème de Cauchy, I, Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy*, Bull. Soc. Math. France **85** (1957), 389-429.
- [7] A. Nabaji and C. Wagschal : *Singularités à croissance lente*, J. Math. Pures Appl. (9) **72** (1993), 335-375.
- [8] A. Nabaji : *Construction de solutions singulières pour des opérateurs quasi-linéaires*, Bull. Sci. Math. **119** (1995), 509-527.
- [9] S. Ōuchi : *Singularities of solutions of equations with noninvolution characteristics, I, The case of second order Fuchsian equations*, J. Math. Soc. Japan **45** (1993), 215-251.
- [10] P. Pongérard and C. Wagschal : *Ramification non abélienne*, J. Math. Pures Appl. (9) **77** (1998), 51-88.
- [11] P. Pongérard : *Sur une classe d'équations de Fuchs non linéaires*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **7** (2000), 423-448.
- [12] P. Pongérard : *Problème de Cauchy caractéristique à solution entière*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **8** (2001), 89-105.
- [13] P. Pongérard : *Ramification des solutions du problème de Cauchy fuchsien au voisinage de l'hypersurface initiale*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **12** (2005), 493-512.
- [14] P. Pongérard and C. Wagschal : *Opérateurs de Fuchs non linéaires*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **16** (2007), 303-329.
- [15] P. Pongérard : *Sur l'existence d'une solution ramifiée pour des équations de Fuchs à caractéristique simple*, Proc. Amer. Math. Soc., à paraître.
- [16] J. Urabe : *Meromorphic representations of the solutions of the singular Cauchy problem, II*, J. Math. Kyoto Univ. **28** (1988), 335-342.
- [17] C. Wagschal : *Sur le problème de Cauchy ramifié*, J. Math. Pures Appl. (9) **53** (1974), 147-163.
- [18] H. Yamane : *Singularities in Fuchsian Cauchy problems with holomorphic data*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **34** (1998), 179-190.

23 allée des rubis  
 97400 Saint-Denis  
 La Réunion  
 France  
 e-mail: Marc-Patrice.Pongerard@univ-reunion.fr