Title	Propagation des singularites Gevrey pour des équations de type principal satisfaisant la condition (P)
Author(s)	Lascar, Bernard; Lerner, Nicolas
Citation	Osaka Journal of Mathematics. 2002, 39(3), p. 511-521
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/11913
rights	
Note	

Lascar, B. and Lerner, N.
Osaka J. Math.
39 (2002), 511–521

PROPAGATION DES SINGULARITÉS GEVREY POUR DES ÉQUATIONS DE TYPE PRINCIPAL SATISFAISANT LA CONDITION (P)

BERNARD LASCAR and NICOLAS LERNER

(Reçu le October 30, 2000)

1. Énoncé du théorème

L'objectif de ce travail est d'étendre au cas général des équations de type principal vérifiant la condition (P), le résultat de [6] sur l'équation de Cauchy-Riemann dégénérée.

On va donc énoncer un résultat de propagation des singularités Gevrey sous la condition (P). On s'intéresse spécifiquement à la propagation des singularités le long des bicaractéristiques unidimensionnelles, qui représente le cas le plus difficile et celui en particulier où les partitions de Beals-Feffermann [1] sont requises.

Il y a donc des microlocalisations suivant les trois types de propriétés satisaites par la partie imaginaire du symbole. Chacune de ces zones requiert une analyse et des conditions sur les classes de Gevrey différentes. Ceci va faire que l'on n'a pas, contrairement à [6] des conditions optimales sur les indices de Gevrey.

On présente notre résultat sous une forme où on a déjà réduit le symbole, à l'aide du théorème de préparation de Malgrange à $p = \tau + i(f(t,x,\xi) + r(t,x,\xi))$ où f est homogène de degré 1 et vérifie la condition (P) tandis que r est un terme d'ordre inférieur.

Nous préférons ici un énoncé semi-classique qui est plus commode et essentiellement équivalent.

Soit

$$P = D_t + iF\left(t, x, \frac{D_x}{\Lambda}\right) \tag{1.1}$$

un opérateur pseudo-différentiel où $F = (f(t,X))^{w_\Lambda}$, $(t,X) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ est le quantifié de Weyl avec grand paramètre Λ du symbole $f(t,X,\Lambda) = \Lambda f_0(t,X) + r(t,X,\Lambda)$, voir (2.1). $f_0(t,X)$ est donc le symbole principal de F, $r(t,X)$ est un terme d'ordre 0.

On suppose que $f(t,X)$ est de degré 1 en Λ, que son symbole principal $f_0(t,X)$ est réel et vérifie la condition (P) à savoir que pour tout $X \in \mathbb{R}^{2n}$, la fonction $t \to f_0(t,X)$ ne change pas de signe.

On suppose que $f(t,X)$ est de régularité $G^{s'}$.

Soit $u(t,x,\Lambda)$ une famille bornée de distribution de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, et $s \geq 1$, on note son front d'onde oscillant Gevrey-s par $OF_s(u)$ voir [6] (i.e. l'analogue avec grand paramètre du front d'onde Gevrey-s). On suppose que $s' \geq 2$ et $s \geq s' + 2$.

On considère une bicaractéristique uni-dimensionnelle de $P: t \in [-T, T] \rightarrow \gamma(t)$ sur laquelle f_0 s'annule à l'ordre 3 et où r s'annule à l'ordre 1 voir [4] page 150.

Théorème 1. *On suppose que les conditions précédentes sont satisfaites et que* $\gamma(\partial I) \cap OF_s(u) = \emptyset$ *et que* $\gamma(I) \cap OF_s(Pu) = \emptyset$, *alors* $\gamma(I) \cap OF_s(u) = \emptyset$.

Ce théorème est donc l'exacte extension au cas général de la condition (P) de notre résultat [6] sur l'équation de Cauchy-Riemann dégénérée. On paye le prix de cette extension par des conditions sur s et s' très désagréables. Dans l'idéal on devrait seulement avoir comme dans [6] $s = s' \geq 2$.

2. Les partitions de Beals-Fefferman

Dans ce travail on va utiliser la quantification de Weyl avec un grand paramètre $\Lambda \geq 1$, si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ on note

$$(f)^{w_\Lambda}(u)(x) = \left(\frac{\Lambda}{2\pi}^n\right) \int e^{i\Lambda(x-y)\xi} f\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y)\, dy d\xi. \tag{2.1}$$

$$\text{Si } \theta > 0, \text{ on note } T_\theta u(x) = u(\theta^{-1/2}x) \text{ et } f_\theta(X) = f(\theta^{-1/2}X) \quad \text{on a} \quad T_\theta f^{w_{\Lambda\theta}} T_\theta^{-1} = f_\theta^{w_\Lambda}. \tag{2.2}$$

Soit $\Gamma = |dX|^2$ et $X \rightarrow g_X$ un champ de métriques riemaniennes, on note $S(m,g)$ la classe des fonctions f qui satisfont aux estimations

$$\forall j \in \mathbb{N}\ \exists C_j > 0 \text{ tels que } \quad |D^j f(X)(t_1, \ldots, t_j)| \leq C_j m(X) g_X(t_1)^{1/2} \cdots g_X(t_j)^{1/2} \tag{2.3}$$

pour un poids m σ-tempéré pour la métrique g_X. Soit $s' > 1$ on note $\Sigma_A^{s'}(m,\Gamma)$ l'espace des fonctions f de $S(m,g)$ pour lesquelles

$$\exists C > 0 \text{ tels que } \forall j \in \mathbb{N} \quad |D^j f(X)(t_1, \ldots, t_j)| \leq C A^j j!^{s'} m(X) g_X(t_1)^{1/2} \cdots g_X(t_j)^{1/2}. \tag{2.4}$$

Enfin on note $\Sigma^{s'}(m,g) = \cup_{A>0} \Sigma_A^{s'}(m,g)$.

Dans la suite de ce travail on supposera que $P = D_t + iF$ satisfait la condition (P), que $f_0 \in G_A^{s'}(\mathbb{R}^{2n})$ et que $r(t,X,\Lambda) \in \Sigma_A^{s'}(1,\Gamma)$.

On note $f(t,X) = \Lambda f_0(t,X) + r(t,X)$ le symbole de F, on introduit la fonction

$$\lambda(X) = \max\left(\Lambda^{\rho_0}, \sup_t \Lambda|f_0(t,X)|, \sup_t \Lambda|\nabla f_0(t,X)|^2\right) \tag{2.5}$$

pour un nombre $0 \le \rho_0 < 1$.

Lemme 1. *Si* $g_X = (\Lambda/\lambda(X))|dX|^2$, g_X *est* σ *tempérée, et* $f_0(t,X) \in S(\Lambda^{-1}\lambda(X), g_X)$ *avec des constantes uniformes en* ρ_0.

Preuve. Voir [4] page 151. □

La métrique g_X est à variation lente et conforme à Γ donc σ tempérée. On pourra utiliser le calcul de Weyl d'Hörmander pour ces classes d'opérateurs pseudo-différentiels.

En particulier il existe une famille de points $\nu \in N$ tels que les $B(X_\nu, 1/4)$ (g_{X_ν} boules centrées en X_ν de rayon $1/4$) recouvrent $\mathbb{R}^{2n}$ et ne se rencontrent qu'en un nombre borné à la fois. Les $(\varphi_\nu^2)_{\nu\in N}$, $\varphi_\nu \in S(1, g_{X_\nu})$, $\operatorname{supp}\varphi_\nu \Subset B_\nu(1/4)$ forment une partition de l'unité.

Si en X_0 $\lambda(X_0) = \Lambda^{\rho_0}$ on dit que X_0 est un point de type I). Si $\lambda(X_0) = \Lambda\sup_t f_0(t,X_0)$ on dit que X_0 est de type II)$_+$; si $\lambda(X_0) = \sup_t -\Lambda f_0(t,X_0)$ X_0 est de type II)$_-$; enfin si $\lambda(X_0) = \sup_t \Lambda|\nabla f_0(t,X_0)|^2$, X_0 est un point de type III). Suivant [4] on a

Lemme 2. (i) *Si* X_0 *est de type* I) *dans* $B(X_0, 1/4)$

$$|\Lambda\lambda(X_0)^{-1}D^\alpha f_0(t,X)| \le CA^{|\alpha|}\alpha!^{s'}\left(\frac{\Lambda}{\lambda(X_0)}\right)^{|\alpha|/2}, \quad \lambda(X_0) = \Lambda^{\rho_0}. \tag{2.6}$$

(ii) *Si* X_0 *est de type* II)$_+$ *resp* II)$_-$ *dans* $B(X_0, 1/4)$ $f_0(t,X) \ge 0$ *resp* $f_0(t,X) \le 0$.
(iii) *Si* X_0 *est de type* III), *il existe dans* $B(X_0, 1/4)$ *des fonctions* $a(t,X) \ge 0$, $b(X)$ *telles que* $f_0(t,X) = a(t,X,\Lambda)b(X,\Lambda)$ *et*

$$\begin{aligned} |D^\alpha b(X)| &\le CA^{|\alpha|}\alpha!^{s'}\Lambda^{-1}\lambda(X_0)\left(\frac{\Lambda}{\lambda(X_0)}\right)^{|\alpha|/2}, \\ |D^\alpha a(t,X)| &\le CA^{|\alpha|}\alpha!^{s'}\left(\frac{\Lambda}{\lambda(X_0)}\right)^{|\alpha|/2}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

De plus $|b'(X_0)| = (\lambda(X_0)\Lambda^{-1})^{1/2}$.

3. Conjugaison microlocale par des opérateurs à poids

Il est nécessaire de revenir sur la Section 3 de [6], car nos fonctions de poids seront maintenant irrégulières et ne vivront que dans des boules $B_\nu(1) = B(X_\nu, 1)$.

On va voir qu'on peut adapter très simplement ici le théorème de 4 de [6].

On considère une fonction de phase $f(t, X) \in \Sigma_A^{s'}(1, g_X)$ et un symbole $a(t, X) \in \Sigma_A^{s'}(m, g_X)$ supporté par $B_\nu(1)$. On dit que $\mathcal{F}$ est un Λ-OIF Gevrey-s' de phase f et de symbole a s'il s'écrit :

(3.1)
$$\mathcal{F}u(x) = \left(\frac{\Lambda}{2\pi}\right)^n \int \exp\left\{i\Lambda\left((x-y)\xi + i\mu f\left(t, \frac{x+y}{2}, \xi\right)\right)\right\} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y)\, dy d\xi$$

avec $\mu = \mu_0 \Lambda^{-1+1/s}$ où μ_0 est un petit paramètre. Si on intègre la phase f au symbole a, $\mathcal{F}$ n'est rien d'autre qu'un Λ-OPD de symbole de Weyl

$$\tilde{a}(x, \xi) = a(x, \xi) e^{-\mu_0 \Lambda^{1/s} f(x,\xi)}. \tag{3.2}$$

On écrit un point $X \in B(X_\nu, 1)$ sous la forme $X = X_\nu + (\lambda_\nu/\Lambda)^{1/2}\tilde{X}$, $\tilde{X} \in B(0, 1)$. Changer X en $\tilde{X}$ revient à faire une transformation canonique affine et à changer la Λ-quantification en la λ-quantification, utilisant (2.2) avec $\theta^{-1} = \lambda\Lambda^{-1}$. Donc

$$T_\theta \mathcal{F} T_\theta^{-1} u(x) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int e^{i\lambda(x-y)\xi} \tilde{a}_\theta\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y)\, dy d\xi. \tag{3.3}$$

$$\tilde{a}_\theta(x, \xi) = a_\theta(x, \xi) e^{-\mu_0' \lambda^{1/s'} f_\theta(x,\xi)} \tag{3.4}$$

avec $\mu_0 \Lambda^{1/s} = \mu_0' \lambda^{1/s'}$. $\tilde{a}_\theta(x, \xi) \in \Sigma_A^{s'}(m, \Gamma)$, $\tilde{f}_\theta(x, \xi) \in \Sigma_A^{s'}(1, \Gamma)$. Donc $T_\theta \mathcal{F} T_\theta^{-1}$ est un λ-OIF Gevrey-s' de symbole $\tilde{a}_\theta(x, \xi)$ et de phase $\tilde{f}_\theta(x, \xi)$. μ_0' doit rester petit ce qui impose $\lambda \geq \Lambda^{s'/s}$ ie $\rho_0 \geq s'/s$.

On construit une paramétrixe de $\mathcal{F}$ sous la forme

(3.5)
$$\mathcal{G}u(x) = \left(\frac{\Lambda}{2\pi}\right)^n \int \exp\left\{i\Lambda\left((x-y)\xi - i\mu f\left(t, \frac{x+y}{2}, \xi\right)\right)\right\} b\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y)\, dy d\xi.$$

On utilise le Théorème 4 de [6] et on a

Théorème 2. *Soit* $f \in \Sigma^{s'}(1, g_X)$, $a(X) \in \Sigma^{s'}(1, g_X)$, $\operatorname{supp} a \subset B(X_0, 1)$, $a \equiv 1$ *dans* $B(X_0, 1/2)$, *il existe* $b \in \Sigma^{s'}(1, g_X)$ *telle que*

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}\mathcal{G} = \omega + R,\ \ \omega \in \Sigma^{s'}(1, g)\ \ \operatorname{supp}\omega \subset B(X_0, 1),\\ &\qquad\qquad R \in \mathcal{O}\big(\exp(-C\lambda^{1/s'})\big)\ \textit{dans}\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}). \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{G}\mathcal{F} = \omega_1 + R_1,\ \ \omega \in \Sigma^{s'}(1, g)\ \ \operatorname{supp}\omega_1 \subset B(X_0, 1),\\ &\qquad\qquad R_1 \in \mathcal{O}\big(\exp(-C\lambda^{1/s'})\big)\ \textit{dans}\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Si $p \in \Sigma^{s'}(\lambda, g_X)$ *et* $\mu' = \mu_0' \lambda^{-1+1/s'}$

$$\mathcal{G}P\mathcal{F} = \big(p + i\mu\{p, f\} + \Sigma^{s'}(\lambda\mu'^2 + 1, g)\big)^{w_\Lambda} + r + \rho, \tag{3.8}$$

$r \in \Sigma^{s'}(1,\Gamma)$ *est supportée hors de* $\{\omega \equiv 1\}$, $\rho \in \mathcal{O}(\exp(-C\lambda^{1/s'}))$ *dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$).

Preuve. On utilise simplement les changements d'échelle décrits plus haut et le théorème 4 de [6]. □

4. L'étude pour des points de type I)

On suppose que X_ν est un point de N de type I) et que $B_\nu = B(X_\nu, 1/4)$ et $\varphi_\nu \in \Sigma^{s'}(1,g)$ sont définis dans la Section 2. On désigne par $\psi_\nu \in \Sigma^{s'}(1,g)$ des fonctions supportées dans $B_\nu(1/4)$ et $\equiv 1$ sur le support de φ_ν; on pose $F_\nu = f_\nu^{w_\Lambda} = (f\psi_\nu)^{w_\Lambda}$.

Soit $\Omega_T = \{(t,x), |t| < T, x \in \omega\}$. Comme $f_\nu \in S(\lambda, g)$ et vérifie la condition (P), on a une inégalité

$$|u| \le 16T|(D_t + iF_\nu)u| \text{ pour } u \in C_0^\infty(\Omega_T). \tag{4.1}$$

En effet, $F_\nu = (\tilde{f}_\nu)^w$ avec $\tilde{f}_\nu(X) = f_\nu(\Lambda^{-1/2}X) \in S(\lambda, \lambda^{-1}|dX|^2)$, on utilise alors la Proposition 26.10.3, page 152 de [4].

On prend dans cette zone la fonction de poids $s(X) = \varepsilon - \delta|X|^2$, de sorte que $s(0) > 0$ et que $s < 0$ près de $\partial\omega$. On note $\mathcal{F}_\nu$, $\mathcal{G}_\nu$, et $P_{1,\nu} = (D_t + if_{1,\nu})^{w_\Lambda} = \mathcal{G}_\nu(D_t + iF_\nu)\mathcal{F}_\nu$, où $\mathcal{F}_\nu$ et $\mathcal{G}_\nu$ sont donnés par le Théorème 2.

Utilisant (3.8) on voit que $f_{1,\nu} = f_\nu + i\mu\{f_\nu, s\} + \Sigma^{s'}(1,g)$ si $s' \ge 2$. Comme $s \in S(1,\Gamma)$, $\mu\{f_\nu, s\} \in S(\lambda\mu(\Lambda/\lambda)^{1/2}, g)$. Or $\lambda\mu(\Lambda/\lambda)^{1/2} = \lambda^{1/2}\Lambda^{1/s-1/2}$, ici $\lambda = \Lambda^{\rho_0}$, soit $\rho_0 - 1 + 2/s \le 0$ ce qui avec $\rho_0 \ge s'/s$ entraîne $s \ge s' + 2$. Donc avec cette condition $f_{1,\nu} = f_\nu + \Sigma^{s'}(1,g)$, donc si T est petit

$$|u| \le 32T|(D_t + iF_{1,\nu})u| \text{ pour } u \in C_0^\infty(\Omega_T). \tag{4.2}$$

On applique l'inégalité (4.2) à $v = \varphi_\nu\mathcal{G}_\nu\chi_0 w$ avec où $\chi_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ (les fonctions sont quantifiées avec la Λ-Weyl quantification sauf indication contraire).

$(D_t + iF_{1,\nu})w = \mathcal{G}_\nu(D_t + iF_\nu + r_\nu)\mathcal{F}_\nu w$ où $r_\nu\mathcal{F}_\nu w \in \mathcal{O}(\exp(-C\lambda^{1/s'}))$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

If faut donc étudier

$$\begin{aligned} P_{1,\nu}\varphi_\nu\mathcal{G}_\nu\chi_0 = \varphi_\nu P_{1,\nu}\mathcal{G}_\nu\chi_0 + [P_{1,\nu}, \varphi_\nu]\mathcal{G}_\nu\chi_0 + \varphi_\nu\mathcal{G}_\nu\chi_0 P +& \\ \varphi_\nu\mathcal{G}_\nu[P,\chi_0] + \varphi_\nu\mathcal{G}_\nu(P - P_\nu)\chi_0&. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Le troisième terme du second membre de (4.3) est un $\mathcal{O}(\exp(-c\Lambda^{-1/s}))$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, l^2)$ car $OF_s(Pu) \cap \Omega_T = \emptyset$. C'est aussi le cas du dernier terme car ψ_ν vaut 1 sur le support de φ_ν.

$$|[P_{1,\nu}, \varphi_\nu]\mathcal{G}_\nu\chi_0 u|^2 \le C|\mathcal{G}_\nu\chi_0 u|^2 \tag{4.4}$$

car $\Lambda^{-1}\{P_\nu, \varphi_\nu\} \in \Sigma^{s'}(1,g)$; ce qui est sans danger car il y a devant T qui est petit.

C'est le quatrième terme qu'il faut étudier,

$$\varphi_\nu \mathcal{G}_\nu [P, \chi_0] u \tag{4.5}$$

est un $\mathcal{O}(\exp(-c\mu_0\Lambda^{1/s}))$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ car sur le support de $d\chi_0$ soit on est près de $\partial\omega$ et alors $s(X) < 0$, soit on est prés de $\pm T$ et alors on est encore à décroissance $\exp(-c\Lambda^{-1/s})$ car on a choisit ω assez petit pour que $\{(\pm T, x); x \in \omega\} \cap OF_s(u) = \emptyset$.

Par ailleurs on peut supposer que $\varphi_\nu \mathcal{G}_\nu \equiv \varphi_\nu \mathcal{G}_0$ car tous les $\mathcal{G}_\nu$ sont associés dans cette zone à la même fonction de poids.

Comme

$$\frac{1}{C|u|^2} \le \sum_{\nu \in N} |\varphi_\nu u|^2 \le C|u|^2 \tag{4.6}$$

On a

$$\sum_{\nu \in N_I} |\varphi_\nu \mathcal{G}_0 \chi_0 u|^2 \le CT \sum_{\nu \in N_I} |\mathcal{G}_0 \chi_0 u|^2 + C \exp(-c\mu_0 \Lambda^{1/s}). \tag{4.7}$$

Et donc

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}_0 \chi_0 u|^2 &\le \sum_{\nu \notin N_I} |\varphi_\nu \mathcal{G}_0 \chi_0 u|^2 + C \exp(-c\mu_0 \Lambda^{1/s}) \\ &\le C \|\mathcal{G}_0\|^2 \sum_{\nu \notin N_I} |\zeta_\nu u|^2 + C \exp(-c\mu_0 \Lambda^{1/s}). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Avec $\zeta_\nu \in C_0^\infty(B_\nu(1/4))$. Estimer

$$\sum_{\nu \notin N_I} |\zeta_\nu u|^2 \tag{4.9}$$

sera l'objet des sections suivantes.

5. L'étude des points de type II)

Soit X_ν un point de type II)$_+$, φ_ν, ψ_ν, f_ν sont définis comme dans la section précédente; cette fois $f_\nu \ge 0$.

L'inégalité d'énergie peut dans ce cas être améliorée. Et on a

$$|u|^2 + (f_\nu u, u) \le C_T |P_\nu u|^2 \text{ pour } u \in C_0^\infty\big(]-T, T[\times \mathbb{R}^n\big). \tag{5.1}$$

On peut en effet supposer que $F_\nu = f_\nu \ge 0$ en changeant les termes d'ordre inférieur.

L'estimation pondérée est l'estimation L^2 pour $P_{1,\nu} = \mathcal{G}_\nu P_\nu \mathcal{F}_\nu$, où on a pris comme fonction de poids des fonctions $s_\nu(X) \in G_0^{s'}(B_\nu(1/2))$.

On construit des fonctions ϕ_ν et $\tilde{\phi}_\nu$ dans $G_0^{s'}(B_\nu(1/3))$ telles que $\operatorname{supp}\tilde{\phi}_\nu \subset \{\phi_\nu \equiv 1\}$, $\tilde{\phi}_\nu \equiv 1$ sur $B_\nu(1/4))$ et $s_\nu > \varepsilon/3$ sur $\operatorname{supp}\phi_\nu$, $s_\nu < 2\varepsilon/3$ sur $\operatorname{supp}\tilde{\phi}_\nu$, et $s_\nu > 1+\varepsilon/3$ sur $\operatorname{supp} d\phi_\nu$.

Pour obtenir à partir de (5.1) une estimation L^2 pour $P_{1,\nu}$ in faut absorber $\mu^2|\{f_\nu, s_\nu\}u|^2$ dans le membre de gauche de (5.1). $\mu\{f_\nu, s_\nu\} \in S(\mu\Lambda, g)$.

Si $f \in S(m, g_\theta) \geq 0$ avec $g_\theta = |dX|^2/\theta$, alors $|f'_X| \leq Cm^{1/2}\theta^{-1/2}f^{1/2}$.

On applique cette remarque à f_ν avec $\theta = \lambda/\Lambda$ et $m = \lambda$; donc $|(f_\nu)'_X| \leq C\Lambda^{1/2}f_\nu^{1/2}$.

On en déduit que

$$\mu|\{f_\nu, s_\nu\}| \leq C\mu\Lambda\lambda^{-1/2}f_\nu^{1/2}. \tag{5.2}$$

Soit $\alpha = \mu\{f_\nu, s_\nu\} \in S(\mu\Lambda, g)$; $\alpha^*\alpha = \alpha^2 + S((\mu\Lambda)^2\lambda^{-2}, g)$. Donc

$$|\alpha u|^2 \leq C(\mu\Lambda)^2\lambda^{-1}\big((F_\nu u, u) + |u|^2\big). \tag{5.3}$$

On a donc besoin de la condition $\Lambda^{2/s}/\lambda \leq 1$, soit $\rho_0 \geq 2/s$ qui est assurée puisque $\rho_0 \geq s'/s$ et que $s' \geq 2$.

On a donc prouvé que

$$|u| \leq C_T|P_{1,\nu}u| \text{ si } \operatorname{supp} u \subset]-T, T[\times\mathbb{R}^n. \tag{5.4}$$

Ceci se traduit par

$$|\phi_\nu\mathcal{G}_\nu u| \leq C|P_{1,\nu}\phi_\nu\mathcal{G}_\nu u| \tag{5.5}$$

$P_{1,\nu}\phi_\nu\mathcal{G}_\nu = \phi_\nu\mathcal{G}_\nu P_\nu + [P_{1,\nu}, \phi_\nu]\mathcal{G}_\nu$

Comme $s_\nu > 1+\varepsilon/3$ sur le support de $d\phi_\nu$,

$$\sum_{\nu\in N_{II}} |[P_{1,\nu}, \phi_\nu]\mathcal{G}_\nu u|^2 \leq C\exp\left(-\left(1+\frac{\varepsilon}{3}\right)\mu_0\Lambda^{1/s}\right)|u|^2. \tag{5.6}$$

On déduit de (5.4) et (5.6) que

$$\sum_{\nu\in N_{II}} |\phi_\nu\mathcal{G}_\nu u|^2 \leq C\exp\left(-\left(1+\frac{\varepsilon}{3}\right)\mu_0\Lambda^{1/s}\right). \tag{5.7}$$

Puis $\|\tilde{\phi}_\nu\mathcal{F}_\nu\| \leq C\exp(2\varepsilon/3\mu_0\Lambda^{1/s})$. Ce qui donne en utilisant (5.7)

$$\sum_{\nu\in N_{II}} |\zeta_\nu u|^2 \leq C\exp\left(-\left(1-\frac{\varepsilon}{3}\right)\mu_0\Lambda^{1/s}\right). \tag{5.8}$$

6. Le cas des points de type III)

On considère un point X_ν de type III) et une boule $B_\nu(1)$ dans laquelle q se factorise en $q(t,X) = h_\nu(t,X)g_\nu(X)$ $h_\nu(t,X) \geq 0$ $h_\nu \in S(1,g)$, $g_\nu \in S(\lambda, g)$ et

$|g'_{\nu X}(X_\nu)| = (\lambda\Lambda)^{1/2}$.

On fait une transformation canonique non homogène et on se ramène au cas où $f_\nu = (\lambda\Lambda)^{1/2} a_\nu(t, X)\xi_1$ avec $a_\nu(t, X) \geq 0$, $a_\nu \in S(1, g)$.

Soit $\theta = (\lambda\Lambda)^{-1/2}$, on note $\lambda_\theta = (|\xi_1|^2 + \theta^2)^{1/2}$. On introduit comme dans [7], une métrique de deuxième microlocalisation $g_\theta = g + |d\xi_1|^2 \lambda_\theta^{-2}$. La métrique g_θ est σ tempérée si $h_\theta = \lambda_\theta^{-1}(\lambda\Lambda)^{-1/2} \leq 1$ ie $\theta \geq (\Lambda\lambda)^{-1/2}$ qui est assuré par le choix de θ.

Soit $Y(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $Y(\xi) = 1$ pour $\xi > 1$ $\operatorname{supp} Y \subset [1/2, \infty[$.

$Y(\tau\xi) + Y(-\tau\xi) - 1 = \mathcal{O}(\tau^N \lambda_\tau(\xi)^{-N})$.

Lemme 3. *Si $u \in L^2(\mathbb{R})$ a son support dans $\{|x_1| \leq c_1\}$ alors*

$$\tau^N |\lambda_\tau(D_x)^{-N} u| \leq C(c_1\tau)^{1/2}|u| \tag{6.1}$$

On va dans l'estimation L^2 procéder comme dans [7] et utiliser les multiplicateurs $Q_+ = e^{-kt} Y(\theta^{-1} D_{x_1}/\Lambda)$ et $Q_- = e^{kt} Y(-\theta^{-1} D_{x_1}/\Lambda)$. On appliquera donc le Lemme 3 avec $\tau = \Lambda\theta$ et $c_1 = c_1^0(\lambda/\Lambda)^{1/2}$ soit $\tau c_1 = c_1^0$. Où c_1^0 est le rayon de la B_ν boule dans laquelle on travaille.

On a

$$\operatorname{Im}(PQu, Qu) = ((\operatorname{Im} P)u, Qu) = \operatorname{Im}([P, Q]u, Qu) + \operatorname{Im}(QPu, Qu) \tag{6.2}$$

le crochet $[P, Q]$ fait apparaître des dérivées de Y qui sont estimées à l'aide du Lemme 3. Plus précisément $f_\nu = (\lambda\Lambda)^{1/2} a_\nu(t, X)\xi_1$, or $\xi_1 \in S(\lambda_\theta, g_\theta)$, soit $f_\nu \in S(\theta^{-1}\lambda_\theta, g_\theta)$. Donc

$$f_\nu \sharp q = e^{kt} a_\nu Y(\theta^{-1}\xi_1)\theta^{-1}\xi_1 + \sum_{N \geq 1} S\left(\Lambda^{-N}\lambda_\theta^{-N+1}\theta^{-1}\left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right)^{N/2}, g_\theta\right) \tag{6.3}$$

Le second terme du membre de droite de (6.3) a, appliqué à des fonctions supportées par $\{|x_1| < c_1^0\theta^{-1}\}$ une norme dans L^2 qui n'excède pas $Cc_1^0(\lambda/\Lambda)^{1/2}$. Pour tout $u \in C_0^\infty\big(]-T, T[\times B_\nu(c_1^0)\big)$

$$\big((\operatorname{Im} P)Q_+u, Q_+u\big) = (F_\nu Q_+u, Q_+u) \geq (f_\nu q_+^2 u, u) - C_T c_1^0 |u|^2. \tag{6.4}$$

Puis

$$\operatorname{Im}\big([P, Q_+]u, Q_+u\big) = k|q_+u|^2 + \operatorname{Re}\big([F_\nu, Q_+]u, Q_+u\big) \tag{6.5}$$

comme $q_+ \in S(1, g_\theta)$ et $f_\nu \in S(\theta^{-1}\lambda_\theta, g_\theta)$, $[F_\nu, Q_+] \in S(h_\theta\lambda_\theta^{-N+1}\theta^{-1}, g_\theta)$ et donc pour $u \in C_0^\infty(]-T, T[\times B_\nu(c_1^0))$

$$|\operatorname{Re}\big([F_\nu, Q_+]u, Q_+u\big)| \leq C_T|\lambda_\theta^{-N}u|^2 \leq C_T c_1^0 |u|^2. \tag{6.6}$$

Comme $|q_+u|^2 + |q_-u|^2 \geq |u|^2 - Cc_1^0|u|^2$, on a pour tout $u \in C_0^\infty(]-T, T[\times B_\nu(c_1^0))$

$$|u|^2 + \big(f_\nu(q_+^2 - q_-^2)u, u\big) \leq C|Pu||Qu| + C_T c_1^0|u|^2, \tag{6.7}$$

$f_\nu(t, X)(q_+^2 - q_-^2)(\xi) \geq c\theta^{-1}a_\nu(t, X)\lambda_\theta(\xi)(1 - C_N\lambda_\theta^{-N}(\xi))$, on applique l'inégalité de Gärding à $f_\nu(t, X)(q_+^2 - q_-^2)(\xi) - c\theta^{-1}a_\nu(t, X)\lambda_\theta(\xi) \in S(m_\theta, g_\theta)$ avec $m_\theta = \theta^{-1}\lambda_\theta$, $m_\theta h_\theta^2 = \lambda_\theta^{-2}(\lambda\Lambda)^{-1}\theta^{-1}\lambda_\theta \leq 1$; ce qui fait donc

$$\big(f_\nu(q_+^2 - q_-^2)u, u\big) \geq c\theta^{-1} \mid \big((a_\nu\lambda_\theta)^{w_\Lambda}u, u\big) - C|u|^2. \tag{6.8}$$

On a donc

$$\text{Pour } u \in C_0^\infty\big(]-T, T[\times B_\nu(c_1^0)\big)\ \ |u|^2 + \theta^{-1}\big((a_\nu\lambda_\theta)^{w_\Lambda}u, u\big) \leq C_T|Pu|^2. \tag{6.9}$$

Soit $s_\nu \in G_0^{s'}(B_\nu(1))$, on introduit comme dans les sections précédentes les opérateurs $\mathcal{F}_\nu$ et $\mathcal{G}_\nu$, puis $P_{1,\nu} = \mathcal{G}_\nu P\mathcal{F}_\nu = D_t + \mu\partial s_\nu/\partial t + iF_{1,\nu}$. $f_{1,\nu} = f_\nu + i\mu\{f_\nu, s_\nu\} + \Sigma^{s'}(1, g)$ si $s' \geq 2$.

Cette fois s_ν vérifie l'équation de Cauchy-Riemann dégénérée :

$$\frac{\partial s_\nu}{\partial t} + ia_\nu\theta^{-1}\frac{\partial s_\nu}{\partial x_1} = 0. \tag{6.10}$$

Ceci fait que la différence entre $P_{1,\nu}$ et P_ν se réduit à $r_\nu = \mu\theta^{-1}H_{a_\nu}(s_\nu)\xi_1$; $r_\nu = \xi_1\mu\theta^{-1}\nabla a_\nu\tilde{\nabla}s_\nu$. Où $\tilde{\nabla}s_\nu$ est une dérivée de s_ν. $a_\nu \in S(1, g)$, $\xi_1 \in S(\lambda_\theta, g_\theta)$, $\nabla a_\nu \in S((\Lambda/\lambda)^{1/2}, g)$, $\tilde{\nabla}s_\nu \in S((\Lambda/\lambda)^{1/2}, g)$. Donc $r_\nu^2 = c_\nu\xi_1(\nabla a_\nu)^2$ avec $c_\nu \in S(\mu^2\Lambda^2\lambda_\theta, g_\theta)$, tandis que $r_\nu \in S(\mu\theta^{-1}(\Lambda/\lambda)\lambda_\theta, g_\theta)$. Or $|\nabla a_\nu(t, X)| \leq C(\Lambda/\lambda)^{1/2}a_\nu^{1/2}$ car $a_\nu \geq 0$. On a $r_\nu^2 \leq C_1\theta^{-1}a_\nu\lambda_\theta$, avec $C_1 = \mu^2\theta^{-1}(\Lambda/\lambda)^{3/2} = \mu^2\Lambda^2/\lambda \leq 1$ si $\rho_0 \geq 2/s$ ce qui est vérifié car $\rho_0 \geq s'/s$ avec $s' \geq 2$. On applique l'inégalité de Gärding à $r_\nu^2 - C_1a_\nu\theta^{-1}\lambda_\theta$, comme $h_\theta\theta^{-1}\lambda_\theta \leq 1$, on trouve que

$$|R_\nu u|^2 \leq o(1)\big(|u|^2 + \theta^{-1}\big((a_\nu\lambda_\theta)^{w_\Lambda}u, u\big)\big). \tag{6.11}$$

Ceci signifie que l'estimation d'énergie (6.9) sera aussi satisfaite par $P_{1,\nu}$.

Pour résoudre l'équation de Cauchy-Riemann dégénérée dans les espaces de Gevrey on utilise le Théorème 1 de [6]. Il se trouve que les solutions peuvent n'exister que dans des domaines plus petits que la boule $B_\nu(1)$, on raisonne alors comme dans le Lemme 26.10.5, page 157 de [4] que l'on cite.

Lemme 4. *On peut trouver un entier J et pour tout $\nu \in N_{III}$, des fonctions $\phi_{\nu,j}$, $\tilde{\phi}_{\nu,j}$ dans $G_0^{s'}(B_\nu(1/3))$, $s_{\nu,j} \in G_0^{s'}(B_\nu(1/2))$ telle que pour $|t| < T$ avec T petit*
(i) $\{\phi_{\nu,j}\}$, $\{\tilde{\phi}_{\nu,j}\}$ *et les* $\{s_{\nu,j}\}$ *sont dans un borné de* $S(1, g)$.
(ii) $\phi_{\nu,j} = 1$ *sur* $\operatorname{supp}\tilde{\phi}_{\nu,j}$, $\sum_j \tilde{\phi}_{\nu,j} = 1$ *dans* $B_\nu(1/4)$,
(iii) $\partial s_\nu/\partial t + ia_\nu\theta^{-1}\partial s_\nu/\partial x_1 = 0$ *sur* $\operatorname{supp}\phi_{\nu,j}$,

(iv) $\mathrm{Re}\, s_{\nu,j} > \varepsilon/3$ *sur* $\mathrm{supp}\, \phi_{\nu,j}$, $\mathrm{Re}\, s_{\nu,j} < 2\varepsilon/3$ *sur* $\mathrm{supp}\, \tilde{\phi}_{\nu,j}$, $\mathrm{Re}\, s_{\nu,j} > 1 + \varepsilon/3$ *sur* $\mathrm{supp}\, d\phi_{\nu,j}$.

On construit ensuite des opérateurs $\mathcal{F}_{\nu,j}$, $\mathcal{G}_{\nu,j}$ et $P_{\nu,j} = \mathcal{G}_{\nu,j} P \mathcal{F}_{\nu,j}$.

$$|\phi_{\nu,j}\mathcal{G}_{\nu,j}u|^2 \leq C\big(|[P_{\nu,j}, \phi_{\nu,j}]\mathcal{G}_{\nu,j}u|^2 + |\phi_{\nu,j}\mathcal{G}_{\nu,j}Pju|^2\big), \tag{6.12}$$

comme $\mathrm{Re}\, s_{\nu,j} > 1 + \varepsilon/3$ sur $\mathrm{supp}\, d\phi_{\nu,j}$ $\| |[P_{\nu,j}, \phi_{\nu,j}]\mathcal{G}_{\nu,j}\| \leq C \exp(-(1+\varepsilon/3)\Lambda\mu)$.

Comme $\tilde{\phi}_{\nu,j}\mathcal{F}_{\nu,j}\phi_{\nu,j}\mathcal{G}_{\nu,j} \equiv \tilde{\phi}_{\nu,j}$ car $\mathcal{F}_{\nu,j}\mathcal{G}_{\nu,j} = \omega_{\nu,j}$ et $\mathrm{supp}\, \phi_{\nu,j} \subset \{\omega_{\nu,j} \equiv 1\}$. Il résulte aussi de (iv) que $\|\tilde{\phi}_{\nu,j}\mathcal{F}_{\nu,j}\| \leq C \exp(2\varepsilon/3\Lambda\mu)$. On en déduit que :

$$|\tilde{\phi}_{\nu,j}u|^2 \leq \exp\left(\frac{2\varepsilon}{3}\Lambda\mu\right)\left(\exp\left(-\left(1+\frac{\varepsilon}{3}\right)\Lambda\mu\right)|u|^2 + |\phi_{\nu,j}\mathcal{G}_{\nu,j}Pu|^2\right), \tag{6.13}$$

sommant en j on trouve que si $\zeta_\nu \in G_0^{s'}(B_\nu(1/4))$

$$\sum_{\nu \in N_{III}} |\zeta_\nu u|^2 \leq \exp\left(\frac{2\varepsilon}{3}\Lambda\mu\right)\left(\exp\left(-\left(1+\frac{\varepsilon}{3}\right)\Lambda\mu\right) + \exp\left(-c\Lambda^{1/s}\right)\right) \tag{6.14}$$

On choisit la fonction s de la Section 4 (c'est à dire aux points de type I)) assez petite par rapport à ε de façon à controller $\|\mathcal{G}_0\|$. Les inégalités (4.8) et (5.8) et (6.14) permettent de conclure que $|\chi_0 u|$ est à décroissance exponentielle.

On a utilisé les conditions suivantes sur ρ_0, s' et s: $\rho_0 \geq s'/s$, $\rho_0 \leq 1 - 2/s$; ie $s \geq s' + 2$ et $s' \geq 2$. Ce qui achève la preuve.

REMERCIEMENT. The authors would like to warmly thank the referee for his sharp reading of our manuscript and for his help correcting several errors.

Références

[1] R. Beals and C. Fefferman: *On local solvability of linear partial differential equations*, Ann. of Math. **97** (1973), 482–498.
[2] L. Boutet de Monvel et P. Krée: *Pseudo-differential operators and Gevrey classes*, Annales de l'Institut Fourier, **17** (1967), 295–323.
[3] N. Hanges: *Propagation of analyticity along real bicharacteristics*, Duke Math. Journal, **48** (1981), 269–277.
[4] L. Hörmander: The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Volume IV, Springer-Verlag, **275**, 1985.
[5] B. Lascar: *Propagation des singularités Gevrey pour des opérateurs hyperboliques*, American Journal of Mathematics, **110** (1988), 413–449.
[6] B. Lascar et N. Lerner: *Propagation des singularités Gevrey pour l'équation de Cauchy-Riemann dégénérée*, Israel Journal of Maths, **124** (2001), 299–312.
[7] N. Lerner: *Second microlocalizaation methods for degenerate Cauchy-Riemann equations*, Preprint Irmar Université de Rennes 1, 2000.

[8] J.M. Trépreau: *Sur le résolubilité des opérateurs de type principal*, Journées EDP de Saint Jean de Monts 1982, Conférence 22, Société mathématique de France, Paris 1982.
[9] J. Sjöstrand: Singularités analytiques microlocales, Astèrisque **95**, 1983.

Bernard Lascar
Institut de mathématiques de Jussieu
UMR 7586 du CNRS
Université Pierre et Marie Curie
Case 82, 4 Place Jussieu 75252 Paris Cedex 05
e-mail: berl@ccr.jussieu.fr

Nicolas Lerner
Université de Rennes 1
Campus de Beaulieu
35042, Rennes Cedex
e-mail: lerner@univ-rennes1.fr