



Title	分散系固気二相流におけるクラスター形成の数値シミュレーション
Author(s)	米村, 茂
Citation	大阪大学, 1996, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.11501/3110072
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

分散系固気二相流における
クラスター形成の数値シミュレーション

平成 7 年12月

米 村 茂

分散系固気二相流における
クラスター形成の数値シミュレーション

平成 7 年12月

米 村 茂

目 次

記号表

第1章 緒 論	1
1.1 はじめに	1
1.2 従来の研究	2
1.3 本研究の目的	4
第2章 粒子運動の計算方法	7
2.1 はじめに	7
2.2 固気二相流中の粒子運動に対する DSMC 法の適用	7
2.3 希薄気体力学におけるシミュレーション法	8
2.4 DSMC 法の計算手法	10
2.5 DSMC 法における分子間衝突の判定法	12
2.5.1 Bird 法	13
2.5.2 Modified Nanbu 法	15
2.6 Bird 法と Modified Nanbu 法の比較	17
2.7 粒子運動の取り扱い	24
2.8 粒子の運動方程式	25
2.9 粒子の衝突	27
2.10 固相計算のアルゴリズム	29
2.11 むすび	32
第3章 流体運動の計算方法	33
3.1 はじめに	33
3.2 局所平均量による連続の式と運動量の式	33
3.3 SIMPLE 法による流体の運動の計算	34

3.3.1	スタaggerド格子	34
3.3.2	離散化方程式の導出	36
3.3.3	SIMPLE 法による圧力補正および速度補正	41
3.3.4	線形代数方程式の解法	45
3.3.5	SIMPLE 法のアルゴリズム	46
第 4 章	無重力真空空間内における粒子分散系のクラスター形成	48
4.1	はじめに	48
4.2	計算条件	48
4.3	計算結果	49
4.4	むすび	51
第 5 章	固気二相流のクラスター形成と流動の不安定化	55
5.1	はじめに	55
5.2	流入および流出境界の取り扱い	56
5.2.1	流体計算の境界条件	56
5.3	計算条件	57
5.4	計算結果	60
5.4.1	流れの不安定化	60
5.4.2	クラスターの構造	66
5.4.3	クラスターの形成に対する非弾性衝突と摩擦の効果	67
5.5	むすび	73
第 6 章	クラスターの構造および特性への粒子物性の影響	74
6.1	はじめに	74
6.2	周期境界条件の取り扱い	74
6.2.1	周期境界条件下での流体計算手法	75
6.2.2	流体計算の境界条件	77

6.3 計算条件	78
6.4 クラスタ構造と流れ場	79
6.5 粒径および粒子濃度のクラスタ構造への影響	84
6.6 クラスタのサイズとクラスタ速度の関係	88
6.7 むすび	91
 第7章 総括	 93
 付録 A 衝突時に粒子にかかる衝撃力	 95
 付録 B 局所平均量を用いた流体運動の基礎式の導出	 98
B.1 はじめに	98
B.2 重み関数 $g(r)$	98
B.3 局所平均空隙率と局所平均粒子数密度	99
B.4 ポイント変数の局所平均量	99
B.5 局所平均量の微分	101
B.6 連続の式	104
B.7 流体の運動方程式	104
 参考文献	 112
 関連発表論文	 113
 謝 辞	 114

〈記号表〉

A	: 粒子の投影面積	[m ²]
a	: 粒子の半径	[m]
a_p, a_e, a_w, a_n, a_s	: 離散化された運動方程式の係数	
C	: 分子速度	[m/s]
c_p, c_e, c_w, c_n, c_s	: 圧力補正式の係数	
C_D	: 抵抗係数	
C_{LR}	: 回転による揚力係数	
C_o	: 濃度変動の強さ	
C_r	: 分子の相対速度の絶対値	[m/s]
C_T	: 粘性抵抗トルクの係数	
d_p	: 粒径	[m]
e	: 反発係数	
f	: 分子の速度分布関数	
F	: 分子に働く外力	[kg·m/s ²]
F_e, F_w, F_n, F_s	: コントロールボリュームでの流入出量	[m ³ /s]
F_f	: 粒子に働く流体力	[kg·m/s ²]
f_{LG}	: 速度勾配による揚力	[kg·m/s ²]
F_p	: 混相単位体積あたりに含まれる流体に働く粒子との相互作用力	[kg/(m ² ·s ²)]
g	: 粒子に対する衝突相手の相対速度	[m/s]
g_G	: 重力加速度	[m/s ²]
g_F	: 粒子 i に対する衝突相手 j の相対滑り速度	[m/s]
g_{ij}	: 粒子 i と粒子 j の間の相対速度の大きさ	[m/s]
I	: 粒子の慣性モーメント	[kg·m ²]
J	: 粒子間衝突時の粒子に働く衝撃力	[kg·m/s]
K_n	: ヌッセン数	
l	: 流れの代表長さ	[m]
l_R	: 粒子が流体によって緩和される距離	[m]
L, W	: 計算領域の寸法	[m]
m	: 粒子の質量	[kg]
n	: 粒子および分子の数密度	[1/m ³]
$\mathbf{n}$	: 法線方向単位ベクトル	
N	: セル内のシミュレーション粒子数	
N_{all}	: 計算領域内のシミュレーション粒子の総数	
N_{IN}	: 計算領域に流入するシミュレーション粒子の数	
P_{ij}	: 粒子 i と粒子 j の間の衝突確率	
p	: 圧力	[Pa]
Q_p	: 粒子の平均質量流束	[kg/m ² ·s]
$\mathbf{r}$	: 分子の位置ベクトル	[m]
$\mathbf{r}_{ij}$	: 粒子 i に対する粒子 j の方向を表す単位ベクトル	
R_{ND}	: 一様乱数	

Re_p	: 粒子のレイノルズ数	
Re_R	: 粒子の相対回転レイノルズ数	[rad]
t	: 時間	[s]
t_s	: 飽和時間	[s]
u	: 気流速度	[m/s]
u_R	: 粒子に対する相対気流速度	[m/s]
U	: 気流の空塔速度	[m/s]
v	: 粒子速度	[m/s]
v_t	: 粒子の終速度	[m/s]
V_p	: 粒子の体積	[m ³]
V_{cell}	: 粒子計算セルの体積 ($\Delta y_p \times \Delta z_p$)	[m ³]
y, z	: 座標	
α	: シミュレーション粒子1個が代表する実在粒子の数	
α_p	: 粒子体積率	
α_R	: 緩和係数	
β	: 平均圧力勾配	[Pa/m]
Δt	: 時間ステップ	[s]
Δt_c	: 衝突時間間隔	[s]
Δy_f	: 流体計算セルの y 方向のサイズ	[m]
Δy_p	: 粒子計算セルの y 方向のサイズ	[m]
Δz_f	: 流体計算セルの z 方向のサイズ	[m]
Δz_p	: 粒子計算セルの z 方向のサイズ	[m]
ε	: 空隙率	
θ	: 粒子間衝突モデルおよび粗面壁モデルにおける天頂角	
θ_{max}	: 粗面壁モデルにおける天頂角 θ の最大値	[deg]
λ	: 平均自由行程	[m]
μ	: 流体の粘性係数	[Pa · s]
μ_F	: 摩擦係数	
ν	: 流体の動粘性係数	[m ² /s]
ν_c	: 分子1個の平均自由時間当たりの衝突回数 (本来なら1)	
ν_{ij}	: シミュレーション分子 i が分子 j と衝突する頻度	[1/s]
ρ	: 密度	[kg/m ³]
σ_T	: 衝突断面積 [m ²]	
ω	: 粒子の角速度	[rad/s]
Ω	: 立体角	
ω_R	: 流体に対する粒子の相対角速度	[rad/s]
添字		
f	: 流体	
p	: 粒子	
i	: 粒子 i	
j	: 粒子 j	
w	: 壁面	
y, z	: ベクトルの成分	

第1章 緒論

1.1 はじめに

鉛直管内を上向きに流れる固気二相流では、気流速度によって流動様式が変化する。気流速度が十分小さな場合には粒子は粒子層中で静止した状態を保ち、充填層を形成する。この状態では粒子は重力により粒子層中に強く拘束されているが、徐々に気流速度を上げていくとともに鉛直上向きに作用する流体力によりこの拘束が緩和され、流体力と重力が釣り合った時点で粒子は接触状態を保ったままあたかも流体のようにわずかな外力で容易に運動できるようになる。この状態を流動化状態といい、流動化された粉粒体を用いる装置を流動層と呼ぶ。流動層は流動床燃焼炉や石炭気化などの各種化学反応装置などで利用されている。これに対し、非常に気流速度が大きな場合には粒子は流路内にほぼ一様に分散し、安定した流れとなる。粉粒体を管路で空気輸送する装置などの内部ではこのような状態が観察される⁽¹⁾。それらの中間の速度領域では、ほとんどの粒子は分散状態で運動するが、局所的に粒子が集中するクラスターが形成され、時間的にも空間的にも粒子濃度や気流速度などが大きく変動する不安定な流動となる。このような流動状態を高速流動状態といい、気流速度の比較的小さい場合の空気輸送管路内や循環流動層内などで観察される。この不安定流動は現象そのものが興味深いだけでなく、固気両相間の物質、運動量、エネルギーなどの輸送現象に大きな影響を及ぼすため、工業的にも重要な問題となる。よって、流れの不安定化の条件や流動現象やクラスターの詳細な構造を明らかにすることが必要となってくる。

固気二相流ではその流動現象に対して様々な因子が存在し、それらが複雑に関係しあうため、実験によってそれぞれの因子の影響を独立に調査し明確にすることは難しい。また粒子が存在するため内部構造の観察は容易では

なく、測定もかなり制限される。このような理由から、現在までのところ不安定流動やクラスターに対して得られている知見は少ない。しかし最近になって、計測技術の進歩から循環流動層内のライザー部におけるクラスターの構造や挙動をとらえる試みがなされてきている。HorioとKuroki⁽²⁾は、レーザーシートを用いた可視化によってクラスターが鉛直断面において、その湾曲部を下にした馬蹄形の形状をもつことや、その大きさおよびクラスター速度などの測定を行っている。また、武内ら⁽³⁾は工業用内視鏡をライザー内に挿入してスリット光を用いた撮影を行い、クラスターが紐状の構造をもつことと、HorioとKuroki⁽²⁾が観察したクラスターを上下逆にしたような上に凸な形状のクラスターを観測している。しかしクラスターは時間的にも空間的にも不安定な挙動を示すため、実験的にクラスター周辺における粒子や流体の運動に関する詳しい情報を得ることは依然として困難である。そのような状況下において、数値シミュレーションによりこのような流れを再現することができればクラスター形成のメカニズムやクラスターの構造に対する様々な因子の影響を明らかにすることができる。

1.2 従来の研究

これまでに、不安定な高濃度分散系固気二相流に対して流動の数値シミュレーションを試みた研究は著者が知る限りほとんどなく、TsuoとGidaspow⁽⁴⁾による循環流動層内の流れの計算のみである。彼らは固相を有効粘性係数が一定の粘性流体とする簡単な構成方程式モデルを用いて、分散系固気二相流内でクラスターの形成が得られることを示した。しかし、このような固相を連続体とするいわゆる二流体モデルにおいて固相の構成方程式を適切にモデル化することは容易ではない。さらに、粒子濃度が小さな分散流において流動現象の空間的変化のスケールに比べて粒子の平均自由行程が十分に小さいと見なせない場合には連続体的に取り扱うことは妥当ではない。

固相の計算方法としては固相をオイラー的に取り扱う上記の方法以外に個々の粒子の運動をラグランジュ的に追跡する方法がある．この方法を用いると壁面での反発や摩擦，粒子間の相互作用などの粒子レベルでの特性によって粒子運動をモデル化することが容易である．しかしラグランジュ的手法では記憶容量と計算時間は粒子の数に比例するので，従来は膨大な数の粒子に対してそれを実行することは困難であった．しかし近年の計算機の目覚ましい進歩により，ラグランジュ的に粒子運動を取り扱う方法も実現象の予測に使われるようになってきた．

ラグランジュ法は粒子と流体の相互作用の取り扱い方法で分類すると，One Way Method と Two Way Method の2つの方法に分けられる．One Way Method は流体が粒子の存在による影響を受けないと仮定して単相流として解かれた流れ場の粒子運動を計算する方法であり，粒子濃度が希薄な場合にこの方法が適用される．Two Way Method は粒子が流体によって与えられた運動量を流体計算の過程にフィードバックし，流体と粒子の運動を同時に解く方法である．この方法は粒子濃度が高くなって流体が粒子の影響を受けて固気両相の相互作用を考慮する必要がある場合に適用される．

田中ら⁽⁵⁾は希薄な鉛直管内の固気二相流に対してOne Way Methodを採用して粒子間衝突の影響を調べた．この研究においては全ての粒子の軌跡を求めそれによって厳密に衝突判定を行ういわゆる決定論的方法を採用した．しかしこの方法を膨大な数の粒子が存在するような流れ場に適用することは，膨大な記憶容量や計算時間が必要となることから考えて容易ではない．

そこで霧林ら⁽⁶⁾は粒子間衝突の取扱方法として希薄気体力学の分野でBird⁽⁷⁾によって確立されたDirect Simulation Monte Carlo Method(DSMC法)という確率論的方法を採用し，田中ら⁽⁵⁾が決定論的方法を用いて計算した場合と同じ現象について数値シミュレーションを行い，両者がほぼ一致した結果を示すことを確認した．DSMC法では実際に存在する粒子よりも少ないシミュレーション粒子で全ての粒子を代表し，理論的に与えられる衝突確率に基づ

いたモンテカルロ法によって衝突の有無と衝突ペアが決定される．管内流以外でも DSMC 法は固気二相流に対して適用されている．例えば，Kitron ら⁽⁸⁾は DSMC 法を用いて 2 つの粒子噴流が衝突する反応装置内での粒子濃度分布を求めた．

しかし本研究で取り扱うようなクラスターを伴う分散系固気二相流の不安定流動に対して，ラグランジュ的な手法を用いて数値シミュレーションを行った例はない．

1.3 本研究の目的および概要

本研究は，数値計算によってクラスターを含む不安定な固気二相流を模擬することによって，クラスター形成および流動の不安定化に影響を与える因子の特定や現象の詳細な構造を調べることを目的にしている．前節で述べた理由により，固体粒子の取扱方法としては個々の粒子を追跡するラグランジュ法を用いた．また不安定流動はクラスターが形成されることに起因すると考えられるため，固気両相間の運動量交換は流動現象に対して重要な役割を果たしていると予想される．そこで両相の相互作用を考慮しながら，流体運動と粒子運動を同時に解く Two Way Method によって計算を行った．さらにクラスター部分では粒子濃度が高く，粒子間衝突が頻繁に生じていると予想されるので，クラスター構造に対して粒子間衝突特性が与える影響は大きいと考えられる．そこで粒子間衝突を計算にどのように導入するかが問題となるが，ここで取り扱う流れにおいて粒子間衝突を決定論的に求めるには，膨大な記憶容量と計算量を必要となるので，霧林ら⁽⁶⁾と同様に確率論的に粒子間衝突を取り扱う DSMC 法を採用した．

以下本論文の要旨と各章の概要を示す．

まず第 2 章では粒子運動の計算方法について述べる．本研究では粒子運動を取り扱うのに，希薄気体力学で用いられる DSMC 法を採用する．ただし流れ場中の粒子運動は希薄気体の分子運動と類似しているが，非弾性衝突

や流体抵抗によってエネルギーが減衰することを考慮する必要があるので、DSMC法を粒子に適用する際の計算手法の検討を行った。

第3章では流体運動の計算方法を述べる。本研究で取り扱う流れ場は流体と粒子が入り混じった混相状態にあるため、単相流で用いられる基礎方程式をそのまま用いようとすると粒子レベルのミクロなスケールを取り扱うことになるが、このようなことは現実的には不可能である。そこで粒子の存在を考慮に入れて、速度や圧力などの物理量を局所的に平均化した局所平均量を用いてAndersonとJackson⁽⁹⁾により導かれた連続の式と運動量の式を流体運動の基礎式とした。ここでは粒子との相互作用を考慮しながら、SIMPLE法⁽¹⁰⁾を用いて解く手法を示した。

流体の作用のない場合には粒子のクラスターは粒子間の非弾性衝突の影響によって発生することが知られている⁽¹¹⁾。粒子間の非弾性衝突は流体中におけるクラスター形成にも大きく関与していると考えられる。ゆえに非弾性衝突のみによるクラスターの構造や特徴、形成のメカニズムを調べることは、流れ場中のクラスターを考えるうえで、有用な情報を提供するものといえる。そこで第4章では流れ場中で形成されるクラスターを取り扱う前に、無重力真空空間内で粒子間の非弾性衝突のみによって形成されるクラスターの数値シミュレーションを行い、その特性を調べる。

第5章では、粒子が均一に分散した流れからクラスターを伴う不安定な流れへ変化する機構を調べるため、2次元鉛直流路内を上向きに流れる固気二相流について数値シミュレーションを行なった。流入部で一様な流入条件が与えられ、空間的に発達する流れが扱われた。その結果、粒子流量が大きく気流速度が小さな場合にクラスターが形成され、流動は不安定になった。HorioとKuroki⁽²⁾によって観察されたV字型のクラスターの形成も確認された。また、流路幅などの条件による流動パターンの変化とその特徴について述べ、さらにクラスターの成長が粒子間衝突の特性に依存する結果が得られたことを示す。

第5章では計算領域の下部境界から流入し上部境界から流出する流れを取り扱っているが、この場合には限られた長さの流路では十分発達した流れを得るには不十分であった。第6章では十分発達した流れを得るために周期境界に囲まれた矩形領域内での流れに対して数値シミュレーションを行った。またこのことによって空間分解能を向上させクラスターの詳細な構造を調べる事が可能となった。まずクラスターの挙動や空間構造の観察を行い、クラスターの構造に対する粒子の物性の影響を調べた。またクラスターのサイズやクラスター速度を求め、HorioとKuroki⁽²⁾の実験結果との比較を行った。

第7章は本論文の総括である。

第2章 粒子運動の計算方法

2.1 はじめに

本研究の対象とするクラスターが形成されるような流れでは、粒子濃度は局所的に大きなものとなるため、粒子間衝突が頻繁に発生していると考えられる。さらに粒子間衝突はクラスター形成の機構に大きく関与していると考えられ、粒子間衝突の取り扱いが本研究において重要なポイントとなる。

本計算では個々の粒子の運動を追跡するラグランジュ法により粒子運動を取り扱う。このような計算に粒子間衝突を導入することは必ずしも容易なことではない。膨大な粒子が含まれる流れにおいて、全ての粒子の衝突を決定論的に求めるには、計算メモリや計算量が膨大となり、現実的には実行不可能である。そこで本研究では、希薄気体力学のシミュレーション法として知られる確率論的方法の一種である DSMC 法を採用した。DSMC 法では、実在する粒子群をそれより少ない数のサンプル粒子で代表させ、このサンプル粒子の運動状態から与えられる衝突確率に基づいて衝突判定を行う。この特徴によってメモリや計算コストを大幅に削減することが可能となる。

本研究では流れ場中の粒子運動に DSMC 法を適用するが、希薄気体における分子運動と流れ場中における粒子運動はまったく同様に取り扱えるものではない。そこで本章では、ただ単に計算方法を述べるにとどまらず、簡単な数値シミュレーションを行い、DSMC 法を粒子運動に適用する際の計算手法の検討を行った。

2.2 固気二相流の粒子運動に対する DSMC 法の適用

慣性の大きな粒子の気中分散流では衝突の際、互いの粒子が及ぼし合う流体力学的相互作用は衝突そのものによる相互作用に比べて無視できる。また、粒子が衝突にあずかる時間は衝突の時間間隔よりも極めて短く、2体衝

突に比べて多体衝突の発生頻度が無視できるとすれば、粒子の運動は気流中での運動方程式と衝撃方程式で記述することができる。このような特徴は、粒子が流体力を受け、衝突が一般的に非弾性的であることと摩擦を伴うため本質的に粒子の変動運動の運動エネルギーが消散する傾向にあるという点を除いて希薄気体における分子のものと同じである。これらの相違は、希薄気体流れの数値解法である DSMC 法を粒子運動に適用することを制限するものではない。ただ非弾性衝突や衝突時の摩擦を考慮するため、衝突後の粒子速度を求める方法は希薄気体の場合とは異なる 2.9 節で述べるモデルにより与えられた。

2.3 希薄気体力学におけるシミュレーション法

本研究では粒子運動の数値シミュレーションに希薄気体の流れの計算のために開発された DSMC 法を用いている。これは慣性の大きな粒子の運動が気体分子の運動に類似しているためである。本節では DSMC 法が希薄気体力学の分野において適用される背景について記述し、詳しい計算手順は次節で後述する。

気体流れの希薄度は次式で定義されるヌッセン数 K_n によって評価できる。

$$K_n = \frac{\lambda}{l} \quad (2.1)$$

ここで λ は分子の平均自由行程であり、 l は流れの代表長さである。

$K_n < 10^{-2}$ の範囲では分子は密に存在し、流体として連続体的な取り扱いができ、ナビエ・ストークス方程式を支配方程式とする。 $10^{-2} < K_n < 10^{-1}$ の範囲では分子間衝突が少なくなるため運動量やエネルギーの伝達が十分に行われなため、壁面で温度や速度が不連続となるいわゆる滑りが生じる。この範囲ではナビエ・ストークス方程式に壁面での滑りの条件を与えることによって解くことができる。 $K_n > 10^{-1}$ の範囲では連続体的な取り扱いができず、以下に示す分子の運動を直接記述したボルツマン方程式が支配方程式となる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(nf) + \mathbf{C} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(nf) + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}}(nf) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{4\pi} n^2(f^* f_1^* - f f_1) C_r \sigma_T d\Omega dC_1 \quad (2.2)$$

ここで t , $\mathbf{C}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{F}$, n , C_r , σ_T , Ω , f はそれぞれ時間, 分子速度, 位置, 外力, 分子数密度, 分子の相対速度の絶対値, 衝突断面積, 立体角, 分子の速度分布関数であり, 上付き添え字の*は衝突後の物理量を意味し, 下付き添え字の1は衝突相手の物理量を意味している. 分子の速度分布関数 $f(\mathbf{r}, \mathbf{C}, t)$ は時刻 t , 位置 $\mathbf{r}$ において分子速度が $\mathbf{C}$ となる確率を意味している. いま位相空間において微小な空間領域と速度領域で仕切られた微小体積について考える. 左辺第1項は微小体積における速度分布関数 f の時間的な増加量を表している. 左辺第2項は物理空間における対流により微小体積から流出する分子による速度分布関数 f の減少量を表している. 左辺第3項は外力の作用による加速により微小体積から流出する分子による速度分布関数 f の減少量を表している. また右辺は位置は微小体積の占める物理空間内で別の速度領域に属する分子が分子間衝突によって不連続に微小空間内に飛び込んでくる分子による速度分布関数 f の増加量を表している. 特に $K_n > 10$ の範囲では分子間衝突が壁面衝突に比べて無視できるため非線形多重積分である右辺の衝突項を消したボルツマン方程式が支配方程式となる. しかし $10^{-1} < K_n < 10$ の範囲では分子間衝突の影響は無視できず, (2.2) 式がそのまま支配方程式となる. 非線形多重積分である右辺の衝突積分は通常の数値積分法で解くことは困難である.

ボルツマン方程式を解くのに有効な方法としてはモンテカルロシミュレーションがあげられる. モンテカルロ法とは”無作為抽出によって決定論的および確率論的な問題を解く方法”のことである. 希薄気体に対するモンテカルロシミュレーションはテスト粒子法 (Test-Particle Method) ⁽¹²⁾ と直接法 (Direct Simulation Monte Carlo Method) ⁽⁷⁾ に大別される⁽¹³⁾. テスト粒子法では1個のテスト粒子を流入させ, その運動を追跡し, 流出すると新たなテスト粒子を流入させる. このことを繰り返しテスト粒子の運動の統計から分子の流れ場

を求める．分子間衝突を考慮する場合には，まず適当に流れ場の速度分布関数を与え，その特性をもつフィールド粒子を計算領域に分布させる．フィールド粒子との衝突を考慮に入れてテスト粒子を追跡し，テスト粒子の運動の蓄積から新たにフィールド粒子の速度分布関数を求める．このことを繰り返し，フィールド粒子とテスト粒子の運動特性に差が無くなった時に流れ場が得られる．また直接法(以下 DSMC 法)は多数のシミュレーション分子の運動を同時に追跡することにより，時刻 t における速度分布関数 f から時刻 $t + \Delta t$ における速度分布関数を求める方法である．この方法は $10^{-1} < K_n < 10$ の範囲の流れいわゆる中間流を解くのに適している．次に DSMC 法の具体的な計算方法について示す．

2.4 DSMC 法の計算手法

DSMC 法では物理空間がセルに分割される．セルの寸法は，そのセルの中で流れの特性の空間的な変化が小さくなるように，すなわち分布関数の変化が小さくなるように決定される．時間は時間ステップ Δt の大きさに進行し，このとき Δt は分子の平均自由時間に比べて小さく設定される．時間ステップ Δt に対する分子の移動と分子間衝突は，以下の手続きを繰り返すことによって分離される．

- (1) 全てのシミュレーション分子を時間ステップ Δt の間衝突を起こさずに移動させる．このときシミュレーション分子が壁面や対称軸または対称面，もしくは流れの境界を横切るならば，それに対して適切な動作をさせる．流入がある場合には新しいシミュレーション分子を流入境界に発生させる．
- (2) 全てのシミュレーション分子について時間ステップ Δt に対する衝突の有無を判定する．衝突すると判定されたシミュレーション分子については衝突前の速度を衝突後の速度に置き換える．

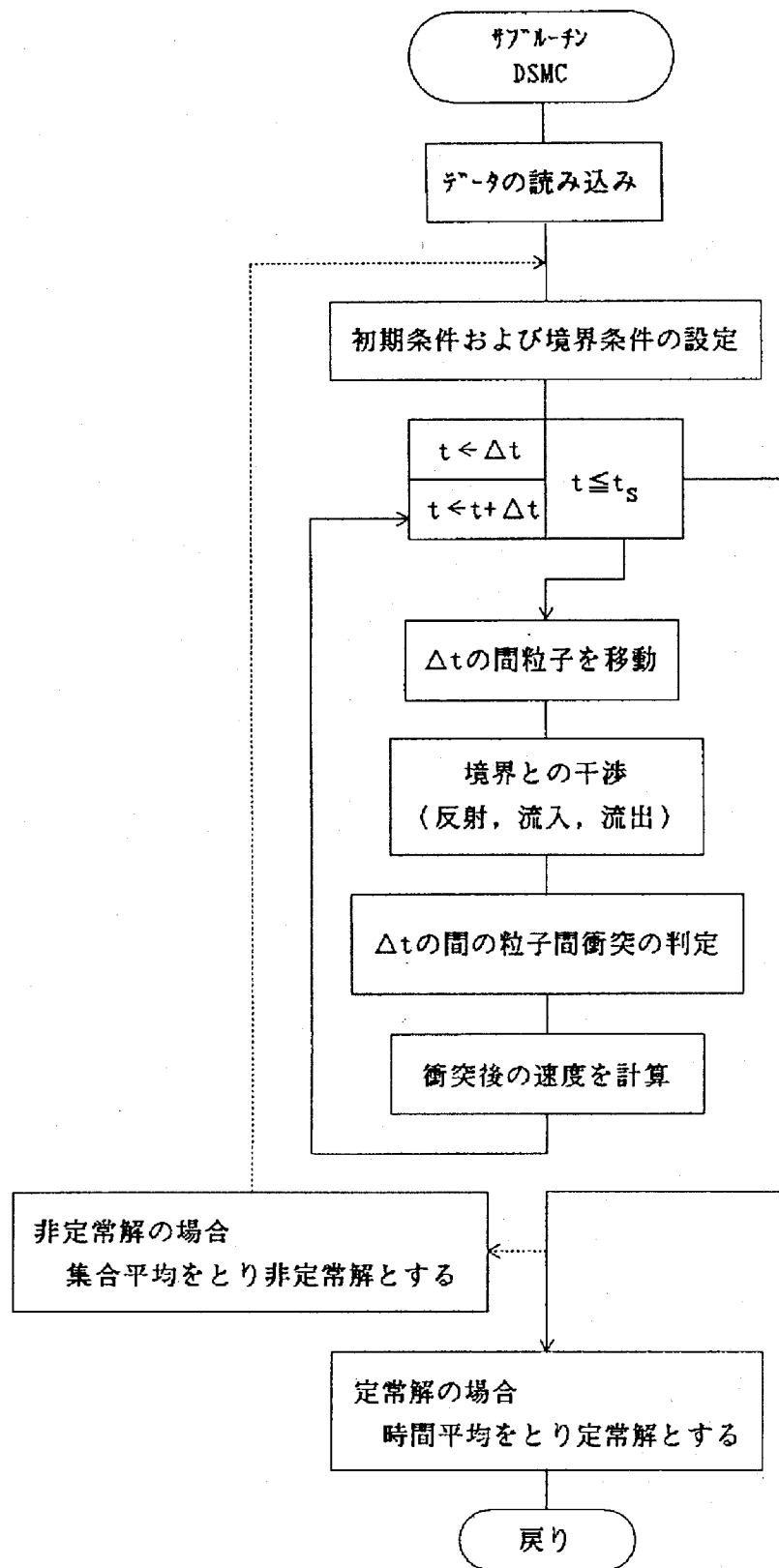


Figure 2.1: DSMC 法の一般的な計算手順のフローチャート

またセル内での流れの特性の空間的な変化は小さいので、各瞬間にセル内に存在するシミュレーション分子はセル内のあらゆる位置に実在する分子から無作為に抽出されたものと見なされる。つまりこれにより実在する分子の数密度を n 、シミュレーション分子の数を N としたとき、シミュレーション分子が n/N の数密度で一様に分散していると想定する。またこのことによって、衝突相手の選定をする際にはセル内でのシミュレーション分子の相対的な位置関係は無視される。分子間衝突の判定法にはいくつかの方法が提案されているが、それは次節で後述することにする。

Figure 2.1に DSMC 法の一般的な計算手順を示す。初期状態を設定した後、分子移動、境界との干渉、分子間衝突を Δt ごとに繰り返し時間進行させる。DSMC 法では流れは常に非定常流として扱われ、定常流は時間が十分経過した後の非定常流の極限として与えられる。希薄気体流を取り扱う場合セル当りに非常に大きな数の分子が実在するのに対し、シミュレーションでは 20~100 のシミュレーション分子で代表することになり、速度分布や圧力分布などのマクロな統計量を求める場合、このままではバラツキが大きなものとなる。そこでそのバラツキを小さくするために、非定常流に対しては、初期条件を設定し直して同じ試行を N_s 回行いその集合平均をとる。また定常流に対しては初期条件から流れが非定常に変化しそのゆらぎが小さくなった時点 (saturation time t_s) から適当な時間間隔でサンプリングしそれらの時間平均をとることによって得られる。このときの時間間隔は前後のサンプリング値に相関が無いように決定しなければならない。

2.5 DSMC 法における分子間衝突の判定法

分子間衝突の取り扱い法にはいくつかの方法が提案されている。それらの手法のうち代表的なものを2つ次に紹介する。1つは DSMC 法の創案者である Bird によって考案された Bird 法⁽⁷⁾であり、もう1つは Babovsky⁽¹⁴⁾によって修正された Modified Nanbu 法⁽¹⁵⁾である。Bird 法は、衝突が起こる確率に比例し

て衝突分子ペア (i,j) を選定し、その衝突ペアから求められる時間増分を累積して時間ステップを越えるまで衝突を繰り返す方法である。Modified Nanbu 法では各シミュレーション分子に対して与えられる衝突確率に基づいてその時間ステップの間に分子が衝突するかどうかを決定し、この手続きを全シミュレーション分子に対して行って衝突を決定する方法である。Bird 法では、計算時間はセル内でのシミュレーション分子の衝突数に比例することに対し Modified Nanbu 法では計算時間はセル内のシミュレーション分子の数に比例するという特徴をもつ。

2.5.1 Bird 法⁽⁷⁾

前節でも述べたようにシミュレーション分子 j が n/N の数密度で一様に分散していると考えると、シミュレーション分子 i が分子 j と衝突する頻度 ν_{ij} は次式で与えられる。

$$\nu_{ij} = n_j g_{ij} \sigma_T = \frac{n}{N} g_{ij} \sigma_T \quad (2.3)$$

ここで、 n_j は j の分子の数密度、 g_{ij} は i と j の分子の相対速度の絶対値、 σ_T は衝突断面積 (直径 d_p の剛体球分子の場合 $\sigma_T = \pi d_p^2$) である。このように ν_{ij} は $\sigma_T g_{ij}$ の大きさに比例する。よって次に示す手順により $\sigma_T g_{ij}$ の大きなペアほど抽出され易いように衝突ペアを抽出する。つまり $\sigma_T g_{ij}$ の予想される最大値を $(\sigma_T g_{ij})_{max}$ として、 $\sigma_T g_{ij} / (\sigma_T g_{ij})_{max}$ が 1 に近いものほど抽出されやすいようにすればよい。一様乱数 R_{ND1}, R_{ND2} ($0 \leq R_{ND1} < 1, 0 \leq R_{ND2} < 1$) を呼び出して次式によって分子ペア (i,j) を求める。

$$i = \text{int}[R_{ND1}N] + 1 \quad (2.4)$$

$$j = \text{int}[R_{ND2}N] + 1 \quad (2.5)$$

これが新たに発生させた一様乱数 R_{ND3} ($0 \leq R_{ND3} < 1$) に対して、 $R_{ND3} < \sigma_T g_{ij} / (\sigma_T g_{ij})_{max}$ を満たすか調べ、満たしていないときは満たされるまで同じ

手続きにより分子ペアの無作為抽出を続ける．満たした場合には (i, j) を衝突ペアとして採用する．このような手法を棄却法という．粒径の均一な剛体球として分子を扱う場合には，全ての粒子の σ_T は同一であるので， ν_{ij} は g_{ij} の大きさに比例する．その場合には $R_{ND3} < g_{ij}/g_{max}$ を満たすまで無作為抽出を続ける．Bird 法では衝突ペアとして選ばれたシミュレーション分子 i と j の両方について速度を衝突後のものに変換する．

衝突ペアから計算される衝突時間間隔は次のようになる．

$$\Delta t_c = \frac{2}{Nng_{ij}\sigma_T} \quad (2.6)$$

式 (2.3) で与えられる衝突頻度 ν_{ij} および式 (2.6) で与えられる Δt_c は前述のようにシミュレーション分子が n/N の数密度で一様に分散していると想定して求められる．

衝突後の速度を次の式によって与える．

$$C_i^* = (C_i + C_j + g_{ij}R)/2 \quad (2.7)$$

$$C_j^* = (C_i + C_j - g_{ij}R)/2 \quad (2.8)$$

ここで C_i , C_j はそれぞれ分子 i , j の衝突前の速度， C_i^* , C_j^* はそれぞれ分子 i , j の衝突後の速度であり， R は3次元的にランダムな方向を持つ単位ベクトルである．

Figure 2.2 に示すように，衝突時間間隔 Δt_c の累積 (タイムカウンター) が時間ステップ Δt の累積 (つまり現時刻 t) よりも大きくなるまで衝突ペアの選定を繰り返す．その繰り返しの回数が Δt 時間内に起こる衝突数を表している．つまり Figure 2.2 では衝突は4回発生したことになる．次ステップでは，その前のステップのタイムカウンターに新たに衝突時間間隔 Δt_c を累積していく．各セルごとにこの Δt_c の累積 (タイムカウンター) を記憶する必要がある．

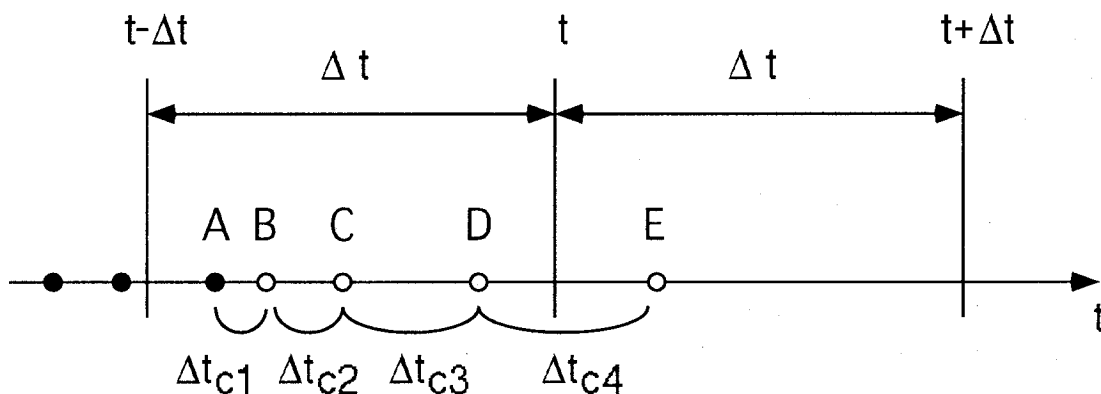


Figure 2.2: 衝突間隔

2.5.2 Modified Nanbu 法⁽¹⁵⁾

Modified Nanbu 法では，各分子に対して与えられる衝突確率から，その時間ステップの間に分子が衝突するかどうかを決定し，この手続きを全ての分子に対して行う．つまり Modified Nanbu 法では計算時間はセル内のシミュレーション分子の数に比例する．

あるセル内の分子 i の時間ステップ Δt 当りの衝突確率 P_i は次式で与えられる．

$$P_i = \sum_{j=1}^N P_{ij} \quad (2.9)$$

ここで， P_{ij} は分子 i と分子 j の時間ステップ Δt 当りの衝突確率である．ただし P_{ij} は前述のようにシミュレーション分子が n/N の数密度で一様に分散している空間を想定して求められ，次式で与えられる．

$$P_{ij} = \frac{n}{N} \sigma_T g_{ij} \Delta t \quad (2.10)$$

1 個のシミュレーション分子が代表する実在分子の数を α とし，この α を用いると式 (2.10) 中に現れる n/N は次式で与えられる．

$$\frac{n}{N} = \frac{\alpha}{\Delta V_{\text{cell}}} \quad (2.11)$$

ここで V_{cell} は計算セルの体積を表している． α の与え方は境界条件の与え方によって異なるので，計算結果を紹介する各章で示すことにする．

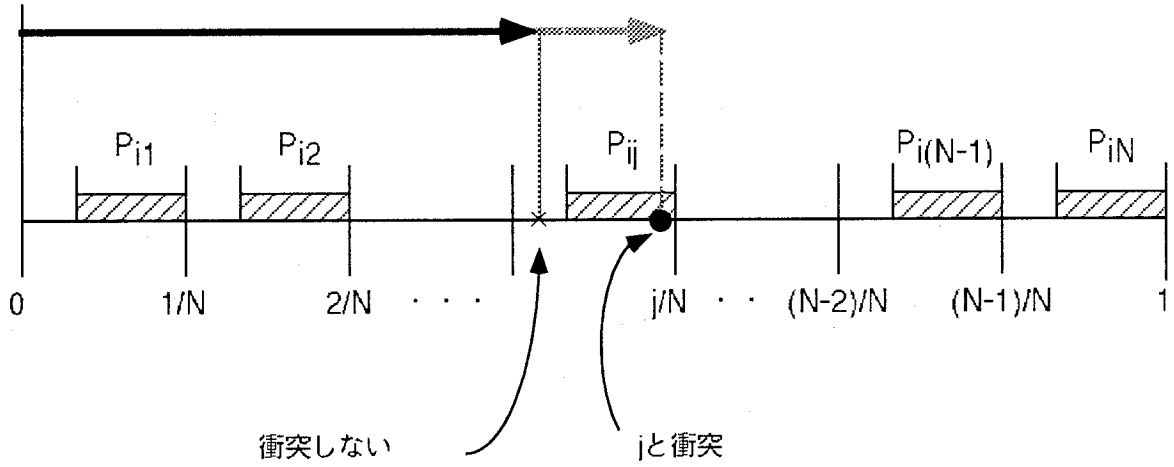


Figure 2.3: Modified Nanbu 法

Modified Nanbu 法では式 (2.9) および (2.10) の衝突確率に従って、衝突相手となる分子の選定と分子間衝突の有無の判定が以下のようにして行なわれる．まず一様乱数 $R_{ND}(0 \leq R_{ND} < 1)$ を呼び出し、次式により衝突判定を行う分子 j を選定する．

$$j = \text{int}[R_{ND}N] + 1 \quad (2.12)$$

ただし $\text{int}[R_{ND}N]$ は $R_{ND}N$ の整数部を表すものとする．次に衝突確率 P_{ij} を式 (2.10) により求める． R_{ND} が次式の関係を満たすとき分子 i は分子 j と衝突すると判定される．

$$R_{ND} > j/N - P_{ij} \quad (2.13)$$

以上のことを図式的に説明したものが Figure 2.3 である．太線の矢印が一様乱数 R_{ND} を表し、矢印の先端が P_{ij} を表す斜線部分に入れば、分子 i は分子 j と衝突する．逆に入らなければ、分子 i はその時間ステップ Δt の間衝突しない．

衝突すると判断された場合には分子 i のみを衝突後の速度に置き換える．衝突後の速度は式 (2.7) により与えられる．

以上の作業を全ての分子に対して1回ずつ行う．

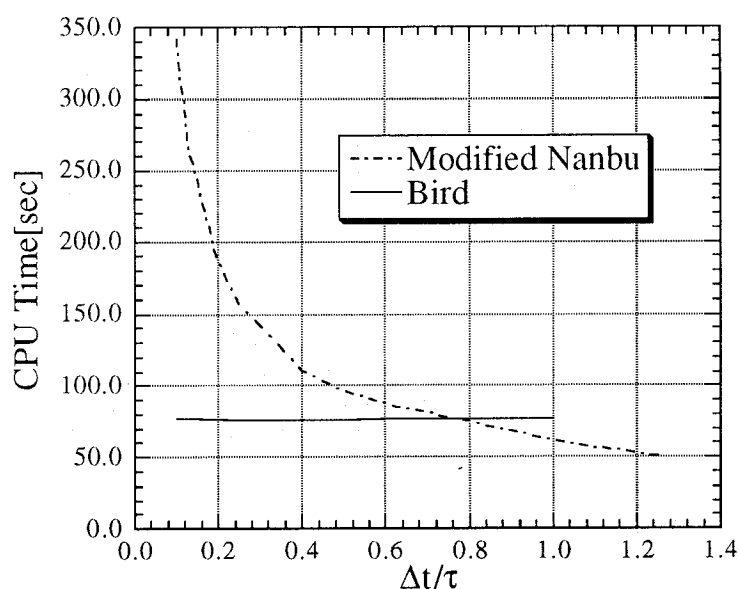


Figure 2.4: 時間ステップと計算時間の関係

2.6 Bird 法と Modified Nanbu 法の比較

Bird 法と Modified Nanbu 法を比較するために簡単な数値シミュレーションを行った。周期境界で囲まれた計算領域内に分子を散りばめ、セルは1つとした。従って分子の移動を計算する必要はなく、衝突判定と衝突後の速度の計算のみを行った。

まず両手法の処理速度を比較することにする。前節でも述べたように、1時間ステップ分の衝突判定の処理に要する時間は、Modified Nanbu 法が N に比例することに対し、Bird 法は衝突すると判定された分子ペアの数に比例する。DSMC 法では時間ステップ Δt を平均自由時間よりも小さく設定することから、Bird 法の方が処理速度が大きいと推測される。Figure 2.4 に時間ステップ Δt と計算時間の関係を示した。ここで τ は平均自由時間を表している。ここで使用したコンピュータは HP9000/735 であり、処理速度は SPECfp92 で 168 である。この場合にはシミュレーション分子を均一な剛体球として扱い、100000 個のシミュレーション分子を用いて平均自由時間 τ の 50 倍分の計算を行った。分子間衝突は完全弾性とした。時間ステップが 0.8τ 以下の場合には Bird 法の方

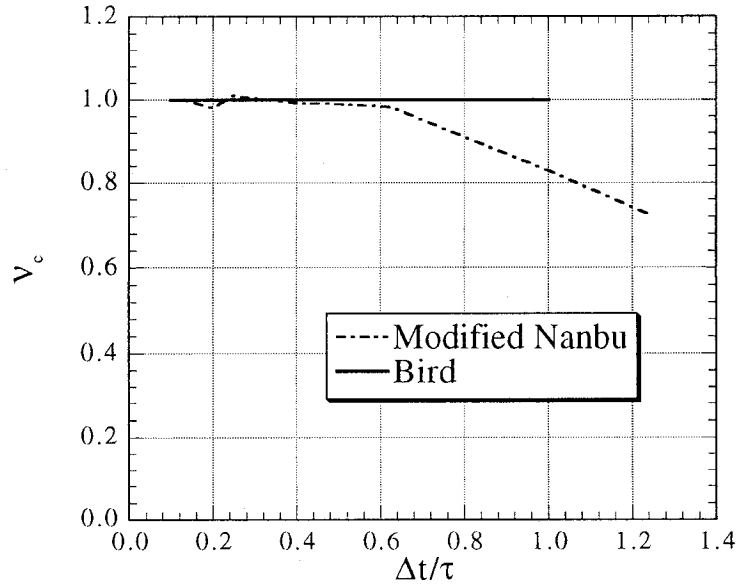


Figure 2.5: 時間刻みの違いによる衝突頻度への影響

が速く, 0.8τ 以上の場合には逆に Modified Nanbu 法の方が速くなっている. Bird 法では1組の衝突ペアを選定する際に $R_{ND3} < g_{ij}/(g_{ij})_{max}$ を満たすまでペアの抽出を繰り返すので, 衝突する粒子の割合が大きくなった場合には Modified Nanbu 法の方が処理速度は大きくなる. しかし Modified Nanbu 法では時間ステップをあまり大きくすると衝突ペア i, j の衝突確率 P_{ij} が $1/N$ を越えてしまい, 衝突を正確に計算できなくなる. Figure 2.5 は, Modified Nanbu 法では時間ステップの設定が分子間衝突頻度の結果に与える影響を示している. Figure 2.5 の縦軸の変数 ν_c は分子1個の平均自由時間あたりの衝突回数を表しており, 本来なら ν_c は1である. しかし Modified Nanbu 法の結果では時間ステップ Δt が 0.6τ を超えたあたりから次第に1より小さくなっている. また, 時間ステップが大きい場合には, 時間ステップ内に複数回衝突する分子の存在が無視できなくなるが, Modified Nanbu 法においては分子に複数の衝突を許していないことも, このことの原因のひとつである.

また Bird 法では衝突を起こすと判定したペアの両方の分子の速度を衝突後の速度に置き換えるのに対して, Modified Nanbu 法では i 分子のみ衝突後の速

度に置き換える．このことにより Bird 法では確実に運動量と運動エネルギーが保存されるが，Modified Nanbu 法では1回の粒子間衝突の前後で運動量と運動エネルギーは保存されない．ただし Modified Nanbu 法ではシミュレーション分子はボルツマン方程式から誘導された確率過程に従うためシミュレーション分子の数が大きくなると統計的に運動量と運動エネルギーが保たれることが期待される．では，Modified Nanbu 法においてセル内のシミュレーション分子がいくつあれば信頼できる結果が得られるかを次に調べることにする．

Figure 2.6に分子運動エネルギー E_k の時間的变化を示す．ここでも分子間衝突は完全弾性衝突として取り扱われている．ここで用いる運動エネルギーは，分子の持つ熱速度(平均速度からの変動速度)から求められている．初期状態における運動エネルギーを E_{k0} とした．完全弾性衝突であるから， E_k/E_{k0} の値は本来は1である． N が1000 以上の場合には，安定した結果が得られているが， $N=100$ の場合にはかなり変動していることがわかる．では実際に $N=1000$ という条件が可能であろうか．空間的な変化が小さいような単純な流れを取り扱うならば，セル数もそれほど必要とならないのでそれも可能であろう．しかし，多くのセルを必要とするような複雑な流れにおいて，その条件を満たすことは計算機の処理能力や記憶容量を考えるうえで，現実には不可能である．またそれ以上に「実際の分子よりも少ない数のシミュレーション分子で計算を行うことができる」という確率論的手法を採用する本来の目的に反する．

ここまで述べてきた内容では Bird 法の方が Modified Nanbu 法よりも優れていると思われるが，本研究で取り扱うように固気二相流中の粒子を分子と見立てて DSMC 法を適用する場合には，実は Bird 法よりも Modified Nanbu 法の方が適している．これから，そのことについて述べることにする．

まずは Modified Nanbu 法では N が小さな場合に運動エネルギーが保たれないが，その影響は粒子を取り扱う場合にはかなり緩和されることを述べる．これまではエネルギー消散のない系に対して議論してきたが，分子に外力が

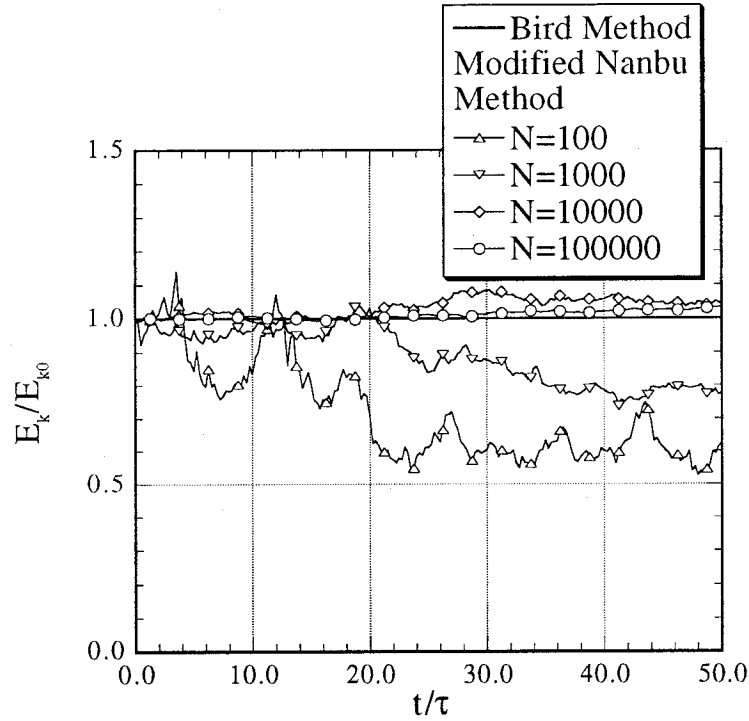


Figure 2.6: Modified Nanbu 法における N のエネルギー保存への影響

働いたり，衝突が非弾性であるような系では事情が異なってくる．つまりエネルギー消散によるエネルギー変化率と比べて， N の不足によるエネルギー変動の方が小さければ，その影響はそれほど問題にならなくなる．

$N=100$ で粒子間の反発係数 e_p が 0.9 の場合のエネルギー変動を Figure 2.7 に示した．Modified Nanbu 法の計算は同じ条件で 8 回行った．この場合には非弾性衝突によるエネルギー減衰はそれほど速くはないが，完全弾性衝突の場合と比べて，Bird 法と Modified Nanbu 法の差は小さくなった．次に Figure 2.8 に $N=100$ で粒子間の反発係数 e_p が 0.5 の場合のエネルギー変動を示した．この場合には N の不足によるエネルギー変動より非弾性衝突によるエネルギー変動の方がかなり速く，Bird 法と Modified Nanbu 法の差はほとんどない．さらに流れ場中の粒子の場合には，流体抵抗によるエネルギー減衰も加わるので，Modified Nanbu 法でエネルギーが保存されないことは問題にならない．

続いて，流れ場中の粒子の運動に Modified Nanbu 法を用いる利点について述べる．Bird 法では各セルについて衝突時間間隔を累積し，その累積 (タイ

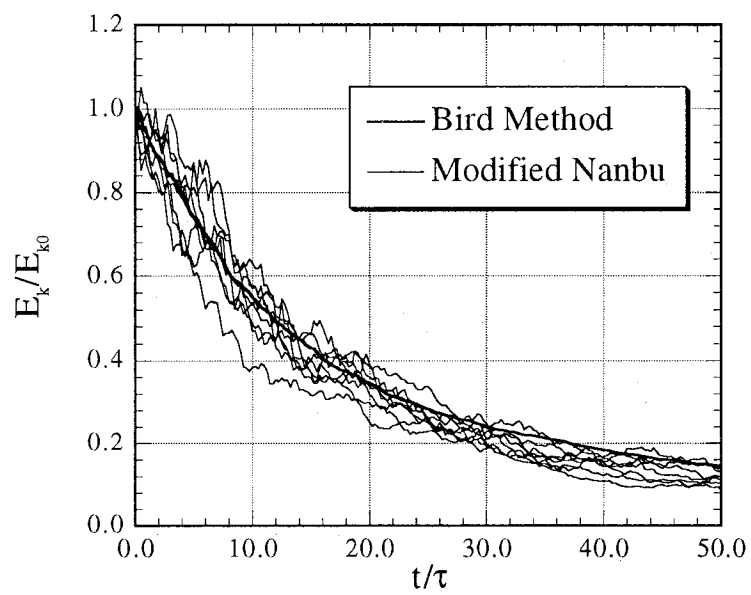


Figure 2.7: $e_p=0.9, N=100$ の場合のエネルギー変動

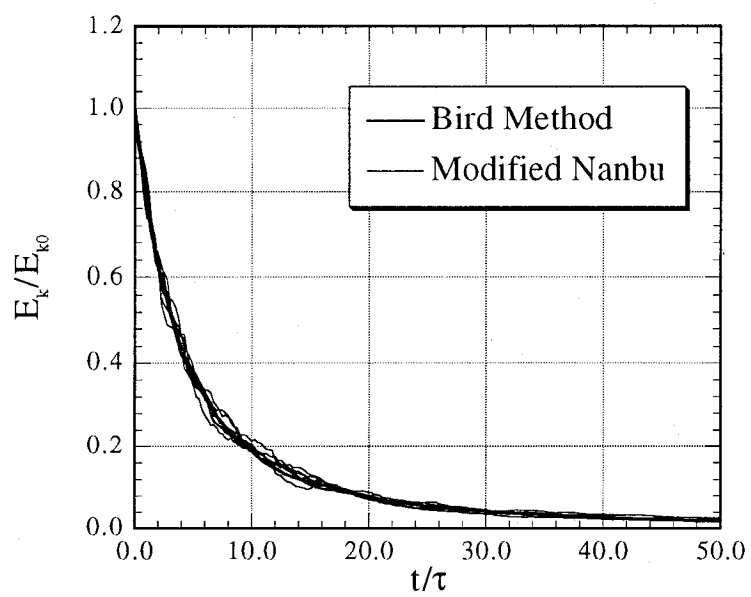


Figure 2.8: $e_p=0.5, N=100$ の場合のエネルギー変動

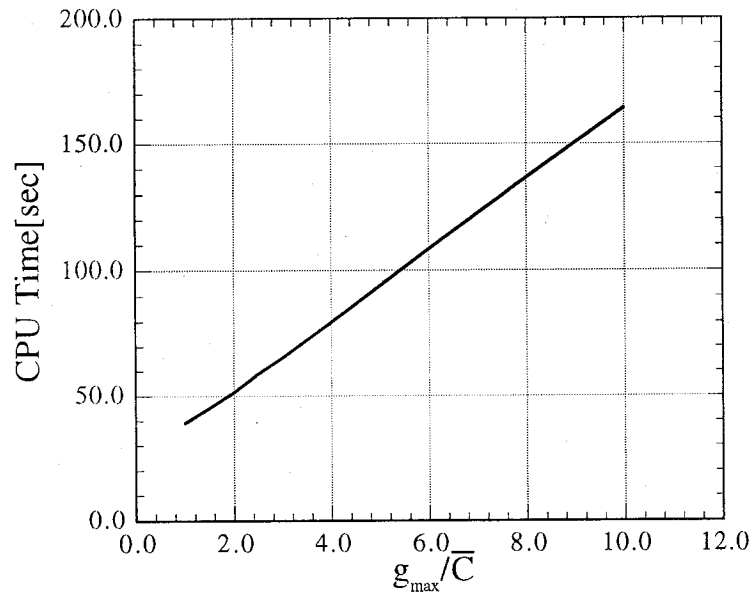


Figure 2.9: Bird 法における $g_{\max}$ の設定の違いによる計算時間への影響

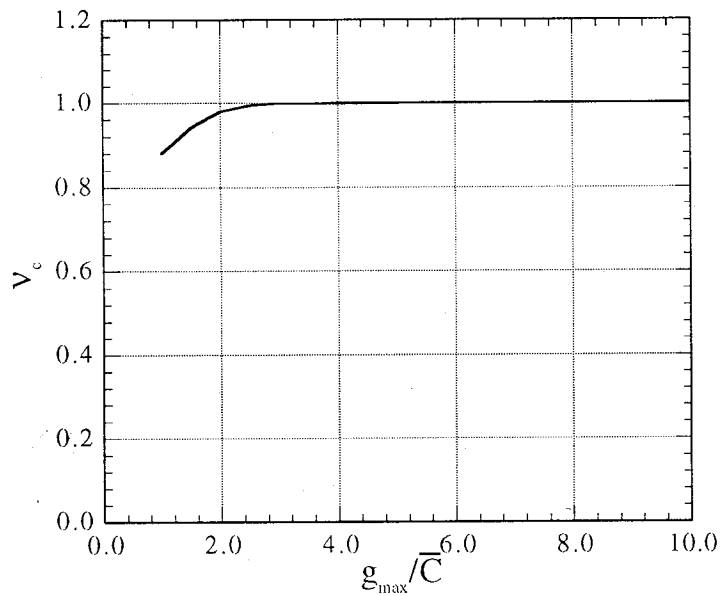


Figure 2.10: Bird 法における $g_{\max}$ の設定の違いによる衝突頻度への影響

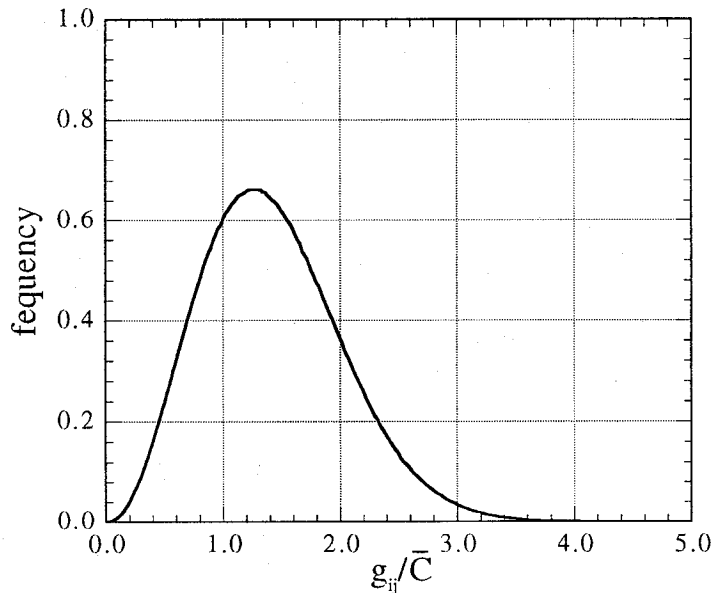


Figure 2.11: 相対速度 g_{ij} の分布

ムカウンター)が現時刻 t を越えるまで衝突ペアを抽出する．つまり時間進行するためには少なくとも1回は衝突を起こす必要が生じてくる．このことによって、相対速度が小さいあるいは粒子濃度が非常に小さいなどの理由から時間ステップの間に衝突が起こらないようなセルにおいても、衝突を起こさなければ時間進行しないことになる．流体抵抗や非弾性衝突によって流れ場中の粒子間の相対速度が小さくなることを考えると、このことは粒子運動にBird法を採用するに当たって、大きな問題になってくる．また本研究で取り扱う固気二相流では粒子濃度が空間的にも時間的にも大きく変動することから考えても、Bird法を採用する場合には各セル内の粒子の運動状態に応じてそれぞれ適当な時間ステップ Δt を設定する必要が生じてくる．しかしセル内の粒子の運動状態を頻繁に調べることは、計算負荷を非常に増大させることになる．さらに相互作用を考慮しながら流体運動を同時に解くためにはセルによって時間ステップが異なるのは不都合である．

Bird法の方がModified Nanbu法より速いと前述したが、これも流れ場中の粒子を取り扱う場合には事情が異なる．流れ場中では粒子の相対速度は大

まかには減衰する傾向にあるが、流れが衝突する位置では双方の流れに乗った粒子は大きな相対速度を持つ。つまり流れ場における粒子の相対速度は著しく変化して、その最大値 g_{max} を予測することは容易ではない。Figure 2.9 と Figure 2.10 に g_{max} の設定による計算速度の違い及び衝突頻度 ν_c への影響を示した。ここで $\bar{C}$ は分子の熱速度の平均値である。分子間衝突は完全弾性衝突であり、シミュレーション分子は 100000 個、平均自由時間 τ の 50 倍分の計算を行った。Figure 2.9 から g_{max} を大きくすると処理速度が遅くなることが分かる。逆に Figure 2.10 からは g_{max} を小さくしすぎると ν_c が 1 より小さくなり、衝突を正確に計算できなくなることが分かる。以上のことから最適な g_{max} を設定してこそ、Bird 法が有効であることが分かる。Figure 2.11 に平衡状態にある場合の相対速度 g_{ij} の分布を示した。これまでに Bird 法と Modified Nanbu 法の計算速度を比較した際には、 $g_{max} = \sqrt{6RT} = 3\sqrt{\pi/2} \bar{C}$ で設定したが、Figure 2.11 からわかるようにこの g_{max} は g_{ij} のほぼ最大値を表しており、ほぼ最適な条件で Bird 法を Modified Nanbu 法と比較したことになる。実際に流れ場中の粒子を取り扱う場合には低負荷で g_{max} を予測することは簡単ではないので、上述したほどの速さを Bird 法に期待することはできない。

以上をまとめると、流れ場中の粒子運動に適用するには、Bird 法はいろいろと不都合が生じ、Modified Nanbu 法の方が適しているといえる。したがって、本研究では粒子運動を取り扱うのに Modified Nanbu 法を採用した。

2.7 粒子運動の取り扱い

本論文では 2 次元場中の粒子運動を取り扱う場合でも、個々の粒子の運動を 2 次元には限定せず 3 次元運動を計算し、粒子間衝突についても球形粒子の 3 次元運動を考えた。しかし、場を記述する 2 次元空間に垂直な方向の粒子群の運動特性の変化は無視されているのでマクロな視点から見れば粒子群の運動は 2 次元に限定されたものとなる。これは 3 次元運動する分子からなる気体の流動について 2 次元流れを仮定するのと同様である。

2.4節に述べた希薄気体を取り扱う場合と同様に計算領域はセルに分割され、そのセルの中に存在する粒子と衝突判定を行う。この場合もセルのサイズはセル内の粒子の運動特性の変化が無視できるくらい十分小さく選ばれる。セル内では局所的な粒子速度の分布がそのセル内の位置に依らないとして粒子間衝突が取り扱われる。

2.8 粒子の運動方程式

粒子は粒径、質量およびその他の物性が均一な球形の剛体粒子とする。気流中における粒子の並進運動に対する運動方程式は次式で与えた。

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -V_p \nabla p + \mathbf{F}_f + m \mathbf{g}_G \quad (2.14)$$

ここで、 m および V_p はそれぞれ粒子1個当たりの質量と体積、 $\mathbf{v}$ は粒子速度、 p は圧力、 $\mathbf{F}_f$ は粒子に作用する流体力、 $\mathbf{g}_G$ は重力加速度である。右辺第1項は圧力勾配による力を示している。また $\mathbf{F}_f$ は次式で与えられる。

$$\mathbf{F}_f = \frac{1}{2} \rho_f |\mathbf{u}_R| A \left(C_D \mathbf{u}_R + C_{LR} \frac{\mathbf{u}_R \times \boldsymbol{\omega}_R}{|\boldsymbol{\omega}_R|} \right) + \mathbf{f}_{LG} \quad (2.15)$$

ここで A は粒子の投影面積、 $\mathbf{u}_R$ は粒子に対する相対気流速度、 $\boldsymbol{\omega}_R$ は粒子の気流に対する相対角速度を表す。 $\boldsymbol{\omega}_R$ は粒子の角速度 $\boldsymbol{\omega}$ を用いて次式で与えられる。

$$\boldsymbol{\omega}_R = \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \quad (2.16)$$

式(2.15)の右辺第1項は流体抵抗力、第2項は粒子の回転による揚力、第3項の $\mathbf{f}_{LG}$ は速度勾配による揚力である。抵抗係数 C_D としては次式に示される一様流中の単一球に対する標準抵抗係数⁽¹⁶⁾を与えた。

$$C_D = C_0 + \frac{C_1}{Re_p} + \frac{C_2}{Re_p^2} \quad (2.17)$$

ここで, C_0, C_1 および C_2 は粒子のレイノルズ数 $Re_p = |\mathbf{v}_R|d_p/\nu$ の値の範囲により決まる定数である. Table 2.1 に各定数の値を示す.

揚力係数 C_{LR} は辻⁽¹⁾と同じモデルを用い, 次式で与えた.

$$C_{LR} = \min[0.5, 0.5 \frac{a|\mathbf{w}_R|}{|\mathbf{v}_R|}] \quad (2.18)$$

ここで, a は粒子の半径である.

第3項の $\mathbf{f}_{LG}$ は速度勾配による揚力である. 本研究では流れ場を2次元として取り扱うので, Saffman の式⁽¹⁷⁾に従って, 主流 (z) 方向に垂直 (y) 方向成分のみについて次式で与えた.

$$f_{LGy} = 1.62 u_{Rz} d_p^2 \sqrt{\rho_f \mu} \frac{du_{Rz}/dy}{\sqrt{|du_{Rz}/dy|}} \quad (2.19)$$

ここで u_{Rz} は $\mathbf{u}_R$ の z 方向成分である.

粒子の回転運動に対する方程式は次式で与えた.

$$I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = -\left(\frac{C_{T1}}{Re_R^{0.5}} + \frac{C_{T2}}{Re_R} + C_{T3} Re_R\right) \frac{1}{2} \rho_f \left(\frac{d_p}{2}\right)^5 |\boldsymbol{\omega}_R| \boldsymbol{\omega}_R \quad (2.20)$$

ここで $\mathbf{u}$ は気流速度, I は粒子の慣性モーメントである. 式 (2.20) の右辺は回転に対する粘性抵抗トルクを表し, C_{T1}, C_{T2} および C_{T3} は粒子の相対回転レイノルズ数 $Re_R = |\boldsymbol{\omega}_R|d_p^2/(4\nu)$ の値により決まる定数であり, Table 2.2 に各定数の値を示す^{(18),(19)}.

Table 2.1: 球の抵抗係数の定数⁽¹⁶⁾

Re_p	C_0	C_1	C_2
$Re_p < 0.1$	0.	24.0	0.
$0.1 < Re_p < 1$	3.69	22.73	0.0903
$1 < Re_p < 10$	1.222	29.1667	-3.889
$10 < Re_p < 10^2$	0.6167	46.5	-116.67
$10^2 < Re_p < 10^3$	0.3644	98.33	-2778.0
$10^3 < Re_p < 5 \times 10^3$	0.3571	148.62	-47500.0

Table 2.2: 球の回転抵抗力の定数^{(18),(19)}

Re_R	C_{T1}	C_{T2}	C_{T3}
$Re_R < 1$	0.	16π	0.
$1 < Re_R < 10$	0.	16π	0.0418
$10 < Re_R < 20$	5.32	37.2	0.
$20 < Re_R < 50$	6.44	32.2	0.
$50 < Re_R < 100$	6.45	32.1	0.

2.9 粒子の衝突

本研究では慣性が大きな粒子を対象とし、粒子間衝突および壁面衝突の際の流体力学的な相互作用を無視した。衝突の際には以下に示すように接触点での滑りを考慮して衝突後の速度および角速度を与えた⁽²⁰⁾。

粒子が壁面あるいは他の粒子と衝突する場合、以下に示す衝撃方程式を解くことにより衝突後の速度が求められる。

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v} + \mathbf{J}/m \quad (2.21)$$

$$\boldsymbol{\omega}^* = \boldsymbol{\omega} + a\mathbf{n} \times \mathbf{J}/I \quad (2.22)$$

ここで $\mathbf{n}$ は衝突時の接触面から今考えている粒子の外側に向かう法線方向単位ベクトル、 $\mathbf{J}$ はその粒子に働く衝撃力であり、衝突後の状態には*が添えられている。

衝撃力 $\mathbf{J}$ を

- (1) 反発係数が一定,
- (2) 接触点で滑りがある期間はクーロン摩擦が働く,
- (3) 衝突の過程で滑りが停止すれば以後再び滑ることはない,
- (4) 粒子は球形で衝突時の変形は十分小さい,

という仮定の下で解くと、以下のようなになる。(付録 A 参照)

$$\mathbf{J} = J_n \mathbf{n} + J_t \mathbf{t} \quad (2.23)$$

$$J_n = (1 + e)M\mathbf{n} \cdot \mathbf{g} \quad (2.24)$$

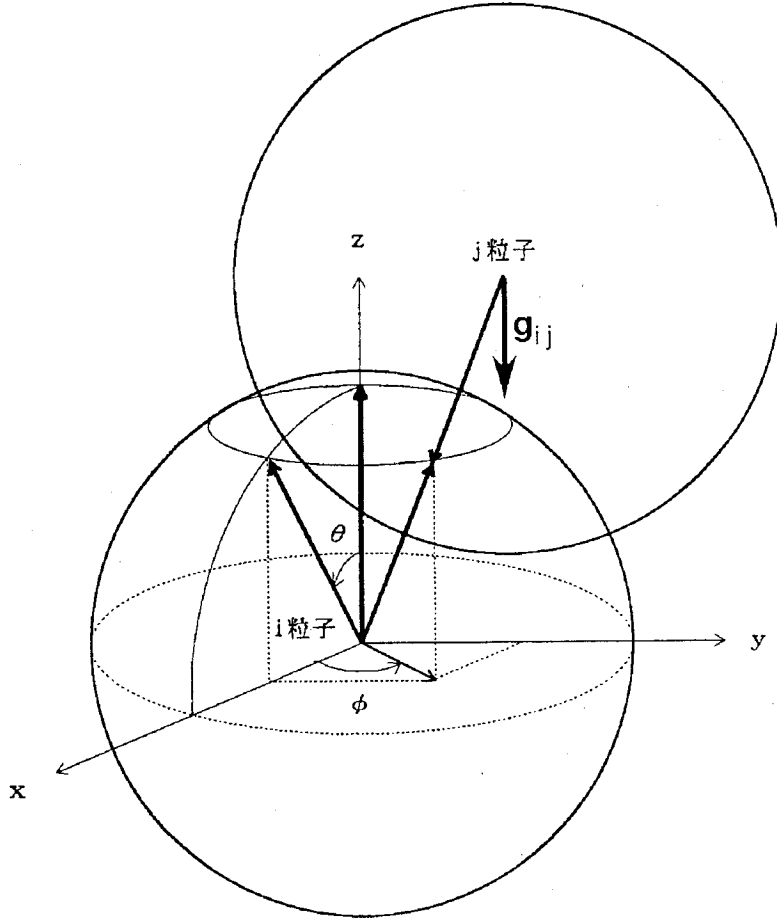


Figure 2.12: 衝突時の粒子*i*に対する粒子*j*の相対位置

$$J_t = \min[-\mu_f J_n, \frac{2}{7} M |g_{fc}|] \quad (2.25)$$

ここで $\mathbf{t}$ は接線方向の単位ベクトルであり、接触点における衝突開始時の衝突相手の相対滑り速度 $\mathbf{g}_{fc}$ の向きをもつ、また e は反発係数、 μ_f は動摩擦係数、 M は衝突相手に依って異なり、粒子の場合 $M = m/2$ 、壁面の場合 $M = m$ となる。

粒子間衝突を取り扱う際、DSMC 法では衝突時の粒子 i に対する粒子 j の位置ベクトル $\mathbf{r}_{ij}$ も乱数を用いて決定される。しかし相対衝突位置に対する衝突確率は $\mathbf{r}_{ij}$ に依存するため、その関係を明らかにしておく必要がある。

Figure 2.12 に示すように粒子 i を中心にした粒子 j の相対運動を考える。粒

粒子 i に対する粒子 j の相対速度 $\mathbf{g}_{ij}$ と反対の向きに z 軸を設定する．粒子 i に入射する粒子 j は空間に一様に分散していると考えられるので，粒子 i の中心からの接触点の位置ベクトル $\mathbf{r}_{ij}(r_x, r_y, r_z)$ は一様乱数 $R_{ND1}(0 \leq R_{ND1} < 1)$, $R_{ND2}(0 \leq R_{ND2} < 1)$ を使って次式のように与える⁽²¹⁾．

$$\sin \theta = \sqrt{R_{ND1}}, \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}, \phi = 2\pi R_{ND2}$$

$$r_x = a \sin \theta \cos \phi, r_y = a \sin \theta \sin \phi, r_z = a \cos \theta$$

ここで与えられた位置ベクトル $\mathbf{r}_{ij}$ を元の座標系に変換して用いる．

2.10 固相計算のアルゴリズム

5章の計算における固相計算のアルゴリズムは次の通りである．

- (1) シミュレーション粒子を衝突させずに移動させる．
- (2) 粒子と壁面との衝突判定を行う．
- (3) 壁面と衝突すると判定されたシミュレーション粒子については衝突するまでの時間を求め，衝突する瞬間まで移動させ，新しい速度，角速度を与えた後残り時間分の移動を起こす．
- (4) 境界から流出したシミュレーション粒子を計算対象から外す．
- (5) 全ての粒子について移動させたなら (6) に進む．そうでないなら (1) に戻る．
- (6) 新しいシミュレーション粒子を流入口から流入させる．
- (7) すべてのシミュレーション粒子をセルに振り分ける．
- (8) 各セルについて粒子間衝突の判定をする．衝突すると判定された粒子については新しい速度，角速度を与える．

Figure 2.9にこの場合の固相計算のフローチャートを示す． N_{all} は計算領域内に存在するシミュレーション粒子の数， Δt_p は固相計算の時間ステップ， i_{max}, j_{max} はそれぞれ y 方向, z 方向の粒子計算セルの個数である．

また4章，6章では周期境界で区切られた計算領域内の計算を行うので固相計算のアルゴリズムは次の通りとなる．

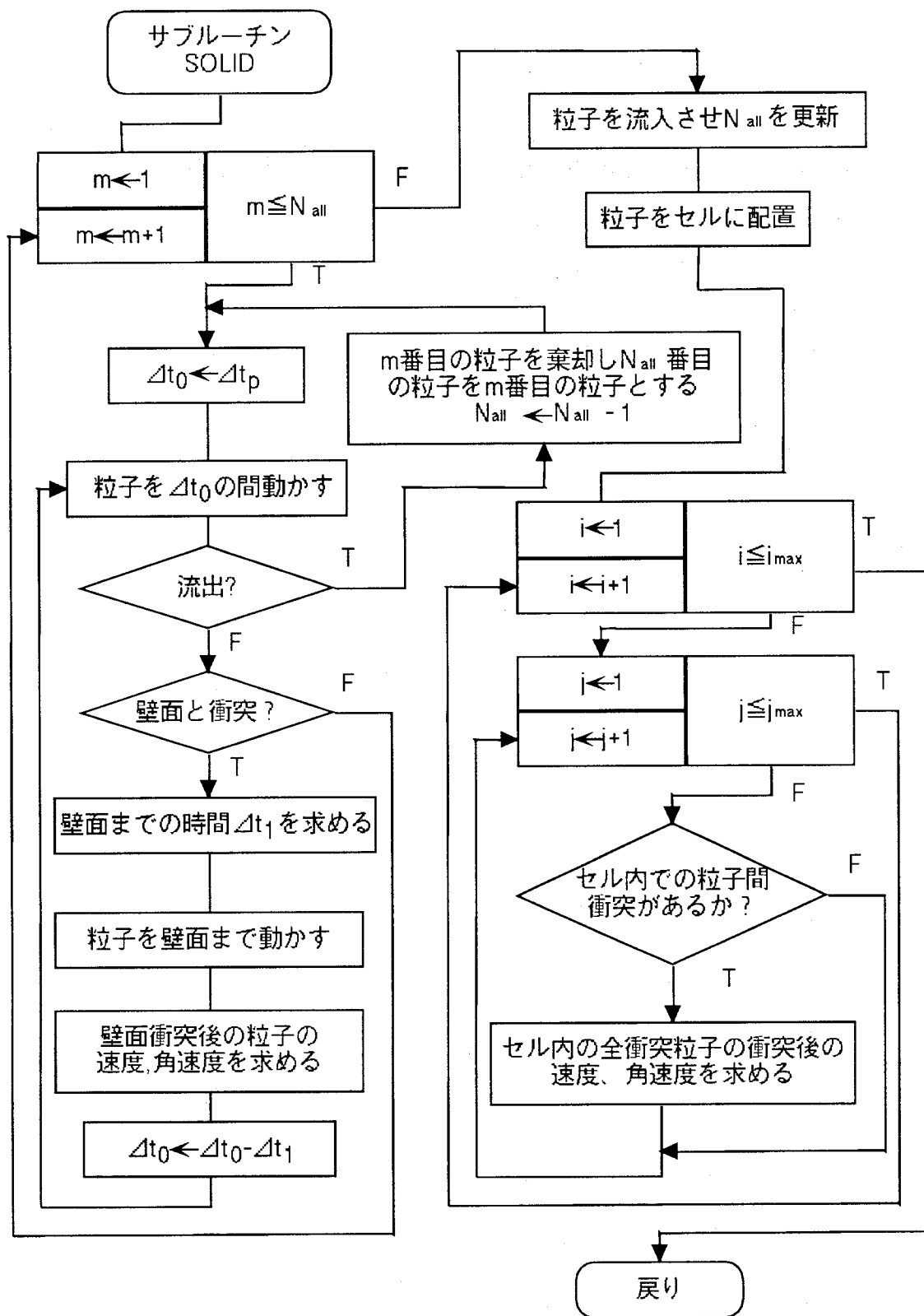


Figure 2.13: 固相計算のフローチャート (5章)

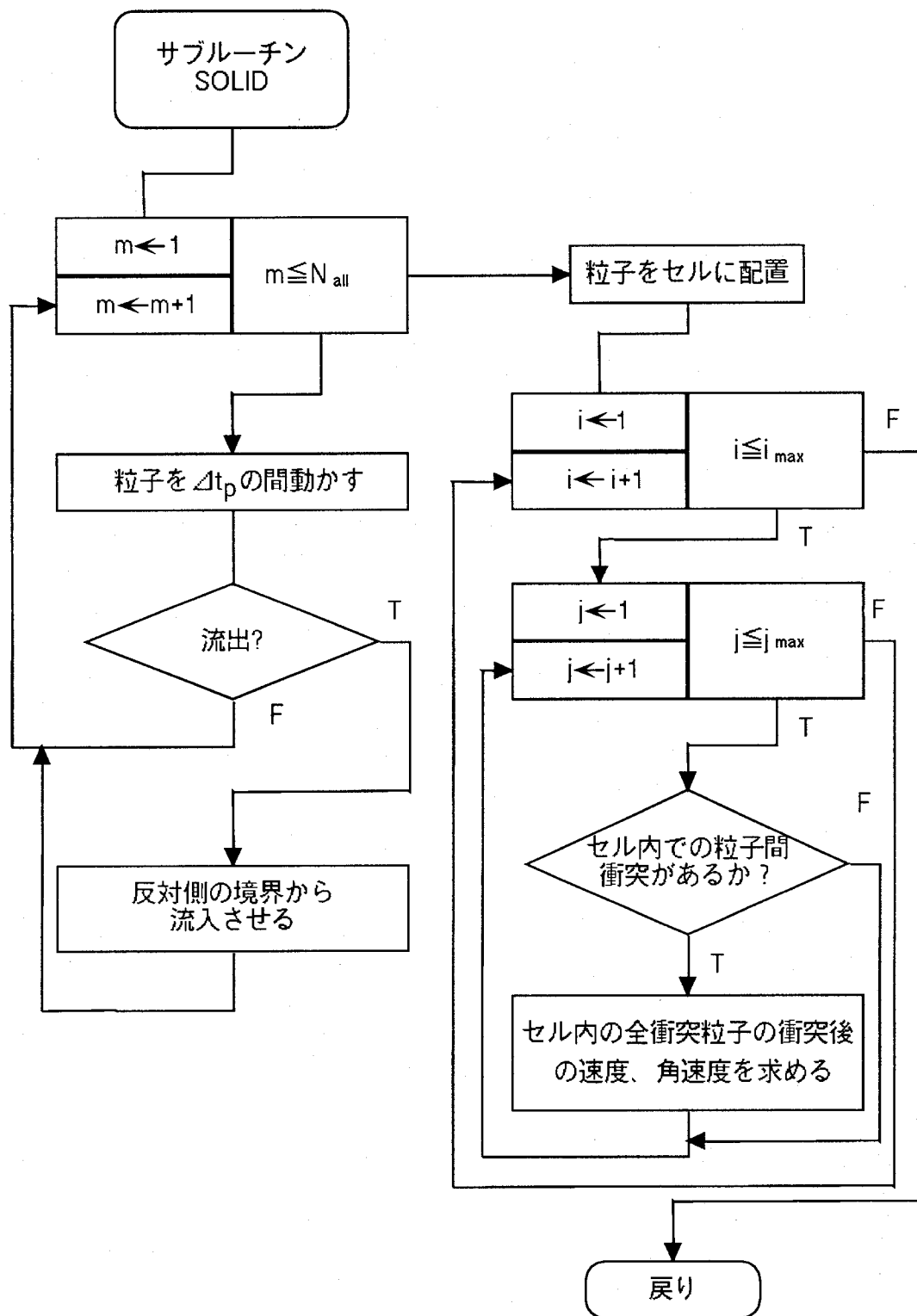


Figure 2.14: 固相計算のフローチャート (4章,6章)

- (1) シミュレーション粒子を衝突させずに移動させる.
- (2) 計算領域から流出した場合は反対側の境界から流入させる
- (3) 全てのシミュレーション粒子について移動させたなら(4)に進む. そうでないなら(1)に戻る.
- (4) 全てのシミュレーション粒子をセルに振り分ける.
- (5) 各セルについて粒子間衝突の判定をする. 衝突すると判定された粒子については新しい速度, 角速度を与える.

Figure 2.9にこの場合の固相計算のフローチャートを示す.

2.11 むすび

本章では, 粒子運動の計算方法を述べるほかに, 希薄気体流れの数値解法である DSMC 法を粒子運動に適用する場合の計算手法の検討を行った. 得られた結果を要約すると以下のようなになる.

- (1) 粒子間の相対速度の最大値 g_{max} が既知であるような流れ場では, Bird 法は Modified Nanbu 法に比べて処理速度が大きい, 流れ場中における粒子運動のように g_{max} が著しく変化する場合には Modified Nanbu 法の方が処理速度が大きい.
- (2) Modified Nanbu 法では, 粒子間衝突を通して粒子の運動エネルギーと運動量が保存されないという欠点があるが, 非弾性衝突や流体抵抗などによってエネルギーが減衰する場合にはそれほど問題にならない.
- (3) 流れ場中の粒子を取り扱う場合にはセル内で衝突が起こらない場合もある. Bird 法は衝突を起こして時間進行するため, このような場合にも少なくとも1回は衝突を起こさないと時間進行しない. このようなことが起こらないようにするには, 各セルの運動状態にあわせて時間ステップを決定する必要がある. このことは計算負荷を増大させるとともに, 取り扱いも容易ではない.
- (4) 以上のことから, 流れ場中の粒子運動の取り扱いには Bird 法よりも Modified Nanbu 法の方が適しているといえる.

第3章 流体運動の計算方法

3.1 はじめに

本計算では固気二相流において局所的に粒子が集中するクラスターと呼ばれる現象を取り扱う。クラスターが形成されるような流れでは粒子流体間の運動量交換は大きいであろうと推測されるため、流体計算を行うときに粒子の影響を無視できない。

流れを粒子レベルのミクロな空間スケールでみれば粒子表面の境界層や後流などの流れ構造が見えるが、本研究で対象とする流れ場をこのミクロなスケールでとらえることは現在のところきわめて困難である。本計算では粒子群の空間的変化のスケールの流れ場を対象とする。

そこで本計算では、粒子の存在を考慮に入れて、速度や圧力などの物理量を局所的に平均化した局所平均量を用いて Anderson と Jackson ⁽⁹⁾ により導かれた連続の式と運動量の式を流体運動の基礎式とした。ここでは流体は、粒子との運動量交換を考えるほかは非圧縮非粘性とした。

3.2 局所平均量による連続の式と運動量の式

以下に示す局所平均量に対する連続の式と運動量の式を用いた。(付録 B 参照)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{u}) = 0 \quad (3.1)$$

$$\varepsilon \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{\varepsilon}{\rho_f} \nabla p + \frac{\mathbf{F}_p}{\rho_f} \quad (3.2)$$

ここで ε は空隙率, p は圧力, $\mathbf{F}_p$ は固体粒子相との相互作用によって混相単位体積あたり含まれる流体に働く固体粒子相との相互作用力である。

式(3.1)および(3.2)における空隙率 ε はシミュレーション粒子の分布から次式により計算される。

$$\varepsilon = 1 - \frac{\alpha N_f V_p}{\Delta y_f \Delta z_f} \quad (3.3)$$

ここで α は1個のシミュレーション粒子が代表する実在粒子の数、 N_f は流体計算のコントロールボリューム中に含まれるシミュレーション粒子数、 V_p は粒子1個の体積、 Δy_f および Δz_f はコントロールボリュームの y 方向および z 方向のサイズである。 F_p は粒子が気流から受ける流体力の反力として次式で与えられる。

$$F_p = -\frac{\alpha}{\Delta y_f \Delta z_f} \sum_{i=1}^{N_f} F_{fi} \quad (3.4)$$

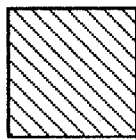
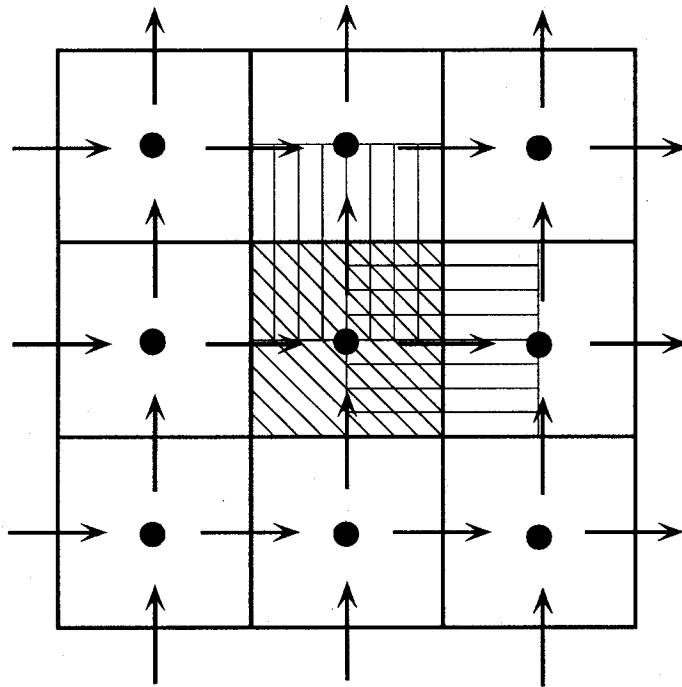
ここで F_{fi} はシミュレーション粒子 i に働く流体力を表している。

3.3 SIMPLE 法による流体の運動の計算

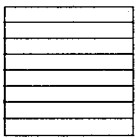
本計算では前節で示した局所平均量に対する基礎式を離散化し、SIMPLE⁽¹⁰⁾ (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation) 法により圧力分布および速度分布を求めた。

3.3.1 スタッガード格子

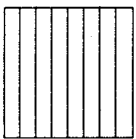
前節に示した微分方程式を離散化するために、計算領域をいくつかのコントロール・ボリュームに分割し、微分方程式を各コントロール・ボリュームにわたって積分することを考える。格子点をコントロール・ボリュームの中央にとり、圧力、速度などの全ての変数を同じ格子点で定義すると、1つおきの格子点で速度が等しいような不合理な解が離散化された連続の式を満たすことになる⁽¹⁰⁾。この問題を解決する方法として、スタッガード格子の使用がある。まず連続の式を取り扱うためのコントロール・ボリュームを決め、このコントロール・ボリュームの中央の格子点で圧力を定義する。速度成分に関しては格子点から成分方向に半格子分ずらしたコントロール・ボリュームの境界面上で定義する。運動方程式を取り扱うには、各速度成分が定義されている点を中央としたコントロール・ボリュームを用いる。この格子を用いれば連続の式の不合理な解はなくなり、正解のみが得られる。コントロール・ボリュームの選び方を Figure 3.1に示す。



連続の式に関するコントロール・ボリューム



u_y に関するコントロール・ボリューム



u_z に関するコントロール・ボリューム



スカラー量定義位置



ベクトル量定義位置

Figure 3.1: コントロール・ボリューム

3.3.2 離散化方程式の導出

本研究では流れ場を2次元として取り扱うので、基礎式となる微分方程式 (3.1), (3.2) を成分表示すると次式のようになる.

連続の式

$$\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon u_z) = 0 \quad (3.5)$$

y 方向運動方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon u_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon u_y u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon u_z u_y) = -\frac{\varepsilon}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{F_{py}}{\rho_f} \quad (3.6)$$

ここで F_{py} は Figure 3.1 に示される u_y に関するコントロール・ボリューム内に存在する粒子から気流が受ける単位体積当りの y 方向の力を表し、式 (3.4) から次のように与えられる.

$$F_{py} = -\frac{\alpha}{\Delta y_f \Delta z_f} \sum_{i=1}^{N_f} F_{fyi} \quad (3.7)$$

ここで F_{fyi} はシミュレーション粒子 i に働く y 方向の流体力を表している.

z 方向運動方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon u_z) + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon u_y u_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon u_z u_z) = -\frac{\varepsilon}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{F_{pz}}{\rho_f} \quad (3.8)$$

ここで F_{pz} は Figure 3.1 に示される u_z に関するコントロール・ボリューム内に存在する粒子から気流が受ける単位体積当りの z 方向の力を表し、式 (3.4) から次のように与えられる.

$$F_{pz} = -\frac{\alpha}{\Delta y_f \Delta z_f} \sum_{i=1}^{N_f} F_{fzi} \quad (3.9)$$

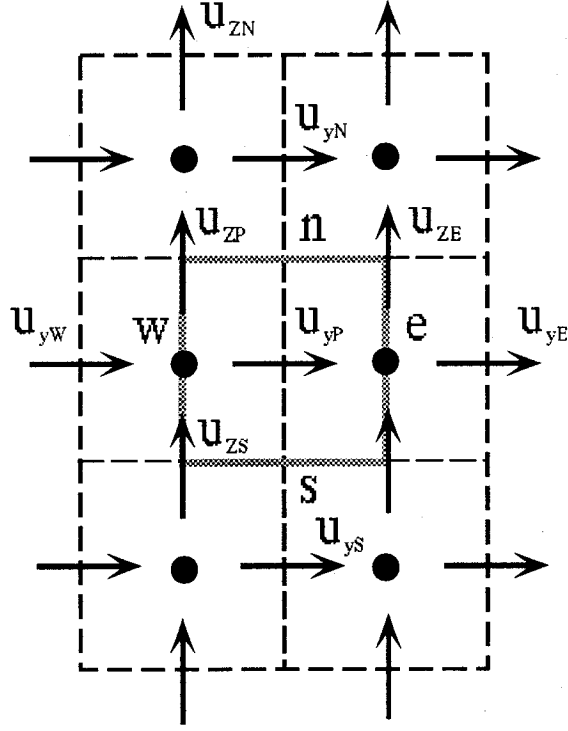


Figure 3.2: u_y に関するコントロール・ボリューム

ここで F_{fzi} はシミュレーション粒子 i に働く z 方向の流体力を表している．

まず y 方向運動方程式 (3.6) を Figure 3.2 のコントロール・ボリュームにわたって積分する．

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_s^n \int_t^{t+\Delta t_f} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon u_y) dt dz dy + \int_t^{t+\Delta t_f} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y} (\epsilon u_y u_y) dy dz dt + \int_t^{t+\Delta t_f} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial z} (\epsilon u_z u_y) dz dy dt \\ = \int_t^{t+\Delta t_f} \int_s^n \int_w^e -\frac{\epsilon}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial y} dy dz dt + \frac{F_{py}}{\rho_f} \Delta y_f \Delta z_f \Delta t_f \end{aligned} \quad (3.10)$$

ここで Δt_f は流体計算の時間ステップである．左辺第1項について考える． (ϵu_y) の値はコントロール・ボリューム内で一定であり，かつコントロール・ボリューム中央の値に等しいと仮定すると，

$$\int_w^e \int_s^n \int_t^{t+\Delta t_f} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon u_y) dt dz dy = \{(\epsilon u_y) - (\epsilon u_y)^0\} \Delta y_f \Delta z_f \quad (3.11)$$

となる．ただし， $(\epsilon u_y)^0$ は1時間ステップ前の時刻における (ϵu_y) の値を表す．以後も上付き添字0は1ステップ前の時間刻みにおけるその変数の値を示す．よって式 (3.10) は次式のようになる．

$$\frac{(\varepsilon u_y) - (\varepsilon u_y)^0}{\Delta t_f} \Delta y_f \Delta z_f + J_e - J_w + J_n - J_s = -\frac{\varepsilon}{\rho_f} (p_E - p_P) \Delta z_f + \frac{F_{py}}{\rho_f} \Delta y_f \Delta z_f \quad (3.12)$$

ただし,

$$J_e = (\varepsilon u_y u_y)_e \Delta z_f, \quad J_w = (\varepsilon u_y u_y)_w \Delta z_f, \quad J_n = (\varepsilon u_z u_y)_n \Delta y_f, \quad J_s = (\varepsilon u_z u_y)_s \Delta y_f \quad (3.13)$$

である.

一方, 連続の式(3.5)をこのコントロール・ボリュームにわたって積分すると,

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon^0}{\Delta t_f} \Delta y_f \Delta z_f + F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \quad (3.14)$$

となる. ただし,

$$F_e = (\varepsilon u_y)_e \Delta z_f = \varepsilon_{i+1,j} \frac{u_{yi,j} + u_{yi-1,j}}{2} \Delta z_f \quad (3.15)$$

$$F_w = (\varepsilon u_y)_w \Delta z_f = \varepsilon_{i,j} \frac{u_{yi,j} + u_{yi-1,j}}{2} \Delta z_f \quad (3.16)$$

$$F_n = (\varepsilon u_z)_n \Delta y_f = \frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i+1,j} + \varepsilon_{i,j+1} + \varepsilon_{i+1,j+1}}{4} \frac{u_{zi,j} + u_{zi+1,j}}{2} \Delta y_f \quad (3.17)$$

$$F_s = (\varepsilon u_z)_s \Delta y_f = \frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i+1,j} + \varepsilon_{i,j-1} + \varepsilon_{i+1,j-1}}{4} \frac{u_{zi,j-1} + u_{zi+1,j-1}}{2} \Delta y_f \quad (3.18)$$

である. ここで式(3.14)に u_y を掛けたものを式(3.12)から引くと,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y_f \Delta z_f}{\Delta t_f} \varepsilon^0 (u_y - u_y^0) + (J_e - u_y F_e) - (J_w - u_y F_w) + (J_n - u_y F_n) - (J_s - u_y F_s) \\ = -\frac{\varepsilon}{\rho_f} (p_E - p_P) \Delta z_f + \frac{F_{py}}{\rho_f} \Delta y_f \Delta z_f \end{aligned} \quad (3.19)$$

となる. 式(3.19)の左辺第2~5項について考察を加える. 例として第2項を用いる. J_e に対して,

$$J_e = (\varepsilon u_y u_y)_e \Delta z_f = F_e u_{ye} \quad (3.20)$$

とする. F_e は e 面から出ていく体積流量であり式(3.15)で定義されたものである. u_{ye} については e 面は速度の定義位置ではないので, その与え方を決めておかなければならない. 最も単純な方法としては, その左右の速度の平均値を用いるもの, すなわち,

$$u_{ye} = \frac{u_{yi,j} + u_{yi+1,j}}{2} \quad (3.21)$$

とするものが考えられる．しかしこの方法では反復計算が収束しにくかったり，時には発散することがある．そこでここでは風上法を用いた．この方法では，

$$\begin{aligned} F_e > 0 \quad \text{なら} \quad u_{ye} &= u_{yi,j} \\ F_e < 0 \quad \text{なら} \quad u_{ye} &= u_{yi+1,j} \end{aligned} \quad (3.22)$$

として u_{ye} を定義する．したがって，

$$F_e u_{ye} = u_{yi,j} \max[F_e, 0] - u_{yi+1,j} \max[-F_e, 0] \quad (3.23)$$

と表すことができる．ただし記号 $\max[A, B]$ は A と B の最大値を示す．またこの記号を用いれば，

$$F_e u_y = u_{yi,j} \max[F_e, 0] - u_{yi,j} \max[-F_e, 0] \quad (3.24)$$

と表すことができる．よって，

$$J_e - u_y F_e = \max[-F_e, 0] (u_{yi,j} - u_{yi+1,j}) \quad (3.25)$$

となる．同様にして，

$$J_w - u_y F_w = \max[F_w, 0] (u_{yi-1,j} - u_{yi,j}) \quad (3.26)$$

$$J_n - u_y F_n = \max[-F_n, 0] (u_{yi,j} - u_{yi,j+1}) \quad (3.27)$$

$$J_s - u_y F_s = \max[F_s, 0] (u_{yi,j-1} - u_{yi,j}) \quad (3.28)$$

となる．これらの関係を用いて式(3.19)を整理すると，離散化された y 方向運動方程式が次式のように与えられる．

$$\begin{aligned} a_P u_{yi,j} &= a_E u_{yi+1,j} + a_W u_{yi-1,j} + a_N u_{yi,j+1} + a_S u_{yi,j-1} + b \\ &\quad + \frac{1}{\rho_f} \frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i+1,j}}{2} (p_{i,j} - p_{i+1,j}) \Delta z_f \end{aligned} \quad (3.29)$$

ただし，

$$a_E = \max[-F_e, 0], \quad a_W = \max[F_w, 0], \quad a_N = \max[-F_n, 0], \quad a_S = \max[F_s, 0] \quad (3.30)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + \frac{\Delta y_f \Delta z_f}{\Delta t_f} \frac{\varepsilon_{i,j}^0 + \varepsilon_{i+1,j}^0}{2} \quad (3.31)$$

$$b = \frac{\Delta y_f \Delta z_f}{\Delta t_f} \frac{\varepsilon_{i,j}^0 + \varepsilon_{i+1,j}^0}{2} u_{yi,j}^0 + \frac{F_{pyi,j}}{\rho_f} \Delta y_f \Delta z_f \quad (3.32)$$

である。

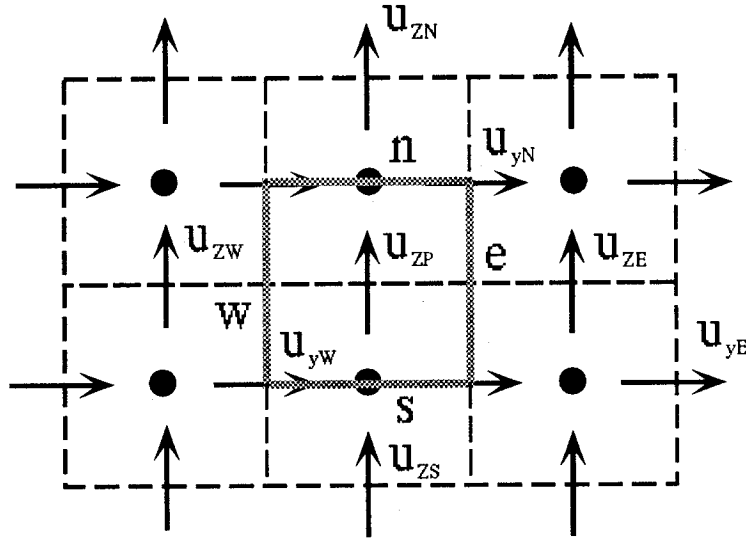


Figure 3.3: u_z に関するコントロール・ボリューム

z 方向運動方程式 (3.8) を Figure 3.3 のコントロール・ボリュームにわたって積分し、以下全く同様の手順により z 方向運動方程式に対する離散化式が次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} a_P u_{zi,j} = & a_E u_{zi+1,j} + a_W u_{zi-1,j} + a_N u_{zi,j+1} + a_S u_{zi,j-1} + b \\ & + \frac{1}{\rho_f} \frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i,j+1}}{2} (p_{i,j} - p_{i,j+1}) \Delta y_f \end{aligned} \quad (3.33)$$

ただし、

$$a_E = \max[-F_e, 0], \quad a_W = \max[F_w, 0], \quad a_N = \max[-F_n, 0], \quad a_S = \max[F_s, 0] \quad (3.34)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + \frac{\Delta y_f \Delta z_f}{\Delta t_f} \frac{\varepsilon_{i,j}^0 + \varepsilon_{i,j+1}^0}{2} \quad (3.35)$$

$$b = \frac{\Delta y_f \Delta z_f}{\Delta t_f} \frac{\varepsilon_{i,j}^0 + \varepsilon_{i,j+1}^0}{2} u_{zi,j}^0 + \frac{F_{pzi,j}}{\rho_f} \Delta y_f \Delta z_f \quad (3.36)$$

でありまた,

$$F_e = (\varepsilon u_y)_e \Delta z_f = \frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i+1,j} + \varepsilon_{i,j+1} + \varepsilon_{i+1,j+1}}{4} \frac{u_{yi,j} + u_{yi,j+1}}{2} \Delta z_f \quad (3.37)$$

$$F_w = (\varepsilon u_y)_w \Delta z_f = \frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i-1,j} + \varepsilon_{i,j+1} + \varepsilon_{i-1,j+1}}{4} \frac{u_{yi-1,j} + u_{yi-1,j+1}}{2} \Delta z_f \quad (3.38)$$

$$F_n = (\varepsilon u_z)_n \Delta y_f = \varepsilon_{i,j+1} \frac{u_{zi,j} + u_{zi,j+1}}{2} \Delta y_f \quad (3.39)$$

$$F_s = (\varepsilon u_z)_s \Delta y_f = \varepsilon_{i,j} \frac{u_{zi,j} + u_{zi,j-1}}{2} \Delta y_f \quad (3.40)$$

である.

3.3.3 SIMPLE 法による圧力補正および速度補正

もし圧力場が既知ならば, 運動方程式 (3.29) および (3.33) を解くことにより流体の速度場を求めることができる. しかし実際には圧力場は未知である. そこで次のような手続きを繰り返すことにより最終的に解を求める. すなわち,

- (1) 圧力場を適当に推測する.
- (2) その推測値に対する速度場を求める.
- (3) 圧力を補正する.

このような手続きで圧力場および速度場を求める方法の1つに SIMPLE 法がある. ここでは SIMPLE 法における圧力および速度の補正方法について述べる.

まず連続の式 (3.5) を Figure 3.4 のコントロール・ボリュームにわたって積分する.

$$\int_s^n \int_w^e \int_t^{t+\Delta t_f} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon dt dy dz + \int_t^{t+\Delta t_f} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon u_y) dy dz dt + \int_t^{t+\Delta t_f} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon u_z) dz dy dt = 0 \quad (3.41)$$

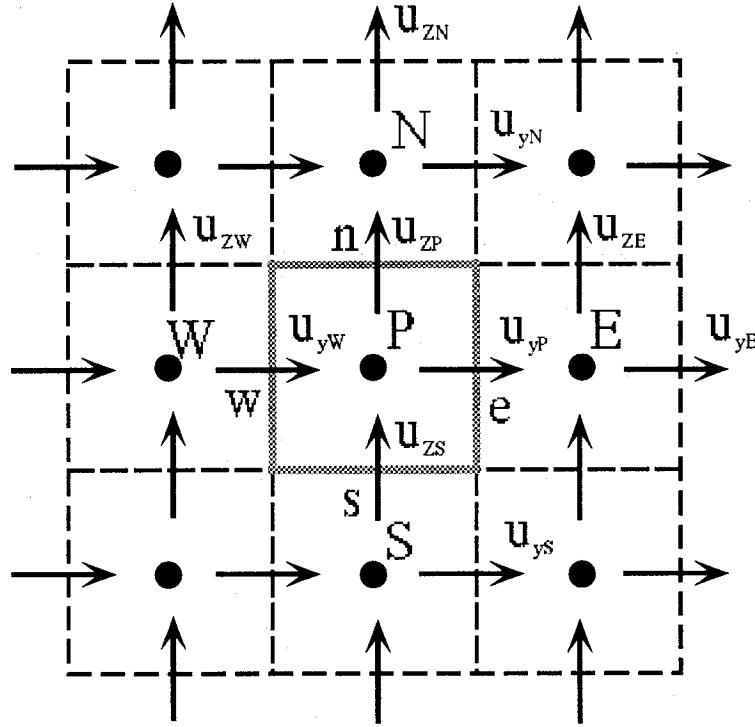


Figure 3.4: 連続の式に関するコントロール・ボリューム

時間微分については前述の運動方程式の時と同様にして次式が得られる．

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon - \varepsilon^0}{\Delta t_f} \Delta y_f \Delta z_f + \frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i+1,j}}{2} u_{yi,j} \Delta z_f - \frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i-1,j}}{2} u_{yi-1,j} \Delta z_f \\ + \frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i,j+1}}{2} u_{zi,j} \Delta y_f - \frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i,j-1}}{2} u_{zi,j-1} \Delta y_f = 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

ここで圧力場 p および速度場 u_y , u_z を次式のようにおく．

$$p = p^* + p' \quad (3.43)$$

$$u_y = u_y^* + u_y' \quad (3.44)$$

$$u_z = u_z^* + u_z' \quad (3.45)$$

ただし p^* および u_y^* , u_z^* は推測した圧力場およびその圧力場に対する速度場であり, p' および u_y' , u_z' は真の値からの変動量で圧力補正值および速度補正值と呼ばれる．運動方程式 (3.29), (3.33) は次式のように書ける．

$$a_P u_{yi,j} = \sum a u_y + b + \frac{1}{\rho_f} \frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i+1,j}}{2} (p_{i,j} - p_{i+1,j}) \Delta z_f \quad (3.46)$$

$$a_P u_{zi,j} = \sum a u_z + b + \frac{1}{\rho_f} \frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i,j+1}}{2} (p_{i,j} - p_{i,j+1}) \Delta y_f \quad (3.47)$$

また推測値に対する運動方程式は次式のように書ける．

$$a_P u_{yi,j}^* = \sum a u_y^* + b + \frac{1}{\rho_f} \frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i+1,j}}{2} (p_{i,j}^* - p_{i+1,j}^*) \Delta z_f \quad (3.48)$$

$$a_P u_{zi,j}^* = \sum a u_z^* + b + \frac{1}{\rho_f} \frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i,j+1}}{2} (p_{i,j}^* - p_{i,j+1}^*) \Delta y_f \quad (3.49)$$

式(3.46), (3.47) から式(3.48), (3.49)を引くことにより, 次式が得られる．

$$a_P u'_{yi,j} = \sum a u'_y + \frac{\varepsilon}{\rho_f} \frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i+1,j}}{2} (p'_{i,j} - p'_{i+1,j}) \Delta z_f \quad (3.50)$$

$$a_P u'_{zi,j} = \sum a u'_z + \frac{\varepsilon}{\rho_f} \frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i,j+1}}{2} (p'_{i,j} - p'_{i,j+1}) \Delta y_f \quad (3.51)$$

ここで, $\sum a u'_y$, $\sum a u'_z$ の項を省略し,

$$a_P u'_{yi,j} = \frac{1}{\rho_f} \frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i+1,j}}{2} (p'_{i,j} - p'_{i+1,j}) \Delta z_f \quad (3.52)$$

$$a_P u'_{zi,j} = \frac{1}{\rho_f} \frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i,j+1}}{2} (p'_{i,j} - p'_{i,j+1}) \Delta y_f \quad (3.53)$$

とおくと, 次式が得られる．

$$u'_{yi,j} = \frac{1}{a_P \rho_f} \frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i+1,j}}{2} (p'_{i,j} - p'_{i+1,j}) \Delta z_f \quad (3.54)$$

$$u'_{zi,j} = \frac{1}{a_P \rho_f} \frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i,j+1}}{2} (p'_{i,j} - p'_{i,j+1}) \Delta y_f \quad (3.55)$$

式(3.54), (3.55)を式(3.44), (3.45)に戻し, 離散化された連続の式(3.42)に代入して整理すると次式が得られる．

$$c_P p'_{i,j} = c_E p'_{i+1,j} + c_w p'_{i-1,j} + c_N p'_{i,j+1} + c_S p'_{i,j-1} + b \quad (3.56)$$

ただし,

$$c_E = \frac{1}{\rho_f a_{Pyi,j}} \left(\frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i+1,j}}{2} \right)^2 \Delta z_f^2 \quad (3.57)$$

$$c_W = \frac{1}{\rho_f a_{Pyi-1,j}} \left(\frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i-1,j}}{2} \right)^2 \Delta z_f^2 \quad (3.58)$$

$$c_N = \frac{1}{\rho_f a_{Pzi,j}} \left(\frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i,j+1}}{2} \right)^2 \Delta y_f^2 \quad (3.59)$$

$$c_S = \frac{1}{\rho_f a_{Pzi,j-1}} \left(\frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i,j-1}}{2} \right)^2 \Delta y_f^2 \quad (3.60)$$

$$c_P = c_E + c_W + c_N + c_S \quad (3.61)$$

$$b = \frac{\varepsilon^0 - \varepsilon}{\Delta t_f} \Delta y_f \Delta z_f - \frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i+1,j}}{2} u_{yi,j}^* \Delta z_f + \frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i-1,j}}{2} u_{yi-1,j}^* \Delta z_f \\ - \frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i,j+1}}{2} u_{zi,j}^* \Delta y_f + \frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i,j-1}}{2} u_{zi,j-1}^* \Delta y_f = 0 \quad (3.62)$$

である．ここで b は u_y^* , u_z^* に対する離散化された連続の式そのものであるから，もし u_y^* , u_z^* が正しい値であれば $b = 0$ となるはずである． $b \neq 0$ ならば，式 (3.56) を解くことにより得られる圧力補正值 p' から新しい圧力 p が次の圧力補正式から得られる．

$$p_{i,j} = p_{i,j}^* + p'_{i,j} \quad (3.63)$$

さらに速度補正式は次式で与えられる．

$$u_{yi,j} = u_{yi,j}^* + \frac{1}{\rho_f a_{Pyi,j}} \frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i+1,j}}{2} (p'_{i,j} - p'_{i+1,j}) \Delta z_f \quad (3.64)$$

$$u_{zi,j} = u_{zi,j}^* + \frac{1}{\rho_f a_{Pzi,j}} \frac{\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i,j+1}}{2} (p'_{i,j} - p'_{i,j+1}) \Delta y_f \quad (3.65)$$

これらの値を用いて運動方程式に戻り，これらの手続きを $b = 0$ が満たされるまで繰り返す．ただし実際には，計算の発散を防いだり収束速度を高める目的から，緩和係数 α_R を用いて次式のように補正した．

$$p = p^* + \alpha_R p' \quad (3.66)$$

$$u_y = u_y^* + \alpha_R u_y' \quad (3.67)$$

$$u_z = u_z^* + \alpha_R u_z' \quad (3.68)$$

緩和係数 α_R については $\alpha_R > 1$ となるような過緩和， $0 < \alpha_R < 1$ となるような不足緩和がある．本計算では計算が安定に進む場合には過緩和とし，計算の収束が厳しくなると不足緩和とした．

3.3.4 線形代数方程式の解法

次に式 (3.29)，(3.33) および (3.56) のような離散化方程式を解く方法について述べる．離散化方程式で解かれる変数，つまり流体速度や圧力などをまとめてここでは ϕ で表すことにする． ϕ が定義されている格子点の y 軸あるいは z 軸に沿った列を選定し，その列に隣接する格子点列の ϕ が最新のものとして既知であると仮定すれば，対象としている列の格子点の方程式は，変数が2つ減って1次元に対する方程式の形をとる．さらに列の端の格子点に関する離散化方程式では，壁面などの境界条件を用いることによって変数を2つに削減できる．この格子点列に関する連立1次方程式を行列で表すと，係数行列は次に示すような三重対角行列になる．

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & & & & & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & & & & \\ & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & & & \\ & & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \emptyset & & & & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & & & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \vdots \\ \phi_{n-1} \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ a_{3,n+1} \\ a_{4,n+1} \\ \vdots \\ a_{n-1,n+1} \\ a_{n,n+1} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

三重対角行列の対角化はTDMA(Tri - Diagonal Matrix Algorithm) 法⁽¹⁰⁾を用いて行った．これを1方向のすべての列に対して行い，次に同様の作業を別の方向の列についても行い，収束するまで列の方向を変えて繰り返した．このように掃引する方向を交互に入れ替えて収束される手法をADI法という．

壁面や流入出などの境界条件が与えられる場合には1つの格子点列に対する連立方程式は式 (3.69) で与えられ，TDMA 法を用いることができた．しか

し周期境界条件を用いる場合には，対象となる格子点列の端の点に関する離散化方程式において変数を減らすことができず，反対端の点の ϕ に係数がついた項が残ることになる．その連立方程式を行列で表すと次式のようなる．

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & & & & & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & & & & \emptyset \\ & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & & & \\ & & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \emptyset & & & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & & & & & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \vdots \\ \phi_{n-1} \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ a_{3,n+1} \\ a_{4,n+1} \\ \vdots \\ a_{n-1,n+1} \\ a_{n,n+1} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

この行列の対角化にはTDMA法ではなくCyclic TDMA法⁽²²⁾を用いる．

3.3.5 SIMPLE 法のアルゴリズム

以上の手続きを用いることにより圧力場および速度場を求める方法をSIMPLE法という．そのアルゴリズムについてまとめる．

- (1) まず圧力場の初期値 p^* を適当に推測する．
- (2) 圧力場 p^* に対して運動方程式(3.29), (3.33)を解き速度成分 u_y^* , u_z^* を求める．
- (3) 式(3.56)より圧力補正值 p' を計算する．
- (4) 圧力補正式(3.66)から圧力 p を，速度補正式(3.67), (3.68)から速度成分 u_y , u_z を求める．
- (5) 連続の式を満たすかどうか判定し，収束していなければ(1)戻って計算を繰り返す．

このアルゴリズムをフローチャートにまとめたものをFigure 3.5に示す．

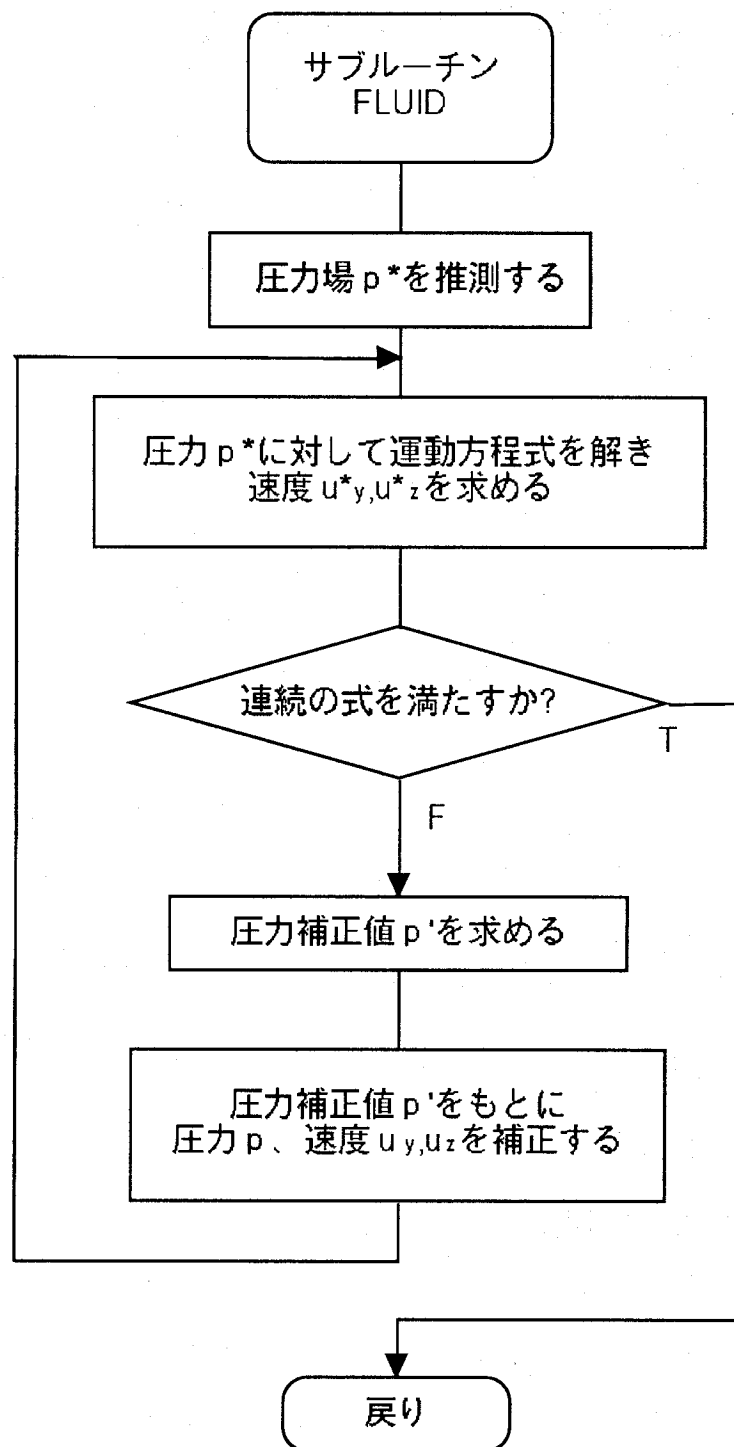


Figure 3.5: SIMPLE のフローチャート

第4章 無重力真空空間における粒子分散系のクラスター形成

4.1 はじめに

緒論でも述べたように、流体の作用のない場合に粒子間の非弾性衝突によってクラスターが発生することが知られている⁽¹¹⁾。本研究で取り扱う固気二相流の不安定流動においても粒子間衝突は頻繁に生じることから、非弾性衝突によって生じるクラスターの構造や特徴は流れ場中のクラスター形成を考えるうえで重要となる。本章では流れ場中のクラスターを取り扱う前に、より単純な無重力真空空間において非弾性衝突の影響によって発生するクラスターを取り扱い、その特徴を調べる。

本章では重力と流体力が作用せず固体壁面がない場における粒子運動を考えるので、粒子の運動状態は粒子間衝突のみにより変化する。よって現象の空間スケールおよび時間スケールはそれぞれ粒子の平均自由行程 λ 、平均自由時間 τ に依存することは容易に理解できる。本章では距離と時間を、初期状態における平均自由行程 λ 、平均自由時間 τ で無次元化して現象を取り扱った。

4.2 計算条件

計算領域は周期境界で囲まれた2次元の正方形の領域である。計算条件をTable 4.1に示す。 N_{all} は計算領域に含まれるシミュレーション粒子の総数を示している。本章では粒子の回転は考慮せず、粒子間衝突時に摩擦は働かないものとした。Table 4.1において計算領域の大きさ L^* および粒径 d_p^* は、初期状態における平均自由行程 λ で無次元化されている。以下無次元化されている変数には*を右肩に付した。粒子は完全な球形として取り扱われ、場に存在する粒子はすべて同一のものであるとした。ここでは粒径 d_p^* を0.01とした

が、他の値を用いたとしても、平均自由行程 λ と平均自由時間 τ で無次元化された空間においては衝突頻度や衝突するまでに移動する行程は全く同一のものとなる。つまり粒子分布の空間構造は d_p^* の値にかかわらず同じものとなる。ただし d_p^* と平均粒子濃度 $\bar{\alpha}_p$ の間には次式の関係が成り立ち、

$$\bar{\alpha}_p = \frac{d_p}{6\sqrt{2}\lambda} = \frac{d_p^*}{6\sqrt{2}} \quad (4.1)$$

d_p^* を変化させると濃度の大小は異なってくるが、平均濃度で無次元化するとこれも全く同じものとなる。式(4.1)で与えられた平均粒子体積率 $\bar{\alpha}_p$ から、一つのシミュレーション粒子が代表する実在粒子の数 α は次式で与えられる。

$$\alpha = \frac{\bar{\alpha}_p L^{*2}}{V_p^* N_{all}} \quad (4.2)$$

と表される。

計算領域を 50×50 のセルに等分割して計算を行った。初期状態において粒子を計算領域に均質に分布させ、等方的な変動速度成分を与えた。

Table 4.1: 計算条件

L^*	200
N_{all}	100000
d_p^*	0.01
e_p	1,0.94,0.5,0.1

4.3 計算結果

Figure 4.1に反発係数 $e_p=0.94$ の場合の計算結果を示す。図において時間 t^* は初期状態における平均自由時間で無次元化された無次元時間である。 $t^*=1000$ の時、粒子濃度にむらが生じていることがわかる。時間進行とともにむらが発達しクラスターが形成される様子が観察できる。Figure 4.2とFigure 4.3に反発係数 $e_p=0.5$ と反発係数 $e_p=0.1$ の場合の計算結果を示す。両者とも $t^*=300$ の時には粒子濃度にむらが生じていることがわかる。反発係数

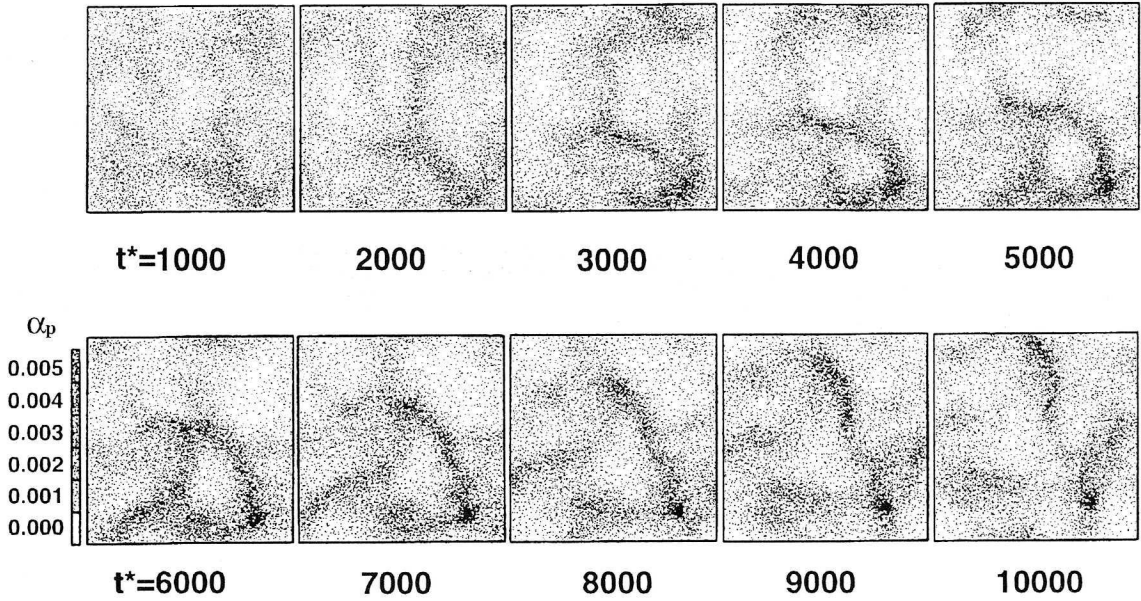


Figure 4.1: 濃度分布の時間的变化 ($e_p=0.94$)

$e_p=0.94$ の場合よりクラスターの空間スケールが小さく、数も多くなっており、クラスター同士は紐状のネットワーク構造を形成して繋がりあっている。また濃度むらの成長は $e_p=0.94$ の場合よりもずっと速くなっている。この濃度分布の図からでは反発係数 $e_p=0.5$ の場合と反発係数 $e_p=0.1$ の場合に大きなパターンの違いは見られなかった。

次に Figure 4.4 に濃度むらが生じる初期の段階における濃度分布をいくつかの e_p に対して示す。この図から初期に生じる濃度むらの空間スケールも反発係数の大きな場合には大きく、小さな場合には小さくなっていることがわかる。以上の4つの図から、クラスターの空間分布は初期に生じる濃度むらの空間分布に依存していることがわかる。まず集中度の低い濃度むらが形成されて、ほぼ同じ位置で粒子集中が進展してクラスターへと成長している。

いままで示した結果から反発係数 e_p が 0.94 から 0.5 へと小さくなる段階での違いは明確に濃度分布に表れているが、 e_p が 0.5 の場合と 0.1 の場合の違いは明確ではない。そこで定量的に評価するために、濃度変動の強さを示す変数を次式で定義した。

$$C_o = \frac{\sqrt{(\alpha_{p\ i,j} - \overline{\alpha_p})^2}}{\overline{\alpha_p}} \quad (4.3)$$

ここで $\overline{}$ は取り扱う時刻の空間平均を示しており、 $\alpha_{p\ i,j}$ は粒子運動の計算セル (i,j) における粒子濃度を表している。各時刻に対して C_o を求め、その時間的変化を調べた。その結果をFigure 4.5に示す。この図から反発係数 e_p が0.7から1.0の範囲では e_p の小さな場合の方が濃度むらの成長速度が大きくなっていることは明らかである。反発係数 e_p が0.7より小さくなると e_p によって成長速度はそれほど大きく変化していない。

クラスターの形成は以下に示すことから説明できる。粒子濃度分布が完全に一樣になることはありえず、少なからずむらが存在する。濃度が高い部分では、低い部分と比べて多くの衝突が起こる。粒子間衝突が非弾性的の場合には衝突時に粒子はエネルギーを失うから、運動は鈍くなる。逆に低い部分では衝突が少なく粒子運動は濃度が高い部分と比べて活発である。これらのことから濃度の高い部分では出ていく粒子が少なく、低い部分では出ていく粒子が多くなる。また濃度の高い部分に入ってきた粒子は衝突を経てエネルギーを失い、運動は鈍くなる。以上のような過程で、濃度の高い部分では新たに粒子を取り込み濃度はますます高くなる。、このようにしてクラスターは成長すると考えられる。

粒子間衝突時のエネルギー消散が小さいと粒子群は比較的大きな反発力を持ち、粒子集中が起こりにくい。完全弾性衝突の場合はこの典型である。逆にエネルギー消散が大きな場合には粒子群の反発力は小さく、粒子は衝突後大きく速度を落とすため、粒子は集中しやすい。以上のことによって、反発係数の違いによるクラスタースケールの大小が説明できる。

4.4 むすび

無重力真空空間に粒子が均質に分布した状態から、非弾性衝突の影響によって形成されるクラスターの数値シミュレーションを行った。その結果を以下にまとめる。

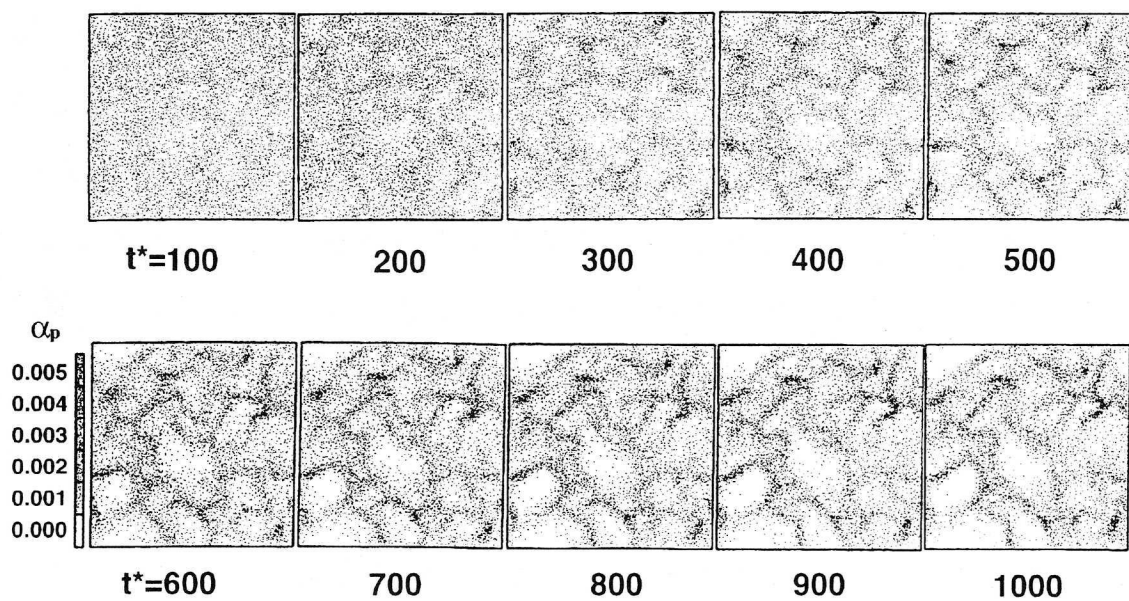


Figure 4.2: 濃度分布の時間的变化 ($e_p=0.5$)

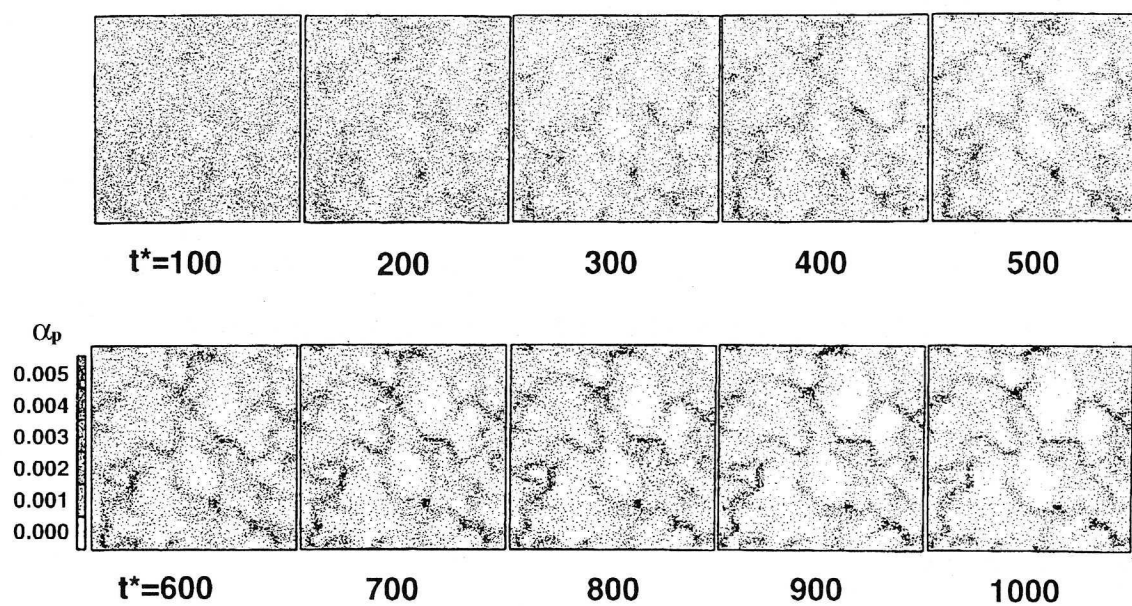


Figure 4.3: 濃度分布の時間的变化 ($e_p=0.1$)

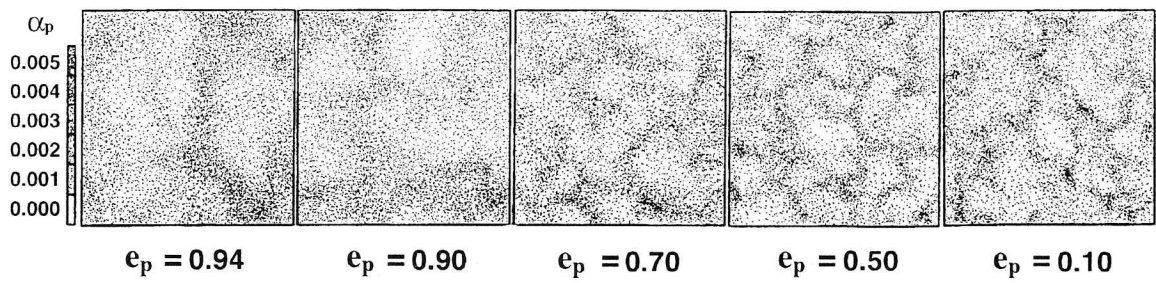


Figure 4.4: 反発係数による濃度むらのパターンの変化

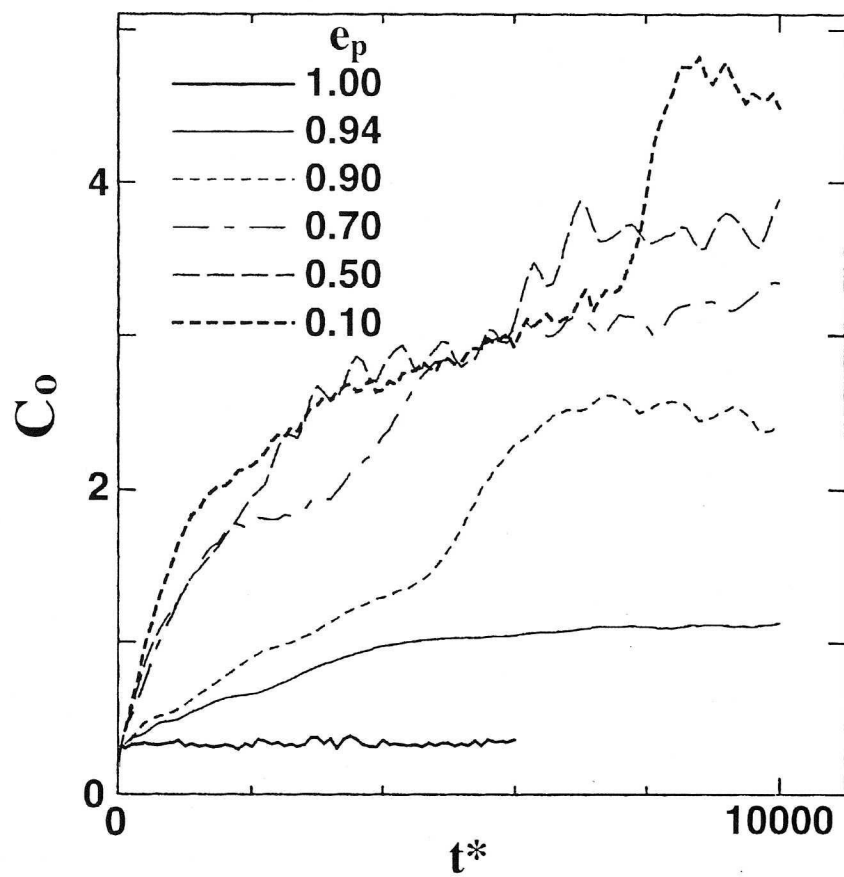


Figure 4.5: 濃度変動の時間的变化

- (1) 粒子間衝突時のエネルギー消散が大きいほど、クラスターの発達は速く、粒子は集中し、クラスターの空間スケールは小さくなった。
- (2) エネルギー消散が大きい場合には主として紐状のクラスターが形成され、それぞれが繋がり合ってネットワークのような構造を示した。
- (3) 本章の計算は長さスケールを平均自由行程で無次元化してあることから、非弾性衝突によって形成されるクラスターの空間スケールは平均自由行程の大きさに比例する。

第5章 固気二相流のクラスター形成と流動の不安定化

5.1 はじめに

本章では，粒子の安定に分散した流れから不安定な分散流への流動状態の変化の機構を調べるため，2次元鉛直流路内を上向きに流れる慣性の大きな粒子を含む固気二相流について流れの数値シミュレーションを行なった．その結果，気流速度が小さな領域でクラスターが形成され，不安定な流動が得られた．その不安定流動の特性を調べ，クラスターの成長が粒子間衝突の特性に依存する結果が得られたことを示す．また流路幅などの条件による流動パターンの変化とその特徴について述べる．

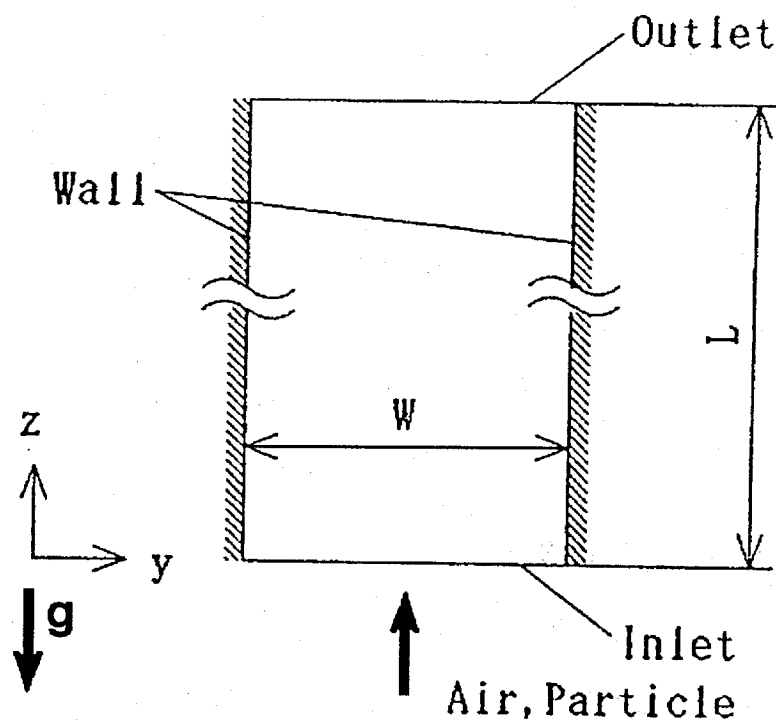


Figure 5.1: 計算領域

5.2 流入および流出境界の取り扱い

計算を行った流路の概要を Figure 5.1 に示す。

シミュレーション粒子は下部の流入境界から投入され、上部の流出境界から流出していく。初期状態では計算領域に粒子はない。粒子流入部ではシミュレーション粒子を各時間ステップ Δt_p ごとに一定の粒子数 N_{IN} ずつ投入し、流入境界上の粒子流入位置は乱数を用いて分布が一様となるように与えた。粒子投入時の粒子速度は、 z 方向の入口平均粒子速度 V_I に一定の大きさ v'_I をもつ等方的変動速度成分を加えて与えた。流入時の粒子の角速度は零とした。

計算では流入境界における粒子の質量流束 Q_p が条件として与えられた。Figure 5.1 の計算領域において粒子の運動の紙面に垂直方向の領域として単位長さの奥行きを考えることにする。流入境界における粒子の質量流束 Q_p は

$$Q_p = \alpha \frac{m N_{IN}}{W \Delta t_p} \quad (5.1)$$

と表される。ここで W は Figure 5.1 に示される流路幅、 α は 1 個のシミュレーション粒子が代表する実在粒子の数を表す。これより α は次式で与えられる。

$$\alpha = \frac{Q_p W \Delta t_p}{m N_{IN}} \quad (5.2)$$

3.2 節で述べるように粒子体積率や気相が固相から受ける力などを考える際に標本粒子の寄与には α の重み付けがなされる。

5.2.1 流体計算の境界条件

本章の計算では、左右境界は壁面であり、壁面からは空気の流入出がないので、壁面の外側に鏡像をおいた。壁面における境界条件は以下の通りである。計算領域内の y 方向、 z 方向の流体計算セル (コントロール・ボリューム) の数をそれぞれ i_{max}, j_{max} とした。

$$\begin{aligned}
u_{y0,j} &= u_{yimax,j} = 0 \\
u_{z0,j} &= u_{z1,j} \\
u_{zimax+1,j} &= u_{zimax,j} \\
\varepsilon_{0,j} &= \varepsilon_{1,j} \\
\varepsilon_{imax+1,j} &= \varepsilon_{imax,j} \\
p_{0,j} &= p_{1,j} \\
p_{imax+1,j} &= p_{imax,j}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

流入境界では，気流は一様に流入すると考え， y 軸方向に速度を持たないとした．

$$\begin{aligned}
u_{yi,0} &= 0 \\
u_{zi,0} &= U/(\varepsilon_{i,0} + \varepsilon_{i,1}) \\
\varepsilon_{i,0} &= \varepsilon_{i,1}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

流出境界では，流れ方向の速度勾配を0とした．よって境界条件は次の通りである．

$$\begin{aligned}
u_{yi,jmax+1} &= u_{yi,jmax} \\
u_{zi,jmax+1} &= u_{zi,jmax} \\
\varepsilon_{i,jmax+1} &= \varepsilon_{i,jmax} \\
p_{i,jmax+1} &= 0
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Table 5.1: 計算条件

$\Delta t_p, \Delta t_f$ (s)	5×10^{-4}
L (m)	2
W (m)	0.08, 0.3
ρ_f (kg/m ³)	1.205
μ (kg/m · s)	1.81×10^{-5}
d_p (μm)	500
ρ_p (kg/m ³)	2620
$ \mathbf{V}_I $ (m/s)	0.4
v'_I (m/s)	0.2

5.3 計算条件

主要な計算条件を Table 5.1に示す．本計算では固相計算の時間ステップ Δt_p と流体計算の時間ステップ Δt_f を同じ値とし，1回ずつ同時に計算した．流体の物性としては20℃，1気圧の空気のもので仮定されている．この条件では

粒子の終速度は3.7m/sとなる．計算領域は固気両相とも y 方向に 20, z 方向に 100 に等分割して計算を行った． N_{IN} は 25 個を標準とし，気流速度が 8m/s 以上の場合では 50 個とした．定常状態に達した状態での計算領域内のシミュレーション粒子数はおよそ 5 万～12 万個程度であり，最低の気流速度である $U=5\text{m/s}$ の場合でおよそ 10 万～12 万個となった．予備的に，シミュレーション粒子数がさらに少数の場合や，セル分割が粗い場合についても計算を行ったが流動パターンの特徴に関して本章に示す結果との間に本質的な違いは見られなかった．

前章で述べた無重力真空空間におけるクラスターの形成は粒子が持つ変動速度のエネルギーが非弾性衝突によって減衰することが原因であった．本章ではクラスター形成に対する粒子の衝突特性の影響を調べるため，粒子間衝突時の反発係数 e_p ，摩擦係数 μ_{Fp} および壁面衝突時の反発係数 e_w ，摩擦係数 μ_{Fw} を変化させた．またクラスター形成に変動速度のエネルギー減衰が関与しているとすると，逆に変動速度にエネルギーを与えると不安定化は緩和されるはずである．ここでは粒子の変動速度にエネルギーを与えた場合の影響も調べるため，壁面を鉛直に固定された平面であると考える他に，次に示す不規則な反発を与える粗面壁モデルを用いた．Figure 5.2 に示すように壁面の法線ベクトルを天頂角 θ で鉛直方向に傾け，さらに壁面からみて時計と反対回りに方位角 ϕ で回転させた．ここで θ と ϕ は一様乱数 R_{ND1} ($0 \leq R_{ND1} < 1$), R_{ND2} ($0 \leq R_{ND2} < 1$) を用いて次式で与えた． $\theta = \theta_{max} R_{ND1}$ $\phi = 2\pi R_{ND2}$ ただし，壁面衝突後の粒子が壁面方向の速度を持つ場合はふたたび θ を与えなおした．

反発係数，摩擦係数および θ_{max} の一覧を Table 5.2 に示す．ここで $\theta_{max}=0$ というのは壁面が鉛直に固定された平面であることを示している．

Table 5.2: 反発係数，摩擦係数および θ_{max}

条件	e_p	μ_{Fp}	e_w	μ_{Fw}	θ_{max}
1	0.94	0.28	0.94	0.28	0
2	1.0	0.28	0.94	0.28	0
3	1.0	0	0.94	0.28	0
4	0.5	0.28	0.94	0.28	0
5	0.94	0.28	0.94	0	0
6	0.94	0.28	1	0	0
7	0.94	0.28	1	0	5
8	0.94	0.28	1	0	10
9	0.94	0.28	1	0	20
10	0.94	0.28	1	0	30

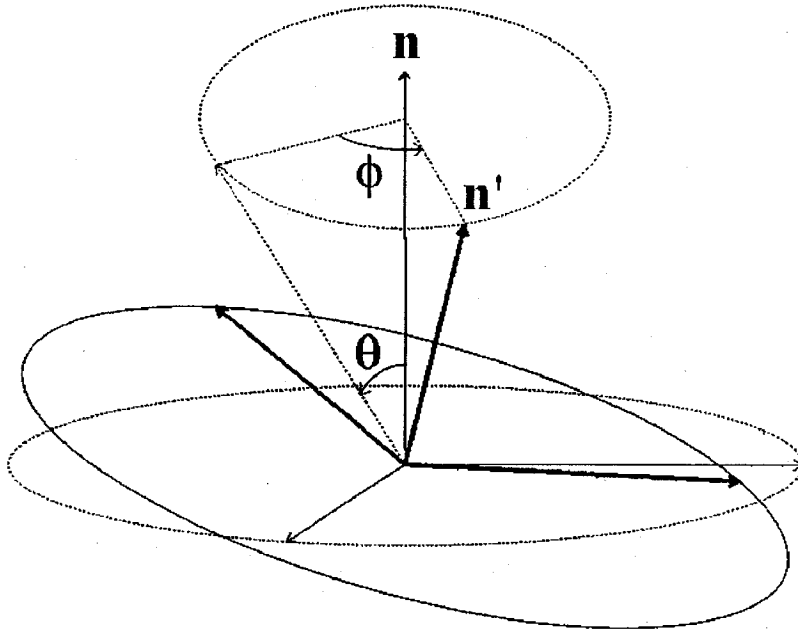


Figure 5.2: 粗面壁モデル

5.4 計算結果

5.4.1 流れの不安定化

Figure 5.3に流路幅 $W = 0.08\text{m}$, 粒子質量流束 $Q_p = 25\text{kg/m}^2\text{s}$, 条件1で気流の空塔速度 $U = 8.0\text{m/s}$ の場合の流動状態を示す. 左から粒子濃度分布, 粒子速度分布, 気流速度分布を表している. 下部の流入口から粒子及び気体が流入する. 粒子濃度分布における点は1つ1つの粒子を表すのではなく, 濃度に比例してプロットしたものである. 左端に粒子濃度分布の指標を示した. これらの図は縦方向のスケールが圧縮されており, 計算領域全体が表示されている. 同様の表現が以下の結果の表示にも用いられる. この場合には Figure 5.3 に示されるように濃度分布は一様であり, 気流への粒子の影響はなく, ほぼ一様に流れた.

これに対して空塔速度を $U = 5\text{m/s}$ と小さくして, それ以外の条件が Figure 5.3と同じ場合の流動状態を Figure 5.4に示す. この条件では以下に示すように不安定な流れとなった. この条件では粒子濃度分布にむらが発生し, このむらが発達して Figure 5.4に見られるようなクラスターが形成された. 気流速度分布および粒子速度分布はこのような粒子濃度の不均一の影響を強く受け, 高濃度のクラスターの部分では大きく減速している.

さらに Figure 5.4の条件から粒子質量流束のみを $Q_p = 5\text{kg/m}^2\text{s}$ と小さくした場合の流動状態を Figure 5.5に示す. ここでは粒子濃度の指標が上述の条件と異なり, 濃く表示している. 粒子濃度にむらが生じているが, 気流に対する影響は大きくなく流れは安定である.

流動の不安定化がどのように進行するか調べるため, Figure 5.4に示されたクラスターが形成されている場合の濃度分布の時間的变化を Figure 5.6に示す. 流入部で一様に分散して流入した粒子の濃度にむらが現れ, それが発達して高濃度のクラスターが形成されてゆく様子が観察できる. クラスターが形成されている領域では, 流れは時間的にも空間的にも大きな変動を伴う不安定な挙動を示している. 図から, この条件ではクラスターが壁面付近

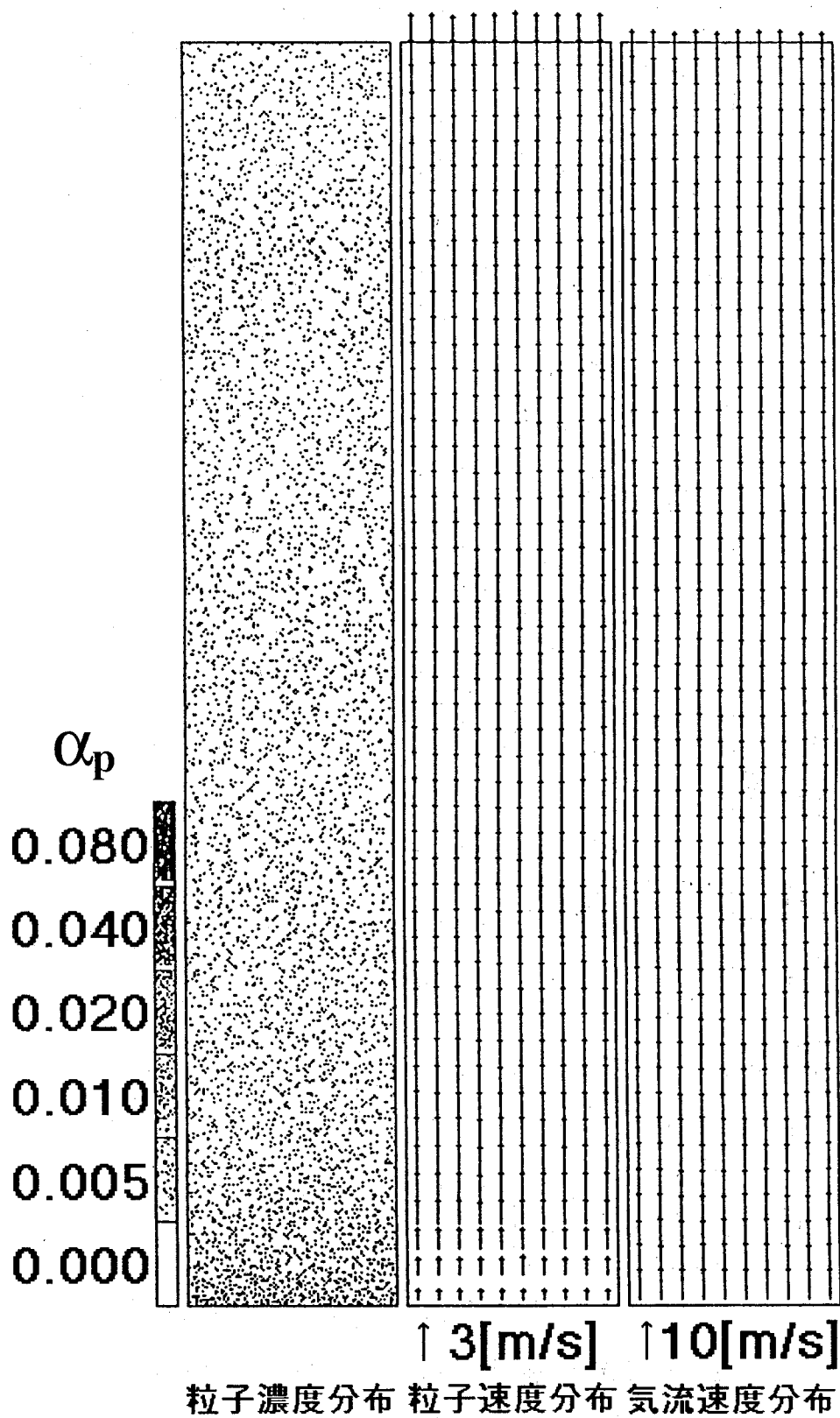


Figure 5.3: 流動状態 ($W=0.08\text{m}$, $U=8\text{m/s}$, $Q_p=25\text{kg/m}^2\text{s}$, 条件 1)

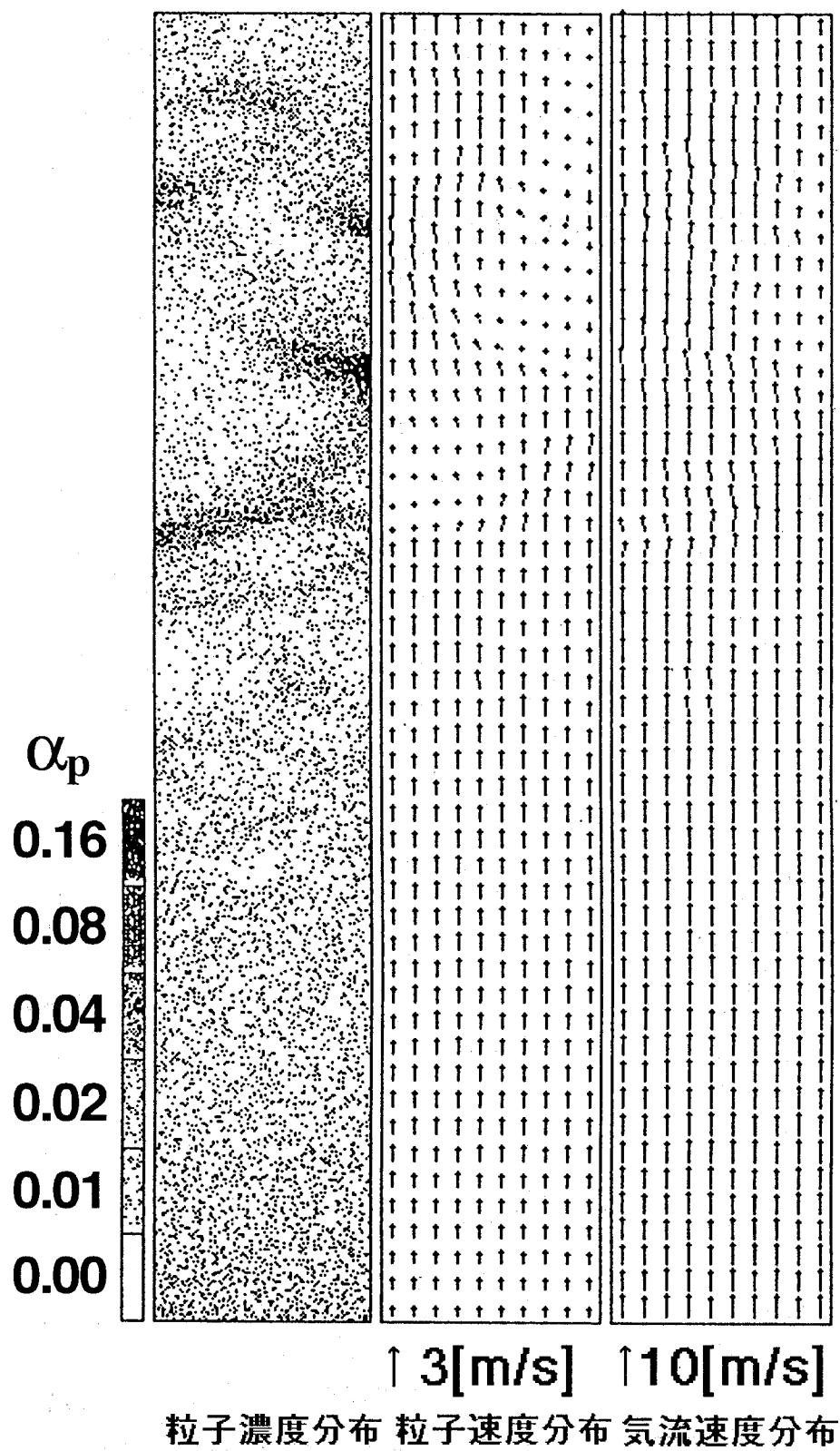


Figure 5.4: 流動状態 ($W=0.08\text{m}$, $U=5\text{m/s}$, $Q_p=25\text{kg/m}^2\text{s}$, 条件 1)

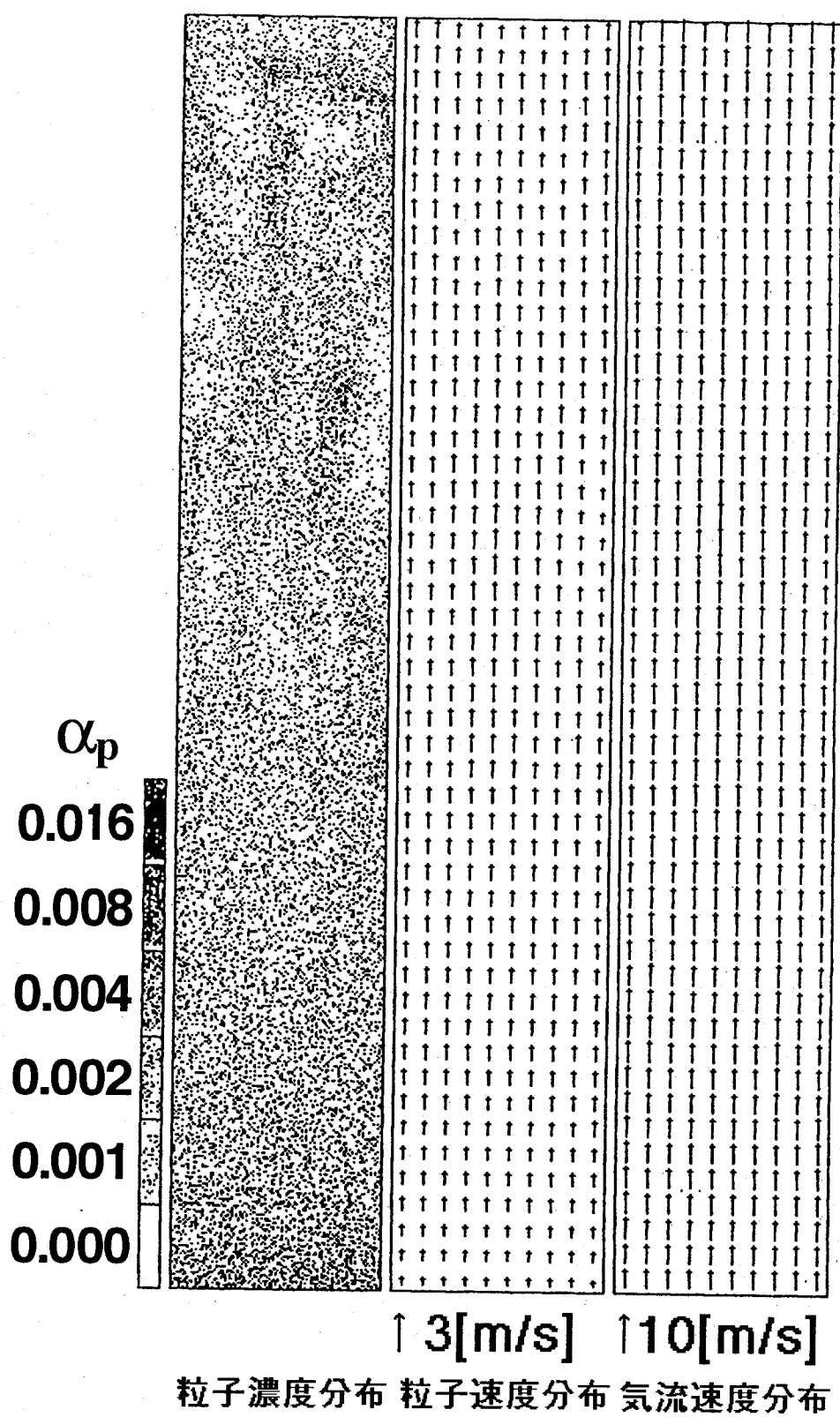


Figure 5.5: 流動状態 ($W=0.08\text{m}$, $U=5\text{m/s}$, $Q_p=5\text{kg/m}^2\text{s}$, 条件 1)

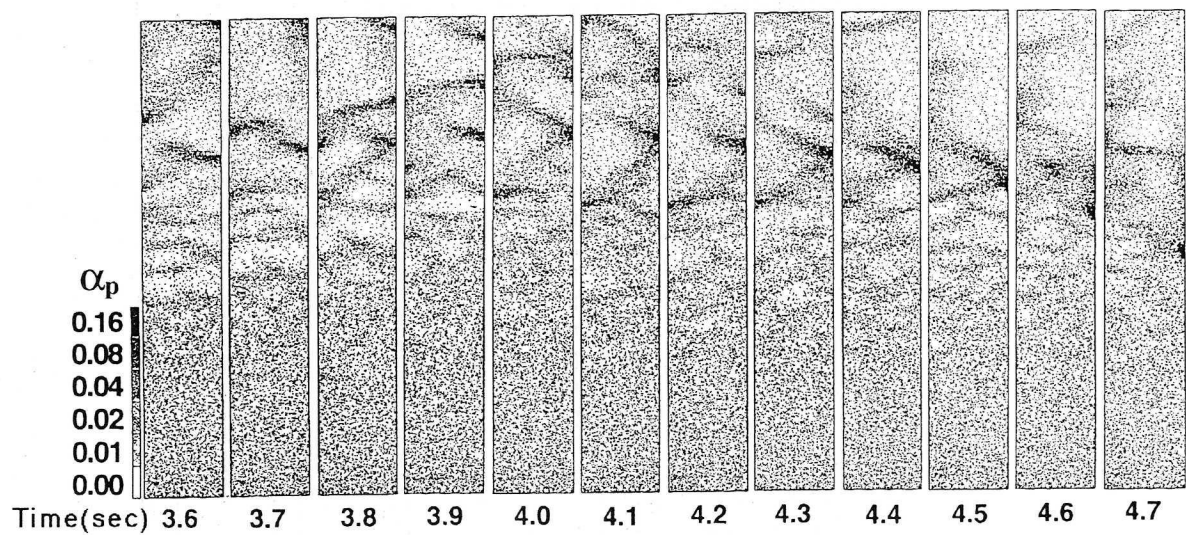


Figure 5.6: 濃度分布の時間的変化 ($W=0.08\text{m}$, $U=5\text{m/s}$, $Q_p=25\text{kg/m}^2\text{s}$, 条件 1)

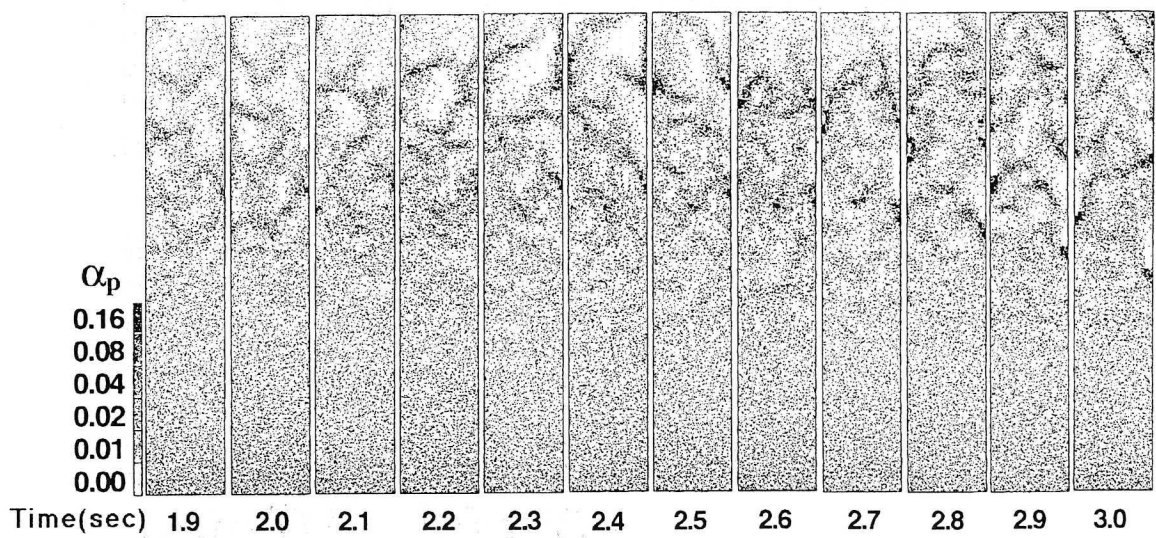


Figure 5.7: 濃度分布の時間的変化 ($W=0.3\text{m}$, $U=5\text{m/s}$, $Q_p=25\text{kg/m}^2\text{s}$, 条件 1)

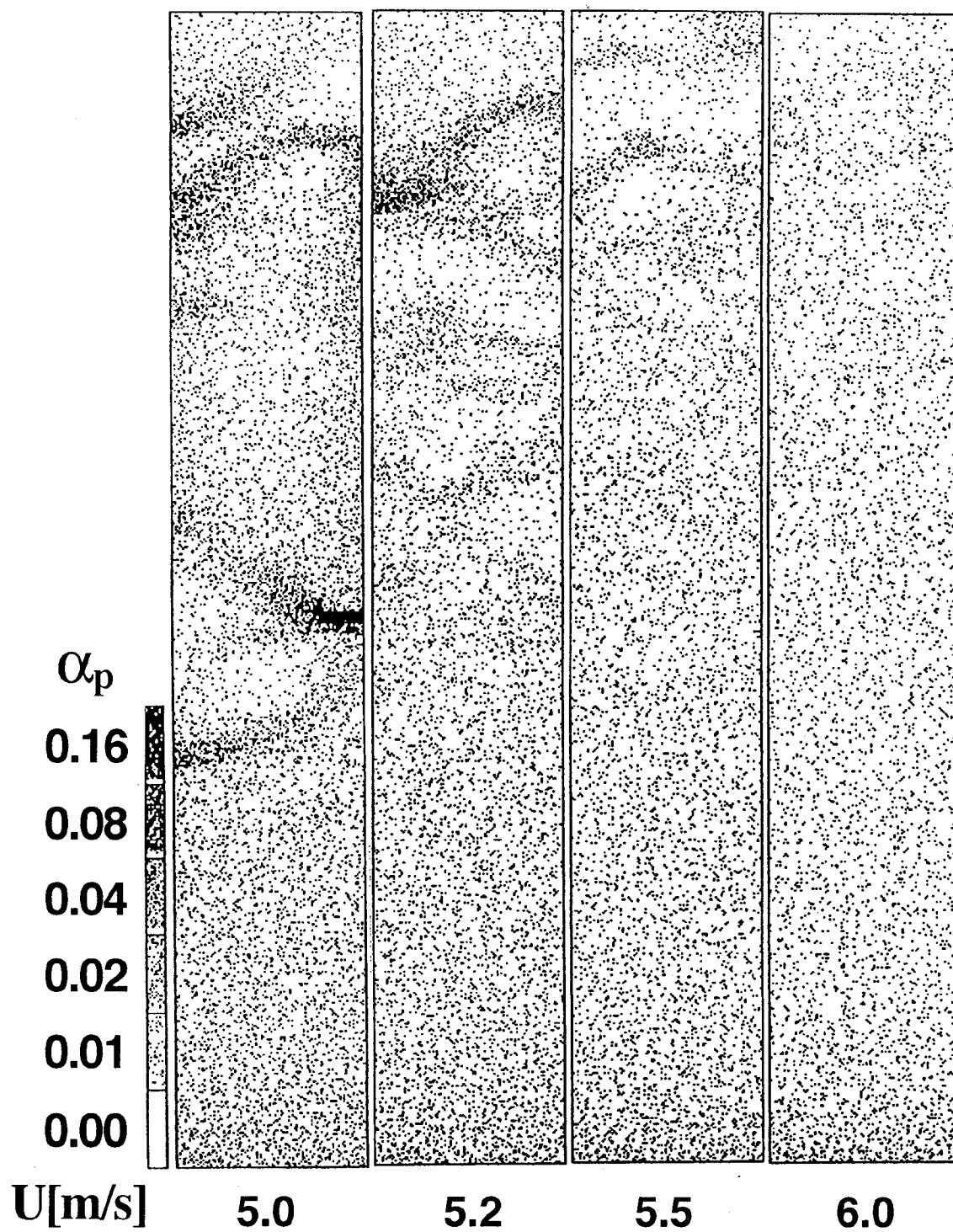


Figure 5.8: 気流速度による流動パターンの変化 ($W=0.08\text{m}$, $Q_p=25\text{kg/m}^2\text{s}$)

に形成され易いことが分かる．また，複数のクラスターが合体してさらに濃度の高いクラスターが形成される様子や，一度形成されたクラスターが消失する過程が観察される．とくに濃度の高いクラスターでは壁面に沿って下降しているものもある．

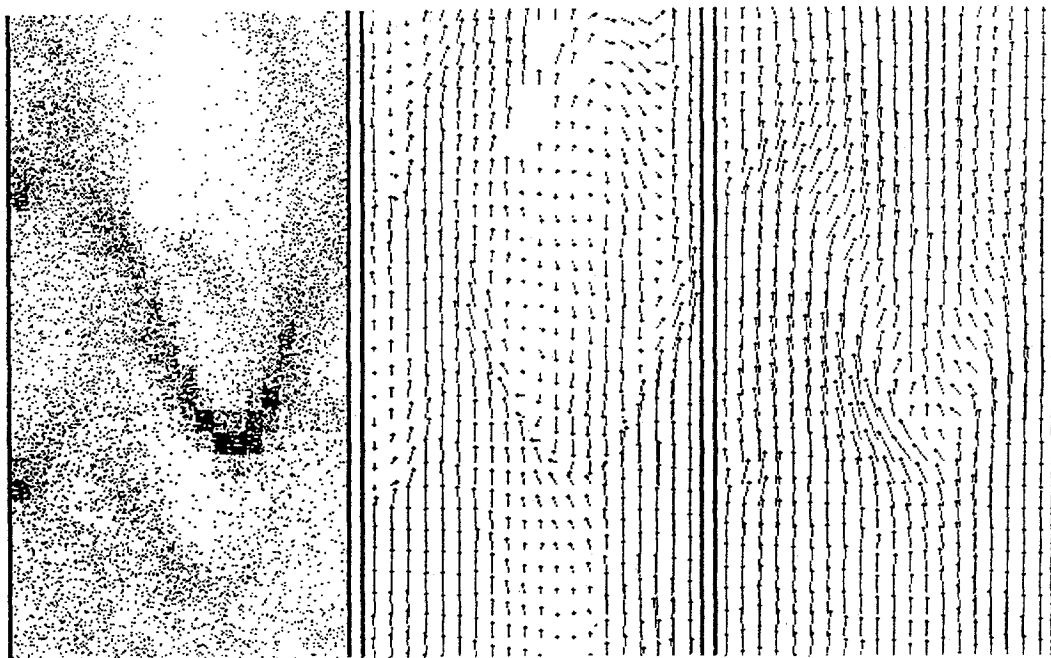
次に流路幅を $W=0.3\text{m}$ として，それ以外は Figure 5.4 と同じ条件の場合の濃度分布の時間的变化を Figure 5.7 に示す．流路幅 $W=0.08\text{m}$ の場合は壁付近でクラスターが発生し易かったが，ここでは流路中央部でもクラスターが形成されている．このことから壁付近のみでクラスターが形成されるのではなく，壁付近で安定に存在し易く，流路中央部でクラスターが形成されても流路幅が小さな場合すぐ壁に押しやられてしまうのであると考えられる．

次に，気流速度が低下することによって安定な流れが不安定な流れに変化する様子を Figure 5.8 に示す．流路幅 $W=0.08\text{m}$ ，粒子質量流束 $Q_p=25\text{kg/m}^2\text{s}$ の場合に Table 5.2 の条件 1 で気流の空塔速度 U を 5.0m/s から 6.0m/s まで変化させている． $U=6.0\text{m/s}$ の場合は安定に流れているが， 5.5m/s ， 5.2m/s と低流速になるにつれて濃度むらが発達していることが観察される．

以上の計算とは別に，Figure 5.6 と同じ条件で，ここでは結果の図を省略するが，流体が粒子の影響を受けずに一様に流れると考えた場合と粒子間衝突が起これないと仮定した場合についてもシミュレーションを行った．前者の場合，粒子は良好な分散状態を保って流れた．後者の場合，気流速度分布は粒子の影響を受けて流路の片側に安定的に偏った流れとなり，その反対側では粒子の安定した下降流が形成された．以上のことから Figure 5.6 で観察されるクラスター形成と不安定流動に対して，気流に対する粒子の影響と粒子間衝突が重要な役割を果たしていることが分かった．

5.4.2 クラスターの構造

$W=0.3\text{m}$ の場合に得られた濃度分布のパターンと，この場合の典型的なクラスター周辺の流れの詳細を Figure 5.9 に示す．ただしここではクラスター周



粒子濃度分布

粒子速度分布

気流速度分布

Figure 5.9: クラスタ周辺の流れ ($W=0.3\text{m}$, $U=5\text{m/s}$, $Q_p=25\text{kg/m}^2\text{s}$, 条件 1)

辺の流れの詳細図は流れ方向のスケールは圧縮されておらず、両方向に等縮尺で表示されている。 $W=0.08\text{m}$ の場合には壁面付近にしかクラスタが形成されなかったのに対して、 $W=0.3\text{m}$ の場合では壁面付近の他に流路の中央部に図のようなV字形のクラスタが形成された。粒子の抵抗により高濃度のクラスタ内とその後流部で気流速度が減少しており、これに対応してクラスタ後流部では粒子が下降している。このためクラスタの中央部では上下から粒子が供給され、衝突を通してクラスタに吸収されている。一方、V字型に延びたクラスタの尾からは粒子が運び去られている。

5.4.3 クラスタ形成に対する非弾性衝突と摩擦の効果

以上のように流れの不安定化には濃度むらの成長とクラスタの形成が重要な役割を果たす。粒子のクラスタは流体の作用のない場合に粒子間の

非弾性衝突によっても発生することが知られているということを緒論で述べ、前章で実際に数値シミュレーションを行ってクラスターの形成を確認した。この非弾性衝突によるクラスター形成は本質的には衝突による運動エネルギーの消散により引き起こされるものである。そこで、非弾性衝突と粒子間の摩擦が流れ場中のクラスターの形成に及ぼす影響を調べた。

Figure 5.10に粒子間の反発係数 e_p と摩擦係数 μ_{Fp} を変えた場合の濃度分布の変化を示す。 $e_p = 1, \mu_{Fp} = 0$ の条件では粒子間衝突によるエネルギー散逸はない。Figure 5.10のようにこの場合にも流れは不安定となるが、他の場合に比べてクラスターの発達抑制されている。 $e_p = 1, \mu_{Fp} = 0.28$ の条件でも発達したクラスターが形成されており、摩擦の効果のみによってもクラスターの発達が促進されることが分かる。

しかしこのような濃度分布の図の比較だけでは、濃度変動の大小を明確に判定できない。そこで前章と同様に濃度変動の強さを示す変数 C_o を導入する。ただし前章では瞬間の濃度分布からその時刻における濃度変動の強さを求め、時間進行を調べたが、ここでは流れが発達している状態における濃度変動の強さを調べた。 C_o は次式で与えた。

$$C_o = \frac{\sqrt{(\alpha_{p,i,j} - \bar{\alpha}_p)^2}}{\bar{\alpha}_p} \quad (5.6)$$

前章で用いた C_o と異なる点は、前章では $\bar{\alpha}_p$ がただ単に空間平均を表したのに対し、ここでは発達した流れが達成されている時間と空間の範囲内での平均を表していることである。Figure 5.11に C_o と気流速度の関係を示した。この図から、流れの不安定化は U に対して徐々に起こるのではなく、 $U=5\text{m/s}$ の付近で急激に進展していることが分かる。このような急激な不安定化は管内流において観察される傾向と定性的に一致する。

Figure 5.11の $U=5\text{m/s}$ 付近に注目する。条件2 ($e_p = 1.0, \mu_{Fp} = 0.28$)の場合と条件4 ($e_p = 0.5, \mu_{Fp} = 0.28$)の場合の濃度変動の大きさの比較から、非弾性衝突によってクラスターの発達が促進されていることがわかる。また条件2

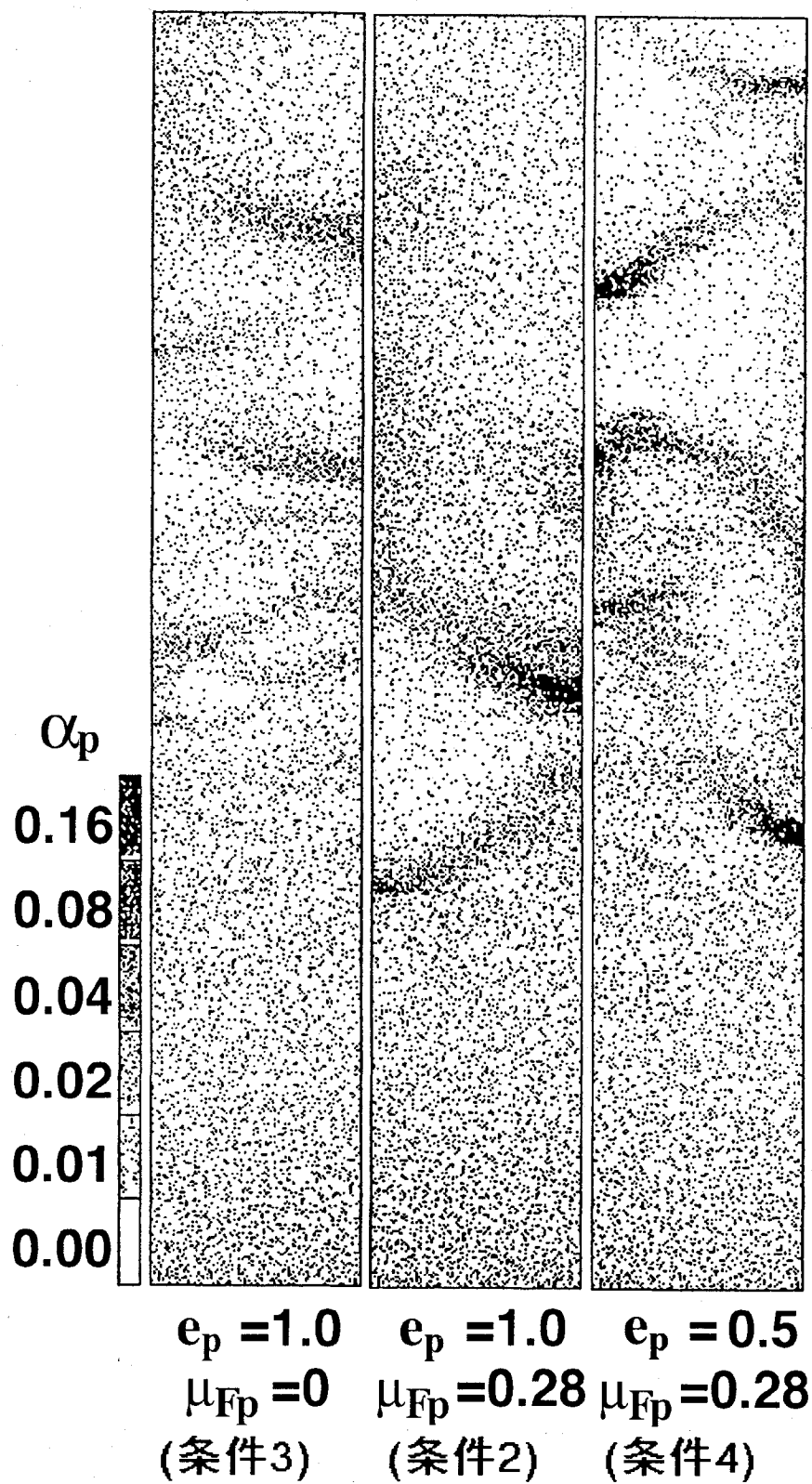


Figure 5.10: 反発係数と摩擦係数のクラスター形成への影響
 ($W=0.08\text{m}$, $U=5\text{m/s}$, $Q_p=25\text{kg/m}^2\text{s}$)

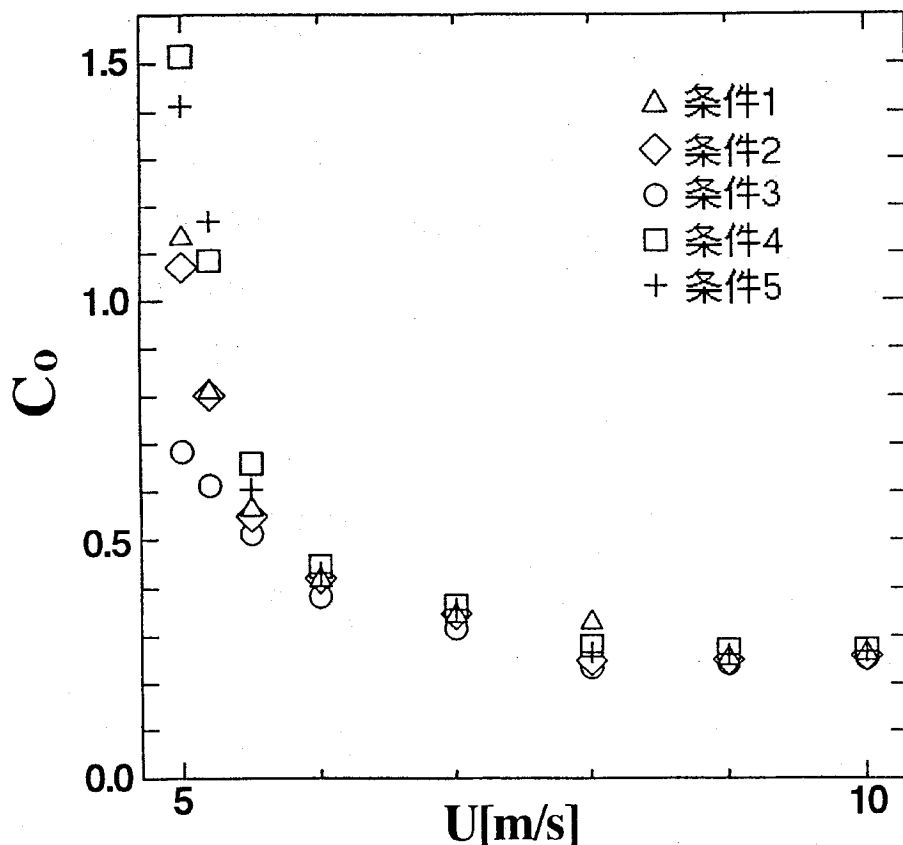


Figure 5.11: 気流速度と濃度変動の関係 ($W=0.08\text{m}$, $Q_p=25\text{kg/m}^2\text{s}$)

($e_p = 1.0, \mu_{Fp} = 0.28$) の場合と条件3 ($e_p = 1.0, \mu_{Fp} = 0$) の場合の濃度変動の大きさの比較から，上述したように粒子間衝突時の摩擦によっても同じようにクラスターの発達が促進されていることがわかる．これは非弾性衝突や粒子間衝突時の摩擦によって粒子間の相対速度は小さくなるので，粒子群の変動運動のエネルギーが減少し粒子が凝集する傾向があるためであると考えられる．

条件1 ($e_w = 0.94, \mu_{Fw} = 0.28$) の場合と壁面衝突時の摩擦係数を変化させた条件5 ($e_w = 0.94, \mu_{Fw} = 0$) の場合の濃度変動の大きさの比較から，壁面衝突時の摩擦によって流動の不安定化が抑制されることが分かる．これは壁面と衝突した粒子は摩擦力によって変動速度を与えられ，粒子群の変動運動のエネルギーは増加し粒子が拡散する傾向があるためであると考えられる．

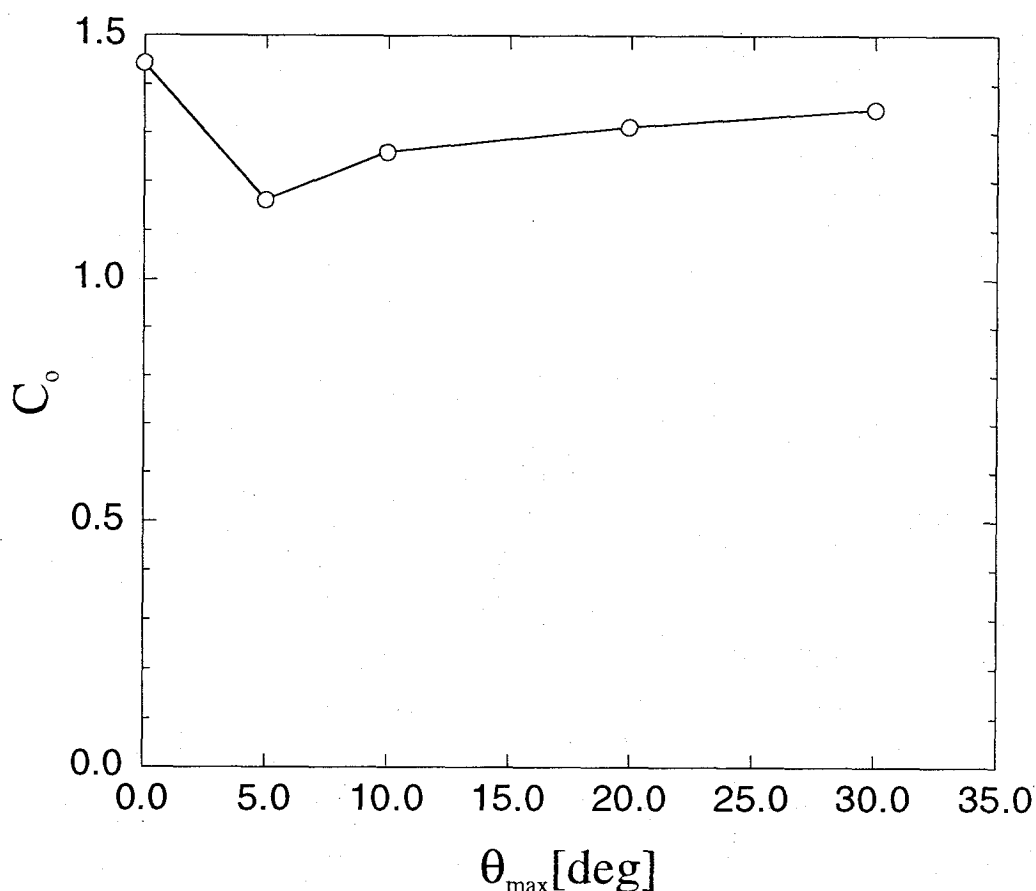


Figure 5.12: θ_{max} と濃度変動の関係 ($W=0.08m$, $Q_p=25kg/m^2s$)

次に Figure 5.2に示した粗面壁モデルを用いて、作為的に粒子に不規則な変動速度を与えて濃度変動がどのように変化するかを調べた。Figure 5.12に粗面壁モデルで与える θ_{max} と濃度変動の関係を示した。濃度変動は $\theta_{max} < 5[deg]$ の範囲では減少し、その後 θ_{max} が大きくなるにしたがって大きくなっている。しかし壁面が粗いいずれの場合 ($\theta_{max} > 0$) でも壁面が滑らかな場合 ($\theta_{max} = 0$) よりも濃度変動が小さくなっている。

Figure 5.13に θ_{max} を変化させた場合の代表的な粒子濃度分布を示す。Figure 5.13に示すように条件9($\theta_{max} = 20$) や条件10($\theta_{max} = 30$) の場合には上流側で安定なクラスターが形成された。このクラスターは他のクラスターと異なり一旦形成されるとその位置をほとんど変えなかった。このことは次の原因による。流入境界付近の粒子は初期条件としてランダムな変動速度が与えら

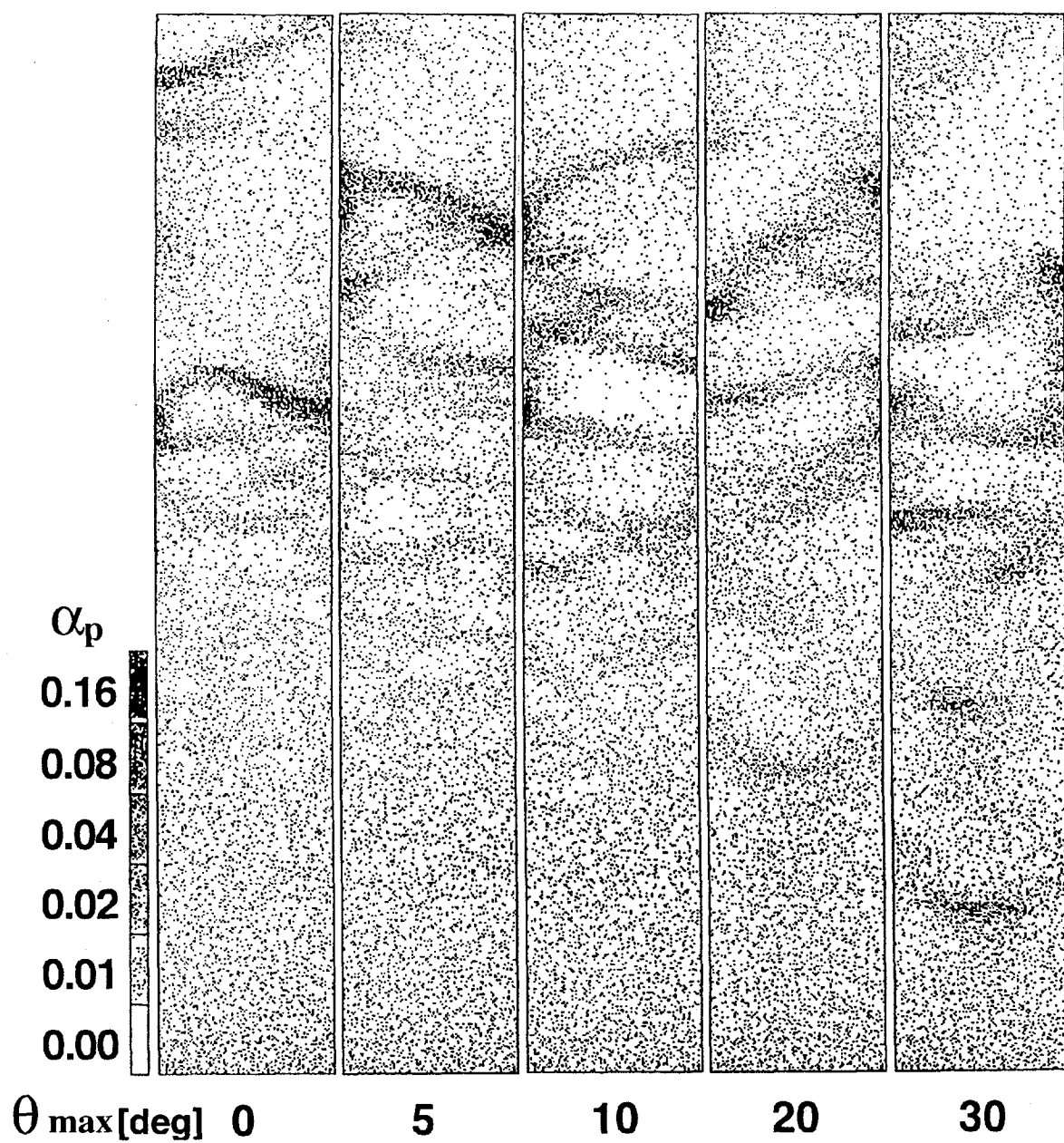


Figure 5.13: θ_{max} による濃度分布の変化 ($W=0.08\text{m}$, $Q_p=25\text{kg/m}^2\text{s}$)

れてはいるが、ほとんどの粒子はほぼ主流方向に移動している。この粒子が壁面に衝突した際に上述のような粗面壁モデルを用いると、 θ_{max} が大きな場合には、衝突後も壁面から外向きの速度を持つ場合が多くなる。内向きの速度を持つまで粗面壁の角度を選びなおすので、粒子は流路中央に押しやられ易い。このことによって流入境界付近でクラスターが形成されている。このクラスターが形成されると気流はその影響を受け一様でなくなり、それによってクラスターの下流側で流動は不安定となる。しかしこのクラスターが形成されない範囲では明らかに壁面で与えられる変動速度が流動の不安定化を抑制している。

5.5 むすび

粒子運動に対してDSMC法を適用し、流体と粒子の相互作用を考慮して鉛直2次元流路内を上向きに流れる固気二相流に対して数値シミュレーションを行った。得られた結果を要約し、以下に示す。

- (1) 気流速度が小さく粒子流量が大きな場合に流れは不安定となり、粒子濃度にむらが生じ、それが発達してクラスターが形成された。またクラスターの成長、合体、消失などが計算結果から観察された。粒子の影響によって気流速度が一様でなくなりそれによってむらの発達が促される流動構造が明らかになった。
- (2) クラスターは流路幅が大きな場合には流路中央部でも発生するが安定に存在することはできず、一般的な傾向として、壁面付近に安定的に存在することが分かった。
- (3) 流れの不安定化とクラスターの成長は粒子間衝突時の運動エネルギーの消散の効果に依存し、摩擦係数が大きく反発係数が小さいほどクラスターの発達は促進され、それにより流れの不安定は増した。
- (4) 壁面に摩擦を与えることや壁を不規則な粒子反発を引き起こす粗面壁として取り扱うことによって流動の不安定化は緩和された。

第6章 クラスターの構造および特性への 粒子物性の影響

6.1 はじめに

前章では、2次元の鉛直流路内を上向きに流れる固気二相流に対して数値シミュレーションを行いクラスターを再現することに成功した。その結果クラスターが形成されると、流れは大きく変動し、流動が不安定となることがわかった。その流動の乱れはクラスターの存在によって引き起こされていると考えられ、クラスターの構造や分布特性をさらに明らかにする必要がある。しかしクラスターの細かい構造を調べるためには、かなりの空間分解能が必要となるため、前章のように流路全体を取り扱う場合には、膨大な数の計算セルおよびシミュレーション粒子が必要となり、計算実行は非常に困難である。さらに前章では、流入部で一様な流入条件を与え、流れが空間的に発達するような条件で計算を行っていたので、時間的に発達した流れを求めるためには流路長さを非常に長く設定しなければならない。そこで十分発達した流れと高い空間分解能を得るために、ここでは周期境界に囲まれた2次元の矩形領域内を流れる固気二相流に対して計算を行った。

緒論でも述べたように、固気二相流の流動現象には様々な因子が複雑に影響を及ぼしていると考えられる。ここではクラスターの構造に対する粒子の物性などの影響を調べ、クラスター構造に大きく影響を与える因子の特定を試みた。

6.2 周期境界条件の取り扱い

Figure 6.1に示すような2次元の矩形領域内の流れについて計算を行った。 z 軸の正の向きが鉛直上向きに対応する。上下境界および左右境界に対して周期境界条件が適用された。周期境界条件下では粒子の総数は変化しないの

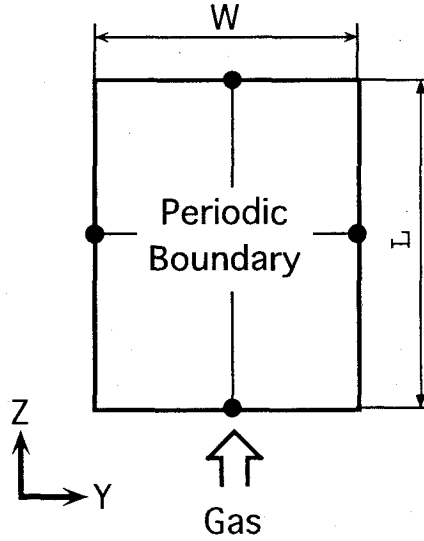


Figure 6.1: 計算領域

で，当然ながら計算領域内の平均粒子体積率 $\bar{\alpha}_p$ は一定に保たれる．計算では平均粒子体積率 $\bar{\alpha}_p$ が条件として与えられた．Figure 6.1の計算領域において，紙面に垂直方向に単位長さの奥行きがあると考えことにする．与えられた平均粒子体積率 $\bar{\alpha}_p$ から，1つのシミュレーション粒子が代表する実在粒子の数 α は次式で与えられる．

$$\alpha = \frac{\bar{\alpha}_p LW}{V_p N_{all}} \quad (6.1)$$

と表される．ここで L ， W はそれぞれFigure 6.1に示される計算領域の高さおよび幅， N_{all} は計算領域に含まれるシミュレーション粒子の総数を示している．

6.2.1 周期境界条件下での流体計算手法

いま主流 z 方向に流れ場が長さ L で周期的に変動するとすると，速度場に対して次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} u_y(y, z) &= u_y(y, z + L) = u_y(y, z + 2L) = \dots \\ u_z(y, z) &= u_z(y, z + L) = u_z(y, z + 2L) = \dots \end{aligned} \quad (6.2)$$

しかし流体圧力 p を同様に取り扱うことはできない．流体がある方向に流れるとすると一般的にその方向に圧力損失が生じるため，流体圧力 p は流れ

方向に沿って減少する．周期境界条件下で流体圧力 p を取り扱う際には，流れ方向に1周期分離れた2点間の圧力差が等しくなることを用いる．したがって次式が成り立つ．

$$p(y, z) - p(y, z + L) = p(y, z + L) - p(y, z + 2L) = \dots \quad (6.3)$$

このままの境界条件で流体計算を行うことはできないので，便宜上新しい変数 β を導入し，次式で定義する．

$$\frac{p(y, z) - p(y, z + L)}{L} = \beta \quad (6.4)$$

この式より $-\beta$ は z 方向の平均的な圧力勾配を表していることがわかる． β を用いると，次式のように $p(y, z)$ を2つの成分に分けることができる．

$$p(y, z) = -\beta z + P(y, z) \quad (6.5)$$

ここで P を準圧力と呼ぶことにする． $-\beta z$ は全体的な質量流れに関連しているが， $P(y, z)$ は局所的な流体の運動に関連している．式(6.5)と式(6.3)から，次式で示されるように $P(y, z)$ は z 方向に周期的に変動することがわかる．

$$P(y, z) = P(y, z + L) = P(y, z + 2L) = \dots \quad (6.6)$$

次に主流 z 方向に垂直な y 方向に対しても，流れ場が長さ W で周期的に変動すると考える． z 方向の場合と同様に次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} u_y(y, z) &= u_y(y + W, z) = u_y(y + 2W, z) = \dots \\ u_z(y, z) &= u_z(y + W, z) = u_z(y + 2W, z) = \dots \end{aligned} \quad (6.7)$$

y 方向には流量が0であると考えたと流体圧力 p についても u_y, u_z と同様の式が成り立つ．

$$p(y, z) = p(y + W, z) = p(y + 2W, z) = \dots \quad (6.8)$$

当然準圧力 P についても次式が成り立つ．

$$P(y, z) = P(y + W, z) = P(y + 2W, z) = \dots \quad (6.9)$$

以上に示した式 (6.2), (6.5), (6.6), (6.7), (6.9) によって流体の運動を完全に記述できる。流体の連続の式は3章で述べたものと同じものとなるが、運動方程式については流体圧力 p を β と準圧力 P を用いて表すと、次に示すようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon u_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon u_y u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon u_z u_y) = -\frac{\varepsilon}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{F_{py}}{\rho_f} \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon u_z) + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon u_y u_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon u_z u_z) = -\frac{\varepsilon}{\rho_f} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \beta \right) + \frac{F_{pz}}{\rho_f} \quad (6.11)$$

流れ場の平均の圧力勾配を表す β の値が与えられると、 P を p と同様に扱って、前章の場合と同じ手法で流れ場を解くことができる。しかし β の正しい値を計算前に予測することはできないので、ここではまず β にある値を与え、その値をもとに SIMPLE 法で流体運動を計算した。次に得られた流体速度から空塔速度を求め、条件として与えられる値に等しくなるまで β の値を補正して流体運動を再計算する。 β の予測値としては、1時間ステップ前の β の値を与えた。

6.2.2 流体計算の境界条件

周期境界を用いるので境界条件は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} u_{y,0,j} &= u_{y,i_{\max},j} \\ u_{y,i_{\max}+1,j} &= u_{y,1,j} \\ u_{y,i,0} &= u_{y,i,j_{\max}} \\ u_{y,i,j_{\max}+1} &= u_{y,i,1} \\ u_{z,0,j} &= u_{z,i_{\max},j} \\ u_{z,i_{\max}+1,j} &= u_{z,1,j} \\ u_{z,i,0} &= u_{z,i,j_{\max}} \\ u_{z,i,j_{\max}+1} &= u_{z,i,1} \\ \varepsilon_{0,j} &= \varepsilon_{i_{\max},j} \\ \varepsilon_{i_{\max}+1,j} &= \varepsilon_{1,j} \\ \varepsilon_{i,0} &= \varepsilon_{i,j_{\max}} \\ \varepsilon_{i,j_{\max}+1} &= \varepsilon_{i,1} \\ P_{0,j} &= P_{i_{\max},j} \\ P_{i_{\max}+1,j} &= P_{1,j} \\ P_{i,0} &= P_{i,j_{\max}} \\ P_{i,j_{\max}+1} &= P_{i,1} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Table 6.1: 計算条件

ρ_f [kg/m ³]	1.205
μ [Pa · s]	1.81×10^{-5}
$ V_I $ (m/s)	0.0
v'_I (m/s)	0.2
e_p	0.9
μ_{Fp}	0

6.3 計算条件

主要な計算条件を Table 6.1 に示す. 流体の物性は前章と同様に 20°C, 1 気圧の空気のものが仮定されている. 粒子が均質に分散した初期状態から空塔速度 U が一定である条件の下で時間進行を行い, 十分発達した流れを得た. 粒径 d_p , 粒子密度 ρ_p および粒子平均体積率 $\bar{\alpha}_p$ をパラメータとして計算を行った. 粒径 d_p としては 61.3, 200, 500 [μm] の 3 種類を用いた. $\rho_p = 1780 [\text{kg/m}^3]$ の場合には, それぞれ粒径に対する粒子の終速度 v_t は 0.188, 1.09, 3.00 [m/s] であり, 空塔速度 U としては 0.6, 2.0, 5.0 [m/s] を与えた. ただし本計算における流れ場の条件では流路壁面のように静止した境界が存在しないので, 空塔速度 U は現象に本質的な影響を及ぼさず, 単に鉛直方向の流体および粒子の平均速度を変化させるだけである. よって空塔速度 U の値は流動現象を捉えるうえで重要でないので本来なら示す必要はないが, 後に示す時間的な連続図を見る際には無関係ではないので示した. また $d_p = 200 [\mu\text{m}]$ の粒子については ρ_p も 500 から 10000 [kg/m³] まで変化させた. ここでは U の値をあえて示す必要がないので省略する.

粒子運動に関する初期条件としては, 粒子の角速度および平均速度を 0 とし, 前章の計算と同様に各粒子に対し一定の大きさ v'_I (0.2 m/s) をもつ変動速度成分を乱数を用いて等方的に与えた. 計算の結果, クラスターの大きさや空間的な分布間隔などの空間スケールは条件によって著しく変化することが明らかになった. そのため, 計算領域の大きさは, クラスターの構造や空間

分布がとらえられるよう適宜変化させた．固気両相ともに計算領域を 80×80 にセル分割して計算を行った．1つのセル当たりのシミュレーション粒子の数の平均値は100個である．DSMC法により粒子間衝突を導入する場合，計算の時間ステップ Δt_p は粒子の局所的な平均自由時間よりも小さくなければならない．しかし，本計算ではそのような局所的な平均自由時間を計算結果を得る前に見積もることは困難である．そこで，計算結果より平均自由時間の最小値の評価を行い， Δt_p がそれよりも小さくなることの確認を行った．またここでも前章と同様に Δt_p と Δt_f を等しく設定し，相互作用を考慮して同時に計算した．

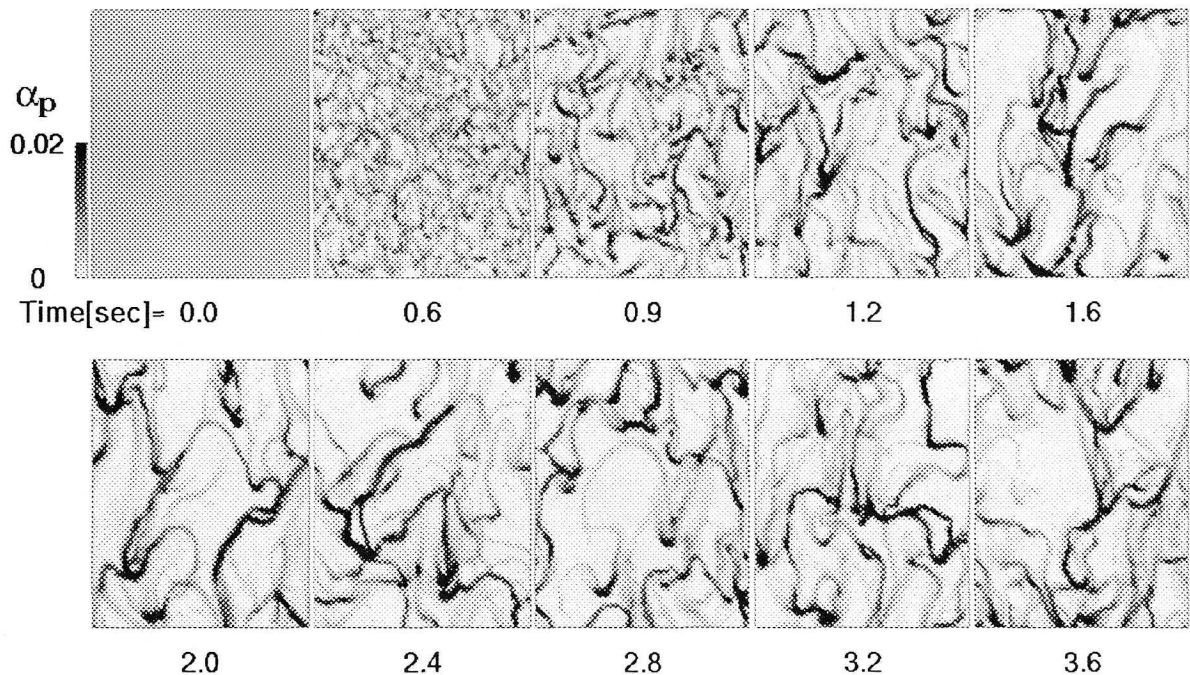


Figure 6.2: 濃度分布の時間的变化
($d_p=61.3$ [μm], $\bar{\alpha}_p=0.004$, $L=0.25$ [m], $W=0.2$ [m], $U=0.6$ [m/s])

6.4 クラスター構造と流れ場

Figure 6.2に粒子濃度分布の時間的変化の一例を示す．これは $d_p=61.3$ [μm], $\bar{\alpha}_p=0.004$, $L=0.25$ [m], $W=0.2$ [m], $U=0.6$ [m/s] の場合の結果であり，図は計算領域全体を表している．粒子が均質に分散している状態からまず小さな濃度む

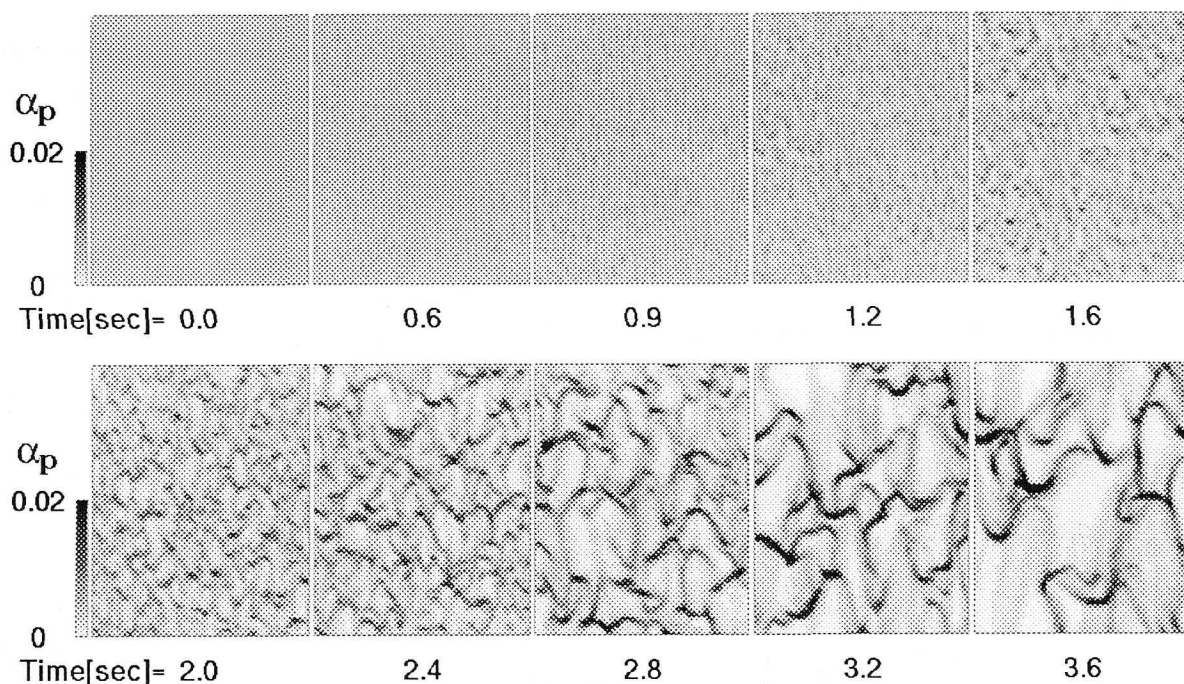


Figure 6.3: 濃度分布の時間的变化
($d_p=500$ [μm], $\bar{\alpha}_p=0.004$, $L=2.0$ [m], $W=1.6$ [m], $U=5.0$ [m/s])

らが生じ、濃度むらが成長、合体してクラスターが形成されている。クラスターは紐状の構造を示し、さらにクラスター同士が繋がりあった複雑なネットワーク構造も見られる。

次に Figure 6.3に粒径 d_p を 500 [μm] に変えた場合の粒子濃度分布の時間的变化を示す。ここでは $L=2.0$ [m], $W=1.6$ [m] と計算領域を大きくし、その全体を表示していることに注意していただきたい。Figure 6.2と同様に濃度むらが成長、合体してクラスターが形成されている。クラスターが形成された他の条件においても、同様な過程を経てクラスターが形成されていた。しかし $d_p=61.3$ [μm] の場合とは、濃度むらの発達速度やクラスターの空間構造のスケールが大きく異なっている。 $d_p=500$ [μm] の場合には濃度むらの発達は遅く、クラスターの空間スケールが大きくなっている。

個々のクラスターの空間的な構造は単純ではないが、いくつかの特徴のあることが分かる。Figure 6.2と Figure 6.3のクラスターの形状を観察すると、

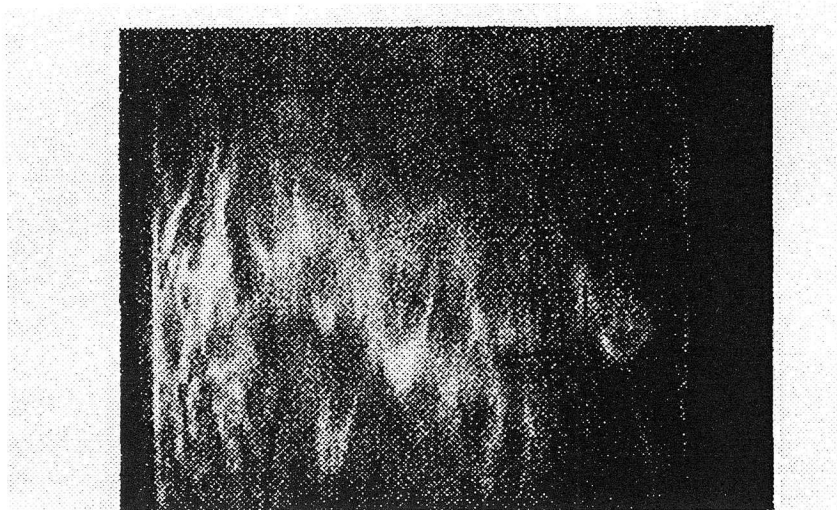
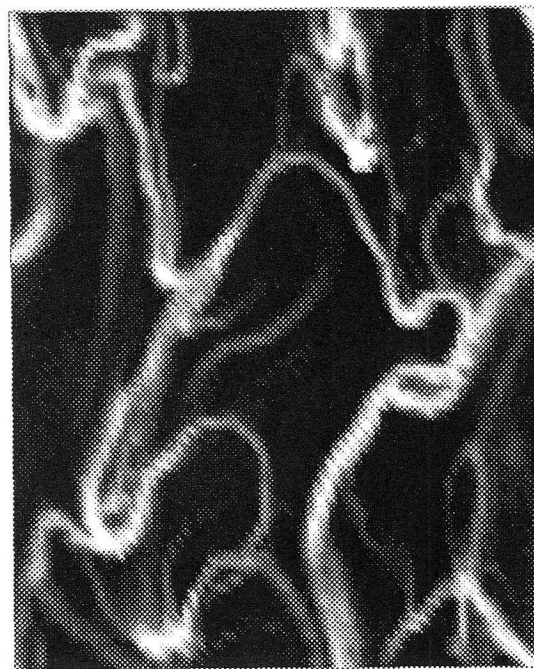


Fig. 7. The visualized photographs in the dilute transportation regime ($u_0 = 0.58$ m/s, $G_s = 0.22$ kg/m² s, $z = 750$ mm).

M. Horio and H. Kuroki, Chem. Eng., Sci.,
Vol. 49, No. 15, (1994) 2413



Present simulation

($d_p = 61.3$ [μ m], $\bar{\alpha}_p = 0.004$, $L = 0.25$ [m], $W = 0.2$ [m], $U = 0.6$ [m/s])

Figure 6.4: 計算及び実験で観察されたクラスターの形状比較

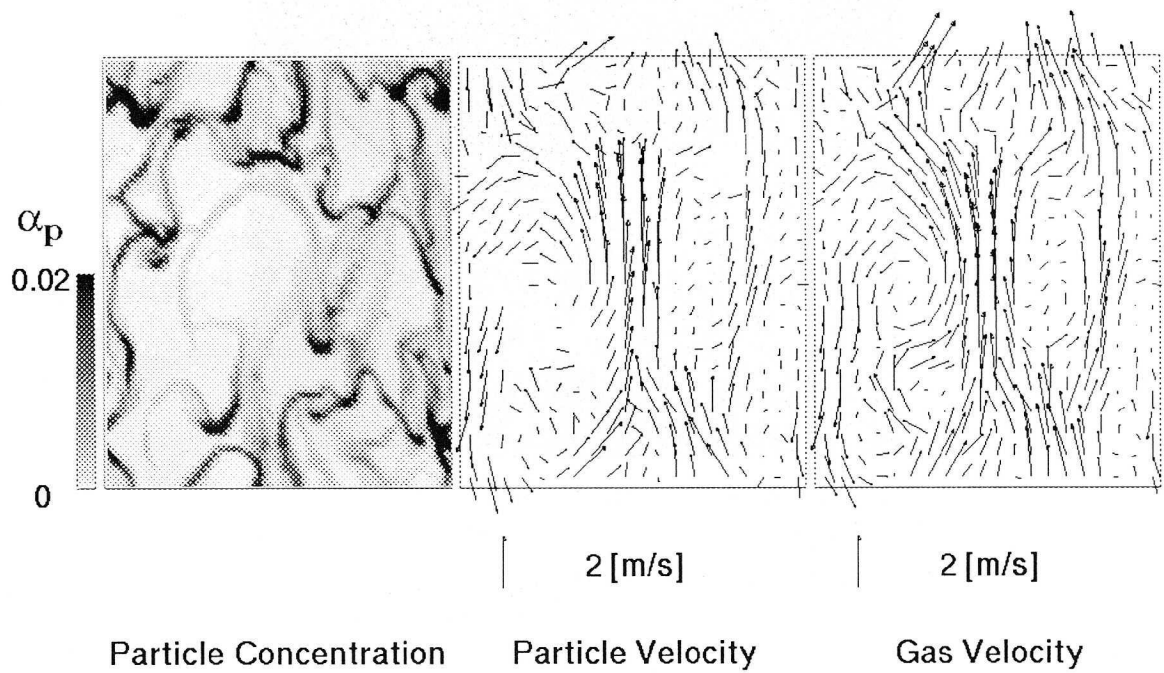


Figure 6.5: 流れ場
($d_p=61.3$ [μm], $\bar{\alpha}_p=0.004$, $L=0.25$ [m], $W=0.2$ [m], $U=0.6$ [m/s])

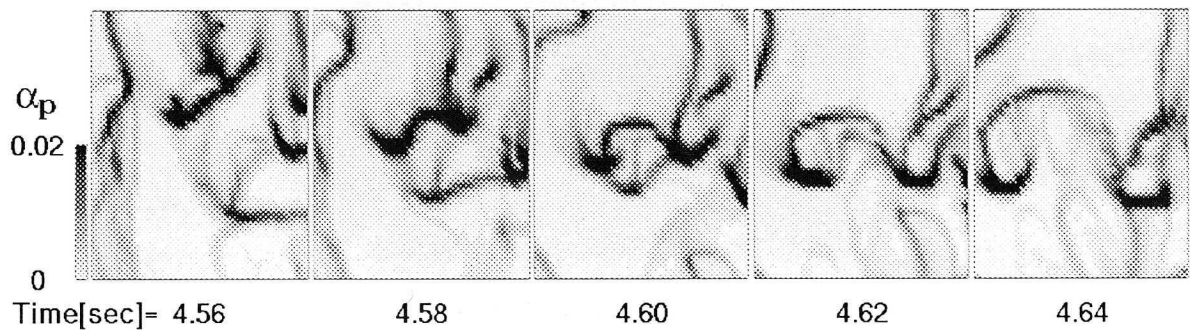


Figure 6.6: クラスターの挙動
($d_p=61.3$ [μm], $\bar{\alpha}_p=0.004$, $U=0.6$ [m/s])

多くのクラスターが下に凸な形状と、それを上下逆にした上に凸な形状を持っている。これらの形状を持つクラスターを、ここではそれぞれV字型クラスターおよび逆V字型クラスターと呼ぶことにする。V字型クラスターは従来から観測されており、最近になってHorioとKuroki⁽²⁾によってレーザーシートによる可視化を用いて詳細な計測がなされている。Figure 6.4でHorioとKuroki⁽²⁾の実験で観察されたクラスターと本計算で得られたクラスターの形状を比較している。本章の計算で用いた $d_p=61.3$ [μm], $\rho_p=1780$ [kg/m^3] の粒子にはHorioとKuroki⁽²⁾が実験に用いた粒子と同じ粒径と密度を与えている。Figure 6.4では白い部分がクラスターを表しており、ここで用いられた計算結果の図はFigure 6.2の2.0秒の時刻の濃度分布を白黒反転したものである。両図において縮尺は等しくしている。この図から計算において、大きさ及び形状がほぼ等しいクラスターが得られたことがわかる。逆V字型クラスターに関しても武内ら⁽³⁾により実験的に観測されている。本計算結果は2次元の流れ場に対するものではあるが、クラスター形状に関する本計算結果はこれらの実験結果とほぼ一致したといえる。

次にこれらのクラスターの特徴をさらに明らかにするために、クラスター周辺の流体および粒子の流れ場において考察を行う。Figure 6.5にクラスターが形成されている場合の流れ場を示す。Figure 6.5はFigure 6.2と同じ計算結果であり、2.8秒の時刻の流れ場を表している。図は左から粒子濃度分布、粒子速度分布、気流速度分布を示している。V字型クラスターは濃度が高く、その周辺では気流速度も粒子速度も鉛直上向きの成分は小さくなっている。逆V字型クラスターは濃度がそれほど高くなく、比較的大きな上向き速度を持っている。

次に、以上に示した2種類のクラスターの挙動と形成の過程についてももう少し詳しく調べる。Figure 6.6ではクラスター付近をクローズアップして微小時間内のクラスターの挙動が示されている。この図からV字型のクラスターの落下や合体、分裂などが観察される。さらに逆V字型のクラスターが形成

される様子も観察される．1つのV字型クラスターが2つに分裂し，その間の濃度が比較的低い部分を気流が突き抜け，その部分に含まれる粒子が吹き飛ばされて上に凸状の縞模様を形成し逆V字型クラスターとなっている．以上の2種類のクラスターの特徴および形成のメカニズムは，粒径の大きさや粒子濃度にかかわらず，これらのクラスターが形成されたすべての場合について共通のものであった．

6.5 粒径および粒子濃度のクラスター構造への影響

Figure 6.7に粒径を変化させた場合の粒子濃度分布の比較を示す．これらの図はすべて $\bar{\alpha}_p=0.004$ の条件で，十分発達した状態に対するものである．これらはすべて等縮尺で表示されているので，クラスターの空間スケールを図上で直接比較することができる．ただし $d_p=61.3[\mu\text{m}]$ と $d_p=200[\mu\text{m}]$ の図では計算領域全体が表示されているのに対し， $d_p=500[\mu\text{m}]$ の図では計算領域の4分の1の領域が表示されている． $d_p=500[\mu\text{m}]$ の場合の計算領域のサイズは $W=1.6[\text{m}]$ ， $L=2.0[\text{m}]$ である．図から明らかなように，クラスターの空間スケールは粒径に大きく依存するという結果が得られた．粒径が大きくなるとクラスターのサイズは著しく大きくなっている．

前節でも述べたように，本計算で用いた $61.3[\mu\text{m}]$ の粒子の粒径および粒子密度としてはHorioとKuroki⁽²⁾が実験に用いた粒子と同じ値が用いられており，クラスターサイズを直接比較することができる．HorioとKuroki⁽²⁾はV字型のクラスターのサイズ d_{cl} をFigure 6.8に示されるように横幅によって定義し，粒子濃度との関係を実験により求めている．本計算で得られたクラスターのサイズもHorioとKuroki⁽²⁾と同様に求めた結果をFigure 6.9に示した．横軸は平均粒子体積率 $\bar{\alpha}_p$ ，縦軸はクラスターサイズ d_{cl} を表している．Figure 6.9における本計算結果のクラスターサイズはその分布の範囲を示している．まず $d_p=61.3[\mu\text{m}]$ の粒子の場合についてHorioとKuroki⁽²⁾の測定結果との比較に関しては，ほぼ同程度の値を示していることが分かる．Figure 6.9から粒子濃

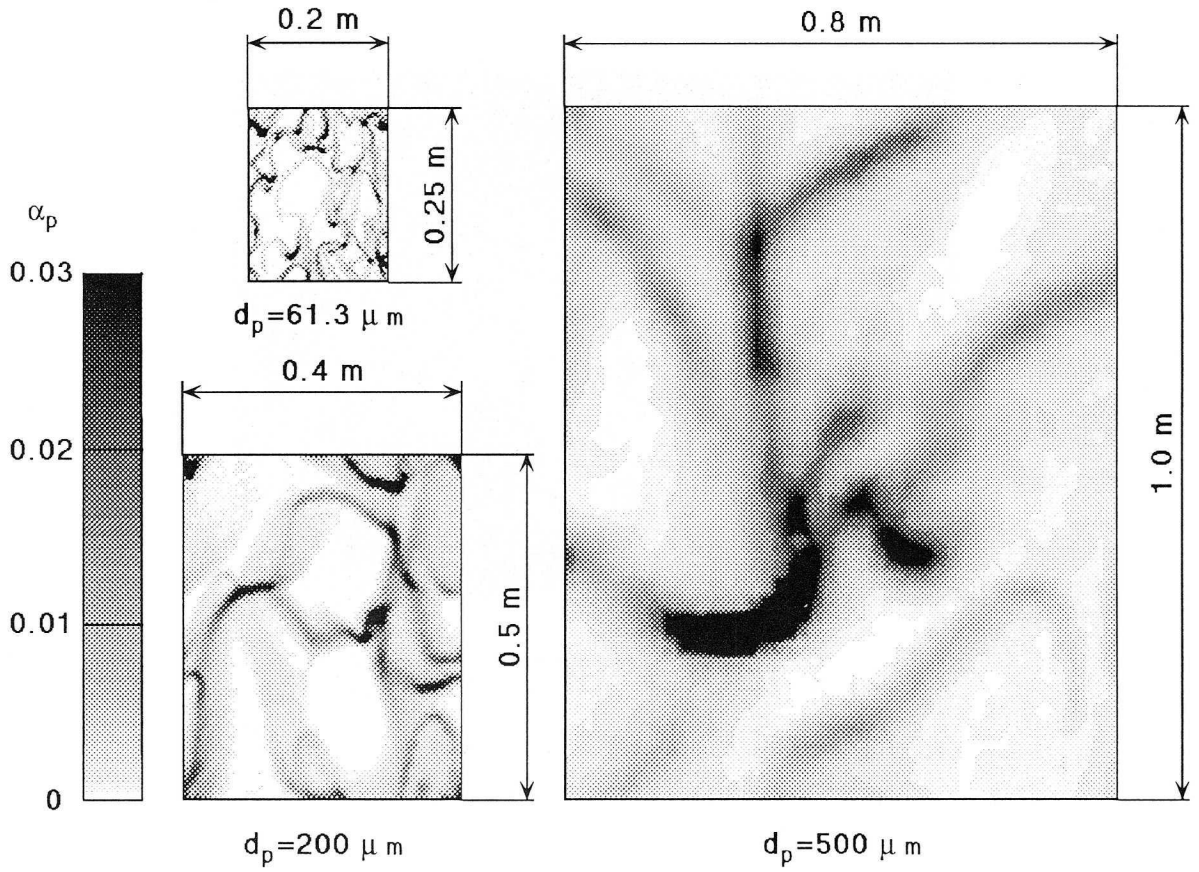


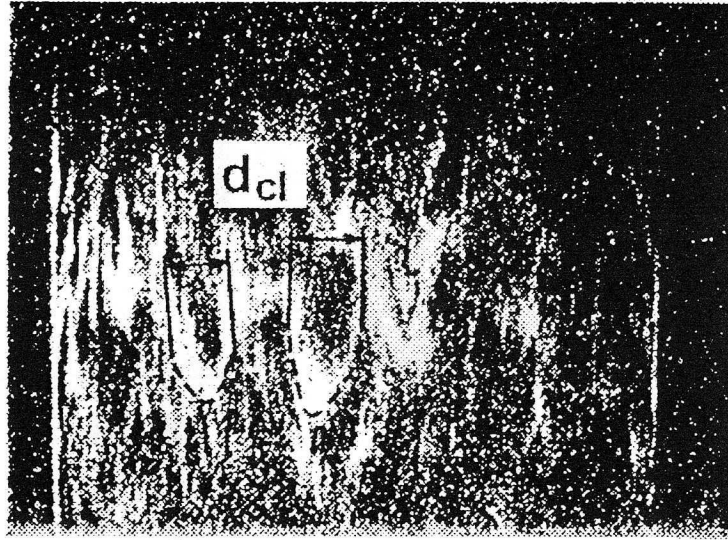
Figure 6.7: クラスタ構造への粒径の影響 ($\bar{\alpha}_p=0.004$)

度を変化させた場合よりも粒径を変化させた場合の方がクラスタサイズは大きく変化している．このことからクラスタサイズには粒子濃度よりも粒径の方が大きな影響を与えることが分かる．

非弾性衝突のみの影響によって形成されるクラスタの空間スケールは粒子の平均自由行程 λ に比例する．完全な球形である粒子の平均自由行程 λ は次式で与えられるので

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_T n} = \frac{d}{6\sqrt{2}\alpha_p} \quad (6.13)$$

平均自由行程 λ は粒子濃度 α_p に反比例することがわかるが，Figure 6.9で粒子濃度を変化させてもクラスタサイズにはそれほど大きな変化は見られなかったことから，流れ場中のクラスタサイズには粒子の平均自由行程の影響はそれほど大きくないといえる．逆に粒径の違いによって，クラスタサイ



(b) Cluster size reading

M. Horio and H. Kuroki, Chem. Eng., Sci.,
Vol. 49, No. 15, (1994) 2413

Figure 6.8: Horio と Kuroki⁽²⁾によるクラスターサイズ d_{cl} の定義

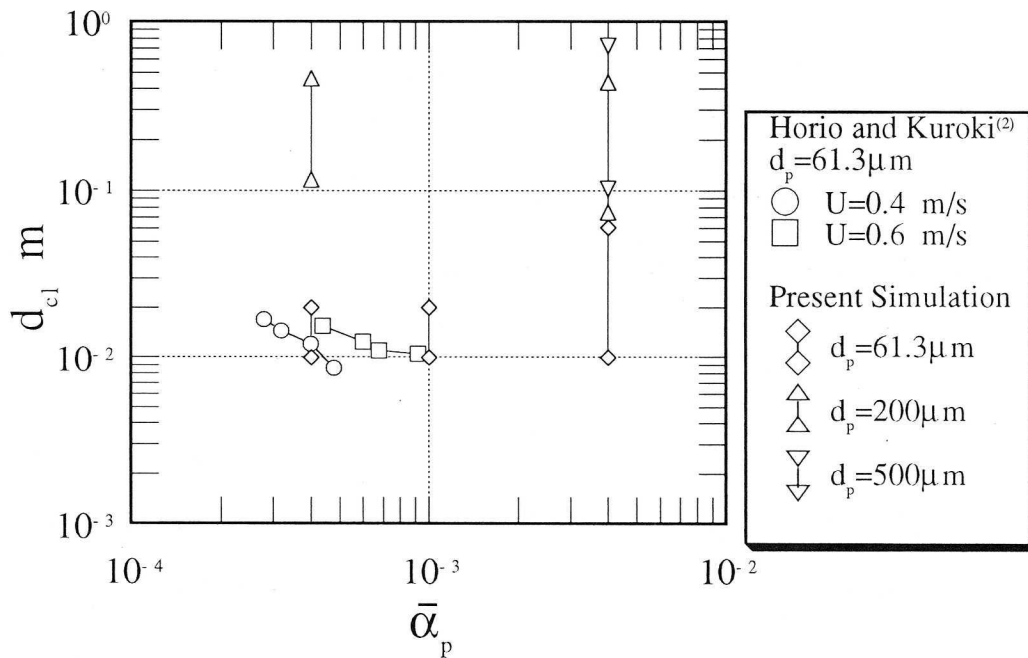


Figure 6.9: 粒子濃度のクラスターサイズへの影響

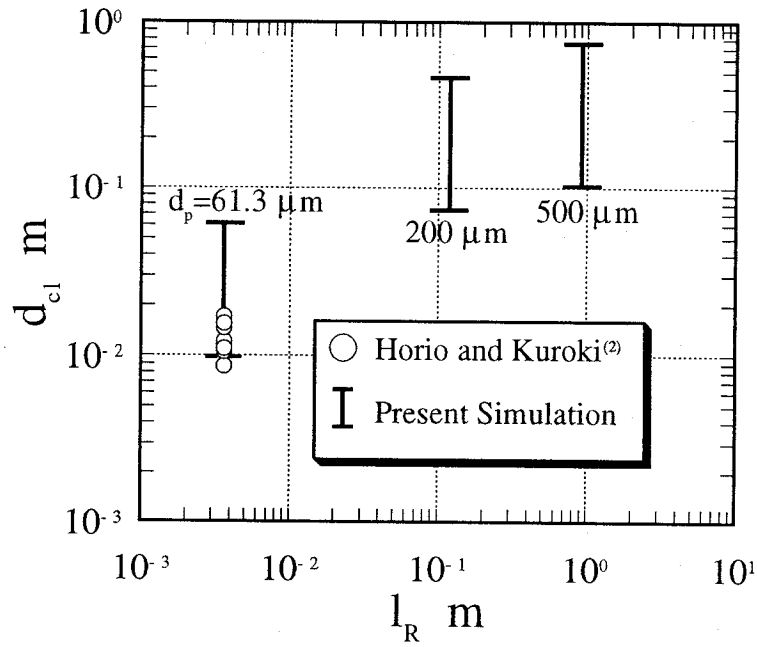


Figure 6.10: 緩和距離のクラスターサイズへの影響
($\rho_p=1780[\text{kg/m}^3]$ で粒径を変化させた場合)

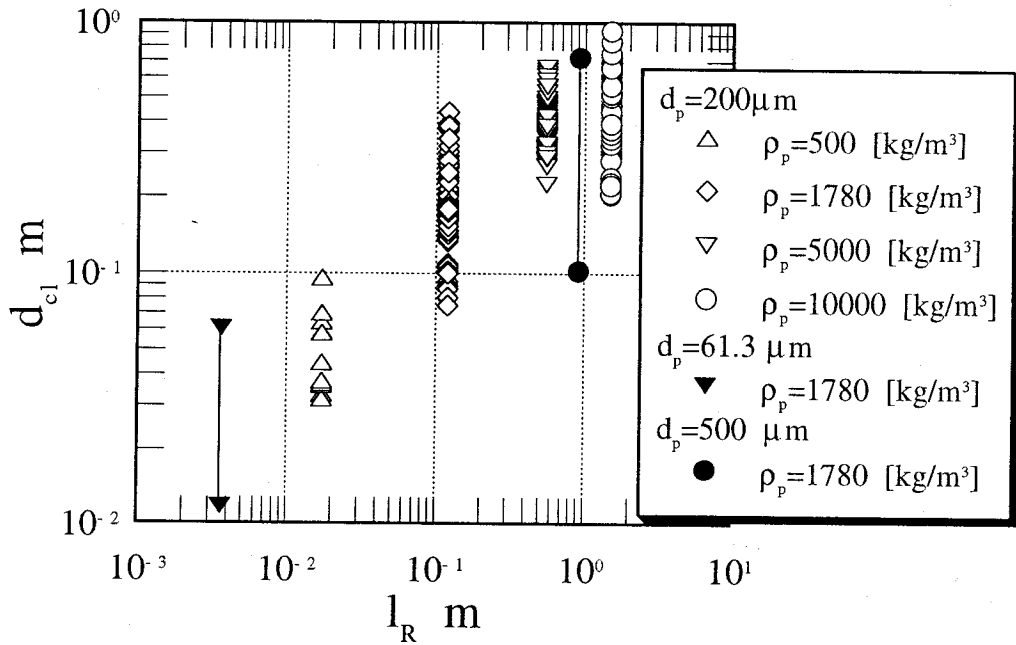


Figure 6.11: 緩和距離のクラスターサイズへの影響
(粒子密度 ρ_p を変化させた場合)

ズは大きく変化したことから、粒子の慣性が大きく影響を及ぼしていると考えられる。慣性の小さな粒子は粒子間衝突後に流体抵抗によって速度を奪われ到達できる距離が短くなるために、クラスターのサイズが小さくなるのであると推測される。そこで次にクラスターサイズと流体抵抗によって緩和される距離(以下緩和距離)の関係を調べることにする。ここでは緩和距離 l_R を次式で定義した。

$$l_R = \frac{v_t^2}{g_G} \quad (6.14)$$

ここで v_t は粒子の終速度、 g_G は重力加速度である。緩和距離とクラスターサイズの関係を図 6.10 に示す。本計算結果では、クラスターサイズは粒子の緩和距離の約 0.4 乗に比例して増加する傾向となった。しかし粒径を変化させた場合には緩和距離が変化するほかに、平均自由行程も変化するのので、緩和距離のみの影響を調べたことにならない。平均自由行程を変化させずに緩和距離のみの影響を調べるには粒径を変えずに粒子の密度 ρ_p を変化させれば良い。Figure 6.11 に $d_p=200[\mu\text{m}]$ の粒子の密度 ρ_p を変化させた場合の緩和距離 l_R とクラスターサイズの関係を示した。このグラフからもクラスターサイズは緩和距離 l_R の約 0.5 乗に比例して大きくなっていることがわかる。以上のことから流れ場中のクラスターサイズは粒子の緩和距離 l_R に依存することがわかった。

6.6 クラスターサイズとクラスター速度の関係

クラスターが形成される場合、固気スリップ速度は粒子の終速度 v_t の数倍から数十倍にもなるということが知られている。本節では V 字型クラスターの速度について検討する。Figure 6.12 に粒径を変化させた場合のクラスターサイズと速度の関係を示した。ここで v_d^* は空塔速度で移動する座標系から見た V 字型クラスターの相対的な速度(スリップ速度)を示している。Figure 6.12 から粒径が大きくなるとクラスターサイズもクラスターのスリップ速度も大

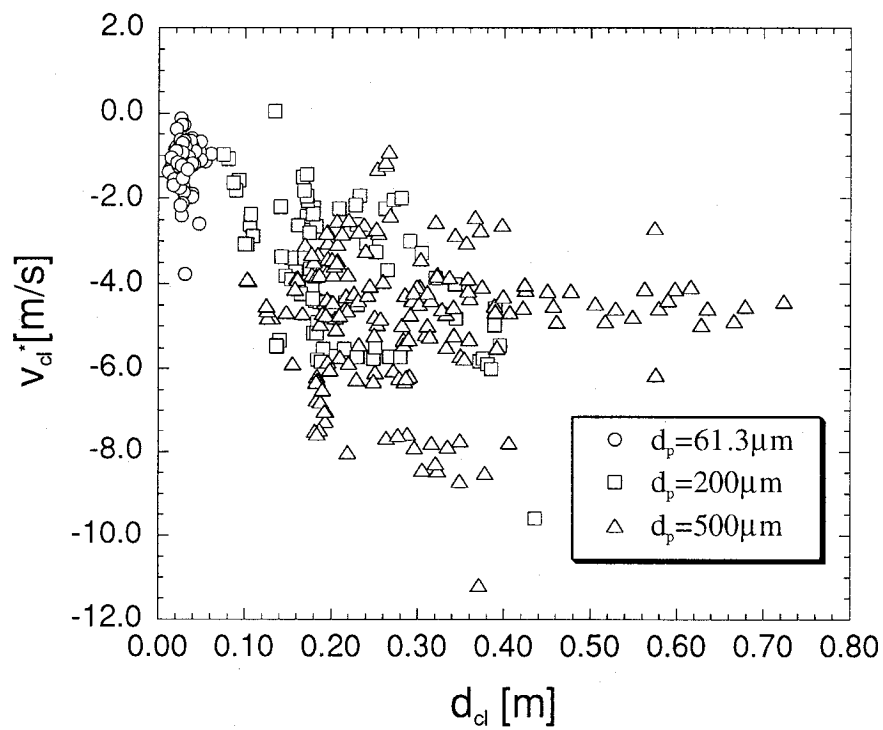


Figure 6.12: クラスターサイズと速度の関係

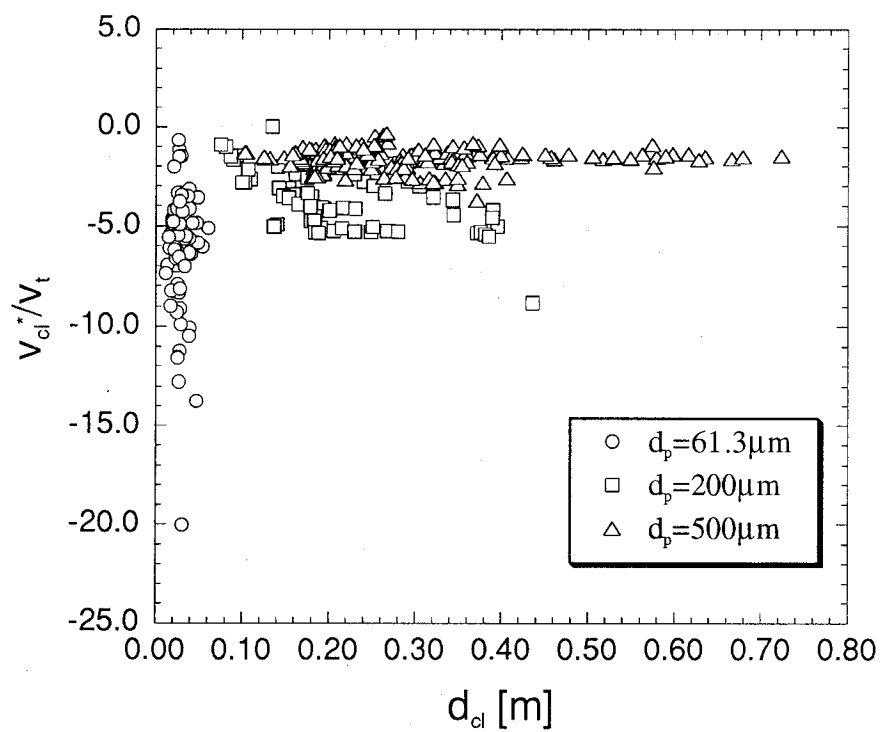


Figure 6.13: クラスターサイズと速度の関係

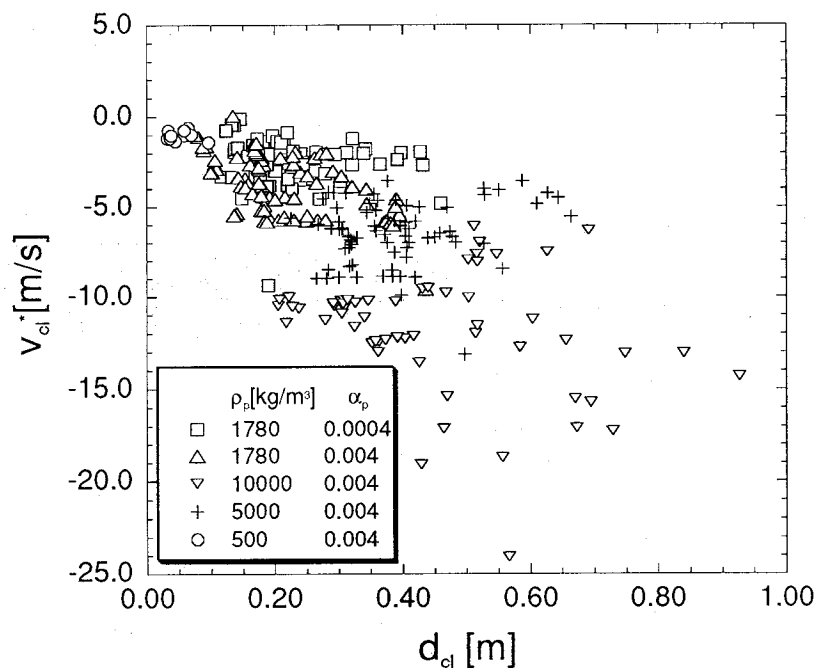


Figure 6.14: クラスターサイズと速度の関係

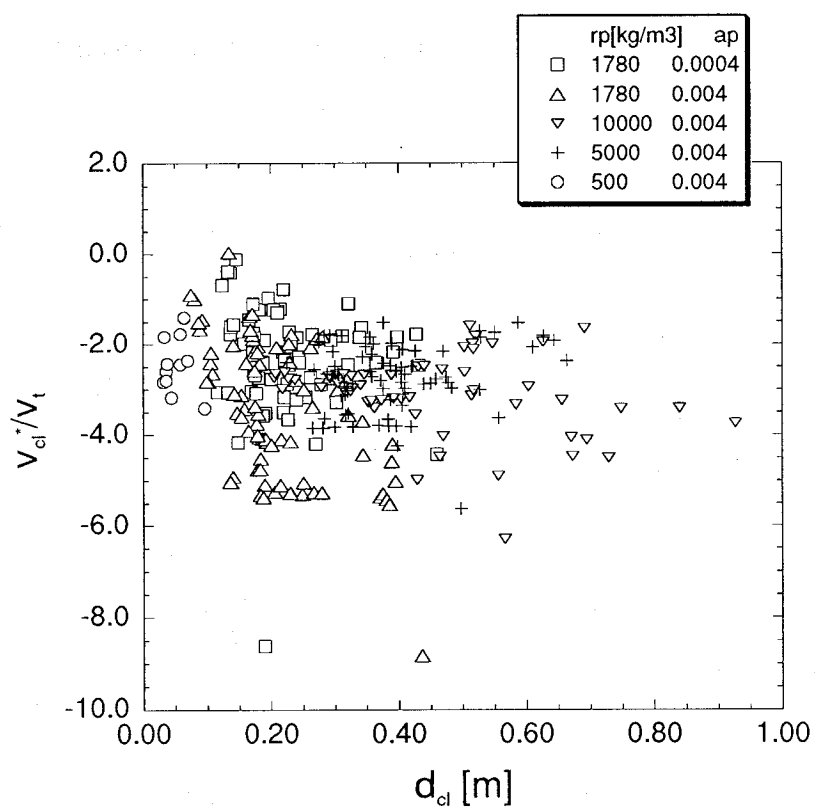


Figure 6.15: クラスターサイズと速度の関係

きくなるという結果が得られた。ただしクラスターのスリップ速度が大きくなるのは、粒子の終速度自体が大きいので、当然といえば当然である。では次にスリップ速度を粒子の終速度 v_t で無次元化したものを Figure 6.13 で比較する。逆にここでは粒径が小さいほどクラスターのスリップ速度は終速度に比べて大きいことがわかる。 $d_p=61.3[\mu\text{m}]$ の結果は、クラスターのスリップ速度が終速度よりもずっと大きくなるとした Yerushalmi⁽²³⁾ らの実験結果と一致する。

次に $d_p=200[\mu\text{m}]$ で粒子密度を変化させた場合のクラスターサイズと速度の関係を Figure 6.14 に示した。この場合にも Figure 6.12 と同じように粒子密度が大きくなるとクラスターサイズも v_{cl}^* も大きくなるという結果が得られた。ただし Figure 6.12 の場合より同じクラスターサイズに対する v_{cl}^* は大きくなっている。この図のスリップ速度を粒子の終速度 v_t で無次元化したものを Figure 6.15 に示す。この図では、無次元のクラスター速度 v_{cl}^*/v_t に関してはどの条件においてもほぼ同じ範囲で分布していることがわかる。

6.7 むすび

2次元矩形領域内を鉛直上向きに流れる固気二相流に対して数値シミュレーションを行い、粒径や粒子濃度のクラスター構造への影響を調べた。得られた結果を要約すると以下のようなになる。

- (1) 主として紐状のクラスターが形成され、それぞれが繋がって複雑なネットワークのような構造もみられた。
- (2) 2つの特徴的なクラスターが観察された。1つはV字型クラスターであり、もう1つは逆V字型クラスターである。V字型クラスターは濃度が大きく、上向き速度は相対的に小さくなった。逆V字型クラスターはV字型クラスターに比べて濃度が小さく、比較的大きな上向き速度を持つ。
- (3) 粒径 $d_p=61.3[\mu\text{m}]$ の場合に、計算で得られたクラスターサイズの範囲は Horio と Kuroki⁽²⁾ の実験結果とほぼ一致した。

- (4) 流れ場中のクラスターのサイズは粒子濃度よりも粒径や粒子密度に大きく依存していた．この原因として粒子の緩和距離による考察を行ったところクラスターサイズは緩和距離の0.4~0.5乗に比例して大きくなった．
- (5) 同じ粒子密度であれば，粒径が小さいほどクラスターのスリップ速度は終速度に比べて大きいことがわかった．これに対し，粒径が同じ場合には，粒子密度が変化しても終速度に対するクラスターのスリップ速度はあまり変らなかった．

第7章 総括

本研究は、分散系固気二相流におけるクラスターを含む不安定な流動に対して数値シミュレーションを行うことによって、クラスター形成および流動の不安定化に対する粒子物性や流路幅などの影響、さらにクラスターや流れ場の詳細な構造を調べることを目的として行われた。以下に本研究の内容と得られた結果をまとめて述べる。

第1章では、流れ場中のクラスターを取り扱った従来の研究とその問題点を述べ、本研究の目的および意義を明らかにした。

第2章および第3章では、粒子運動および流体運動の計算方法を述べた。ただし第2章では、DSMC法を用いて流れ場中の粒子運動を取り扱う際の計算手法に関して検討を行った。その結果、DSMC法にはいくつかの衝突判定法があるが、流れ場中の粒子運動にはModified Nanbu法が適していることがわかった。

第4章では、流体の影響の無い無重力真空空間で形成される粒子クラスターの数値シミュレーションを行った。完全弾性衝突の場合には粒子クラスターは形成されず、粒子間衝突時のエネルギー消散が大きいほどクラスターの発達は速く進み、集中した小さなクラスターとなった。またクラスター同士が紐状につながったネットワーク構造を示した。粒子間衝突特性が同じ場合にはクラスターの空間スケールは粒子の平均自由行程に比例することがわかった。

第5章では、流れ場と粒子運動の相互作用を考慮しながら同時に解く手法を用いて、鉛直な2次元流路を上向きに流れる固気二相流の数値シミュレーションを行った。その結果、従来実験で観察されてきたものと同じ形状のクラスターが得られた。クラスターは粒子流量が大きく低流速の場合に形成された。また計算結果から濃度むらが発達してクラスターが形成される過

程やクラスターの成長，合体，消失などが観察された．粒子間衝突時のエネルギー減衰が大きな場合には流動の不安定化は促進され，逆に壁面衝突などの摩擦などによって粒子が変動速度を与えられる場合には流動の不安定化は緩和されることがわかった．

第6章では，周期境界で囲まれた2次元の矩形領域内を鉛直上向きに流れる分散系固気二相流を計算することによって，十分発達したクラスターの詳細な構造を調べた．クラスター構造に対する粒子濃度，粒径，粒子密度などの影響を調べた．クラスターサイズは粒径および粒子密度に大きく依存するが，粒子濃度の影響はそれほど大きくないことがわかった．このことから，流れ場中のクラスターの空間スケールを支配する長さスケールは平均自由行程ではなく，粒子の緩和距離であることが明らかとなった．

以上の結果から，クラスターの空間スケールは真空中では粒子の平均自由行程と非弾性衝突に支配され，流れ場中では粒子の緩和距離に支配されていた．このことからクラスターの空間構造に影響を及ぼす因子が真空中と流れ場中では異なると考えられる．流れ場中のクラスターは，粒子濃度のむらとそれによって乱れる流れの相互作用により，サイズのオーダーが決定され，非弾性衝突によるエネルギー消散はクラスターサイズに影響を与えるものの，オーダーを大幅に変化させるほどではないといえる．

本研究で得られた結果は，すべて2次元流れに対するものであるが，3次元流れにおいても同様の機構でクラスターが形成されると考えられる．ただし，流動やクラスターの空間構造は2次元流れのそれから単純に推測するわけにはいかず，計算を3次元に拡張する必要がある．

以上示したように，本研究を通して，流れ場中のクラスター形成に関していくつかの知見を得た．今後，本研究で提案した手法および成果がさらなる固気二相流の理解と関連する装置の研究および発展に寄与することを期待する．

付録 A 衝突時に粒子にかかる衝撃力

衝突する粒子ペアをそれぞれ粒子 i, j とし，粒子 i にかかる衝撃力を J とすると，衝突後の粒子速度 v および角速度 ω は次式で与えられる．

$$v_i^* = v_i + \frac{J}{m_i} \quad (A.1)$$

$$v_j^* = v_j - \frac{J}{m_j} \quad (A.2)$$

$$\omega_i^* = \omega_i + a_i n \times \frac{J}{I_i} \quad (A.3)$$

$$\omega_j^* = \omega_j + a_j n \times \frac{J}{I_j} \quad (A.4)$$

ここで a, m, I はそれぞれ粒子の半径，質量，慣性モーメントを表している．また添え字の i, j はそれぞれ粒子 i, j を示し，衝突後の速度と角速度には $*$ を右肩に付してある．衝撃力 J が与えられると衝突後の速度と角速度が得られる．ここでは衝撃力 J の与え方について述べる．

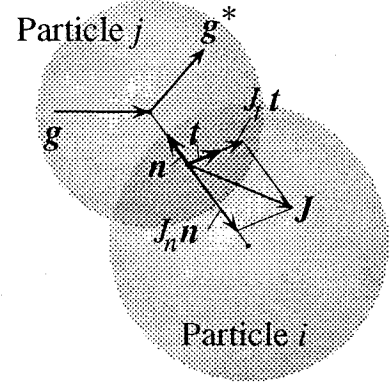


Figure: A.1 衝突時の衝撃力 J

粒子 i に対する粒子 j の中心間の相対速度 g は $g = v_j - v_i$ であるが，接触点における粒子表面の相対速度は次式で与えられる．

$$g_c = g - a_i \omega_i \times n - a_j \omega_j \times n \quad (A.5)$$

ここで n は接触点における法線ベクトルであり，粒子 i から見て外向きである．では接触点における粒子間のすべり速度 g_{fc} は次式で与えられる．

$$g_{fc} = n \times g_c \times n \quad (A.6)$$

このすべり速度 g_{fc} を用いればすべり方向の単位ベクトル t は

$$t = \frac{g_{fc}}{|g_{fc}|} \quad (A.7)$$

となる．単位ベクトル $\mathbf{n}$ と $\mathbf{t}$ を用いると衝撃力 $\mathbf{J}$ は次式のように分解できる．

$$\mathbf{J} = J_n \mathbf{n} + J_t \mathbf{t} \quad (\text{A.8})$$

ここで J_n と J_t はそれぞれ衝撃力 $\mathbf{J}$ の $\mathbf{n}$ 方向と $\mathbf{t}$ 方向の成分を表している．

衝突時の反発係数が e であるとする．衝突前の相対速度 $\mathbf{g}$ と衝突後の相対速度 $\mathbf{g}^*$ の関係は次式で与えられる．

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{g}^* = -e(\mathbf{n} \cdot \mathbf{g}) \quad (\text{A.9})$$

また式(A.2)から式(A.1)を引くと次式が得られる．

$$\mathbf{g}^* = \mathbf{g} - \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} \right) \mathbf{J} \quad (\text{A.10})$$

この式から

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{g}^* = \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} - \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} \right) J_n \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{g}^* = \mathbf{t} \cdot \mathbf{g} - \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} \right) J_t \quad (\text{A.12})$$

となる．また式(A.9)と式(A.11)より J_n が得られる．

$$J_n = \frac{(1+e)\mathbf{n} \cdot \mathbf{g}}{\left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} \right)} \quad (\text{A.13})$$

衝突後の接触点での表面の相対速度は式(A.5)と同様に次式で与えられる．

$$\mathbf{g}_c^* = \mathbf{g}^* - a_i \boldsymbol{\omega}_i^* \times \mathbf{n} - a_j \boldsymbol{\omega}_j^* \times \mathbf{n} \quad (\text{A.14})$$

式(A.15)に式(A.3), (A.4), (A.10)と $I = \frac{2ma^2}{5}$ を代入すると

$$\mathbf{g}_c^* = \mathbf{g}_c - \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} \right) \left(\mathbf{J} + \frac{5}{2} J_t \mathbf{t} \right) \quad (\text{A.15})$$

この式の $\mathbf{t}$ 方向成分について記述すると

$$\mathbf{g}_c^* \cdot \mathbf{t} = \mathbf{g}_c \cdot \mathbf{t} - \frac{7}{2} \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} \right) J_t \quad (\text{A.16})$$

接触点における滑りが接触している間持続すると仮定すると

$$J_t = -\mu_f J_n \quad (\text{A.17})$$

式 (A.13),(A.16),(A.17) から

$$\mathbf{g}_c^* \cdot \mathbf{t} = \mathbf{g}_c \cdot \mathbf{t} + \frac{7}{2}\mu_f(1+e)\mathbf{n} \cdot \mathbf{g} \quad (\text{A.18})$$

となる．ここで $\mathbf{g}_c \cdot \mathbf{t} + \frac{7}{2}\mu_f(1+e)\mathbf{n} \cdot \mathbf{g} < 0$ となる場合には，衝突時の摩擦力は接触点における滑りを止めさらに反対向きの滑りが生じるまで力を加えることになるが，このようなことはまずない．そこでそのような場合には，滑りが止まるまでの摩擦力がかかると考える．つまり $\mathbf{g}_c \cdot \mathbf{t} = 0$ として，これを式 (A.16) に代入すると，この場合の J_t は次式で与えられる．

$$J_t = -\frac{2\mathbf{g}_c \cdot \mathbf{t}}{7(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j})} = -\frac{2|\mathbf{g}_{fc}|}{7(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j})} \quad (\text{A.19})$$

J_t を与える際には，式 (A.17) と式 (A.19) の両方で見積もり，小さい方を採用すればよい．

質量 m の粒子同士の衝突の場合には J_n, J_t は次式で与えられる．

$$J_n = \frac{1}{2}(1+e)m\mathbf{n} \cdot \mathbf{g} \quad (\text{A.20})$$

$$J_t = \min[-\mu_f J_n, \frac{1}{7}m|\mathbf{g}_{fc}|] \quad (\text{A.21})$$

質量 m の粒子と壁面の衝突の場合には $m_i = m, m_j = \infty$ と考え， J_n, J_t は次式で与えられる．

$$J_n = (1+e)m\mathbf{n} \cdot \mathbf{g} \quad (\text{A.22})$$

$$J_t = \min[-\mu_f J_n, \frac{2}{7}m|\mathbf{g}_{fc}|] \quad (\text{A.23})$$

まとめると

$$\mathbf{J} = J_n \mathbf{n} + J_t \mathbf{t}$$

$$J_n = (1+e)M\mathbf{n} \cdot \mathbf{g}$$

$$J_t = \min[-\mu_f J_n, \frac{2}{7}M|\mathbf{g}_{fc}|]$$

ただし M は衝突相手が粒子の場合 $M = m/2$ ，壁面の場合 $M = m$ となる．

以上により粒子間衝突，粒子壁面間衝突の際に粒子にかかる衝撃力 $\mathbf{J}$ を与えることができる．

付録 B 局所平均量を用いた流体運動の基礎式の導出

B.1 はじめに

粒子を含む固気二相流において，流体の運動は原則的には Navier-Stokes 方程式によって完全に決定される．このとき，Navier-Stokes 方程式は流体中の全ての点で満足される．しかし今注目する系が多くの粒子を含む場合には，問題は非常に複雑となり，Navier-Stokes 方程式を直接的な解法で解くことは非常に困難である．そこで問題を簡単化するために，粒子と混じりあった流体相において基礎式を局所的に平均化して，流体運動を記述することが試みられている．それらの中から本研究では Anderson と Jackson⁽⁹⁾ により導かれた局所平均量に対する連続の式と運動量の式を採用したが，ここではその導出について述べておく．

B.2 重み関数 $g(r)$

流体速度や圧力を局所平均するために，重み関数の概念を導入する．重み関数 $g(r)$ は次に示すような性質を持ち， $r > 0$ の範囲で定義される関数とする．

- (1) 全ての r に対して $g(r) > 0$ で， r が増加するに従い $g(r)$ は単調減少する．
- (2) $g(r)$ は任意の n に対して n 次導関数を $g^{(n)}(r)$ をもつ．
- (3) 任意の n に対して $\int_{V_\infty} g^{(n)}(r) dV$ が存在する．ここで V_∞ は空間全域を意味する．すなわち

$$\int_{V_\infty} g(r) dV = 4\pi \int_0^\infty g(r) r^2 dr \quad (\text{B.1})$$

- (4) $g(r)$ は

$$\int_{V_\infty} g(r) dV = 1 \quad (\text{B.2})$$

となるように正規化されている．

このように定義した重み関数 $g(r)$ の半径 r_0 を次のように定義する.

$$4\pi \int_0^{r_0} g(r) r^2 dr = 4\pi \int_{r_0}^{\infty} g(r) r^2 dr = \frac{1}{2} \quad (\text{B.3})$$

重み関数 $g(r)$ を用いて局所平均量を定義する手法については B.4 で述べる.

B.3 局所平均空隙率と局所平均粒子数密度

位置 $\mathbf{x}$ 時間 t における局所平均空隙率 ε を次のように定義する.

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \int_{V_{f\infty}(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y \quad (\text{B.4})$$

ここで積分の中の添え字 $V_{f\infty}(t)$ は時間 t において流体が占める全ての位置 y で積分を行うことを示している. また dV_y は位置 y の近傍の体積要素を表わす. $g(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ はもっと正確には $g(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ と記述されるべきものであるが, ここでは簡単のため全体にわたってこの表現を用いる.

V_p が粒子 1 個の体積を表わすとし, 全ての粒子が同一のものであるならば, 局所的な粒子数密度 $n(\mathbf{x}, t)$ は次のように定義される.

$$\begin{aligned} V_p n(\mathbf{x}, t) &= 1 - \varepsilon(\mathbf{x}, t) = 1 - \int_{V_{f\infty}(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y \\ &= \int_{V_{\infty}} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y - \int_{V_{f\infty}(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y = \int_{V_{s\infty}(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

ここで $V_{s\infty}(t)$ は時間 t において粒子が占める空間全域を表わしている.

B.4 ポイント変数の局所平均量

$a'(\mathbf{x}, t)$ は流体速度や流体圧力など, 流体相の任意のポイント変数を表わすものとする. 同様に $b'(\mathbf{x}, t)$ は粒子速度などの粒子相の任意のポイント変数を表わすものとする. a', b' の局所平均量 a, b は次式で定義される.

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) a(\mathbf{x}, t) = \int_{V_{f\infty}(t)} a'(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y \quad (\text{B.6})$$

$$[1 - \varepsilon(\mathbf{x}, t)] b(\mathbf{x}, t) = V_p n(\mathbf{x}, t) b(\mathbf{x}, t) = \int_{V_{s\infty}(t)} b'(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y \quad (\text{B.7})$$

この局所平均の定義は，同一の場に対して必ずしも同一の局所平均量を与えない．なぜなら局所平均量は重み関数 $g(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ の形状，特に半径に大きく依存するからである．つまり半径が平均化される領域の大きさを決定するからである．しかし g の半径 r_0 を粒径に比べて十分大きく，巨視的な流れ場の空間変化のスケールに比べて十分小さくなるように設定すると，局所平均量は重み関数の形状や半径に対してほとんど依存しない．よってそのように半径 r_0 を設定する．

$g(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ は1つの粒子の内側でほとんど変化しないので次式が成り立つ．

$$\int_{v_p} b'(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y = g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \int_{v_p} b'(\mathbf{y}, t) dV_y = V_p b_p(t) g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \quad (\text{B.8})$$

ここで積分の中の添え字 v_p は粒子 p の内部の全ての位置 $\mathbf{y}$ で積分を行うことを示している． $\mathbf{x}_p$ は粒子 p の重心位置であり， $b_p(t)$ は粒子 p の内部で b' を平均化した値である．

局所平均量の空間的な変動は g の変化に比べて遅く， r_0 程度の距離ではほとんど変化しない．よって局所平均量を局所平均した場合には次に示すようになる．

$$\int_{V_{f\infty}(t)} a(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y = a(\mathbf{x}, t) \int_{V_{f\infty}(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y = \varepsilon(\mathbf{x}, t) a(\mathbf{x}, t) \quad (\text{B.9})$$

式 (B.6) と式 (B.9) を比較すると局所平均量とその局所平均はほとんど等しいということがわかる．これから以後，このように近似的に等しい場合にも，簡単のため等号を用いる．

ポイント変数の値はその局所平均量とそれからの変動の和として次式のように記述される．

$$\begin{aligned} a'(\mathbf{x}, t) &= a(\mathbf{x}, t) + a''(\mathbf{x}, t) \\ b'(\mathbf{x}, t) &= b(\mathbf{x}, t) + b''(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

a'', b'' は必ずしも小さくないがその局所平均量はそれぞれ a, b よりもずいぶん小さく，無視できる．

また式 (B.8) と同様の手続きを b' を局所平均する際に用いると,

$$\begin{aligned}
V_p n(\mathbf{x}, t) b(\mathbf{x}, t) &= \int_{V_{s\infty}(t)} b'(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y \\
&= \sum_{p\infty} \int_{v_p(t)} b'(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y \\
&= \sum_{p\infty} V_p b_p(t) g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)
\end{aligned}$$

すなわち

$$n(\mathbf{x}, t) b(\mathbf{x}, t) = \sum_{p\infty} b_p(t) g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \quad (\text{B.11})$$

となる. ここで $\sum_{p\infty}$ は系に存在する全ての粒子にわたって総和をとることを示している. 特にここで $b' \equiv 1$ とすると

$$n(\mathbf{x}, t) = \sum_{p\infty} g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \quad (\text{B.12})$$

B.5 局所平均量の微分

局所平均量に対する運動方程式を求めるために, 局所平均量の空間微分および時間微分とそれに対応するポイント変数の空間微分および時間微分の関係を知っておく必要がある.

式 (B.6) の両辺を x_k で微分すると

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon(\mathbf{x}, t) a(\mathbf{x}, t) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{V_{f\infty}(t)} a'(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y \\
&= \int_{V_{f\infty}(t)} a'(\mathbf{y}, t) \frac{\partial}{\partial x_k} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y \\
&= - \int_{V_{f\infty}(t)} a'(\mathbf{y}, t) \frac{\partial}{\partial y_k} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y \\
&= - \left[\int_{V_{f\infty}(t)} \frac{\partial}{\partial y_k} \{a'(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y})\} dV_y - \int_{V_{f\infty}(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_k} a'(\mathbf{y}, t) dV_y \right] \\
&= \int_{V_{f\infty}(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_k} a'(\mathbf{y}, t) dV_y - \int_{V_{f\infty}(t)} \frac{\partial}{\partial y_k} \{a'(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y})\} dV_y \\
&= \int_{V_{f\infty}(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_k} a'(\mathbf{y}, t) dV_y - \int_{S_f(t)} n_k^* a'(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_y \quad (\text{B.13})
\end{aligned}$$

ここで n_k^* は流体の境界上の点における，流体から見て外向きの単位法線ベクトルを表わしている．また式 (B.13) の変形では Gauss の発散定理および次式を用いている．

$$\frac{\partial}{\partial x_k} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\frac{\partial}{\partial y_k} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (\text{B.14})$$

$S_f(t)$ は時間 t における流体の境界面を表わしているが，それは系全体の表面 $S_{f\infty}$ と時間 t における個々の粒子表面 $s_p(t)$ で構成されるので式 (B.13) の右辺第2項は次のように書ける．

$$\begin{aligned} & \int_{S_f(t)} n_k^* a'(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_y \\ &= \int_{S_{f\infty}} n_k^* a'(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_y + \sum_{p\infty} \int_{s_p(t)} n_k^* a'(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_y \\ &= \int_{S_{f\infty}} n_k^* a'(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_y - \sum_{p\infty} \int_{s_p(t)} n_k a'(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_y \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

ここで n_k は流体の境界上の点における，流体から見て内向き，つまり粒子からみて外向きの単位法線ベクトルを表わしている．すなわち $n_k = -n_k^*$ である．位置 $\mathbf{x}$ から面 $S_{f\infty}$ までの距離が r_0 より十分大きいとすると，式 (B.15) の面 $S_{f\infty}$ に関する積分は無視できる．これを落として式 (B.13) と式 (B.15) から次式が得られる．

$$\begin{aligned} & \int_{V_{f\infty}(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_k} a'(\mathbf{y}, t) dV_y \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon(\mathbf{x}, t) a(\mathbf{x}, t) - \sum_{p\infty} \int_{s_p(t)} n_k a'(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_y \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

これがポイント変数と局所平均量の空間微分の関係式である．

次に式 (B.6) の両辺を t で微分して，時間微分の関係についても求めるが，この場合には，もう少し注意が必要である．それは粒子が運動するために積分範囲 $V_{f\infty}(t)$ 自体が時間に依存するからである．まずはそのことについて調べる必要がある． $I = \int_{V_{f\infty}(t)} A(\mathbf{y}, t) dV_y$ として

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_{f\infty}(t+\Delta t)} A(\mathbf{y}, t+\Delta t) dV_y - \int_{V_{f\infty}(t)} A(\mathbf{y}, t) dV_y}{\Delta t} \quad (\text{B.17})$$

ここで $V_{f\infty}(t + \Delta t) = V_{f\infty}(t) + \Delta V_{f\infty}(t)$ とすれば,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V_{f\infty}(t)} A(\mathbf{y}, t + \Delta t) dV_y + \int_{\Delta V_{f\infty}(t)} A(\mathbf{y}, t + \Delta t) dV_y - \int_{V_{f\infty}(t)} A(\mathbf{y}, t) dV_y \right] \\
&= \int_{V_{f\infty}(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(\mathbf{y}, t + \Delta t) - A(\mathbf{y}, t)}{\Delta t} dV_y + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta V_{f\infty}(t)} A(\mathbf{y}, t + \Delta t) dV_y \\
&= \int_{V_{f\infty}(t)} \frac{\partial A}{\partial t} dV_y + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta V_{f\infty}(t)} A(\mathbf{y}, t + \Delta t) dV_y \quad (\text{B.18})
\end{aligned}$$

この式の右辺第2項について考える．流体相の境界面 $S_f(t)$ の移動速度を v'_k とすると

$$dV = dS(v'_k \Delta t) n_k^* \quad (\text{B.19})$$

であるから，右辺第2項は $\int_{S_f(t)} A v'_k n_k^* dS_y$ と書き直される．

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{f\infty}(t)} A dV_y = \int_{V_{f\infty}(t)} \frac{\partial A}{\partial t} dV_y + \int_{S_f(t)} A v'_k n_k^* dS_y \quad (\text{B.20})$$

式(B.6)の両辺を t で微分して，この式を用いると，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(\mathbf{x}, t) a(\mathbf{x}, t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{f\infty}(t)} a'(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y \\
&= \int_{V_{f\infty}(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial a'(\mathbf{y}, t)}{\partial t} dV_y + \int_{S_f(t)} a'(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) v'_k n_k^* dS_y \quad (\text{B.21})
\end{aligned}$$

ここで

$$S_f(t) = S_{f\infty} + \sum_{p\infty} s_p(t)$$

であり，位置 $\mathbf{x}$ から面 $S_{f\infty}$ までの距離が r_0 より十分大きいことと $n_k = -n_k^*$ を用いると，右辺第2項は次式のように表わせる．

$$\begin{aligned}
&\int_{S_f(t)} a'(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) v'_k n_k^* dS_y \\
&= \int_{S_{f\infty}} a'(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) v'_k n_k^* dS_y + \sum_{p\infty} \int_{s_p(t)} a'(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) v'_k n_k^* dS_y \\
&= - \sum_{p\infty} \int_{s_p(t)} a'(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) v'_k n_k dS_y \quad (\text{B.22})
\end{aligned}$$

式(B.21)と式(B.22)から最終的に次式が得られる．

$$\begin{aligned}
&\int_{V_{f\infty}(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial a'(\mathbf{y}, t)}{\partial t} dV_y \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(\mathbf{x}, t) a(\mathbf{x}, t) + \sum_{p\infty} \int_{s_p(t)} a'(\mathbf{y}, t) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) v'_k n_k dS_y \quad (\text{B.23})
\end{aligned}$$

B.6 連続の式

流体が非圧縮であるとする。流体速度は流体が占める任意の点において次に示す連続の式を満足する。

$$\frac{\partial u'_k}{\partial y_k} = 0 \quad (\text{B.24})$$

このポイント変数に対する連続の式に $g(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ を乗じて、流体が占めるすべての点において積分すると次式が得られる。

$$\int_{V_{f\infty}(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial u'_k(\mathbf{y})}{\partial y_k} dV_y = 0 \quad (\text{B.25})$$

式(B.16)より

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \{ \varepsilon(\mathbf{x}, t) u_k(\mathbf{x}, t) \} = \sum_{p\infty} \int_{s_p(t)} n_k u'_k(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_y \quad (\text{B.26})$$

また式(B.23)において $a'(\mathbf{y}, t) \equiv 1$ とすると、 $a(\mathbf{x}, t) \equiv 1$ であり、さらに次式が得られる。

$$\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = - \sum_{p\infty} \int_{s_p(t)} n_k v'_k(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_y \quad (\text{B.27})$$

粒子の表面 $s_p(t)$ 上では固体の速度と流体の速度が等しくなり、 $v'_k(\mathbf{y}) = u'_k(\mathbf{y})$ となるので、式(B.26)と式(B.27)を足し合わせると次式が得られる。

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\varepsilon u_k) = 0 \quad (\text{B.28})$$

これが流体相の局所平均量に対する連続の式である。

B.7 流体の運動方程式

流体は非圧縮性で流体が占める任意の点において次に示す Navier-Stokes 方程式を満足するものとする。

$$\rho_f \left[\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_k} (u'_i u'_k) \right] = \frac{\partial E'_{ik}}{\partial y_k} + \rho_f g_i \quad (\text{B.29})$$

ここで E'_{ik} は流体の応力テンソルのポイント値であり, g_i は重力加速度ベクトルを表している.

この式 (B.29) の両辺に $g(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ を乗じて流体が占める全領域 $V_{f\infty}(t)$ にわたって y_k について積分する.

$$\begin{aligned} & \rho_f \int_{V_{f\infty}(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left[\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_k} (u'_i u'_k) \right] dV_y \\ &= \int_{V_{f\infty}(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial E'_{ik}}{\partial y_k} dV_y + \rho_f g_i \int_{V_{f\infty}(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

ところで式 (B.23) において $a' \equiv u'_i$ とすると

$$\begin{aligned} & \int_{V_{f\infty}(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial u'_i}{\partial t} dV_y \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, t) + \sum_{p\infty} \int_{s_p(t)} u'_i g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) v'_k n_k dS_y \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

また式 (B.16) において $a' \equiv u'_i u'_k$ とすると

$$\begin{aligned} & \int_{V_{f\infty}(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_k} (u'_i u'_k) dV_y \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{V_{f\infty}(t)} u'_i u'_k g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y - \sum_{p\infty} \int_{s_p(t)} n_k u'_i u'_k g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_y \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

ここで右辺第1項を $\frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon(\mathbf{x}, t) u_i u_k$ としなかったのは, $u'_i u'_k$ の局所平均量は必ずしも $u_i u_k$ ではないからである.

式 (B.31) および (B.32) と, 粒子の表面 $s_p(t)$ では $u'_k = v'_k$ となることから, 式 (B.30) の左辺は次式のように与えられる.

$$\begin{aligned} & \rho_f \int_{V_{f\infty}(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left[\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_k} (u'_i u'_k) \right] dV_y \\ &= \rho_f \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, t) + \rho_f \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{V_{f\infty}(t)} u'_i u'_k g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

式 (B.33) の右辺第2項の積分において $u'_i = u_i + u''_i$ とおくと次式が得られる.

$$\begin{aligned} & \int_{V_{f\infty}(t)} u'_i u'_k g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y \\ &= \int_{V_{f\infty}(t)} u_i u_k(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y + \int_{V_{f\infty}(t)} (u''_i u_k + u_i u''_k)(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y \\ & \quad + \int_{V_{f\infty}(t)} u''_i u''_k(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

ここで式 (B.9) において $a \equiv u_i u_k$ とすると式 (B.34) の右辺第1項は $\varepsilon(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x})$ になる．また右辺第2項において局所平均量 u_i と u_k は重み関数 $g(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ の半径内ではほとんど変化しないので積分の外に出すことができる．

$$\begin{aligned} & \int_{V_{f\infty}(t)} (u_i'' u_k + u_i u_k'')(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y \\ &= u_k \int_{V_{f\infty}(t)} u_i''(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y + u_i \int_{V_{f\infty}(t)} u_k''(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

ここで u_i'' や u_k'' の局所平均量は u_i, u_k と比べて十分小さくなるので式 (B.34) の右辺第2項は無視できる．よって式 (B.30) の左辺は次のように書き直される．

$$\begin{aligned} & \rho_f \int_{V_{f\infty}(t)} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left[\frac{\partial u_i'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_k} (u_i' u_k') \right] dV_y \\ &= \rho_f \left[\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) \right] + \frac{\partial R_{ik}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

ここで R_{ik} は次式で与えられる．

$$R_{ik} = \int_{V_{f\infty}(t)} u_i''(\mathbf{y}) u_k''(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_y \quad (\text{B.37})$$

次に式 (B.30) の右辺について考える．第2項は式 (B.4) より $\varepsilon(\mathbf{x}) \rho_f g_i$ になることがわかる．式 (B.16) において $a' \equiv E'_{ik}$ とすると第1項は次のように与えることができる．

$$\begin{aligned} & \int_{V_{f\infty}} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial E'_{ik}}{\partial y_k} dV_y \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} [\varepsilon(\mathbf{x}) E_{ik}(\mathbf{x})] - \sum_{p\infty} \int_{s_p} n_k E'_{ik}(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_y \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} [\varepsilon(\mathbf{x}) E_{ik}(\mathbf{x})] - \sum_{p\infty} \int_{s_p} n_k E_{ik}(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_y \\ &\quad - \sum_{p\infty} \int_{s_p} n_k E''_{ik}(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_y \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

E_{ik} は系の任意の点で定義される関数なので右辺第2項は Gauss の発散定理により次式のように変形できる．

$$\begin{aligned} & \sum_{p\infty} \int_{s_p} n_k E_{ik}(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_y \\ &= \sum_{p\infty} \int_{v_p} \frac{\partial}{\partial y_k} [E_{ik}(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y})] dV_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{V_{s\infty}} \frac{\partial}{\partial y_k} [E_{ik}(\mathbf{y})g(\mathbf{x}-\mathbf{y})] dV_y \\
&= \int_{V_{s\infty}} g(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \frac{\partial E_{ik}}{\partial y_k} dV_y - \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{V_{s\infty}} E_{ik}(\mathbf{y})g(\mathbf{x}-\mathbf{y}) dV_y
\end{aligned} \tag{B.39}$$

ここで式 (B.29) の関係を用いた． E_{ik} や $\partial E_{ik}/\partial y_k$ は g の半径程度の領域にわたってほとんど変化しないので，その独立変数を $\mathbf{y}$ のかわりに $\mathbf{x}$ を用いて，積分の外に出すことが可能である．よって次式が得られる

$$\begin{aligned}
&\sum_{p\infty} \int_{s_p} n_k E_{ik}(\mathbf{y})g(\mathbf{x}-\mathbf{y}) dS_y \\
&= \frac{\partial E_{ik}(\mathbf{x})}{\partial x_k} \int_{V_{s\infty}} g(\mathbf{x}-\mathbf{y}) dV_y - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[E_{ik}(\mathbf{x}) \int_{V_{s\infty}} g(\mathbf{x}-\mathbf{y}) dV_y \right] \\
&= \{1 - \varepsilon(\mathbf{x})\} \frac{\partial E_{ik}(\mathbf{x})}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} [\{1 - \varepsilon(\mathbf{x})\} E_{ik}(\mathbf{x})] \\
&= E_{ik}(\mathbf{x}) \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{x})}{\partial x_k}
\end{aligned} \tag{B.40}$$

これを使えば式 (B.38) は次のようになる．

$$\int_{V_{f\infty}} g(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \frac{\partial E'_{ik}}{\partial y_k} dV_y = \varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial E_{ik}(\mathbf{x})}{\partial x_k} - \sum_{p\infty} \int_{s_p} n_k E''_{ik}(\mathbf{y})g(\mathbf{x}-\mathbf{y}) dS_y \tag{B.41}$$

粒子直径程度の領域にわたって $g(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ はほとんど変化しない．したがって式 (B.41) の最後の項に出てくる積分で $g(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ を $g(\mathbf{x}-\mathbf{x}_p)$ とおきこの関数を積分の外に出すことで簡単化することができる．しかしもしこの簡単化の方法が一般的に妥当であれば，式 (B.38) は E'_{ik} を $E_{ik} + E''_{ik}$ と表すことなく簡単化され，よって式 (B.38) 以降の部分は削除できることになる．実際この手続きが一般に適用できないことは次のような場合に分かる．次のような積分

$$\int_{s_p} f(\mathbf{y}) n_k(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}-\mathbf{y}) dS_y \tag{B.42}$$

において $f(\mathbf{y}) \equiv A = \text{一定}$ といった簡単な場合を考えると，これは次のように書き換えられる．

$$A \int_{s_p} n_k(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}-\mathbf{y}) dS_y \tag{B.43}$$

$g(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ がゆっくり変化する関数という条件下において $g(\mathbf{x}-\mathbf{x}_p)$ で置き換えられるとすると，次のようになる．

$$Ag(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \int_{s_p} n_k(\mathbf{y}) dS_y \quad (\text{B.44})$$

そして積分は消え，式(B.43)が消えるという結論が導き出せる．しかしこの結論は一般的には間違いである．というのは g の変動成分が積分に有限の寄与を与えるため，もし A が十分に大きければ式(B.43)も大きくなるからである．つまり $f(\mathbf{y})$ の平均値の寄与が変動成分の寄与に比べて大きい場合には g の変動成分の寄与が大きくなるので，それを無視して g を積分の外に出すことは適切ではない．式(B.38)中の E'_{ik} を含む積分がこの手続きによって直接簡単化されず， E'_{ik} を E_{ik} と E''_{ik} の和で表現し，積分を別々に扱うのはこのためである．逆に $f(\mathbf{y})$ の平均値の寄与が変動成分の寄与に比べて十分小さな場合には g の変動成分の寄与を無視することができる．すなわち式(B.42)の形の積分は一般には s_p にわたる g の変化を無視することで変形できないが，次のような場合にはこれが良い近似を与える．

- A. s_p にわたる $f(\mathbf{y})$ の平均値がこの平均値まわりの変化に比べて小さいとき．
- B. s_p にわたる $f(\mathbf{y})$ の変化が滑らかであるとき．
- C. 表面 s_p の形が球形からそれほど大きくずれていないとき．

いま，条件AとBは E''_{ik} (E'_{ik} によってではないが)によって満足される．というのはそれが E'_{ik} の局所平均値まわりの変化を表すからである．したがって E''_{ik} の平均値はその変化の大きさに比べて小さく，1つの粒子の表面上での位置の関数とみなしたときにはそれらの変化は滑らかである．なぜならそれらは主に粒子のまわりを通り過ぎる流体の流線のゆがみのために発生するからである．よってもし粒子が球形からあまりかけ離れていない凸型の形状をしていれば，すなわち条件Cも満たされていれば，式(B.41)の右辺の最後の項の s_p にわたる g の変化を無視することは妥当である．よって次式が得られる．

$$\int_{V_{f\infty}} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial E'_{ik}}{\partial y_k} dV_y = \varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial E_{ik}(\mathbf{x})}{\partial x_k} - \sum_{p\infty} g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \int_{s_p} E''_{ik} n_k dS \quad (\text{B.45})$$

式 (B.36),(B.37),(B.45) および流体の連続の式 (B.28) を用いて，局所平均運動方程式 (B.30) は次のように書き換えられる．

$$\rho_f \varepsilon \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] = \varepsilon \frac{\partial E_{ik}}{\partial x_k} - \frac{\partial R_{ik}}{\partial x_k} + \varepsilon \rho_f g_i - \sum_{p \in \infty} g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \int_{s_p} E''_{ik} n_k dS \quad (\text{B.46})$$

ところで周囲流体から1つの粒子 p にかかる力 f_{pi} は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} f_{pi} &= \int_{s_p} E'_{ik} n_k dS = \int_{s_p} (E_{ik} + E''_{ik}) n_k dS \\ &= \int_{v_p} \frac{\partial E_{ik}}{\partial x_k} dv + \int_{s_p} E''_{ik} n_k dS \\ &= V_p \left(\frac{\partial E_{ik}}{\partial x_k} \right)_{\mathbf{x}_p} + \int_{s_p} E''_{ik} n_k dS \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

ここで発散定理と粒子内部では $\partial E_{ik}/\partial x_k$ がほとんど変化しないことを用いた．式 (B.47) の右辺第1式の両辺に $g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)$ を掛け，全粒子について合計すると，式 (B.11) から左辺は $n(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})$ となる．ここで $f_i(\mathbf{x})$ は周囲流体から1つの粒子に働く力の局所平均値である． $\partial E_{ik}/\partial x_k$ は g の半径にわたってほとんど変化しないので， $(\partial E_{ik}/\partial x_k)_{\mathbf{x}_p}$ は $(\partial E_{ik}/\partial x_k)_{\mathbf{x}}$ で置き換えられ，右辺第1項の全粒子にわたる総和は，式 (B.12) から $[1 - \varepsilon(\mathbf{x})](\partial E_{ik}/\partial x_k)_{\mathbf{x}}$ と変形される．

$$\sum_{p \in \infty} g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \int_{s_p} E''_{ik} n_k dS = n(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x}) - [1 - \varepsilon(\mathbf{x})] \left(\frac{\partial E_{ik}}{\partial x_k} \right)_{\mathbf{x}} \quad (\text{B.48})$$

そしてこれを式 (B.46) の右辺の最後の項に適用すると最終的に次式が得られる．

$$\rho_f \varepsilon \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] = \frac{\partial \mathcal{E}_{ik}}{\partial x_k} - n f_i + \varepsilon \rho_f g_i \quad (\text{B.49})$$

ここで

$$\mathcal{E}_{ik} = E_{ik} - R_{ik} \quad (\text{B.50})$$

また粒子にかかる力は

$$f_{pi} = \int_{s_p} E'_{ik} n_k dS$$

で表されるが，この力は粒子に比べて大きいスケールの巨視的な応力変動による成分と微視的な応力変動による成分に分けることができる．後者の成分は摩擦を含み流体抵抗力を生む． E'_{ik} の最も簡単な分解は

$$E'_{ik} = E_{ik} + E''_{ik}$$

であるが，ここで右辺第1項にレイノルズ応力 R_{ik} を含めたい．そこで上式を次のように修正することにする．

$$E'_{ik} = \mathcal{E}_{ik} + \mathcal{D}_{ik}$$

その結果

$$\begin{aligned} f_{pi} &= \int_{s_p} \mathcal{E}_{ik} n_k dS + \int_{s_p} \mathcal{D}_{ik} n_k dS \\ &= \int_{v_p} \frac{\partial \mathcal{E}_{ik}}{\partial x_k} dV + \int_{s_p} \mathcal{D}_{ik} n_k dS \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

ここで式変形に Gauss の発散定理を用いた． $E'_{ik}, \mathcal{D}_{ik}$ は流体が占める点においてのみ定義されるが， $\mathcal{E}_{ik}$ は空間のすべての点で定義される． $\frac{\partial \mathcal{E}_{ik}}{\partial x_k}$ は粒子の内部でほとんど変化しないので，上式は次のようになる．

$$f_{pi} = V_p \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{ik}}{\partial x_k} \right) \mathbf{x}_p + \tilde{f}_{pi} \quad (\text{B.52})$$

ここで

$$\tilde{f}_{pi} = \int_{s_p} \mathcal{D}_{ik} n_k dS$$

式 (B.52) を用いると

$$\begin{aligned} n f_i &= \sum_{p \in \infty} f_{pi} g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \\ &= V_p \sum_{p \in \infty} \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{ik}}{\partial x_k} \right) \mathbf{x}_p g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) + \sum_{p \in \infty} \tilde{f}_{pi} g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \\ &= V_p \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{ik}}{\partial x_k} \right) \mathbf{x} \sum_{p \in \infty} g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) + \sum_{p \in \infty} \tilde{f}_{pi} g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \\ &= n V_p \frac{\partial \mathcal{E}_{ik}}{\partial x_k} + n \tilde{f}_i \\ &= (1 - \varepsilon) \frac{\partial \mathcal{E}_{ik}}{\partial x_k} + n \tilde{f}_i \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

ここで $\frac{\partial \mathcal{E}_{ik}}{\partial x_k}$ は g の半径程度の距離ではほとんど変化しないことが用いられた．また $\tilde{f}_i$ は流体速度の微視的な変動により 1 個の粒子に与えられる流体力の局所平均値を表している．式 (B.53) を式 (B.49) に代入すると次の式が得られる．

$$\rho_f \varepsilon \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] = \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}_{ik}}{\partial x_k} - n \tilde{f}_i + \varepsilon \rho_f g_i \quad (\text{B.54})$$

本論文では，流体は非粘性であると仮定して $\frac{\partial \mathcal{E}_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}$ とした．また $n \tilde{f}_i$ は層単位体積に含まれる粒子相に与える流体力を表しているが，本論文では $-F_{pi}$ で与えた．流体密度 ρ_f は粒子密度 ρ_p と比べて十分小さいので $\varepsilon \rho_f g_i$ の項は $-F_{pi}$ と比べて無視できるほど小さい．よって本論文で用いた局所平均量に対する運動方程式は次式で与えられた．

$$\rho_f \varepsilon \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] = -\varepsilon \frac{\partial p}{\partial x_i} + F_{pi} \quad (\text{B.55})$$

またこの式をベクトル表記すると，

$$\varepsilon \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{\varepsilon}{\rho_f} \nabla p + \frac{\mathbf{F}_p}{\rho_f} \quad (\text{B.56})$$

である．

参考文献

- (1) 辻, 空気輸送の基礎, (1984), 養賢堂.
- (2) Horio, M. and Kuroki, H., *Chem. Eng. Sci.*, **49**-15, (1994), 2413.
- (3) 武内・ピアテンコ・幡野, *Proc. of The 7th SCEJ Symp. on Circulating Fluidized Beds*, (1994), 97.
- (4) Tsuo, Y. P. and Gidaspow, D., *AIChE J.*, **36**-4, (1990), 501.
- (5) 田中・門野・辻, 機論, **56**-531, B (1990), 3210.
- (6) 霧林 謙 大阪大学大学院修士論文 (1991)
- (7) Bird, G. A., *Molecular Gas Dynamics*, (1976), 118, Oxford Univ. Press, London.
- (8) Kitron, A., Elperin, T., and Tamir, A., *Int. J. Multiphase Flow*, **16**-1, (1990), 1.
- (9) Anderson, T.B. and Jackson, R., *I&EC Fundamentals*, **6**-4, (1967), 527.
- (10) Patankar, S.V. (水谷・香月, 訳), コンピュータによる熱移動と流れの数値解析, (1985), 森北出版.
- (11) 志田・川合, 物性研究, **58**-4, (1992), 337.
- (12) R. G. D. Yarnold, *Phil. Mag.*, **36**, (1945) 185.
- (13) 古浦, 流れ, **2**, (1983) 127.
- (14) Babovsky, H., *Math. Meth. Appl. Sci.*, **8**, (1986), 223.
- (15) 南部・五十嵐・渡部, 第2回数値流体力学シンポジウム講演論文集, (1988), 151.
- (16) Morsi, S.A. and Alexander, A.J., *J. Fluid Mech.*, **55**, Part.2 (1972), 193.
- (17) Saffman, P. G., *J. Fluid Mech.*, **22**, Part 2 (1965), 385; **31**, (1968), 624.
- (18) Dennis, S.C.R., ほか2名, *J. Fluid Mech.*, **101**, (1980), 257.
- (19) Takagi, H., *J. Phys. Soc. Jpn*, **42**, (1977), 319.
- (20) 辻, 第5回混相流シンポジウム講演論文集, (1986), 23.
- (21) 田中, 混相流, **8**-4, (1994), 315.
- (22) Patankar, S.V., Liu, C.H., and Sparrow, E.M., *J. Heat Transfer*, **99**, (1977), 180.
- (23) Yerushalmi, J., ほか3名, *AIChE Symp. Ser.*, **74**-176, (1978), 1.

関連発表論文

- (1) Yonemura, S., Tanaka, T. and Tsuji, Y., "Cluster Formation in Gas-Solid Flow Predicted by DSMC Method", *Proceedings of the 5th International Symposium on Gas-Solid Flow, ASME-FED*, Vol.166, pp. 303-309, (1993)
- (2) Tanaka, T., Yonemura, S. and Tsuji, Y., "Cluster Formation in Gas-Solid Flow Predicted by the DSMC Method", *Proceedings of International Symposium on Reliable Flow of Particulate Solids II*, Oslo, pp. 373-378, (1993).
- (3) 田中敏嗣・米村 茂・霧林 謙・辻 裕, 「固気二相流のクラスター形成と流動の不安定化 (DSMC 法による鉛直チャンネル内流れの数値シミュレーション)」, 日本機械学会論文集 (B 編) 59 巻 566 号, pp. 2982-2989, (1993)
- (4) Tsuji, Y., Tanaka, T. and Yonemura, S., "Particle Induced Turbulence", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 47, No. 6, Part 2, pp.75-79, (1994).
- (5) Yonemura, S., Tanaka, T. and Tsuji, Y., "Cluster Formation in Dispersed Gas-Solid Flow (Effects of Physical Properties of Particles)", *Proceedings of The 2nd International Conference on Multiphase Flow*, 3, pp. (PT4-25)-(PT4-30), (1995).
- (6) Tanaka, T., Yonemura, S. and Tsuji, Y., "Effects of Particle Properties on the Structure of Clusters", *Proceedings of the 6th International Symposium on Gas-Solid Flow, ASME-FED*, Vol.228, pp. 297-302, (1995)
- (7) 米村 茂・田中敏嗣・辻 裕, 「固気二相流中のクラスター形成の数値シミュレーション (クラスター構造への粒径および粒子濃度の影響)」, 日本機械学会論文集 (B 編) 61 巻 590 号, pp. 3671-3678, (1995)
- (8) Tanaka, T., Yonemura, S., Kiribayashi K. and Tsuji, Y., "Cluster Formation and Particle-Induced Instability in Gas-Solid Flows Predicted by the DSMC Method", *JSME International Journal*, 掲載予定

謝 辞

本論文は著者が大阪大学工学部産業機械工学科設備装置工学講座において行った研究の成果をまとめたものである。

本研究の実施において終始適切な御指導および御教授をいただいた辻 裕教授、吉岡 宗之助教授、田中 敏嗣講師、川口 寿裕助手に深く感謝の意を表します。特に直接ご指導いただいた辻 裕教授、田中 敏嗣講師には研究者として未熟な著者を根気よく御指導して下さったことに対して謹んで感謝致します。

また、大阪大学 高城 敏美教授、三宅 裕教授にはご多忙のなか本論文の御校閲と数々の有益な御示唆をいただきました。ここに厚く御礼申し上げます。

本研究の過程では川口 寿裕助手をはじめ、霧林 謙氏(現在住友金属勤務)、下水木 信久氏(現在いすゞ自動車勤務)、六車 嘉貢氏(現在塩野義製薬勤務)、山根 賢治氏(現在大鵬薬品勤務)、山下 倫弘氏(現在シャープ勤務)、井上 義之氏(現在ホソカワミクロン勤務)から種々の暖かい御助言をいただきました。さらに同じ研究室において協力を惜しまず共同で研究に取り組んでいただいた神谷 明良氏(現在日商岩井勤務)、井口 雅之氏(現在IHI勤務)、宮島 剛氏(現在日産自動車勤務)、田上 倫孝氏(現在神戸製鋼勤務)、太田 弘司氏(現在住友商事勤務)、上山 昌慶氏(現在帝人精機勤務)、大田 史君、大峠 慎二君、西田 正彦君の諸氏にも深く感謝致します。

本研究はこれらの数多くの人たちに支えられて成し得ました。最後にこれほどに素晴らしい環境を与えてくださった辻研究室に関わりのある全ての皆さんに心より感謝致します。