



Title	X線CT画像に生ずるモーションアーチファクトの研究
Author(s)	坂本, 隆
Citation	大阪大学, 1993, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.11501/3065951
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

学位論文

X線C T画像に生ずる
モーションアーチファクトの研究

坂本 隆

大阪大学大学院 基礎工学研究科

物理系専攻 生物工学分野

1993年1月29日

本論文の要旨

本論文は、X 線 CT へ適用する被写体が運動するときに、CT 画像に発生する画像エラー（モーションアーチファクト）と、被写体運動が引き起こす画像劣化を対象に、研究した成果をまとめたものである。とくに本研究により、被写体が一定の運動（並進運動など）をするとき CT 画像中に現れる「ふれ」の形状が、サイクロイドと呼ばれる平面曲線である等の事実が明らかとなった。

本論文の構成は以下の通りである。

第1章では、モーションアーチファクト研究の目的と意義について述べる。CT 技術が成熟し様々な分野に CT 装置が普及した現状においても、モーションアーチファクトに関する多くの問題が存在することなどを例示した後、アーチファクトの発生と性質の解析が不可欠であること等を主張する。また本研究と関連の深い幾つかの報告についてまとめる。

第2章では、被写体からの投影計測および画像再構成に関する基礎的理論をまとめる。被写体断層の再構成問題を定式化するために、X 線 CT における投影の計測について述べた後、被写体および投影を数学的に定義する。また投影からの画像再構成法を、2次元 Fourier 変換対をもとに導く。ここでは CT 装置を一つのシステムと見なす概念を導入し、このシステムを構成する被写体-計測系（被写体断層から投影を計測するシステム）ならびに画像再構成系（投影を用いて被写体断層を再構成するシステム）について説明する。また画像再構成に欠かせない逆投影変換の性質、特に再構成画像を考える上で重要な層と積層の概念についてまとめる。アーチファクトを解析する上で欠かすことのできない CT 画像化（再構成画像をディスプレイへ映し出す操作）についても議論する。

第3章では、時間に依存する被写体-計測系と画像再構成系からなる断層撮影モデルを提案し、その概要についてまとめる。ここではスキャン時間が無限小ではない CT 装置を想定し、ある簡単な条件を加味することによって、時間を考慮する被写体-計測系がモデル化できることを示す。また本モデルで得られた投影が、画像再構成系においてどのように処理され、その結果どのような劣化が起こり得るかについて言及する。

第4章～第7章では、対象断面内を運動する被写体とモーションアーチファクトを、ある限られた条件下において解析する。本論文では、剛体と呼ばれる形状や濃度が変化しない被写体を特に想定する。剛体の運動は、並進と回転に分けて考えられる。そこで第4章と第5章では並進運動を、第6章と第7章では回転運動を扱う。また剛体は重みづけられた点源（2次元デルタ関数）の集まりとして表現できる。そこで第4章と第6章では点源に対する解析を行い、それぞれの解析結果を第5章と第7章において剛体へ拡張する。その概要は以下の通りである。

まず点源（2次元デルタ関数）を被写体断層として想定し、並進運動（第4章）と原点中心の回転運動（第6章）について、アーチファクトを解析する。各々の運動を想定する断層撮影モデルに対して点拡がり関数を求め、CT画像に生ずるふれの性質について明らかにする。とくにCT画像中に描かれるふれの形状が「サイクロイド」と呼ばれる平面曲線であることを示し、計算機シミュレーションによる検証結果を併せて報告する。

次に剛体を被写体とし、並進運動の場合（第5章）と回転運動の場合（第7章）について再構成画像の劣化とアーチファクトを解析する。ここでは再構成画像が点拡がり関数の線形和として定式化されることを示す。また、CT画像に生ずる剛体のふれ像、とくに断層像が多重化するモーションアーチファクト（ストロボスコープ像）について、多重像の発生位置とその数を明らかにする。併せて計算機シミュレーションの結果も示す。

第8章では、第4章～第7章の解析結果を踏まえ、並進と回転の合成によって剛体の運動を表現する。そして合成運動を想定する断層撮影モデルの点拡がり関数を決定し、画像劣化の定式化を行う。また、ふれ像やストロボスコープ像の解析、検証を行う。

第9章では、本論文の結果を総括し、今後の課題について述べる。

目 次

1	序論	1
1.1	本研究の目的と意義	1
1.2	本研究に関連の深い諸報告	3
1.3	本論文の要旨	9
2	被写体断層の再構成の基礎	11
2.1	被写体と投影	11
2.1.1	X 線 CT における投影の計測	11
2.1.2	Radon 変換	13
2.1.3	被写体-計測系	15
2.2	画像再構成法	16
2.2.1	2 次元 Fourier 変換法	16
2.2.2	フィルタ補正逆投影法	17
2.2.3	画像再構成系	19
2.3	逆投影の性質 (積層)	20
2.4	再構成画像の CT 画像化	24
3	断層撮影モデル	27
3.1	モデルの必要性	27
3.2	時間に依存する被写体-計測系	29
3.3	時間に関する縮退	32
4	点源の並進によるモーションアーチファクト	36
4.1	円形断層の並進運動	36
4.2	円形断層に対する再構成画像	38
4.3	円形断層の極限としての点源	40
4.4	点源に対する再構成画像の導出	42
4.5	ぶれの発生	45
4.6	ぶれの形状	47

4.7	尖点の発生	49
4.8	計算機シミュレーション	53
4.8.1	方法	53
4.8.2	結果	54
5	剛体の並進によるモーションアーチファクト	60
5.1	並進する剛体断層と画像劣化	60
5.2	モーションアーチファクト	64
5.2.1	ふれ像	65
5.2.2	ストロボスコープ像	66
5.3	計算機シミュレーション	70
6	点源の回転によるモーションアーチファクト	77
6.1	円形断層の回転運動	77
6.2	円形断層に対する再構成画像	79
6.3	点源に対する再構成画像の導出	81
6.4	ふれの発生	83
6.5	ふれの形状	85
6.6	尖点の発生	90
6.7	計算機シミュレーション	92
6.7.1	方法	92
6.7.2	結果	92
7	剛体の回転によるモーションアーチファクト	98
7.1	回転する剛体断層と画像劣化	98
7.2	モーションアーチファクト	100
7.2.1	ふれ像	101
7.2.2	ストロボスコープ像	103
7.3	計算機シミュレーション	106

8	並進運動と回転運動の合成	112
8.1	点拡がり関数の導出	113
8.2	画像劣化モデル	114
8.3	点源のふれ像	117
8.3.1	ふれの形状	117
8.3.2	尖点の発生	119
8.4	剛体断層のふれ像	120
8.5	計算機シミュレーション	122
9	結論および今後の課題	128
10	謝辞	133
11	参考文献	134
12	関連発表論文	139

第 1 章 序論

1.1 本研究の目的と意義

X 線 CT スキャナを用いた断層撮影は、被写体の周囲から X 線を照射し、その反対側で減衰量を計測して行われる。スキャナは、被写体周りに線源を廻しながら X 線照射するものと、被写体周りに固定した多数の線源から X 線照射するものに大別される。しかしいずれの装置を用いても、被写体を順次スキャンし、様々な方向からの計測を終了するまでに、ある程度の時間を要する。心臓のように常時動き続ける被写体も、しばしば断層撮影の対象となる。X 線照射により計測された信号（投影）は、「投影からの画像再構成」と呼ばれる原理に基づき画像化される [1,2,3]。しかしこの原理は被写体が完全に静止した状態を仮定するため、もし被写体が動けば計測データに矛盾が生じ、それが顕在化して CT 画像中のノイズ、ゴースト、ぶれなどになる。こうした被写体の動きに起因する画像エラーはモーションアーチファクトと呼ばれる [4,5]。

アーチファクトは CT 像を著しく劣化させ、画像診断の障害となるため、できるだけその発生をくい止めなければならない。医療分野では、体動、筋肉の動き、呼吸、腸管の蠕動、心臓の拍動といった、生体の動きの影響が特に問題となる [6]。モーションアーチファクトにより断層像が劣化し、画像診断が困難となるためである。これらの問題を解決するためには、スキャン時間を短縮すればよい。そこで被写体を超高速でスキャンしする解決法が取られる。しかし被写体を超高速でスキャンするとしても、問題は被写体とスキャンの相対的な速度であり、被写体の動きが速ければやはりモーションアーチファクトが発生してしまう。例えば、ミリ秒単位の撮影が可能な超高速 CT スキャナ（UFCT）も開発されているが、この UFCT を用いても、運動速度の速い心臓内部などにはモーションアーチファクトが生じて、診断上の問題となっている [11,13]。あるいは心臓のように周期運動する被写体ならば、同一の位相で撮影する方法を用いれば、モーションアーチファクトを避けることができる。しかしこの方法には周期運動する被写体しか撮影できない欠点がある。こうした技術的に困難な問題が存在するために、被写体の様々な挙動が X 線 CT 画像に及ぼす影響等について、明らかにする必要がある。CT 装置がある程度成熟した現在においても、被写体の動きとモーション

アーチファクトを解析し、その知識を画像診断に生かすことが大切である。

モーションアーチファクトは、CT 画像上に現れたときの形状によって、いくつかのカテゴリーに分類することができる [11,13]：

- 1) 被写体のある一点から放射状に広がる「筋 (streaks)」。
- 2) 円弧 (ー), コンマ (,), 口髭 (ゝ) などの軌跡を描く「ふれ像」。
- 3) 被写体が二重三重にふれて映像化される「ストロボスコープ像」。

上述の 3 つの内、1) は最も良く出現するモーションアーチファクトの形態である [4]。また計算機や物理的ファントムを用いた解析が既になされている [7]。2) と 3) は臨床において心臓断層を撮影する際に見つかり、これらが画像へ及ぼす影響についてはその一部が調査されている [8,10,11,12,13,14,15,46,48,50,51]。しかし 2) 3) については、アーチファクトの生因が被写体の動きであることは分かっているが、なぜこのような形状が CT 画像中に生ずるのか、どのような条件のとき発生するのか、これらの発生機序に関して不明な点が多い。こうしたモーションアーチファクトの発生機序を明らかにするためには、「被写体の動きとアーチファクトの形状、発生箇所の関係」を解析しなければならない。また「モーションアーチファクトを含む CT 画像が、数学的にどのように記述されるか」を明らかにする必要がある。

本研究の目的は、スキャン時間が無限小でない通常の（理想的でない）X 線 CT 装置を、運動する被写体に適用し断層撮影するときに、再構成画像がどのように劣化するか、被写体を映し出す CT 画像にはどのようなモーションアーチファクトが発生するか、などを明らかにすることである。X 線 CT スキャナにおける被写体-計測系は、物理的に複雑で、対象となる被写体が未知であるため、厳密に再現することはできない。従ってモーションアーチファクトを解析するためには、その発生をモデル化する必要がある。被写体投影から通常の再構成をおこなう公式には、スキャン時間の概念がない。そこで本研究では、被写体からの投影計測に対し、時間の概念を導入した断層撮影モデルを構築し、再構成画像および X 線 CT 画像のふれを解析的・数値的に再現する。また運動する被写体の再構成画像に生ずる劣化を定式化し、モーションアーチファクトに関する種々の性質を明らかにする。またこれらの解析結果は、計算機シミュレーションによって検証される。

本論文でなされるアーチファクトに関する解析の結果は、X線CTを用いた画像診断に新しい知見を与えるだろう。例えば、モーションアーチファクトの形状と被写体の動きの関係が明らかになれば、再構成画像あるいはそのCT画像から、元の被写体断層に関する何らかの情報が得られる可能性がある。逆に再構成画像中に、特異な形状が観測された場合には、外部から観測できなくとも、被写体断層中にその形状が存在するのではなく、内部に運動するものがあるという可能性を示唆することができる。画像技術への応用も考えられる。例えば、被写体断層とその運動によって劣化した再構成画像の関係が定式化されるならば、静止断層像の復元法に糸口を与えるだろう。このように、被写体の動きおよびその動きで劣化したCT画像、モーションアーチファクトを解析し、その知識を画像診断にフィードバックさせることは重要な意義を持つと思われる。

1.2 本研究に関連の深い諸報告

モーションアーチファクトに関する研究の歴史は、CT装置の開発当初からなされている。開発初期のCTスキャナは、ペンシルビームを用いる第1世代CTに代表されるように、被写体のスキャン（投影の計測）にかなりの時間を要し、被写体の動き（体動、筋肉の動き、呼吸、腸管の蠕動、心臓の拍動など）の影響を避け得なかった。これらの装置で得られたモーションアーチファクトは、streakingと呼ばれる筋状（直線状）の偽像であり、被写体の一部分から放射状に発生する[4]。しかしCT装置の世代が進むにつれてスキャンも徐々に高速化され、こうしたモーションアーチファクトが画像診断に及ぼす影響は、問題視されなくなりつつある。本論に直接関係しないこれらのモーションアーチファクトに関するレビューは、文献[4,5,6]等を参照すると良い。また実験用の模擬被写体（物理ファントム）や、計算機上に構築した仮想的な被写体（数値ファントム）を用いたモーションアーチファクトの研究報告も存在する[7]。

装置の高速化はアーチファクトを軽減し、患者の苦痛を軽減するだけでなく、運動する被写体をより静止した状態に近づけて撮影することを可能にする。しかし一方で、スキャンの速さと被写体運動の速さは相対的なものであり、より高速で撮影できるCT装置には、高速で運動する被写体から生じるモーションアーチファクトの問題が常に

存在する。近年ミリ秒単位の撮影が可能な超高速 X 線 CT スキャナ（UFCT）も開発され、例えば国立循環器病センターなどにおいて、心臓診断用の CT 装置として実際に稼動している。しかしこの UFCT を用いても、運動速度の速い心臓内部には、ときにモーションアーチファクトが生じて診断上の問題となる [11,13]。現行の断層撮影装置を臨床に用いる立場から考えるならば、体動や臓器の動きにスキャナがどこまで対応できるのか、あるいはこうしたモーションアーチファクトが画像中にどのように描出され、ぶれの発生が画像診断にどの程度の影響を及ぼすのか、明らかにする必要がある。

こうした臨床学的背景により、Imatron 社の UFCT “C-100” を用いたモーションアーチファクトの解析が、坂下らによって報告されている [8,9,10,11,12,13,14,15]。心臓は一分間に 50 ～ 150 回もの周期運動を繰り返すため、その撮影には UFCT を用いた高速撮影が不可欠である。坂下らは、UFCT で得た心臓の断層像には、従来からよく知られている筋状のアーチファクト（streaking）の他に、円弧やコンマなどの形状を軌跡に描くモーションアーチファクトが生ずることを確認している。例えば心臓内部に X 線吸収係数値の高い（石灰化）粘液腫が含まれる場合、CT 画像にはその部分が動いてできたと思われる円弧やコンマ、口髭状の「ぶれ」が観察される（図 1）。坂下らはこの特異な形状のぶれを、被写体のブラーリング（blurring）とフォーカシング（focussing）と呼んでいる [10,11]。

また坂下らは、動きのある被写体に対し UFCT を適用した場合、周期的にストロボをたいて撮影した写真のように、被写体が二重三重にぶれて画像化される現象も報告している。例えば、冠動脈などに対し超高速 X 線 CT スキャナ（UFCT）を適用するとき、撮影時間を長めに設定すると、あたかもストロボを周期的にたいて撮影したように、本来は 1 本のはずの冠動脈が、2 本にも 3 本にも増えて画像化されることがある（図 2）。坂下らはこの奇妙な現象をストロボスコープ効果（stroboscopic effect）と呼び、この多重像を指してストロボスコープ像（stroboscopic image）と呼んでいる [10,11,12,13,14,15]。

坂下らはこれらのモーションアーチファクトを解析するため、スキャンエリア内で一定の回転運動をおこなう運動解析ファントムを作製している [8,10,12,15]。このファントムは塩化ビニル製の円筒型の外枠を持ち、ファントム内部にはアクリル製の細い棒（断



図 1: 二つの円弧状の「ふれ」(矢印) が、心臓断層に見られる。写真は坂下善治氏 (国立循環器病センター) より提供された。

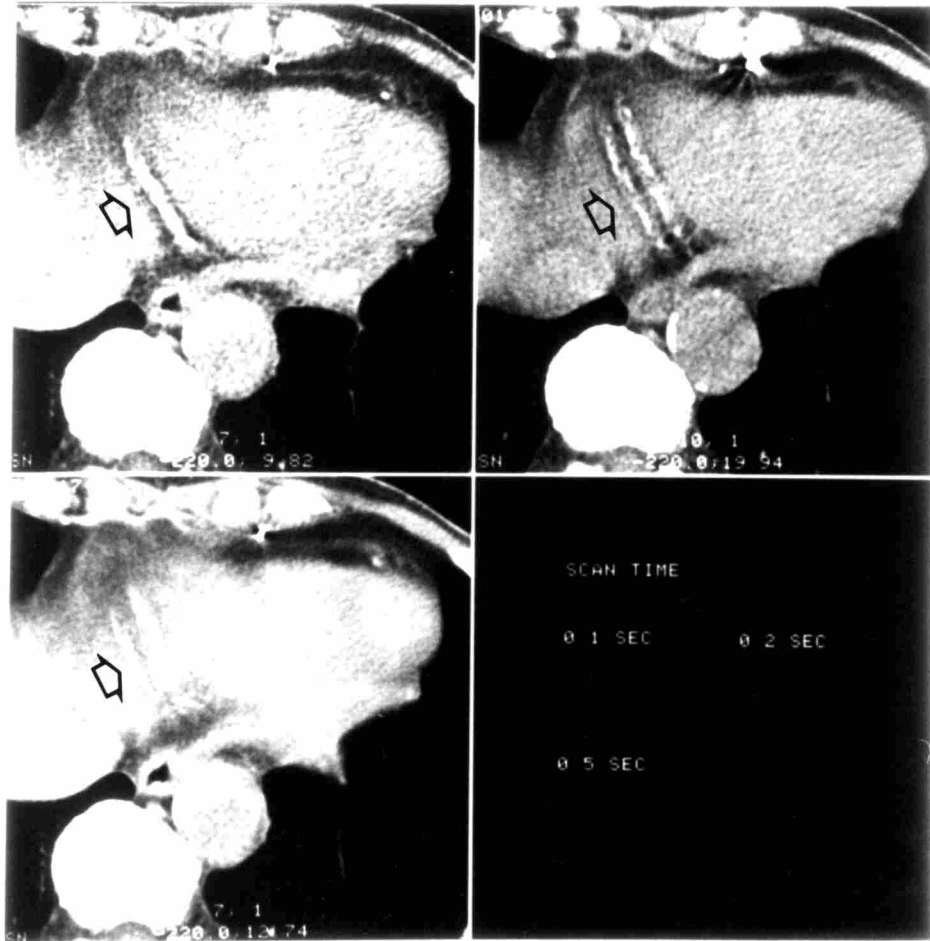


図 2: 心臓断層に見られるストロボスコープ像（多重像）を矢印で示す. 写真は坂下善治氏（国立循環器病センター）より提供された.

面は円形) が11本、ファントム外周に向かって同心円上に配置されている (figexphan a)。これをCT装置のスキャンエリア内に設置し、一定周期 (角速度) の回転運動をさせる。ファントムをUFCTや従来型CTに適用した動態撮影からは、図3bに見られるような円弧 (ー) あるいはコンマ (,) を描くふれや、図3cに見られるような口髭 (ゝ) の形状のふれが確認される。このファントム実験より、CT画像のふれがカメラで撮影される写真のふれ (motion blur) とは性質の異なることが分かる。すなわち写真のふれの場合、ふれの方向や程度が、被写体の動く方向や程度に一致する。一方ファントム実験によるふれの場合、ファントムは一定角速度で回転したにも関わらず、ふれの軌跡がファントムの中心方向へ曲がったり、外周方向へ曲がったり、尖点 (ゝ) を形成したりする。しかしこうしたアーチファクトの形状や、発生に関する理論的解析はなされていない。

モーションアーチファクトの発生およびその除去について議論するためには、特定の被写体を想定し、かつ被写体からの投影計測をモデル化する必要がある。本論文もこうした立場からアーチファクトを研究し、その結果について報告する。

同様の見解から、核融合プラズマのCT診断を目指して投影からの画像再構成をモデル化した例が、井宮らの報告である [16]。彼らは回転する画像からの投影が「ふれ」を含む場合について考察している。彼らの投影計測モデルは以下のように定式化することができる：

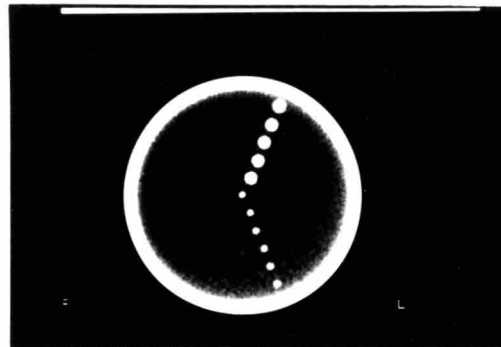
$$p^*(u, \phi) = \int_{-\pi}^{\pi} h(\phi - \phi') p(u, \phi') d\phi' \quad (1.1)$$

ただし、 $p(u, \phi)$ は静止する被写体からの投影、 $p^*(u, \phi)$ は被写体回転により劣化した投影を表す。また被写体の回転角速度を Ω で表すとき、

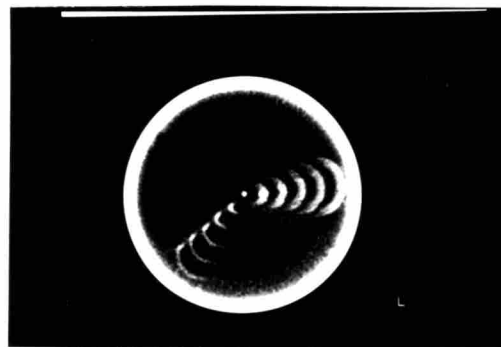
$$h(\phi) = \begin{cases} 1 & -\frac{\Omega}{2} \leq \phi \leq \frac{\Omega}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.2)$$

で与えられる。すなわち、劣化投影は鮮明な投影を一様に「ふれ」させたものである。しかし全方向の投影が同時に計測されなければ、上の式は成り立たないため、現行のX線CT装置には適用できないという問題点がある。

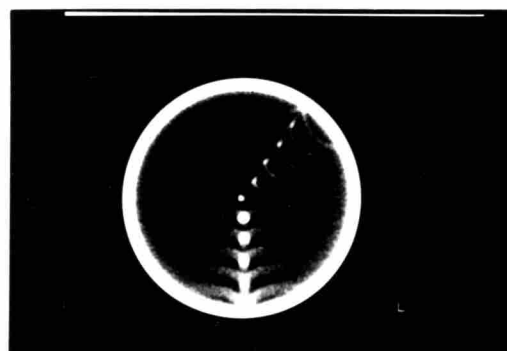
井宮らは被写体断層として回転運動する画像を仮定したが、被写体断層が剛体の場合、被写体の運動は回転と並進に分けて考えることができる。こうした立場から、MRI



(a)



(b)



(c)

図 3: 坂下らの運動解析ファントム（上）と、ファントムを回転させながら UFCT に適用したとき得られる CT 画像（下）.

に適用する被写体が動く場合をモデル化した例が、工藤らの報告である [17,18]。本論文においても被写体断層を剛体と仮定して、並進運動と回転運動およびその合成運動について解析する。なお本論文は X 線 CT 装置を想定し、計測されるデータとしては投影を仮定している。一方、工藤らは MRI 装置を仮定しているため、計測されるのは FID 信号である。従って両者には、再構成処理や断層像に生ずる劣化などに関して一致点がなく、それぞれ再構成問題に関する別個の解析であると考えられる。

1.3 本論文の要旨

本論文は、X 線 CT へ適用する被写体が運動するときに、CT 画像に発生する画像エラー（モーションアーチファクト）と、被写体運動が引き起こす画像劣化を対象に、研究した成果をまとめたものである。とくに本研究により、被写体が一定の運動（並進運動など）をするとき CT 画像中に現れる「ぶれ」の形状が、サイクロイドと呼ばれる平面曲線である等の事実が明らかとなった。

本論文の構成は以下の通りである。

第 1 章では、モーションアーチファクト研究の目的と意義について述べる。CT 技術が成熟し様々な分野に CT 装置が普及した現状においても、モーションアーチファクトに関する多くの問題が存在することなどを例示した後、アーチファクトの発生と性質の解析が不可欠であること等を主張する。また本研究と関連の深い幾つかの報告についてまとめる。

第 2 章では、被写体からの投影計測および画像再構成に関する基礎的理論をまとめる。被写体断層の再構成問題を定式化するために、X 線 CT における投影の計測について述べた後、被写体および投影を数学的に定義する。また投影からの画像再構成法を、2 次元 Fourier 変換対をもとに導く。ここでは CT 装置を一つのシステムと見なす概念を導入し、このシステムを構成する被写体-計測系（被写体断層から投影を計測するシステム）ならびに画像再構成系（投影を用いて被写体断層を再構成するシステム）について説明する。また画像再構成に欠かせない逆投影変換の性質、特に再構成画像を考える上で重要な層と積層の概念についてまとめる。アーチファクトを解析する上で欠かすことのできない CT 画像化（再構成画像をディスプレイへ映し出す操作）

についても議論する。

第3章では、時間に依存する被写体-計測系と画像再構成系からなる断層撮影モデルを提案し、その概要についてまとめる。ここではスキャン時間が無限小ではないCT装置を想定し、ある簡単な条件を加味することによって、時間を考慮する被写体-計測系がモデル化できることを示す。また本モデルで得られた投影が、画像再構成系においてどのように処理され、その結果どのような劣化が起こり得るかについて言及する。

第4章～第7章では、対象断面内を運動する被写体とモーションアーチファクトを、ある限られた条件下において解析する。本論文では、剛体と呼ばれる形状や濃度が変化しない被写体を特に想定する。剛体の運動は、並進と回転に分けて考えられる。そこで第4章と第5章では並進運動を、第6章と第7章では回転運動を扱う。また剛体は重みづけられた点源（2次元デルタ関数）の集まりとして表現できる。そこで第4章と第6章では点源に対する解析を行い、それぞれの解析結果を第5章と第7章において剛体へ拡張する。その概要は以下の通りである。

まず点源（2次元デルタ関数）を被写体断層として想定し、並進運動（第4章）と原点中心の回転運動（第6章）について、アーチファクトを解析する。各々の運動を想定する断層撮影モデルに対して点拡がり関数を求め、CT画像に生ずるぶれの性質について明らかにする。とくにCT画像中に描かれるぶれの形状が「サイクロイド」と呼ばれる平面曲線であることを示し、計算機シミュレーションによる検証結果を併せて報告する。

次に剛体を被写体とし、並進運動の場合（第5章）と回転運動の場合（第7章）について再構成画像の劣化とアーチファクトを解析する。ここでは再構成画像が点拡がり関数の線形和として定式化されることを示し、CT画像に生ずる剛体のぶれ像、とくに断層像が多重化するモーションアーチファクト（ストロボスコープ像）について、多重像の発生位置とその数を明らかにする。併せて計算機シミュレーションの結果も示す。

第8章では、第4章～第7章の解析結果を踏まえ、並進と回転の合成によって剛体の運動を表現する。そして合成運動を想定する断層撮影モデルの点拡がり関数を決定し、画像劣化の定式化を行う。また、ぶれ像やストロボスコープ像の解析、検証を行う。

第9章では、本論文の結果を総括し、今後の課題について述べる。

第 2 章 被写体断層の再構成の基礎

2.1 被写体と投影

2.1.1 X 線 CT における投影の計測

X 線ビームをある物質に対して照射し、物質を透過させるとき、X 線光子はその物質中で吸収され、透過後の X 線強度は透過前に比べて減弱される。いま一本の、細くて単色な (monoenergetic) X 線ビームを、単一の物質に対して照射する。典型的な X 線 CT スキャナの場合、X 線の光子エネルギーは約 70keV である。このとき X 線ビームは、散乱 (Compton 効果と Rayleigh 散乱) および吸収 (光電子効果) 等の相互作用により、物質を透過した距離に従って指数的に減弱される。物質による X 線減弱は、透過前のビーム強度を I_0 、透過後の強度を I とすると、

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad (2.1)$$

で表すことができる。ここで x はビームが物質を透過した距離を、 μ はその物質の線形減弱係数を表す [19]。

複数の物質から構成される物体中を、X 線ビームが透過する場合を考える。吸収係数を $\mu_1, \mu_2, \dots$ 、透過距離を $x_1, x_2, \dots$ とすれば、(2.1) 式より

$$\frac{I}{I_0} = \exp \left[- \sum_j \mu_j x_j \right]$$

が成り立つ。もし μ が x について連続 (もしくは区分的に連続) な関数ならば、上式の和を、ビーム L に沿った積分に置き換えることができる：

$$\frac{I}{I_0} = \exp \left[- \int_L \mu(x) dx \right]$$

次に 3 次元の物体と、この物体の通る横断面を考える。物体を横断する平面上の線形減弱係数は、直交座標系 $O-xy$ を用いて $\mu = \mu(x, y)$ と表すことができる。この横断面に沿って、物体を透過する一本の X 線ビームについて考える。この X 線ビームについて次式が成立する：

$$\frac{I}{I_0} = \exp \left[- \int_L \mu(x, y) ds \right] \quad (2.2)$$

ここで $\int_L ds$ はビーム L に沿った線積分を表す。(2.2) 式 of 自然対数をとると、投影 (a single projection) が得られる：

$$p = -\log \left(\frac{I}{I_o} \right) = \int_L \mu(x, y) ds \quad (2.3)$$

現実の X 線 CT スキャナに対応させて、物体に対する X 線ビームの透過を考えるなら、一対の線源と検出器によって計測される投影は、(2.3) 式を用いて表すことができる。X 線 CT スキャナはさらに、線源と検出器を移動あるいは回転させてながら、様々な位置 u と角度 ϕ の投影を計測する。従ってスキャナの計測する投影は、極座標系 $P-u\phi$ を用いて

$$p(u, \phi) = \int_L \mu(x, y) ds \quad (2.4)$$

と表すことができる。後述する Radon 変換の定義式と (2.4) 式を見比べれば、 $p(u, \phi)$ が $\mu(x, y)$ の Radon 変換になっていることが分かる。

実際の X 線 CT (平行ビーム方式) は、まず X 線の照射角度 ϕ をある値 ϕ_o に固定した状態で、様々な位置 u についての投影プロフィール $\{ p(u, \phi_o) | u_{\min} \leq u \leq u_{\max} \}$ を計測する。さらに角度 ϕ を変化させながら投影プロフィールの計測を繰り返す。こうして得られた投影 $\{ p(u, \phi) | u_{\min} \leq u \leq u_{\max}, 0 \leq \phi \leq \pi \}$ から、物体断面の線形減弱係数 (あるいは CT 値) がコンピュータを用いて算出 (再構成) され、画像化される。それ故、この断層撮影技術は CT (Computerized Tomography : コンピュータ断層撮影法) と呼ばれる [1,2,3,4,19,20,21,22,23,24,25,26] .

なお現行の CT 装置は、被写体内の減弱係数分布を有効に表示し、その情報を活用するために、CT 値と呼ばれる物理量を算出する。CT 値と線形減弱係数 μ の関係は、次式で与えられる：

$$\text{CT 値}(x, y) = \frac{\mu(x, y) - \mu_{\text{water}}}{\mu_{\text{water}}} \times 1000$$

なお μ_{water} は水の減弱係数値である。CT 値は水より減弱係数が小さい場合には負、大きい場合には正となる。また空気のように減弱係数が極めて小さい物質では -1000 となり、逆に減弱係数の高い骨や石灰化では 80 ~ 1000 となる [21,22] .

2.1.2 Radon 変換

被写体断層の再構成問題を定式化するために、まず被写体および投影を数学的に定義する。

再構成の対象となる被写体断面を含む実ユークリッド平面 $\mathbf{R}^2$ に、直交座標系 $O-xy$ を設定する (図 4) . 原点を中心とする半径 U の円領域 (スキャンエリア) をこの xy 平面に考える. スキャンエリア内の被写体断層と残りの空間部分 (バックグラウンド) を併せて再構成の対象とし、これを原画像 (混同が生じない場合には分かりやすく被写体断層) と呼ぶ. 点 (x, y) における原画像の濃度を $f(x, y)$ で表す. 濃度 f は X 線吸収係数や CT 値などに相当する実数値であり、後者の場合には負の値も取り得る. 再構成問題において、 $f(x, y)$ は一般に未知である. これに対し、一連の再構成公式により求められる再構成画像は $\hat{f}(x, y)$ で表す.

原画像を定義した平面 $\mathbf{R}^2$ の直交座標系 $O-xy$ を、原点中心に角度 ϕ だけ回転させた新しい直交座標系 $O-uv$ を考える：

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

対象平面内に、 v 軸に平行な直線 L を考える. 直線 L は、原点から直線へ下ろした垂線の長さ u と、その垂線が x 軸となす角度 ϕ によって一意に定まり、

$$u = x \cos \phi + y \sin \phi \quad (2.6)$$

と表せる.

この直線 L に沿った原画像 $f(x, y)$ の線積分値が、すなわち投影 $p(u, \phi)$ である：

投影の定義 (Radon 変換)

$$\begin{aligned} p(u, \phi) &= \int \int_{\text{scan area}} \delta(u - x \cos \phi - y \sin \phi) f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u \cos \phi - v \sin \phi, u \sin \phi + v \cos \phi) dv \end{aligned} \quad (2.7)$$

$\delta(\cdot)$ はデルタ関数である. 原画像 $f(x, y)$ から投影 $p(u, \phi)$ を求める (2.7) 式の線形操作は、(2 次元) Radon 変換と呼ばれる [19].

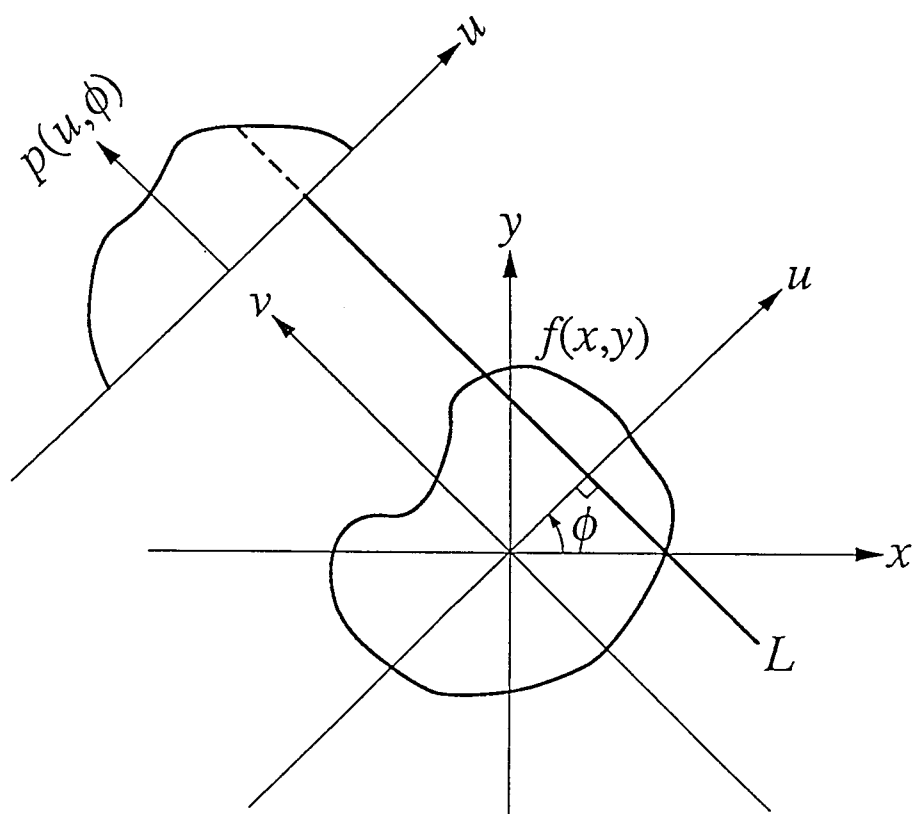


図 4: 被写体断層 $f(x, y)$ とその投影 $p(u, \phi)$.

さて、位置 u と角度 ϕ によって定まる直線 L と、位置 $-u$ と角度 $\phi \pm \pi$ によって定まる直線 L' を考えたとき、両者は同じ直線を意味する。また位置 u と角度 $\phi + 2k\pi$ によって定まる直線 L'' も同じである。従って、 L 、 L' 、 L'' に沿った原画像の線積分は一致する。この性質により、投影 $p(u, \phi)$ は以下の様な対称性、あるいは周期性を持つ：

$$\begin{aligned} p(u, \phi) &= p(-u, \phi \pm \pi) && \text{(対称性)} \\ &= p(u, \phi + 2k\pi) && \text{(周期性)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

従って半径 1 の単位円周を Ω で表すならば、投影 $p(u, \phi)$ は円柱表面 $\mathbf{R} \times \Omega$ 上の実関数と考えられ、極座標系 $P-u\phi$ を用いて表すことができる。再構成に際して必要とされる投影は、 $\{p(u, \phi) \mid -U \leq u \leq U, 0 \leq \phi \leq \pi\}$ であるが、角度 ϕ が 0 から π で十分なことは、(2.8) 式の性質により明らかである。

2.1.3 被写体－計測系

CT スキャナに適用される被写体断層の減弱係数分布と、その投影の間に成立する(理想的な仮定の下での)関係式は、(2.4) 式あるいは(2.7) 式で表される。ここで図 5 に示すような、被写体断層を与えると投影を求めるシステムを想定してみる。(2.7) 式は、このシステムの数学的定式化となっている。また(2.7) 式はこのシステムが線形であることを表している。本論文では以後、被写体断層を入力とし、投影を出力とするこのシステムを、「被写体－計測系」と呼ぶことにする(後述するように、逆に投影から被写体を求めるシステムは画像再構成系と呼ばれる)。

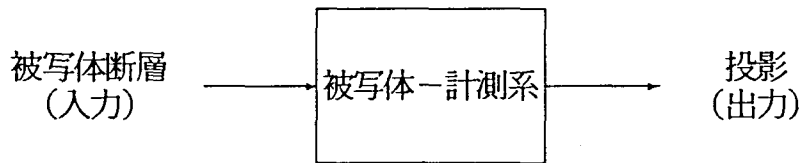


図 5: 被写体断層を入力、投影を出力とするシステムを被写体－計測系と呼ぶ。

2.2 画像再構成法

2.2.1 2次元 Fourier 変換法

被写体断層の濃度分布 (原画像) を, その投影から算出する数学的手法は, 投影からの画像再構成法, あるいは単に画像再構成法と呼ばれる [1,2,3,4,19,20,21,22,23,24,25,26]. 投影からの画像再構成法は, (2.4) 式あるいは (2.7) 式の逆問題を解く方法である. CT 装置は, この手法に基づいて再構成に必要な計算をおこなう. 一方, 様々な位置および角度の投影から原画像を求める問題が, 投影からの画像再構成問題である. 本節では, 2.1節で定義した投影と, 原画像の 2次元 Fourier 変換との関係について述べた後, 2次元 Fourier 変換対をもとに, 投影から原画像が再構成できることを示す.

原画像 $f(x, y)$ の 2次元フーリエ変換 $F(w_x, w_y)$ は,

$$F(w_x, w_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(w_x x + w_y y)} dx dy \quad (2.9)$$

で表すことができる. もし原画像の 2次元フーリエ変換 $F(w_x, w_y)$ が計測されるならば, 原画像 $f(x, y)$ はその逆変換によって再構成される:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(w_x, w_y) e^{j2\pi(x w_x + y w_y)} dw_x dw_y \quad (2.10)$$

ここで, $F(w_x, w_y)$ を極座標系 $P-w\phi$ を用いて書き直す. $w_x = w \cos \phi$, $w_y = w \sin \phi$ とすれば,

$$F(w \cos \phi, w \sin \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi w(x \cos \phi + y \sin \phi)} dx dy \quad (2.11)$$

である. さらに (2.5) 式を用いて, 変数 (x, y) を (u, v) で置き換える. 変数変換に伴うヤコビアンは

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{vmatrix} = 1 \quad (2.12)$$

と計算されるので, (2.11) 式は

投影の 1次元 Fourier 変換

$$F(w \cos \phi, w \sin \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u \cos \phi - v \sin \phi, u \sin \phi + v \cos \phi) e^{-j2\pi w u} du dv \quad (2.13)$$

となる。(2.7) 式を適用すれば、次式を得る：

$$F(w \cos \phi, w \sin \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u, \phi) e^{-j2\pi w u} du \stackrel{\text{def}}{=} P(w, \phi) \quad (2.14)$$

上式により、投影 $p(u, \phi)$ の u 軸方向への 1 次元 Fourier 変換 $P(w, \phi)$ と、原画像 $f(x, y)$ の 2 次元 Fourier 変換の w 軸（ w_x 軸から角度 ϕ だけ傾いている）に沿った中央断面 $F(w \cos \phi, w \sin \phi)$ が、互いに等しくなることが分かる：

投影定理（中央断面定理）

$$P(w, \phi) = F(w \cos \phi, w \sin \phi) \quad (2.15)$$

この関係式は、投影定理あるいは中央断面定理 [3,19,20,21] と呼ばれ、2 次元 Fourier 変換に基づく再構成法の基礎を与える。すなわち、投影 $p(u, \phi)$ から $F(w \cos \phi, w \sin \phi)$ を算出した後、これを直交座標系の関数 $F(w_x, w_y)$ に変換して、2 次元逆 Fourier 変換すれば、原画像 $f(x, y)$ を再構成することができる。これを 2 次元 Fourier 変換法という [3,19,20,21]。

投影からの画像再構成は、数学的には本節で紹介した投影定理および 2 次元逆 Fourier 変換を用いて達成される。しかしこの方法に基づき、再構成のための離散処理を計算機上でおこなうと、極座標系の格子から直交座標系の格子へ、データ変換する際の補間法が難しく、エラー等が生じて十分な画質が得られない。こうした理由からこの再構成法は実用化されていない。また本論文でも 2 次元 Fourier 変換法に基づくアルゴリズムは用いない。しかし現行の CT 装置で用いられる画像再構成法はすべて、この 2 次元 Fourier 変換法と等価である。

2.2.2 フィルタ補正逆投影法

前節で紹介した 2 次元 Fourier 変換法を基礎に、現実の CT 装置で用いられるアルゴリズムにより近い再構成法を導出する。

(2.10) 式の変数 (w_x, w_y) を、極座標系の変数 (w, ϕ) で置き換える。変数変換に伴うヤコビアンは

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial w_x}{\partial w} & \frac{\partial w_x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial w_y}{\partial w} & \frac{\partial w_y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -w \sin \phi \\ \sin \phi & w \cos \phi \end{vmatrix} = w \quad (2.16)$$

と計算されるので, (2.10) 式は

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty F(w \cos \phi, w \sin \phi) e^{j2\pi(x \cos \phi + y \sin \phi)w} w dw d\phi \quad (2.17)$$

となる. 同式はさらに等価な式

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty F(w \cos \phi, w \sin \phi) |w| e^{j2\pi(x \cos \phi + y \sin \phi)w} dw d\phi \quad (2.18)$$

へ変形される. さらに投影定理 (2.15) を適用すれば,

$$f(x, y) = \int_0^\pi \left\{ \int_{-\infty}^\infty P(w, \phi) |w| e^{j2\pi(x \cos \phi + y \sin \phi)w} dw \right\} d\phi. \quad (2.19)$$

(2.19) 式の $\{ \}$ の中, すなわち投影の 1 次元 Fourier 変換 $P(w, \phi)$ に, 周波数 w の絶対値に比例したフィルタ $|w|$ をかけて, それを w について 1 次元逆 Fourier 変換したものを $q(u, \phi)$ と表すならば, (2.19) 式は二つの積分変換の組合せとして書き直せる:

フィルタ補正投影の定義

$$q(u, \phi) = \int_{-\infty}^\infty P(w, \phi) |w| e^{j2\pi uw} dw \quad (2.20)$$

逆投影変換

$$f(x, y) = \int_0^\pi q(x \cos \phi + y \sin \phi, \phi) d\phi \quad (2.21)$$

すなわち, 2 次元逆 Fourier 変換と同等の操作を, (2.20) 式と (2.21) 式の組み合わせによって行うことができる. $q(u, \phi)$ は, 投影に対し空間周波数領域でフィルタ $|w|$ をほどこして得られるものなので, フィルタ補正投影と呼ばれる [3,19,20,21]. また (2.21) 式の線形操作は, $q(u, \phi)$ の逆投影変換と呼ばれる [3,19,20,21,24,25].

投影 $p(u, \phi)$ が得られたときに, (2.14) 式および (2.20) 式, (2.21) 式に従って原画像 $f(x, y)$ を再構成するこの手法は, フィルタ補正逆投影法 (filtered backprojection algorithm) と呼ばれる [3,19,20,21]. 現行の CT 装置は, この手法をさらに修正したアルゴリズム (コンボリューション法など) を用いて画像再構成を行う. フィルタ補正逆投影法もコンボリューション法, 数学的には 2 次元 Fourier 変換法と等価である. なお, その他の再構成法については文献 [3] が詳しい.

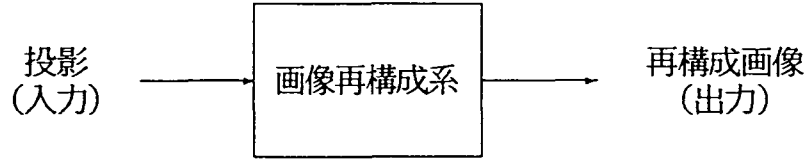


図 6: 投影を入力, 再構成画像を出力とするシステムを画像再構成系と呼ぶ.

2.2.3 画像再構成系

画像再構成系は「投影からの画像再構成」と呼ばれる操作によって, 投影 $p(u, \phi)$ から, 原画像 $f(x, y)$ を推定するシステムである (図 6). 以下に説明するように, 本論文で扱う画像再構成系は, 種々の線形変換の組み合わせとして表すことのできる線形システムである. なお画像再構成系から得られる出力 (再構成画像) は, 原画像 $f(x, y)$ と必ずしも一致しない. よって, 再構成画像を原画像と区別するために, $\hat{f}(x, y)$ と表記する.

本論文では以後, 画像再構成系が行う一連の操作は, 主にフィルタ補正逆投影法を用いて記述する. そこで, 投影 $\{p(u, \phi) \mid -U \leq u \leq U, 0 \leq \phi \leq \pi\}$ (特に問題がない限り $p(u, \phi)$ と記す) から再構成画像の濃度値 $\hat{f}(x, y)$ を推定する再構成処理を, フィルタ補正逆投影法に従って以下に再現する:

[操作 1] 投影のフィルタ補正 投影 $p(u, \phi)$ を u についてフーリエ変換し, 空間周波数の絶対値に比例するフィルタ $|w|$ をかけた後, 逆フーリエ変換する:

$$P(w, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u, \phi) e^{-j2\pi w u} du \quad (2.22)$$

$$q(u, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} P(w, \phi) |w| e^{j2\pi w u} dw \quad (2.23)$$

フィルタ $|w|$ は高周波においても増大し続けるため, 物理的には実現不可能である. そこで実用に際しては, 高周波成分を軽減する窓関数 $W_\epsilon(w)$ を $|w|$ に乗じたフィルタ $|w| W_\epsilon(w)$ が, $|w|$ の代わりに用いられる. フィルタ $|w| W_\epsilon(w)$ は, CT の画質に微妙な影響を与えるため, 様々な形状が提案されている [1, 2, 27, 28]. なお本論文では, $W_\epsilon(0) = 1$, $\lim_{w \rightarrow \pm\infty} W_\epsilon(w) = 0$ かつ偶関数とする. またパラメータ ϵ は, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} W_\epsilon(w) = 1$ を満たすように設定する.

〔操作 2〕 逆投影 フィルタ補正投影 $q(u, \phi)$ に対して, 逆投影変換を行う:

$$\hat{f}(x, y) = \int_0^\pi q(x \cos \phi + y \sin \phi, \phi) d\phi \quad (2.24)$$

$\hat{f}(x, y)$ は再構成画像と呼ばれ, $f(x, y)$ の推定値である.

操作 1, 2 を経ることによって, (2.7) 式の逆問題は解くことができる. 事実, (2.23) 式の窓関数を $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} W_\epsilon(w) = 1$ ($-\infty < w < \infty$) とすれば, 2.2.2 で述べたように, $\hat{f}(x, y)$ と $f(x, y)$ は形式的には一致する. なお後述するように, 再構成画像を CT 装置のディスプレイ (画像表示装置) に映し出したものを, 本論文では CT 画像と呼ぶことにする.

2.3 逆投影の性質 (積層)

投影 (特にフィルタ補正投影) と画像 (特に再構成画像) の関係を明らかにするために, 操作 2 の逆投影変換: (2.24) 式についてより詳しく解析してみよう.

まず, 直交座標系 $O-u\phi$ の定義された $u\phi$ 平面を考える. この平面を便宜上, 投影平面と呼ぶことにする. 投影平面は, 2.1.2 において投影の定義域と考えた円柱表面 $R \times \Omega$ から, $0 \leq \phi \leq \pi$ の部分を切りとって広げたものに相当する. 従って投影の定義域を $\{(u, \phi) | -U \leq u \leq U, 0 \leq \phi \leq \pi\}$ に限るならば, フィルタ補正投影もこの投影平面上の関数と考えることができる. 一方, 直交座標系 $O-xy$ を持ち, 原画像および再構成画像の定義される平面を, 画像平面と呼ぶことにする.

2.1.2 の (2.6) 式は, 画像平面では一本の直線 L を表現したが, 投影平面では一本の正弦曲線 S を表す:

$$\begin{aligned} u &= x \cos \phi + y \sin \phi \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \cos \left[\phi - \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

この曲線は x と y の組によって一意に定まる (図 7).

投影平面上にフィルタ補正投影の濃度 $q(u, \phi)$ を考える. (2.24) の逆投影変換式より, (2.25) 式の曲線上の, 濃度 $q(x \cos \phi + y \sin \phi, \phi)$ を ϕ 方向に 0 から π まで積分したものが, 画像平面上の一点 (x, y) の再構成画像値 $\hat{f}(x, y)$ になることが分かる. 従ってこの

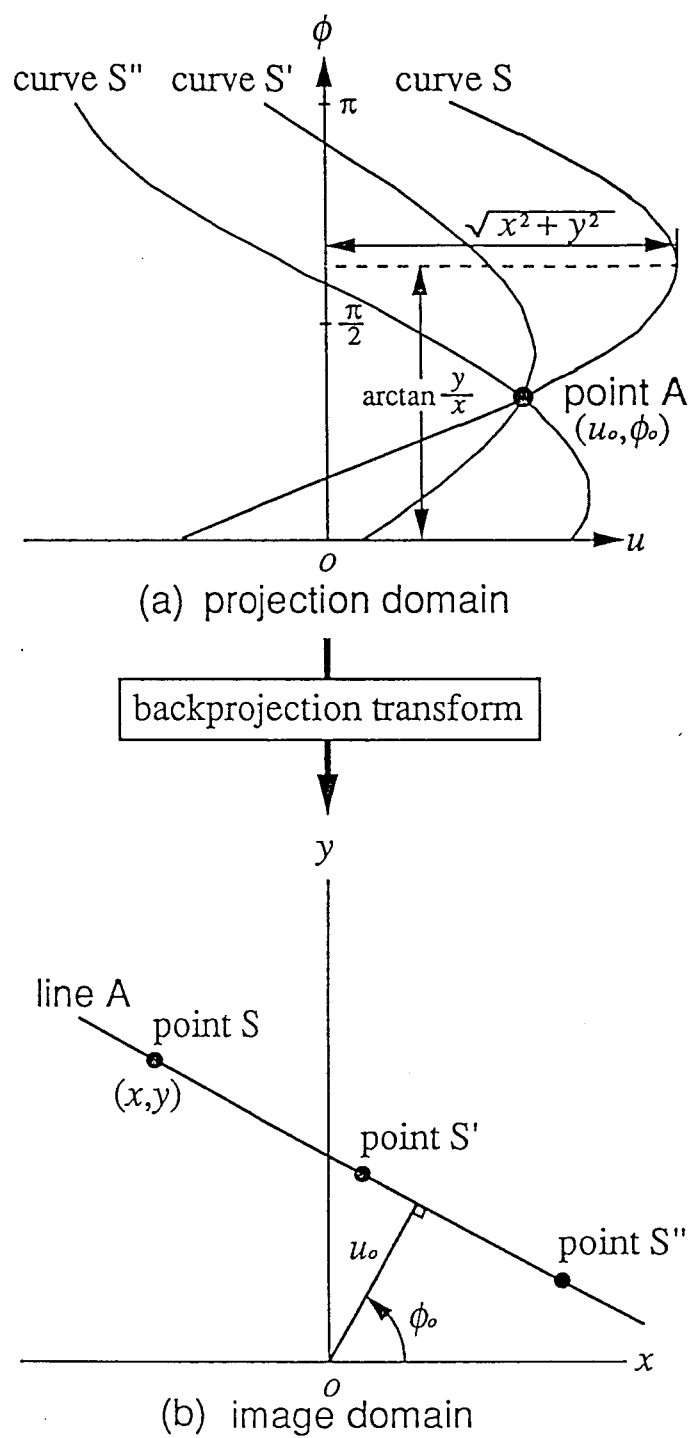


図 7: 投影平面上の一本の正弦曲線 S に沿う積分値が、画像平面上の一つの点 S へ逆投影される.

操作を画像平面全体 $\{(x, y) | (x^2 + y^2)^{-2} \leq U\}$ について行くと、再構成画像の濃度分布 $\{\hat{f}(x, y)\}$ が求められる [2,43,44,45] .

しかしこの事実だけから、フィルタ補正投影プロフィールに含まれる特徴的部分（特にエッジ、ピーク、ノイズなど）が画像平面上の濃度分布にどのように反映されるか知ることは難しい。

そこで逆投影を「層」の積み重ねと見なす考え方を導入する。角度 ϕ のフィルタ補正投影プロフィール $\{q(u, \phi) | -U \leq u \leq U\}$ だけを逆投影変換し、得られる再構成画像を $\hat{f}_\phi(x, y)$ と記述する。この $\hat{f}_\phi(x, y)$ を層（layer）と呼ぼう：

層（layer）の定義

$$\begin{aligned}\hat{f}_\phi(x, y) &= \int_0^\pi q(x \cos \psi + y \sin \psi, \psi) \delta(\phi - \psi) d\psi \\ &= q(x \cos \phi + y \sin \phi, \phi)\end{aligned}\quad (2.26)$$

$\delta(\cdot)$ は Dirac のデルタ関数である。(2.5) 式のように、画像平面内の直交座標系 $O-xy$ を角度 ϕ だけ回転させた直交座標系を $O-uv$ とする。(2.26) 式を u と v を用いて表せば、次の関係式を得る：

層とフィルタ補正投影の関係式

$$\hat{f}_\phi(u \cos \phi - v \sin \phi, u \sin \phi + v \cos \phi) = q(u, \phi) \quad (2.27)$$

上式の右辺はパラメータ v に無関係である。すなわち (2.27) 式は、層 $\hat{f}_\phi(x, y)$ の u 軸に平行な任意断面（ v によらない）と、 $q(u, \phi)$ の u 軸方向へのプロフィールが常に等しいことを表している。よって、画像平面内に直線 $L : u = x \cos \phi + y \sin \phi$ を考えたとき、その直線上の層の値 $\hat{f}_\phi$ は一定で、フィルタ補正投影の値 $q(u, \phi)$ に一致する。

また層の定義式 (2.26) を逆投影変換式 (2.24) に適用すれば、逆投影の操作は次のように記述できる：

積層（layergram）

$$\hat{f}(x, y) = \int_0^\pi \hat{f}_\phi(x, y) d\phi \quad (2.28)$$

すなわち再構成画像 $\hat{f}(x, y)$ は、角度 ϕ を少しずつ変化させた層 $\hat{f}_\phi(x, y)$ を画像平面上で積み重ねたもの、すなわち積層（layergram）と考えることができる（図 8）。逆投影を積層（layergram）と呼ぶ流儀は、Bates *et al.* [29], Smith *et al.* [30] に報告され

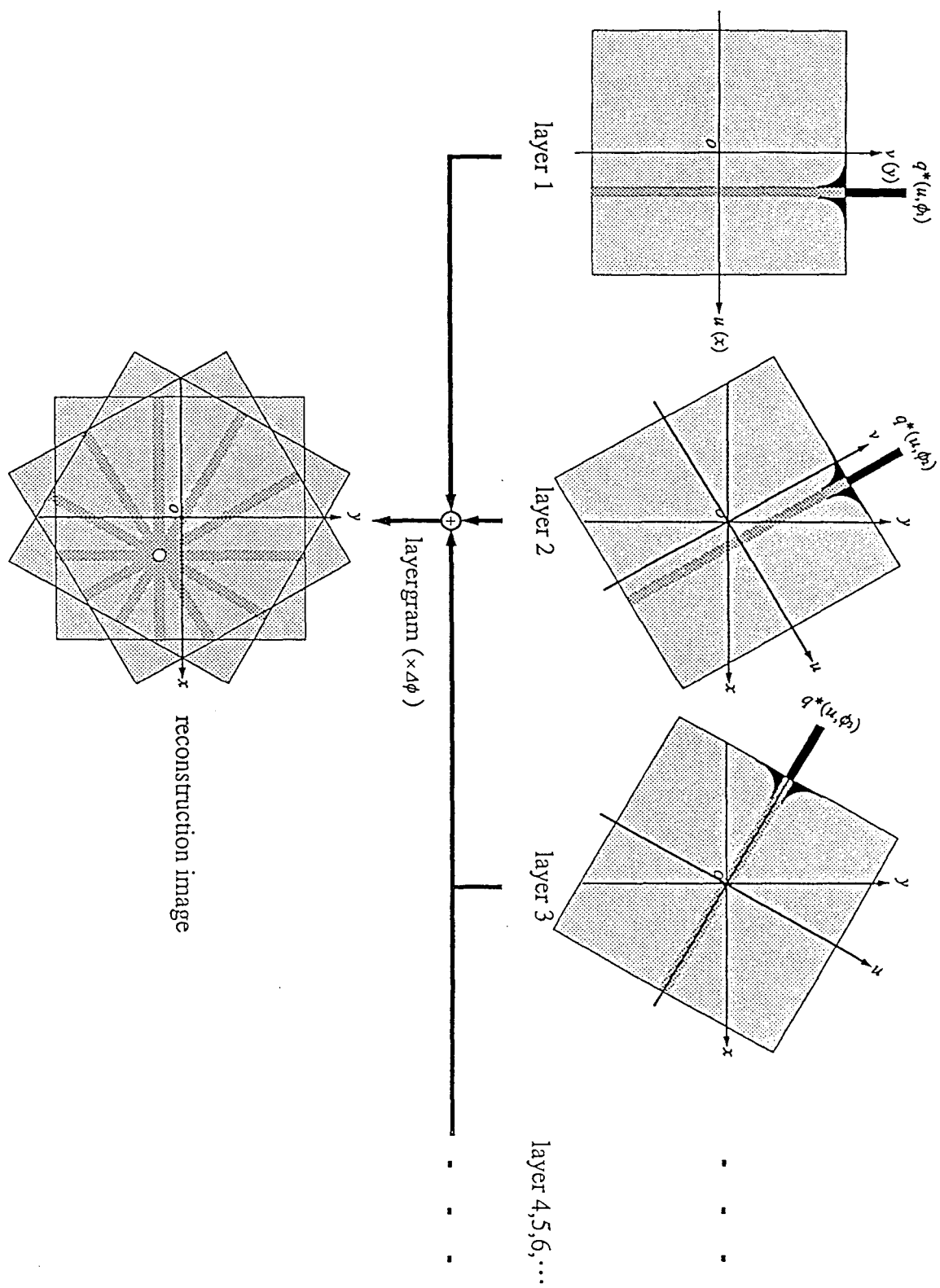


図 8: 逆投影の操作は,「層」の積み重ね (layergram) として解釈できる。

ている。逆投影の操作は、層の積み重ねとして解釈することで直感的に理解し易くなる。ほぼ同様の考え方は、Brooks *et al.* [24,25] や Kak *et al.* [21] をはじめ、数多くの文献や CT の教科書に紹介されている。

また (2.27) 式は、投影平面の一点 (u, ϕ) の値が、画像平面の直線 $L : u = x \cos \phi + y \sin \phi$ 上の値として再構成画像中に含まれるという、画像再構成を考える上での重要な性質も示す。X 線 CT 画像において、フィルタ補正投影に含まれる種々のエラーが、筋 (streaks) として CT 画像に反映されるのは、この性質によるものである。

本論文では、CT 画像中のアーチファクト（後述するふれ像など）を解析する上で、層とフィルタ補正投影の関係式 (2.27) および積層の概念が、特に重要であるとの見解に基づき議論を進める。よってアーチファクトの解析に際して、度々これらを引用する（4.5節, 6.4節）。

2.4 再構成画像の CT 画像化

本論文では、「再構成画像」と「CT 画像」という術語を意識的に使い分けることにする。「再構成画像」という術語は、画像理論や数学、物理などの分野において、被写体の再構成問題を論ずる場合に使われることが多い。また「CT 画像」という術語は、医療現場で CT 装置を扱う医師や技術者によってもっぱら用いられ、ディスプレイ（画像表示装置）に映し出された断層像、あるいはサーカステンなどに焼き付けられた断層写真等を意味する。一般的用法においては、これらの術語に明確な意味の差異はないと思われる。本論文では、「再構成画像」は投影（あるいは被写体断層）から算出された被写体断層の推定値、すなわち O - xy 平面上における空間的分布 $\hat{f}(x, y)$ を指すものとする。一方「CT 画像」とは、再構成画像 $\hat{f}(x, y)$ を加工して、適当な濃度に変換した画像（例えばディスプレイに表示される被写体断層像）を指すものとする。

再構成画像に生ずる特徴的な変化（モーションアーチファクトなど）を確認するためには、再構成画像を CT 画像化しなければならない。アーチファクトについて定性的な議論をするとき、再構成画像の値 f をディスプレイの濃度にどう対応させるか問題となる。同じ再構成画像であっても、値 f の切り出し方によってディスプレイに映し出される濃度分布が異って見える。その仕方によって、アーチファクトが発生した

り、しなかったりもする。また画像表示に際しては、人間の主観も入り得る。CT 装置を扱う者の立場から考えれば、再構成画像に生ずる特徴的な変化がディスプレイに表示されるように、値 f を切り出すのが妥当である。

再構成画像の CT 画像化を定式化してみよう。本稿では、CT 画像を映し出すディスプレイの濃度階調を 256 と想定して議論を進める。また議論の都合上、CT 画像の濃度 I は離散的な整数値だけを取るのではなく、連続的に実数値を取るものと仮定する。また CT 画像化に付随する非線形性は無視でき、線形操作としてこれを近似できると仮定する。まず、CT 画像化の対象となる再構成画像（あるいは被写体断層）を $f(x, y)$ で表す。 f は実数値を取るものとする。 f の CT 画像化を行う作用素 $\mathcal{I}_{CT}\{\cdot\}$ を定義する：

CT 画像化

$$\mathcal{I}_{CT}\{f\} = a(f - b) + I_0 \quad (2.29)$$

$$(a > 0, -\infty < b < \infty, 0 \leq I_0 < 256)$$

a, b, I_0 は定数を表す。この線形変換を再構成画像の濃度 $f(x, y)$ に適用した場合、これを

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{CT}\{f(x, y)\} &= a(f(x, y) - b) + I_0 \\ &\stackrel{\text{def}}{=} I(x, y) \end{aligned} \quad (2.30)$$

と表記して、再構成画像 $f(x, y)$ の CT 画像化と呼ぶことにする。また $I(x, y)$ は CT 画像の濃度を表すものとする。

再構成画像の濃度 $f(x, y)$ は実数値全体を取り得るが、実際には上下に有界であると考えられる。そこである再構成画像 $f(x, y)$ が与えられたとき、その上限を f_u 、下限を f_b と表すことにする。すなわち $f_b < f(x, y) < f_u$ である。また f_u と f_b に相当する CT 画像値を、それぞれ I_u および I_b と記述する：

$$\mathcal{I}_{CT}\{f_u\} = a(f_u - b) + I_0 \stackrel{\text{def}}{=} I_u \quad (2.31)$$

$$\mathcal{I}_{CT}\{f_b\} = a(f_b - b) + I_0 \stackrel{\text{def}}{=} I_b \quad (2.32)$$

次に、CT 画像化の作用素 $\mathcal{I}_{CT}$ の逆について考える。 $\mathcal{I}_{CT}$ の逆変換は次式で与えられる：

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{CT}^{-1}\{I(x, y)\} &= \frac{1}{a}(I(x, y) - I_0) + b \\ &= f(x, y) \end{aligned} \quad (2.33)$$

CT 画像の濃度 $I(x, y)$ は (2.30) 式の定義より実数値全体を取ることができる。しかしディスプレイの濃度階調は仮定より 256 であり、 $I(x, y)$ をディスプレイに映し出す場合には、ディスプレイの濃度の上限 (256) と下限 (0) が存在する。よって $I = 256, I = 0$ に対応する再構成画像の値 f_{256} および f_0 (定数) を定義することができる：

$$\mathcal{I}_{CT}^{-1}\{256\} = \frac{1}{a}(256 - I_0) + b \stackrel{\text{def}}{=} f_{256} \quad (2.34)$$

$$\mathcal{I}_{CT}^{-1}\{0\} = -\frac{I_0}{a} + b \stackrel{\text{def}}{=} f_0 \quad (2.35)$$

再構成画像の濃度が f_0 以上 f_{256} 未満の部分は、ディスプレイに線形性を保ちながら映し出されることが分かる。再構成画像の濃度が f_0 未満の部分は、ディスプレイに映し出すとき濃度 0 とする。また再構成画像の濃度が f_{256} 以上の部分は、ディスプレイに映し出すとき濃度 256 とする。パラメータ I_0 の値は 0 ないし 128 とする。 f_0 が負の値を取る場合は I_0 に 128 を割り当てる。 $f_0 = 0$ もしくは非負の場合は I_0 に 0 を割り当てる。

モーショナーチファクトと背景部分を人間の目でみてはっきり区別するためには、モーショナーチファクトの部分 $I(A)$ とその他の部分 $I(A^c)$ の濃度差が明確であればよい (領域 A とその補集合 A^c の結びは scan area 全体である)。すなわち、再構成画像 $f(x, y)$ の濃度分布が f_{256} と f_0 の間に含まれる必要はなく、むしろ $f_b \leq f_0 < f_{256} \leq f_u$ であったとしても、ディスプレイに映し出すことによって人が認知できる $f(x, y)$ の特徴的变化部分 (エッジ, リップル等) が、 f_{256} と f_0 の間に含まれるならば良いと考えられる。この状況を CT 画像の言葉で表現すれば、 $I_b \leq 0 < 256 \leq I_u$ である。例えば、モーショナーチファクトの部分 $I(A)$ の最大値が 256 より大きかったり、最小値が 0 未満である場合においても、ディスプレイに表示される $I(A)$ がモーショナーチファクトとして認知できれば良いと考えられる。

本稿では、 $I(A)$ のモーショナーチファクトがディスプレイにおいて確認できるように定数 a, b (定数 f_0, f_{256} と同等) を決定する。理論的解析部分においては、特に断らない限り、定数 a, b は適当に決められるものと仮定する。また CT 画像 $I(x, y)$ をディスプレイに映し出す操作は、再構成画像 (点拡がり関数を含む) の CT 画像化に関する線形演算がすべて終了してからなされるものと仮定する。こうすることによって、 $I(x, y)$ をディスプレイに映し出すとき生ずる非線形性は無視することができる。

第 3 章 断層撮影モデル

X 線 CT 装置は、被写体断層から投影を計測するシステム（被写体－計測系）と、投影を用いて被写体断層を再構成するシステム（画像再構成系）から構成される（図 9）。モーションアーチファクトを扱うために、本章では被写体－計測系のモデル化を行い、この被写体－計測系を含む X 線 CT 装置（断層撮影モデル）でなされる再構成処理についてまとめる。本章で紹介する断層撮影モデルは特定の CT 装置を想定するものではないが、一般的な投影の定義式と再構成公式に対し、ある簡単な条件を加えることによってモーションアーチファクトの発生を再現できる。

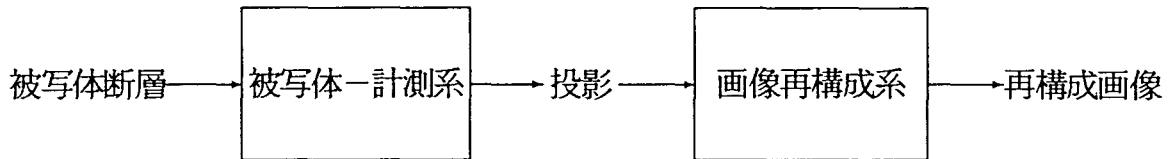


図 9: X 線 CT 装置（断層撮影モデル）は、被写体－計測系と画像再構成系から構成される。

3.1 モデルの必要性

第 2 章で述べた被写体－計測系についてもう一度考察してみる。第 2 章の被写体－計測系は様々な物理的制約の下に成り立っている。すなわち、投影計測に用いられる X 線ビームは細くて単色で無ければならない。X 線が単一の物質中を透過するときは、(2.1) 式に従って減弱が起こるならば、投影についての関係式 (2.4) は成立する。さらに (2.4) 式は、あらゆる位置 u と角度 ϕ の投影 $\{p(u, \phi); u_{\min} \leq u \leq u_{\max}, 0 \leq \phi \leq \pi\}$ を計測している間、被写体断層の減弱係数分布 $\mu(x, y)$ が変化しないならば成り立つ。すなわち (2.4) 式の被写体－計測系は、これらの仮定が満たされて初めて成り立つ理想系（あるいは理想モデル）であると言える。

一方、実際の X 線 CT スキャナにおける投影計測を考えるならば、(2.4) 式は近似の意味でしか成立しなくなる。例えば、X 線管から放出される X 線ビームのエネルギー

は多色性である。低いエネルギーのフォトンほど高いエネルギーのフォトンより減弱されるため、被写体の厚さが減弱係数を変化させてしまう。あるいは、計測に際して起こり得る様々な散乱と吸収の相互作用、線源と検出器の特性、ノイズ、X線ビームの幅や厚さが有限であること等々が原因で、計測されたX線量の対数比と減弱係数の線積分値は必ずしも線形的に比例しない。投影計測中に被写体が動く場合にも、(2.4)式は成立しなくなる。

第2章で述べた画像再構成系は、投影が関係式(2.4) (数学的にはRadon変換式(2.7))で表されるとの前提の下で、被写体断層 $f(x, y)$ を推定するシステムである。従って、現実のCT装置が計測した投影が、真に(2.7)式で表されないならば、 $f(x, y)$ を正しく算出することはできない。その結果、原画像 $f(x, y)$ と算出された再構成画像 $\hat{f}(x, y)$ との間には差異(エラー)が生ずる。この差異がCT画像に反映されると「アーチファクト」と呼ばれる偽像となる。

数式あるいは計算機を用いて、被写体計測にまつわるアーチファクトを解析するためには、現実のCT装置における被写体-計測系をより忠実に再現しなければならない。しかし現実の被写体-計測系の特質を完全に把握し再現することは、ほぼ不可能である。ある特定のアーチファクトを解析するのであれば、そのアーチファクトの生因(発生機序)を反映させた被写体-計測系をモデル化し、これをもとに解析を進めるのが適当である。なお、画像再構成系のアルゴリズムや数値計算を発生機序とするエラーも、アーチファクトとしてCT画像に反映される。例えばエリアシングに起因するstreaksとよばれる筋状アーチファクトがそうである。これらのアーチファクトを解析する際は、被写体-計測系として(2.7)式の理想モデルを用いるのが妥当である。

本論文では、被写体の動きを生因に持つ「モーションアーチファクト」を解析する。そこで次節において、動く被写体を扱うことができる被写体-計測系のモデルを構築する。このモデルから得られる投影と、この投影を画像再構成系に適用したとき得られる再構成画像の特質については、次々節において言及する。

なお現実のX線CT装置をシステムの言葉で表現するならば、それは被写体-計測系と画像再構成系を線形的に組み合わせたシステムである。これを「CTシステム」と呼ぶことにする。またCTシステムをある仮定(制約)のもとでモデル化したものを、「断層撮影モデル」と呼ぶことにする。

3.2 時間に依存する被写体—計測系

第2章で示した理想的な被写体—計測系では、投影計測に際して被写体断層は動かない。また投影計測にかかる時間も考えなくてもよい。よってこれを「時間に依存しない被写体—計測系」と呼ぼう。しかし現実には、人体などの被写体断層をX線CTスキャナで撮影しようとする時、被写体は必ずしも静止していない。またCTスキャナには全ての線源からX線を同時に照射できない等、物理的、ハードウェア的な制限がある。従って投影計測には、ゼロではない、ある程度（有限）の長さのスキャン時間が必要とされる。

もし被写体が動き、それをCTスキャナで撮影したならば、そのとき得られる投影は時間に関する矛盾を含み、それはモーションアーチファクト（例えば被写体断層のぶれ）としてCT画像中に具現化される。従って、被写体の動きとそれによって引き起こされる再構成画像中のモーションアーチファクトを解析するためには、現実のCTスキャナに存在する「時間」という概念を、被写体—計測系のモデルに反映させる必要がある。そこで、時間が経つにつれて断層の濃度が変化する（かもしれない）被写体と、ゼロより長い時間をかけて投影を計測するCTスキャナとの間に成り立つシステムを考え、これを「時間に依存する被写体—計測系」と呼ぶことにする。

時間に依存する被写体—計測系は、Radon変換の定義式(2.7)に時刻を導入した単純なモデルによって再現することができる。これを以下に示す。このモデルは、時間の概念以外は、理想的な被写体—計測系と同じ仮定に準ずる。すなわち、X線物理やX線幅、被写体計測に関係するその他の要素は、モーションアーチファクトの解析に関係がないものと見なして無視する。

時間の関数としての被写体断層（原画像）および平行投影を定義しよう。対象となる被写体断面を含む実平面 R^2 に、直交座標系 $O-xy$ を設定する。原点を中心とする半径 U の円領域（スキャンエリア）をこの xy 平面に考える。スキャンエリア内の被写体断層と残りの空間部分（バックグラウンド）を併せて再構成の対象とし、これを原画像と呼ぶことにする。時刻 t における原画像を $f(x, y; t)$ で表す。 f は実数値とする。

次に対象となる xy 平面に直線 L を考える。直線 L は原点から L への垂線の長さ u と、その垂線が x 軸と成す角度 ϕ によって、 $x \cos \phi + y \sin \phi = u$ と一意に表される。こ

の直線に沿った原画像 $f(x, y; t)$ の, 変数 x と y についての 2 次元 Radon 変換は次式で表される:

$$p(u, \phi; t) = \int \int_{\text{scan area}} \delta(u - x \cos \phi - y \sin \phi) f(x, y; t) dx dy \quad (3.1)$$

$\delta(\cdot)$ はデルタ関数である. $p(u, \phi; t)$ を時刻 t における原画像 $f(x, y; t)$ の投影と呼ぶことにする.

ある時刻 t_0 の投影 $p(u, \phi; t_0)$ から原画像 $f(x, y; t_0)$ を再構成するためには, 時刻 t_0 におけるあらゆる位置 u と角度 ϕ の投影 $\{p(u, \phi; t_0) | -U \leq u \leq U, 0 \leq \phi \leq \pi\}$ が必要である. 現実の X 線 CT 装置は, 線源を被写体まわりに回転させることによって 180° にわたる投影を計測し, この問題を解決する. しかしその計測には, ゼロではない有限の時間を要し, 時刻 t_0 の投影全てが計測できるわけではない.

そこで, 計測に要する時間を考慮するために, 以下の条件を仮定する:

【仮定 1】 ある時刻 t には決まった角度 ϕ の投影しか計測されない. 角度 ϕ は時刻 t について連続な単調増加関数である.

【仮定 2】 同じ角度 ϕ に対する投影プロフィールは, ビーム位置 u に因らず同時に計測される.

仮定 1, 2 を考慮する被写体-計測系を考える. 投影を連続的に 180° にわたって計測するのに要する時間を「スキャン時間」と呼ぶ. 以後, スキャン時間を T と表記する. 時刻 t における投影の角度 ϕ は, t について連続な単調増加関数 $g(t)$ を用いて

$$\phi = g(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3.2)$$

$$g(0) = 0, \quad g(T) = \pi$$

と表すことができる. (3.2) 式は, 時刻 0 から投影計測が始まり, 時刻 T 後には 180° に渡る投影計測が終了するように設定されている. 特にスキャンの速さ, すなわち投影計測の角速度が一定 ($\dot{\phi} = \pi/T$) と見なせるならば (3.2) 式は,

$$\phi = \frac{\pi}{T} t \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3.3)$$

となる. 本論文では以下, このような場合を考える.

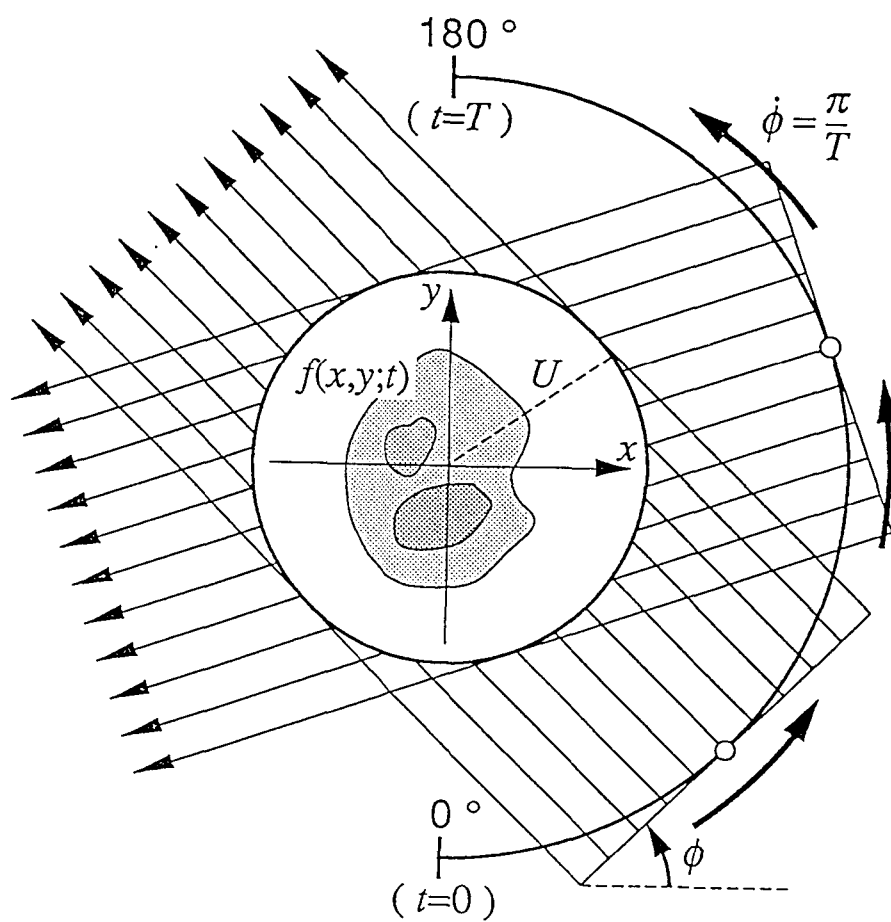


図 10: 角度と時間に関する制限 $\phi = (\pi/T)t$ がある場合の投影計測.

なお本論文では、理論的解析を容易にするために、平行投影を用いる被写体—計測系を仮定する。(図 10) ただし現行の X 線 CT スキャナが、殆ど全て扇状投影を採用していることを考慮して、平行投影の計測にまつわるハードウェア的な拘束は取り入れない。すなわち、X 線と垂直な方向への線源の移動時間はゼロと考えて、同じ角度の投影プロフィールはビーム位置に因らず同時に計測できると仮定する。

(注： なお、仮定 1,2 は扇状投影にも適用できる。扇状投影 $p(\Upsilon, \Phi)$ は、X 線源の位置を表す角度 Φ と、扇の中のビーム位置を表す角度 Υ で表される。仮定 1 の ϕ を Φ に、仮定 2 の u を Υ に読み替えば良い。)

以上の制約がある場合、時刻 t には角度 $\phi = (\pi/T)t$ の投影が計測される：

制限 $\phi = (\pi/T)t$ の下で計測される投影

$$\begin{aligned} p(u, \frac{\pi}{T}t; t) &= \int \int_{\text{scan area}} \delta\left(u - x \cos \frac{\pi}{T}t - y \sin \frac{\pi}{T}t\right) f(x, y; t) dx dy \\ &\equiv p^*\left(u, \frac{\pi}{T}t\right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

この投影を時間 $0 \leq t \leq T$ (すなわち角度 $0 \leq \phi \leq \pi$) にわたって計測し続ければ、最終的には $u\phi$ 平面上の投影 $\{p^*(u, \phi) \mid -U \leq u \leq U, 0 \leq \phi \leq \pi\}$ が得られる。

もし、時刻 t における完全な投影 $\{p(u, \phi; t); -\infty < u < \infty, 0 \leq \phi \leq \pi\}$ が揃うならば、その時刻における再構成画像 $\hat{f}(x, y; t)$ が画像再構成処理によって得られるだろう。しかし (3.4) 式のように特定の制限下での投影しか計測できないとき、このとき X 線 CT 装置は (時刻に関して) 不完全な投影 $\{p^*(u, \phi); -\infty < u < \infty, 0 \leq \phi \leq \pi\}$ から画像再構成を行うことになる。これについては、次節で考察する。

3.3 時間に関する縮退

もし時刻 t を考慮するならば、「投影からの画像再構成」と呼ばれる操作によって、投影 $p(u, \phi; t)$ から原画像 $f(x, y; t)$ を推定する線形システムが画像再構成系である。通常の再構成問題では、投影と原画像の時刻は共通 (一定) と仮定されるので、 t を省略して $p(u, \phi)$, $f(x, y)$ と記される。しかし X 線 CT 装置は時刻 $0 \leq t \leq T$ に計測される不完全な投影 $p^*(u, \phi)$ に対しても、 $p(u, \phi)$ と同様の再構成処理をほどこす。以下、フィルタ補正逆投影法に従って、この再構成処理を再現する：

〔操作 1〕 投影のフィルタ補正 投影 $p^*(u, \phi)$ を, u について 1 次元フーリエ変換してフィルタ $|w| W_\epsilon(w)$ をかけた後, 1 次元逆フーリエ変換する:

$$P^*(w, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} p^*(u, \phi) e^{-j2\pi w u} du \quad (3.5)$$

$$q^*(u, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} P^*(w, \phi) |w| W_\epsilon(w) e^{j2\pi w u} dw \quad (3.6)$$

〔操作 2〕 逆投影 フィルタ補正投影 $q^*(u, \phi)$ に対して, 逆投影変換をおこない, 再構成画像 $\hat{f}(x, y)$ を算出する:

$$\hat{f}(x, y) = \int_0^\pi q^*(x \cos \phi + y \sin \phi, \phi) d\phi \quad (3.7)$$

被写体が動かない (断層が変化しない) 場合, $f(x, y; t) \equiv f(x, y)$ が成立する. 従って $p^*(u, \phi) \equiv p(u, \phi)$ であり, 再構成画像 $\hat{f}(x, y)$ は $f(x, y)$ の推定値たり得る.

一方, 被写体が動く (断層が変化する場合, $f(x, y; t) \neq f(x, y)$ である. この場合においても, 操作 1, 2 には時刻 t が陽な形で現れて来ない. しかし再構成処理と時刻とは無関係でない.

原画像 $f(x, y; t)$ から (3.1) 式に従って投影 $p(u, \phi; t)$ を求め, これをフィルタ補正したものを $q(u, \phi; t)$ と表記しよう. 図 11 のように, 投影 $p(u, \phi; t)$ は座標系 $O-u\phi t$ の定義された 3 次元空間 ($u\phi t$ 空間) 上の分布である. この $u\phi t$ 空間に平面 $\phi = (\pi/T)t$ を考え, この平面上の投影 $p(u, (\pi/T)t; t)$ を $u\phi$ 平面に射影したものが, (3.4) 式の $p^*(u, \phi)$ である. フィルタ補正投影 $q(u, \phi; t)$ と $q^*(u, \phi)$ の間にも, 同様の関係が成り立つ.

操作 2 の逆投影変換は, $u\phi$ 平面内に正弦曲線 $S^* : u = x \cos \phi + y \sin \phi$ を考え, その曲線上のフィルタ補正投影 $q^*(x \cos \phi + y \sin \phi, \phi)$ を ϕ 方向へ積分する操作である (2.3 節参照). これを時刻 t に関する操作として, 以下のように解釈する. 逆投影変換式 (3.7) を $\phi = (\pi/T)t$ なる関係を用いて, ϕ から t へ変数変換する. ヤコビアンは $|J| = d\phi/dt = \pi/T$ である. また $q^*(u, \phi)$ を時刻 t のフィルタ補正投影 $q(u, \phi; t)$ で書き換える. すると (3.7) 式は,

$$\begin{aligned} \hat{f}(x, y) &= \int_0^T q \left(x \cos \frac{\pi}{T}t + y \sin \frac{\pi}{T}t, \frac{\pi}{T}t; t \right) |J| dt \\ &= \frac{\pi}{T} \int_0^T q \left(x \cos \frac{\pi}{T}t + y \sin \frac{\pi}{T}t, \frac{\pi}{T}t; t \right) dt \end{aligned} \quad (3.8)$$

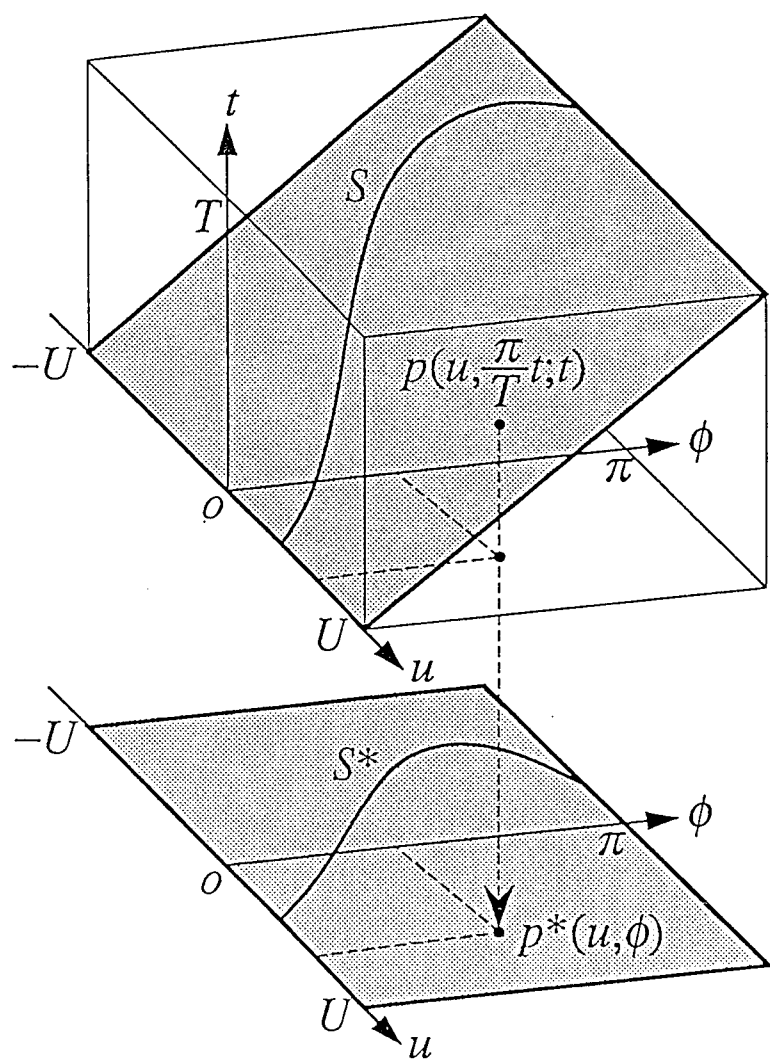


図 11: 投影は $u\phi t$ 空間から $u\phi$ 平面へ退化する.

となる. $u\phi t$ 空間において, t をパラメータとし, $\phi(t) = (\pi/T)t$ と $u(t) = x \cos(\pi/T)t + y \sin(\pi/T)t$ によって定まる一本の曲線 S を考える (図 11). 再構成画像 $\hat{f}(x, y)$ は, 曲線 S 上のフィルタ補正投影 $q(u(t), \phi(t); t)$ を t について積分したものである. 従って $\hat{f}(x, y)$ は (3.8) 式の意味で, 時刻 t に関して「縮退 (退化, 劣化)」している.

もし xy 平面上の原画像 $f(x, y)$ が, 時刻 t が経つにつれて変化する (すなわち被写体が動く) ならば, ある時刻 t における原画像 $f(x, y; t)$ と再構成画像 $\hat{f}(x, y)$ の間には差異が生ずる. この差異が CT 画像化によりディスプレイに映し出され, 人の目によって確認されたものが, モーションアーチファクトである.

断層撮影モデルの劣化特性は, 投影計測に対する仮定 1, 2 だけでは決定されない. しかし $f(x, y; t)$ を制限することによって, 断層撮影モデルの劣化は定式化することができる. このことは第 5 章～第 8 章において, 具体的に論ぜられるだろう.

第4章 点源の並進によるモーションアーチファクト

4.1 円形断層の並進運動

時間に依存する被写体—計測系の被写体として、半径 ε の円形断層を想定する (図12). この円形断層が xy 平面上を並進する (一定の方向へ移動する) 場合、再構成画像 (ぶれ像) は解析的にはどの様に記述されるだろうか. 以下にこれを示す.

xy 平面のスキャンエリア内に、半径 ε 、濃度 ρ の「円板」を想定する.

$$c(x, y) = \begin{cases} \rho, & x^2 + y^2 \leq \varepsilon^2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.1)$$

この円板を x 軸方向へ x' 、 y 軸方向へ y' だけ平行移動させたものを、被写体断層と考える.

$$f(x, y) = c(x - x', y - y') \quad (4.2)$$

これを円形断層と呼ぶことにする. 円形断層の位置は円の中心 (x', y') を用いて表す.

スキャン時間を T で表す. xy 平面内において、円形断層を時間 T だけかけて角度 γ 方向へ距離 $\pi\beta$ だけ並進運動させる. 円形断層の時刻 t における位置 (x_t, y_t) は、

$$\begin{aligned} x_t &= k(t) \cos \gamma + \xi \\ y_t &= k(t) \sin \gamma + \eta \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$(0 \leq t \leq T, 0 \leq \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \leq U)$$

で与える. $k(t)$ は t についてなめらかな関数で、

$$k(0) = 0, \quad k(T) = \pi\beta \quad (4.4)$$

を満たす. また (4.3) 式の (ξ, η) は、スキャン開始時 ($t = 0$) における O - xy 平面内での円形断層の位置 (初期座標) を表す.

以上のように、時刻 t により並進中の位置が指定される xy 平面内の点を (x_t, y_t) で表すとき、時刻 t における円形断層は次式で与えられる:

$$\begin{aligned} f(x, y; t) &= c(x - x_t, y - y_t) \\ &= c \left[x - (k(t) \cos \gamma + \xi), y - (k(t) \sin \gamma + \eta) \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

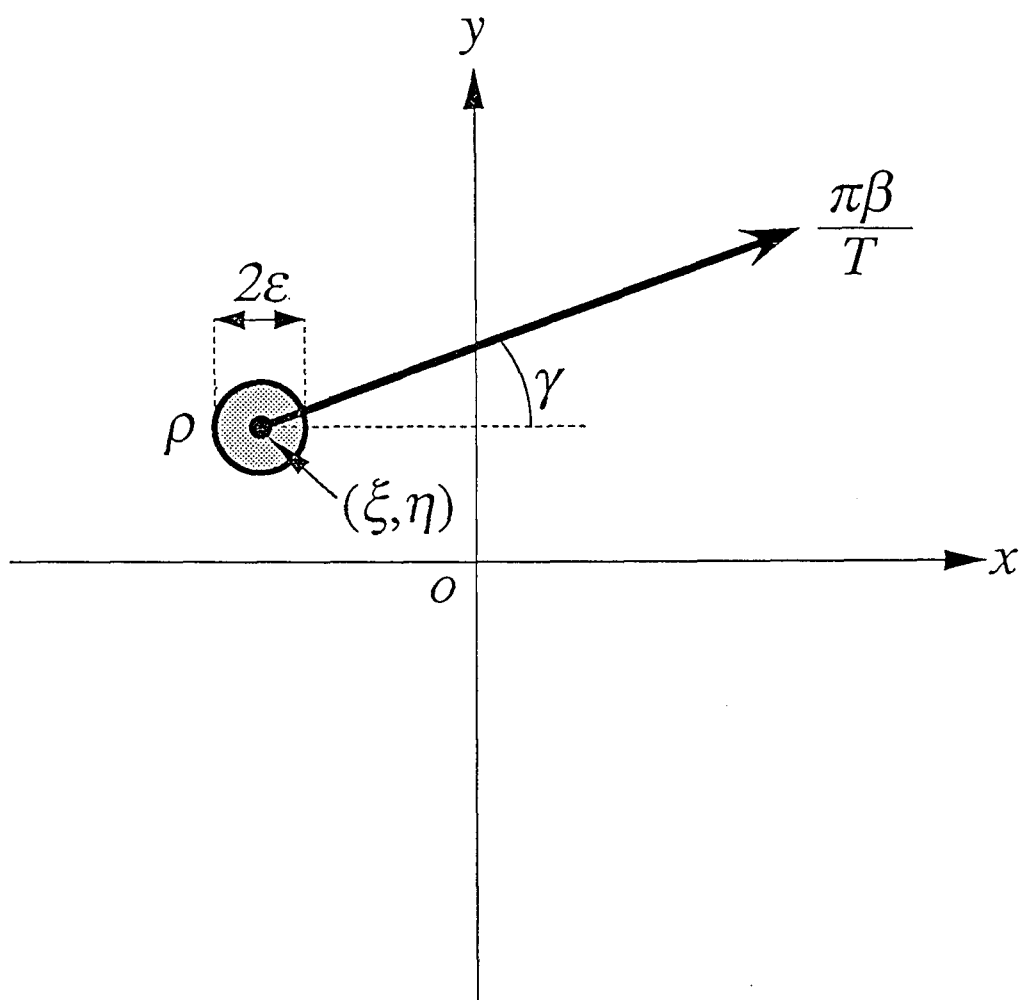


図 12: xy 平面上を並進する円形断層.

4.2 円形断層に対する再構成画像

この $f(x, y; t)$ を, (3.1) 式に従い変数 x と y について 2 次元 Radon 変換すると

$$p(u, \phi; t) = \chi \left[u - (k(t) \cos \gamma + \xi) \cos \phi - (k(t) \sin \gamma + \eta) \sin \phi \right] \quad (4.6)$$

を得る. これは時刻 t における円形断層 $f(x, y; t)$ の投影である. ただし,

$$\chi(u) = \begin{cases} 2\rho\sqrt{\varepsilon^2 - u^2}, & |u| \leq \varepsilon \\ 0, & |u| > \varepsilon \end{cases} \quad (4.7)$$

とする. 以下, 3.2 節で議論した「時間に依存する被写体—計測系」の枠組みの中で, 原画像 $f(x, y; t)$ に対する投影 $p^*(u, \phi)$ を求めて見よう. まず時刻 t における投影の計測角度を, (3.2) 式のように $\phi = g(t)$ で与える. $g(t)$ は t について連続な単調増加関数と仮定したので, $g(t)$ の逆関数を定義することができる:

$$t = g^{-1}(\phi) \quad (0 \leq \phi \leq \pi) \quad (4.8)$$

$$g^{-1}(0) = 0, \quad g^{-1}(\pi) = T$$

これを用いて (4.3) 式を書き換えると,

$$\begin{aligned} x_{g^{-1}(\phi)} &\stackrel{\text{def}}{=} x_\phi = k \circ g^{-1}(\phi) \cos \gamma + \xi \\ y_{g^{-1}(\phi)} &\stackrel{\text{def}}{=} y_\phi = k \circ g^{-1}(\phi) \sin \gamma + \eta \end{aligned} \quad (4.9)$$

である. $\circ$ は関数の合成を表す. $x_{g^{-1}(\phi)}$ と $y_{g^{-1}(\phi)}$ は ϕ の関数なので, それぞれ x_ϕ , y_ϕ と表記する.

さて問題を単純化するために, 以下のような仮定をおこなう. 3.2 節で既に述べたように, 投影計測 (スキャン) の角速度 $\dot{g}$ は一定 ($\dot{g} = \pi/T$) と見なす. このとき $g(t)$ は次式で与えられる:

$$g(t) = \frac{\pi}{T}t \quad (0 \leq t \leq T) \quad (4.10)$$

また断層が並進運動する速度 $\dot{k}$ も, 1 スキャン (時間 T) の間ならば一定 ($\dot{k} = \pi\beta/T$) と見なせる. 従って $k(t)$ は次式で与えられる:

$$k(t) = \frac{\pi\beta}{T}t \quad (0 \leq t \leq T) \quad (4.11)$$

このとき (4.3) 式は

$$\begin{aligned}x_t &= \frac{\pi\beta \cos \gamma}{T}t + \xi \\y_t &= \frac{\pi\beta \sin \gamma}{T}t + \eta \\(0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \leq U)\end{aligned}\tag{4.12}$$

と書き換えられる。また (4.9) 式は次のように書き換えられる：

$$\begin{aligned}x_\phi &= (\beta \cos \gamma)\phi + \xi \\y_\phi &= (\beta \sin \gamma)\phi + \eta\end{aligned}\tag{4.13}$$

式中の定数 β はスキャン時間 T の間に円形断層が移動する距離 $\pi\beta$ を決めるパラメータであり、かつ投影計測の角速度 $\dot{g}$ に対する並進運動の速度 $\dot{k}$ の比

$$\beta = \frac{\dot{k}}{\dot{g}}$$

として意味をもつ。

以下、投影計測の角速度が一定 ($\pi\beta/T$) かつ並進運動の速度も一定 (π/T) で、(4.13) 式の成り立つ場合についてだけ考える。これらの制約下において、角度 ϕ のビーム束によって計測される投影は、(3.4) 式より

$$\begin{aligned}p^*(u, \phi) &= \chi(u - x_\phi \cos \phi - y_\phi \sin \phi) \\&= \chi \left[u - ((\beta \cos \gamma)\phi + \xi) \cos \phi - ((\beta \sin \gamma)\phi + \eta) \sin \phi \right] \\&= \chi \left[u - \xi \cos \phi - \eta \sin \phi - \beta \phi \cos(\phi - \gamma) \right]\end{aligned}\tag{4.14}$$

と表すことができる。

この投影を画像再構成系に適用すれば、再構成画像 $\hat{f}(x, y)$ を求めることができる (後述するように再構成画像 $\hat{f}(x, y)$ は原画像 $f(x, y; t)$ とは一般に異なる)。以下、フィルタ補正逆投影法の手順に従って、再構成画像を求める。まず $p^*(u, \phi)$ のフーリエ変換を計算すると、

$$P^*(w, \phi) = \frac{\varepsilon \rho}{w} J_1(2\pi \varepsilon w) \exp \left[-j2\pi \left(\xi \cos \phi + \eta \sin \phi + \beta \phi \cos(\phi - \gamma) \right) w \right]\tag{4.15}$$

ただし, $J_1(\cdot)$ は 1 次の第 1 種ベッセル関数 [31,32] を表す. この $P^*(w, \phi)$ にフィルタ $|w|$ をかけて逆フーリエ変換すると, フィルタ補正投影が得られる:

$$\begin{aligned} q^*(u, \phi) &= 2\varepsilon\rho \int_0^\infty J_1(2\pi\varepsilon w) \cos \left[2\pi \left(u - \xi \cos \phi - \eta \sin \phi - \beta\phi \cos(\phi - \gamma) \right) w \right] dw \\ &= \psi \left(u - \xi \cos \phi - \eta \sin \phi - \beta\phi \cos(\phi - \gamma) \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

ただし, 関数 $\psi(u)$ は以下のように定義する (図 13 参照):

$$\psi(u) = \begin{cases} \frac{\rho}{\pi}, & |u| < \varepsilon \\ \frac{\rho}{\pi} \left(1 - \frac{|u|}{\sqrt{u^2 - \varepsilon^2}} \right), & |u| > \varepsilon \end{cases} \quad (4.17)$$

次に, フィルタ補正投影 $q^*(u, \phi)$ を (3.7) 式に従って, 形式的に逆投影変換する:

$$\hat{c}(x, y) = \int_0^\pi \psi \left[(x - \xi) \cos \phi + (y - \eta) \sin \phi - \beta\phi \cos(\phi - \gamma) \right] d\phi \quad (4.18)$$

(4.18) 式は, xy 平面内を角度 γ 方向へ, 等速度 $\pi\beta/t$ で並進運動する円形断層 (半径 ε , 濃度 ρ) に対する再構成画像である.

4.3 円形断層の極限としての点源

4.1 節で定義した円板 $c(x, y)$ についてもう一度考えてみる. 円板の濃度 ρ が, 次式のように半径 ε に依存する場合を想定する:

$$\rho = \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \quad (4.19)$$

このような円板を $c_\varepsilon(x, y)$ で表せば,

$$c_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\varepsilon^2}, & x^2 + y^2 \leq \varepsilon^2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.20)$$

となる. $c_\varepsilon(x, y)$ は自身の定義より, いかなる ε に対しても次の条件を満たす:

$$[\text{円の面積}] \times [\text{円内の濃度}] = 1 \quad (4.21)$$

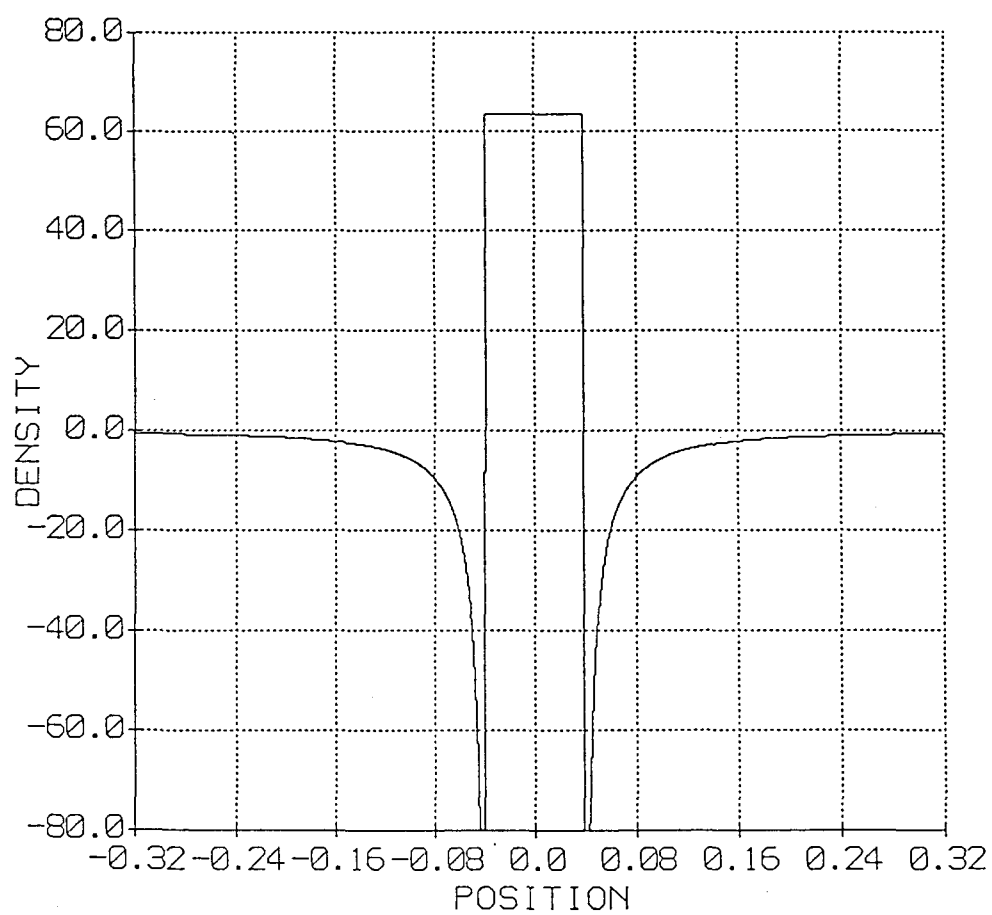


図 13: 関数 $\psi_\epsilon(u)$ ($\epsilon = 0.04$) の形状. この関数は 4.2 節 で導入した関数 $\psi(u)$ に対し, $\rho = 1/(\pi\epsilon^2)$ なる拘束を加えたものに等しい.

これを1に保ったまま半径 $\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば、濃度は無限大になり、 $c_\varepsilon(x, y)$ は2次元のデルタ関数 $\delta(x, y)$ となる [33] :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_\varepsilon(x, y) = \delta(x, y) \quad (4.22)$$

$\delta(x, y)$ ，あるいは円の半径 ε が濃度 $1/(\pi\varepsilon^2)$ に比して十分小さな $c_\varepsilon(x, y)$ が被写体断層であるとき，これらはCTシステム（被写体—計測系と画像再構成系から成る線形システム）へ入力される「点源」と見なすことができる。

また円形断層に対する再構成画像を，濃度 $\rho = 1/(\pi\varepsilon^2)$ という条件下で $\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば，点源に対する再構成画像を求めることができる。すなわち，点源に対する再構成画像を $\hat{\delta}(x, y)$ と表記するならば，それは(4.18)式に $\rho = 1/(\pi\varepsilon^2)$ という制約を加えて $\varepsilon \rightarrow 0$ としたときの，その極限として求められる：

$$\hat{\delta}(x, y) = \lim_{\rho=1/(\pi\varepsilon^2), \varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \psi \left[(x - \xi) \cos \phi + (y - \eta) \sin \phi - \beta \phi \cos(\phi - \gamma) \right] d\phi \quad (4.23)$$

$\hat{\delta}(x, y)$ の導出については，次節で詳しく述べる。

4.4 点源に対する再構成画像の導出

被写体断層として点源（2次元デルタ関数）を想定する。この点源は時間 T だけかけて角度 γ 方向へ距離 $\pi\beta$ だけ並進運動する。並進運動の速度は一定（ $\pi\beta/T$ ）かつ投影計測の角速度も一定（ π/T ）とする。このとき，(4.12)式で既に記述したように，時刻 t における点源の位置 (x_t, y_t) は，

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{\pi\beta \cos \gamma}{T} t + \xi \\ y_t &= \frac{\pi\beta \sin \gamma}{T} t + \eta \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$(0 \leq t \leq T, 0 \leq \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \leq U)$$

で与えられる。定数 β は投影計測の角速度に対する並進運動の速度の比を， (ξ, η) はスキャン開始時（ $t = 0$ ）における $O-xy$ 平面内での円形断層の位置（初期座標）を表す。

スキャンエリア内の背景濃度を一様にゼロと仮定する。この点源を含む原画像は次式で表される：

$$f(x, y; t) = \delta(x - x_t, y - y_t) \quad (4.25)$$

ただし (x_t, y_t) は (4.24) 式で与える。3.2節で導入した時間に依存する被写体—計測系において、この $f(x, y; t)$ から計測される投影は、

$$p^*(u, \phi) = \delta(u - x_\phi \cos \phi - y_\phi \sin \phi) \quad (4.26)$$

である。ただし (x_ϕ, y_ϕ) は (4.13) 式に示したように、次式を表すものとする：

$$\begin{aligned} x_\phi &= (\beta \cos \gamma) \phi + \xi \\ y_\phi &= (\beta \sin \gamma) \phi + \eta \end{aligned} \quad (4.27)$$

この投影を 3.3節の画像再構成系に適用する。操作 1 のフィルタ補正では

$$\begin{aligned} |w| W_\varepsilon(w) &= \frac{J_1(2\pi\varepsilon|w|)}{\pi\varepsilon} \\ &\rightarrow |w| \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (4.28)$$

をフィルタとして用いる。ここで $J_1(\cdot)$ は 1 次の第 1 種ベッセル関数である。このときフィルタ補正投影は

$$q^*(u, \phi) = \psi_\varepsilon(u - x_\phi \cos \phi - y_\phi \sin \phi) \quad (4.29)$$

のように求められる。ただし、関数 $\psi_\varepsilon(u)$ を次のように定義する：

$$\psi_\varepsilon(u) = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2 \varepsilon^2}, & |u| < \varepsilon \\ \frac{1}{\pi^2 \varepsilon^2} \left(1 - \frac{|u|}{\sqrt{u^2 - \varepsilon^2}} \right), & |u| > \varepsilon \end{cases} \quad (4.30)$$

関数 $\psi_\varepsilon(u)$ のプロファイルは図 13 に示す。この関数 $\psi_\varepsilon(u)$ について、パラメータ $\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_\varepsilon(u) = -\frac{1}{2\pi^2 u^2}, \quad u \neq 0 \quad (4.31)$$

を得る。上式の右辺は $u = 0$ において定義されないが、右辺をそのまま逆投影すると、2 次元デルタ関数になることが知られている：

2 次元デルタ関数の平面波分解公式

$$\delta(x, y) = \int_0^\pi \frac{-d\phi}{2\pi^2 (x \cos \phi + y \sin \phi)^2} \quad (4.32)$$

(4.32) 式は 2 次元デルタ関数の平面波分解公式と呼ばれる [37,38].

並進運動する点源に対する再構成画像 $\hat{\delta}(x, y)$ は, (4.31) 式を用いて, 次式のような逆投影変換によって形式的に与えられる:

点拡がり関数の定義 (並進運動)

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(x, y) &= \int_0^\pi \frac{-d\phi}{2\pi^2 [(x - x_\phi) \cos \phi + (y - y_\phi) \sin \phi]^2} \\ &= \int_0^\pi \frac{-d\phi}{2\pi^2 [(x - \xi) \cos \phi + (y - \eta) \sin \phi - \beta \phi \cos(\phi - \gamma)]^2} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \Delta_{\beta, \gamma}(x - \xi, y - \eta)\end{aligned}\quad (4.33)$$

$\hat{\delta}(x, y)$ の数値計算例は 4.8 節の図 19 に示した. (4.33) 式の右辺は, 点源の速度と投影計測の角速度の比 β および点源の運動方向を決める角度 γ , 時刻 0 における点源の初期座標 (ξ, η) により一意に定まる. また x と ξ の差, および y と η の差の関数である. よって (4.33) 式の右辺すなわち並進運動する点源に対する再構成画像を, パラメータ β, γ, ξ, η を陽に表記して $\Delta_{\beta, \gamma}(x - \xi, y - \eta)$ と表そう.

図 14 に示すように, ある一定の並進運動 (β, γ) を仮定する被写体-計測系および画像再構成系から構成される線形システム (断層撮影モデル) へ, 点源 $f(x, y; 0) = \delta(x - \xi, y - \eta)$ を入力したとき, その出力として得られるのが $\hat{f}(x, y) = \Delta_{\beta, \gamma}(x - \xi, y - \eta)$ である. 従って第 5 章に後述するように, $\Delta_{\beta, \gamma}(x - \xi, y - \eta)$ はこの断層撮影モデルの点拡がり関数 (劣化関数) と見なすことができる.

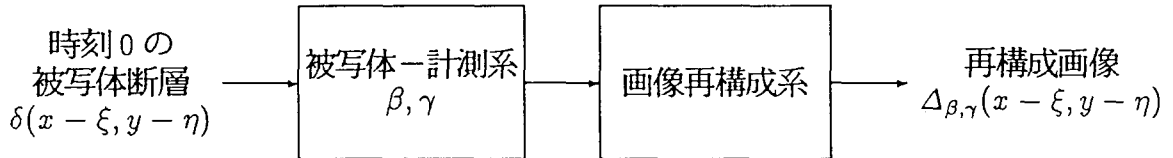


図 14: 一定の並進運動 (β, γ) を仮定する被写体-計測系および画像再構成系から構成される CT システムへ, 点源 $\delta(x - \xi, y - \eta)$ を入力したとき, 出力として得られるのがシステムの点拡がり関数 $\Delta_{\beta, \gamma}(x - \xi, y - \eta)$ である.

4.5 ふれの発生

並進運動する円形断層に対する再構成画像 $\hat{c}(x, y)$ ((4.18) 式) は, ϕ に関する積分で表される. この積分の実行は難しい. しかしフィルタ補正投影のプロフィールを層と見なす考え方によって, 再構成画像の濃度分布の概要を知ることができる. また層を積み重ねることによって, 円形断層が並進運動して生ずるふれの位置や, ふれの形状等を知ることができる. 本節では, 並進運動する円形断層および点源に対するふれの発生を, 積層の考え方に基づいて論ずる.

並進運動する円形断層の再構成プロセスを, 直交座標系 $O-xy$ の定義された xy 平面上に再現してみよう. 図 15 のように, 円形断層 (白抜きの小円) からの投影 (同図 (a), $p^*(u, \phi_i); i = 1, \dots, 5$) は様々な角度から計測され, そのフィルタ補正投影 (同図 (b), $q^*(u, \phi_i); i = 1, \dots, 5$) は xy 平面上に逆投影される. このとき角度 ϕ のフィルタ補正投影だけを逆投影すると, 次式のような層 $\hat{c}_\phi$ が xy 平面上に形成される (2.3 節の層および積層の定義を参照せよ):

$$\hat{c}_\phi(x, y) = \int_0^\pi \delta(\phi - \varphi) \psi \left[(x - \xi) \cos \varphi + (y - \eta) \sin \varphi - \beta \varphi \cos(\varphi - \gamma) \right] d\varphi \quad (4.34)$$

$\delta(\cdot)$ は 1 次元デルタ関数を表す. また $\psi(\cdot)$ は (4.17) 式で定義される. 直交座標系 $O-xy$ を角度 ϕ だけ回転させた直交座標系 $O-uv$ を用いて, 層 $\hat{c}_\phi(x, y)$ を表わせば,

$$\hat{c}_\phi(u \cos \phi - v \sin \phi, u \sin \phi + v \cos \phi) = \psi(u - \kappa(\phi)) \quad (4.35)$$

である. ただし, $\kappa(\phi)$ は次式で与える:

$$\kappa(\phi) = \xi \cos \phi + \eta \sin \phi + \beta \phi \cos(\phi - \gamma)$$

(4.35) 式の右辺は (4.16) 式に等しい. 2.3 節で既に述べたように, これは $\hat{c}_\phi(x, y)$ の u 軸に平行な断面濃度が, 角度 ϕ のフィルタ補正投影のプロフィール $\psi(u - \kappa(\phi))$ に等しいことを示す. 従って, フィルタ補正投影の正值の部分 $\{\psi(u - \kappa(\phi)) \mid -\varepsilon + \kappa(\phi) < u < \varepsilon + \kappa(\phi)\}$ は, $\hat{c}_\phi(x, y)$ では $O-xy$ 平面上の幅 2ε の帯状領域 (図 15b の灰色の帯) に相当する.

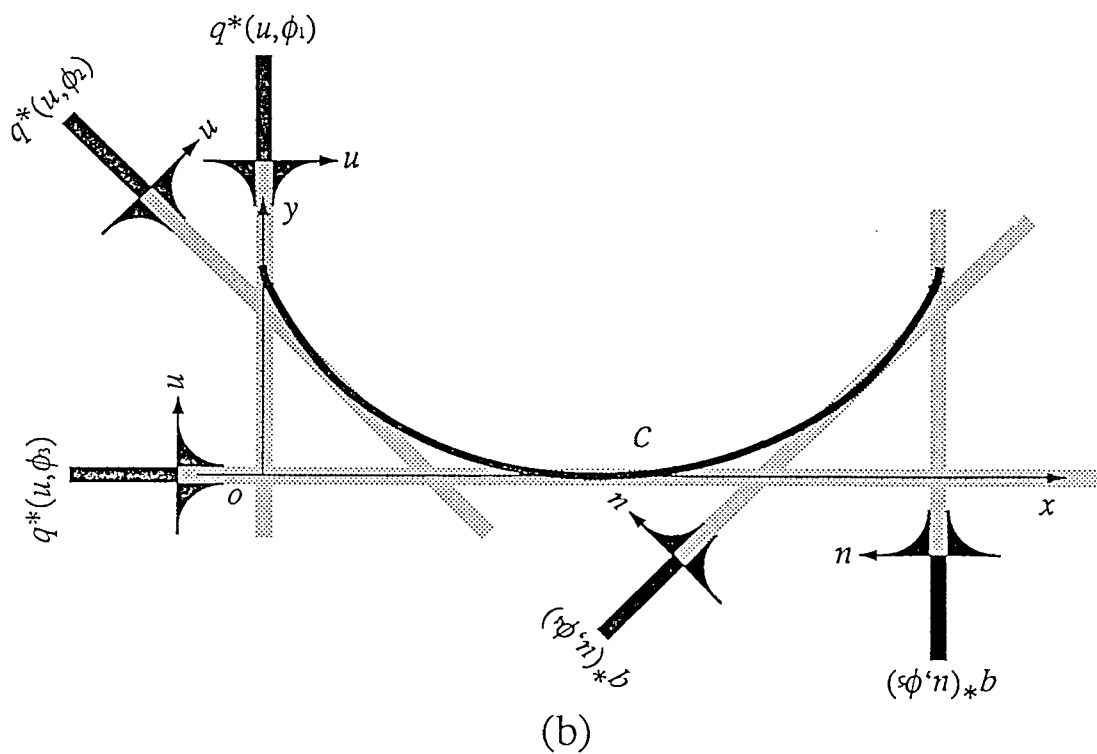
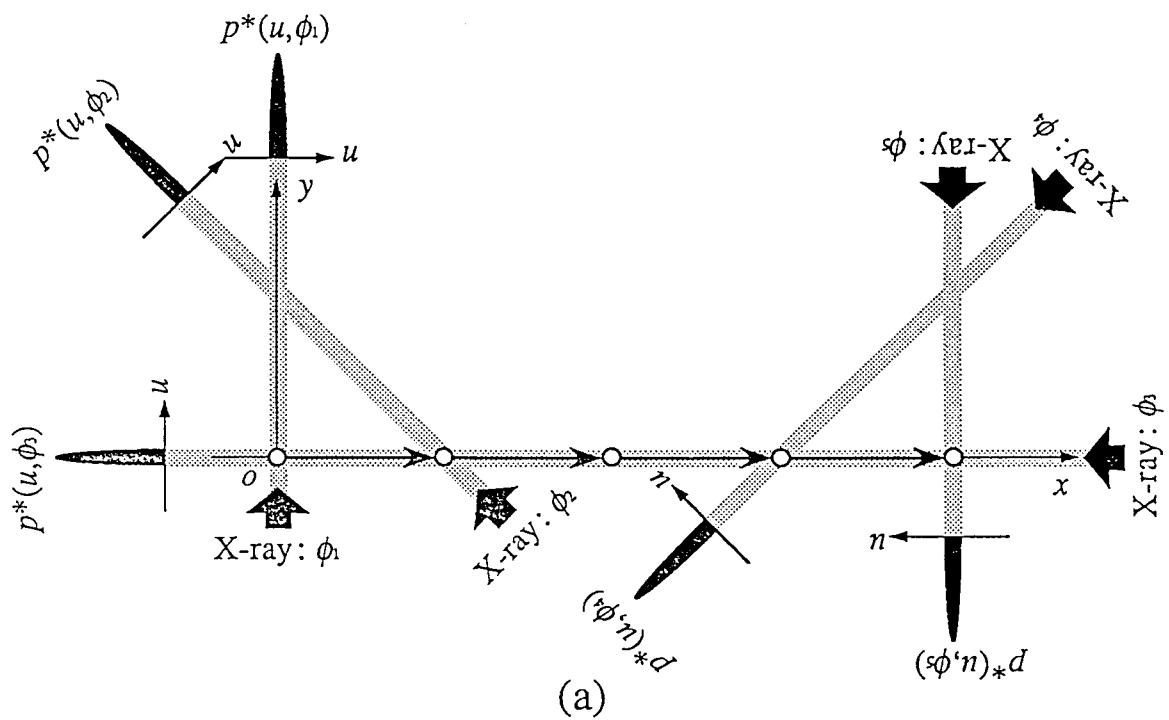


図 15: (a) xy 平面内を並進運動する円形断層の投影 $p^*(u, \phi_i), i = 1, \dots, 5$. (b) 灰色の帯の領域にフィルタ補正投影 $q^*(u, \phi_i), i = 1, \dots, 5$ の正值部分が逆投影される. 黒い曲線は帯の包絡を表し, モーションアーチファクトの形状を与える.

(4.35) 式の両辺を, (4.18) 式に従って再び逆投影変換すると, 次式が得られる:

$$\hat{c}(x, y) = \int_0^\pi \hat{c}_\phi(x, y) d\phi \quad (4.36)$$

また再構成画像 $\hat{c}_\epsilon(x, y)$ の CT 画像化は, 層 $\hat{c}_\phi(x, y)$ の CT 画像化を様々な角度 ϕ について加算したものである:

$$\mathcal{I}_{CT} \{ \hat{c}(x, y) \} = \int_0^\pi \mathcal{I}_{CT} \{ \hat{c}_\phi(x, y) \} d\phi \quad (4.37)$$

再構成画像 $\hat{c}(x, y)$ は, それぞれ異なる ϕ を割り当てた層 $\hat{c}_\phi(x, y)$ を, 角度 $\phi = 0$ から π まで xy 平面上で積み重ねた (積層した) ものである. もし円形断層が静止しているならば, 異なる ϕ に対する帯は全て一か所で交わり, そこに濃度 ρ の円が再構成される. しかし円形断層が図 15 のように並進運動している場合, 帯は一か所では交わらず, 円形断層は正しくは再構成されない. このとき再構成されて CT 画像に現れる図形がモーションアーチファクト, すなわち並進運動する円形断層の「ぶれ」である. $\hat{c}(x, y)$ の CT 画像にぶれが構成されるならば, それは図 15b の帯の重なりが多い部分 (曲線 C の部分) である.

4.3 節で述べたように, 円形断層の半径が ϵ , 濃度が $\rho = 1/(\pi\epsilon^2)$ のとき, その円形断層に対する再構成画像 $\hat{c}(x, y)$ の $\epsilon \rightarrow 0$ 極限は, 点源 (デルタ関数) に対する再構成画像となる. 従って同様の枠組みで, 点源に対するぶれ像を論じることもしける. すなわち, 円形断層に対するぶれ像の極限 ($\rho = 1/(\pi\epsilon^2)$, $\epsilon \rightarrow 0$) が点源のぶれ像である.

4.6 ふれの形状

円形断層を点源に収束させるとき, フィルタ補正投影の正值の部分 $\{ \psi(u) | -\epsilon < u < \epsilon \}$ を逆投影させた領域 (帯) の幅 2ϵ もゼロとなり, 帯は直線と見なせる. この直線を $M(\phi)$ と表記する. 直線 $M(\phi)$ は角度 ϕ をパラメータとして, 次式で与えられる:

$$x \cos \phi + y \sin \phi = [(\beta \cos \gamma)\phi + \xi] \cos \phi + [(\beta \sin \gamma)\phi + \eta] \sin \phi \quad (4.38)$$

(4.38) 式の右辺は直線が u 軸と交わる位置を表す. また xy 平面内を並進する点源の位置は

$$(x_\phi, y_\phi) = ((\beta \cos \gamma)\phi + \xi, (\beta \sin \gamma)\phi + \eta) \quad (4.39)$$

で表される. どの ϕ に対しても直線 $M(\phi)$ は必ず点 (x_ϕ, y_ϕ) を通り, $M(\phi)$ は常に図 15b の黒い曲線 (C とする) の接線である. すなわち, 曲線 C は直線群 $\{M(\phi) | 0 \leq \phi \leq \pi\}$ の包絡線である. 点源から生ずるモーションアーチファクトの図形的同定は, この包絡線を求める問題に帰着される. (4.38) 式を ϕ に関して微分すれば

$$\begin{aligned} -x \sin \phi + y \cos \phi &= (\beta \cos \gamma) \cos \phi - [(\beta \cos \gamma)\phi + \xi] \sin \phi \\ &+ (\beta \sin \gamma) \sin \phi + [(\beta \sin \gamma)\phi + \eta] \cos \phi \end{aligned} \quad (4.40)$$

となる.

直線群 $\{M(\phi) | 0 \leq \phi \leq \pi\}$ の包絡線は, (4.38) 式および (4.40) 式を同時に満たす. これらの式を整理して, x と y をパラメータ ϕ で表したものが包絡線, すなわちふれの形状を与える:

ふれの形状 (サイクロイド)

$$\begin{cases} x = \frac{\beta \cos \gamma}{2} (2\phi - \sin 2\phi) - \frac{\beta \sin \gamma}{2} (1 - \cos 2\phi) + \xi \\ y = \frac{\beta \cos \gamma}{2} (1 + \cos 2\phi) + \frac{\beta \sin \gamma}{2} (2\phi - \sin 2\phi) + \eta \end{cases} \quad (4.41)$$

うち $0 \leq \phi \leq \pi$ の部分だけが CT 画像中に描かれる. (4.41) 式はサイクロイド (cycloid) と呼ばれる平面曲線を表す [34,35,36]. これを簡単に示すために, 点源が原点を起点として, x 軸上を正の方向に移動する場合を考える (仮定より速度 $\pi\beta/T$ の等速運動である). この時, 初期座標 $(\xi, \eta) = (0, 0)$ および移動方向 $\gamma = 0$ であるので, (4.41) 式は

$$\begin{cases} x = \frac{\beta}{2} (2\phi - \sin 2\phi) \\ y = \frac{\beta}{2} (1 + \cos 2\phi) \end{cases}$$

となる. さらに $\theta = 2\phi$, $a = \beta/2$ なる置き換えをすれば, ふれの形状を示す平面曲線は以下のように簡単な式で表すことができる:

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 + \cos \theta) \end{cases} \quad (4.42)$$

この (4.42) 式は, 直線 $y = 2a$ を底として滑らずに転がる円 (半径 a) を考えたとき, その転円の円周上の一点が平面内に描くサイクロイド曲線を示している (図 16). なお θ は転円の位相 (転がった角度) を表している.

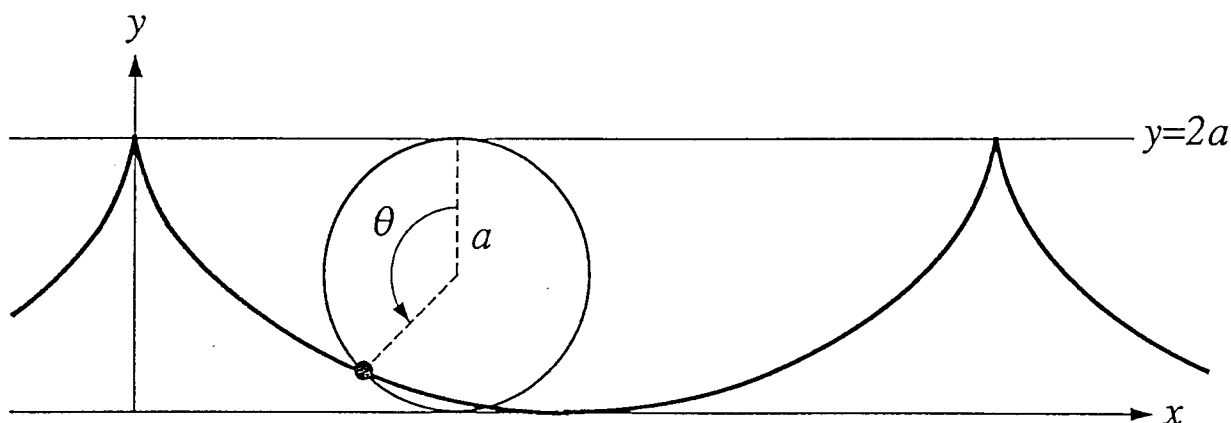


図 16: 半径 a 円が直線 $y = 2a$ を底として滑らずに転がるとき, その転円の円周上の一点 (●) が平面内に描くサイクロイド曲線.

以上の解析から, 並進運動する点源はサイクロイドと呼ばれる平面曲線を, CT 画像中にふれとして描くことが明らかになった. (4.33) 式の点拡がり関数 $\Delta_{\beta,\gamma}(x-\xi, y-\eta)$ と同様に, (4.41) 式のサイクロイド曲線も 4 つのパラメータ β, γ, ξ, η によって一意に定まり, xy 平面上においてサイクロイドの描かれる位置が決定される. ただし曲線の形状は, 点源の速度と投影計測の角速度の比 β , 点源の運動方向を定める角度 γ の 2 つのパラメータだけで決定される. パラメータ (ξ, η) は xy 平面内における曲線の平行移動を表し, 曲線の形状には無関係である.

4.7 尖点の発生

サイクロイド曲線は図 16 のように「弧 (arc)」の部分と, 弧と弧が接続する「尖点 (cusp)」の部分から構成される. (4.42) 式で表されるサイクロイド曲線のうち, $0 \leq \phi \leq \pi$ の部分だけが CT 画像中にふれとして描かれるため, パラメータ (β, γ) の与え方によっては, 尖点が現れる場合と, 尖点が現れず弧の部分だけが描かれる場合が生ずる. ふれに固有の形状, すなわち円弧 (ー) コンマ (,) 口髭 (ゝ) などは, こうした背景により生ずる.

以下, サイクロイド曲線に尖点の現れる条件および位置について調べる. 並進運動

する点源の位置（すなわち軌道）は(4.39)式に示したように、 ϕ をパラメータとして

$$(x_\phi, y_\phi) = ((\beta \cos \gamma)\phi + \xi, (\beta \sin \gamma)\phi + \eta) \quad (4.39)$$

で表される。パラメータ ϕ について (x_ϕ, y_ϕ) を微分すれば、軌道の接線方向が求められる：

$$(\dot{x}_\phi, \dot{y}_\phi) = (\beta \cos \gamma, \beta \sin \gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{n} \quad (4.43)$$

(4.43) 式は、点源の辿る軌道 $\{(x_\phi, y_\phi) | 0 \leq \phi \leq \pi\}$ の、角度 ϕ における接線の方角ベクトル ($\mathbf{n}$) を表す。

次に、点源を通過する X 線ビーム（あるいは Radon 変換の積分路）を表す直線 $M(\phi)$ について考える。この直線は(4.38)式に示したように、次式で与えられる：

$$x \cos \phi + y \sin \phi = [(\beta \cos \gamma)\phi + \xi] \cos \phi + [(\beta \sin \gamma)\phi + \eta] \sin \phi \quad (4.38)$$

(4.38) 式より、直線 $M(\phi)$ の方向ベクトルを $\mathbf{m}$ と表記するならば、 $\mathbf{m} = (\sin \phi, -\cos \phi)$ であることが分かる。

4.5節と 4.6節で述べたように、ふれ像を表すサイクロイド曲線 ((4.41) 式) は様々な ϕ に対する直線 $\{M(\phi) | 0 \leq \phi \leq \pi\}$ ((4.38) 式) の包絡線である。直線 $M(\phi)$ が点 (x_ϕ, y_ϕ) を必ず通過することを考慮すれば、サイクロイド曲線に尖点が発生するのは、(4.38) 式の直線が点源の進行方向に対して垂直となった時である (図 17 参照)。すなわちこのとき、軌道 $\{(x_\phi, y_\phi) | 0 \leq \phi \leq \pi\}$ の接線方向ベクトルと直線 $M(\phi)$ の方向ベクトルの内積はゼロである：

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = \beta \cos \gamma \sin \phi - \beta \sin \gamma \cos \phi = 0 \quad (4.44)$$

これを整理すれば、

$$\beta \sin(\phi - \gamma) = 0 \quad (4.45)$$

となる。従って $\beta = 0$ (点源が移動しないとき) を除けば、サイクロイド曲線に尖点が生ずるのは、サイクロイド曲線のパラメータ ϕ ($0 \leq \phi \leq \pi$) が次なる条件を満たす時である：

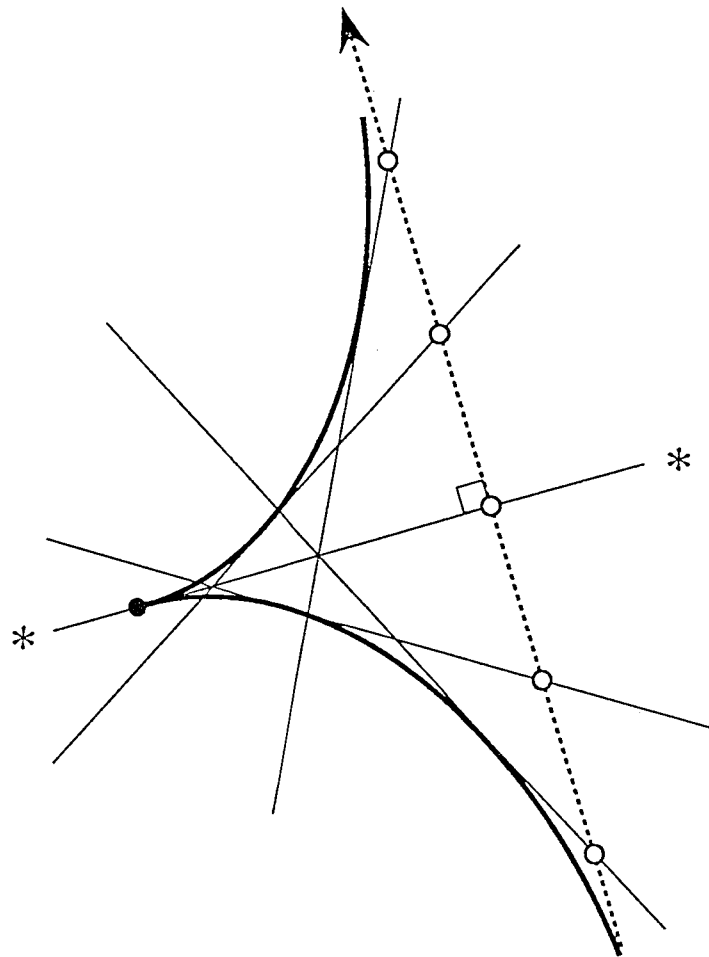


図 17: xy 平面内を並進する点源 (○) と点源を通過する直線 $M(\phi)$ (細い実線), および $M(\phi)$ の包絡線 (太い実線). 図中に*で示すように, 点源の進行方向に対して $M(\phi)$ が垂直になるとき, 包絡線に尖点 (●) が生ずる.

尖点の発生する条件

$$\phi = \begin{cases} 0 \text{ and } \pi & (\gamma = 0) \\ \gamma & (0 < \gamma < \pi) \\ 0 \text{ and } \pi & (\gamma = \pi) \\ \gamma - \pi & (\pi < \gamma < 2\pi) \end{cases} \quad (4.46)$$

また上式に示す ϕ の値をサイクロイド式(4.41)に適用すれば、尖点の現れる位置も決定することができる：

尖点の発生する位置

$\gamma = 0$ のとき；

$$\begin{cases} x = \xi & (\phi = 0), & \beta\pi + \xi & (\phi = \pi) \\ y = \beta + \eta \end{cases} \quad (4.47)$$

$0 < \gamma < \pi$ のとき；

$$\begin{cases} x = \beta(\gamma \cos \gamma - \sin \gamma) + \xi \\ \quad = \beta\sqrt{1 + \gamma^2} \cos \left[\gamma + \arctan \left(\frac{1}{\gamma} \right) \right] + \xi \\ y = \beta(\cos \gamma + \gamma \sin \gamma) + \eta \\ \quad = \beta\sqrt{1 + \gamma^2} \sin \left[\gamma + \arctan \left(\frac{1}{\gamma} \right) \right] + \eta \end{cases} \quad (4.48)$$

$\gamma = \pi$ のとき；

$$\begin{cases} x = \xi & (\phi = 0), & -\beta\pi + \xi & (\phi = \pi) \\ y = -\beta + \eta \end{cases} \quad (4.49)$$

$\pi < \gamma < 2\pi$ のとき；

$$\begin{cases} x = \beta[(\gamma - \pi) \cos \gamma - \sin \gamma] + \xi \\ \quad = \beta\sqrt{1 + (\gamma - \pi)^2} \cos \left[\gamma + \arctan \left(\frac{1}{\gamma - \pi} \right) \right] + \xi \\ y = \beta[\cos \gamma + (\gamma - \pi) \sin \gamma] + \eta \\ \quad = \beta\sqrt{1 + (\gamma - \pi)^2} \sin \left[\gamma + \arctan \left(\frac{1}{\gamma - \pi} \right) \right] + \eta \end{cases} \quad (4.50)$$

なお(4.47)式と(4.49)式の場合、CT画像中に描かれるサイクロイド曲線のその両端が尖点となる。すなわち尖点は2つ同時に現れる。その他の場合、すなわち(4.48)式と(4.50)式については、現れる尖点の数は1つである。

4.8 計算機シミュレーション

本節では、並進運動する点源（円形断層）に対する計算機シミュレーションの概要と、実験結果についてまとめる。本シミュレーションは、時間に依存する被写体—計測系と画像再構成系から成る断層撮影モデルを計算機上に構築し、並進運動する点源に対する再構成画像を算出したり、CT 画像中に生ずるモーションアーチファクト（ぶれ）を検証したりすることを目的とする。本シミュレーションでは、半径が濃度に比して十分小さな円形断層（条件 (4.21) を満たす）を点源の近似として用いる。

4.8.1 方法

画像再構成および画像表示について

画像再構成アルゴリズムとしてはフィルタ補正逆投影法を用い、その数値計算には Rosenfeld と Kak の方法（文献 [20,21]）を用いる。投影データは u 軸上で長さ 5.12 に渡って用意する。ビームは 256 本が平行に並ぶと仮定する（すなわち投影データのサンプル間隔は 0.02）。 ϕ 軸方向への投影は 180° に渡って用意する。またスキャンに要する時間は $T = 1.0$ とする。角度（時間）軸方向へのサンプル数は 180 である。CT 画像の画素数は (256×256) とし、スキャンエリア内の正方形領域（一辺の長さは 3.44）が CT 画像化の対象となる。

再構成画像の濃度 f は $I_{CT} \{ f \} = a(f - b) + I_0$ によって CT 画像化される。CT 画像化にともなう定数 a, b, I_0 は、各々の実験において与える。CT 画像を映像として表示するディスプレイの濃度階調は 256 とする。すなわち CT 画像化された値が 255 以上の部分は、ディスプレイに濃度 255 として映し出され、CT 画像化された値が 0 未満の部分は、ディスプレイに濃度 0 として映し出される。その他の場合については、CT 画像の値 I を整数化して（すなわちガウス記号 $[\cdot]$ を用いて表せば $[I]$ なる操作の後）ディスプレイへ表示する。

なお再構成計算および画像処理、表示、撮影等は、大阪大学基礎工学部中央イメージ実験室のミニコン TOSBAC-DS600 と、TOSPIX による。

被写体断層およびその運動について

円形断層の並進運動および円形断層からの投影計測は、4.1節で述べたようになされる。円形断層からの投影データは、(4.14)式から数値化する。点源の代用として用いられる円形断層は、半径0.04、濃度200.0（従って体積は $(0.04)^2\pi \times 200.0 \cong 1.0$ ）に設定する。ただし、距離および濃度の単位は任意とする。点源は時刻 $t = 0$ において (ξ, η) に存在し、スキャン時間 T の間に、角度 γ 方向へ距離 $\beta\pi$ だけ並進する。被写体の並進運動の速度 $\dot{k} = (\beta\pi)/T$ とスキャンの角速度 $\dot{g} = \pi/T$ （それぞれ一定）の比 β と、運動の方向を示す角度 γ 、および初期座標 (ξ, η) はシミュレーションごとに値を与える。個々の値は次節にて記述する。なお角度の単位としてradを用いる。また円周率は $\pi (\cong 3.141593)$ を用いて表記するものとする。

4.8.2 結果

図18のふれ像(a1)～(a3)は、スキャンエリア内を並進運動する点源の、再構成画像をCT画像化したものである。本シミュレーションでは点源の近似として円形断層を用いるが、混同が生じない限り、これを点源と呼ぶことにする。図18のCT画像化のパラメータは $a = 2.0, b = 50.0, I_0 = 0$ のように設定する。また各々の図について、パラメータ β, γ, ξ, η は表1のように設定する。

表 1: 図18のパラメータ設定

図の No.	β の値	γ の値	初期座標 (ξ, η)
(a1) (b1)	$\frac{2.0}{\pi}$	0	$(-1, 0)$
(a2) (b2)	$\frac{2.0}{\pi}$	$\frac{\pi}{4}$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$
(a3) (b3)	$\frac{2.0}{\pi}$	$\frac{\pi}{2}$	$(0, -1)$

図18(a1)には円弧(ー)の形状が、(a2)にはコンマ(,)あるいは釣り針(γ)と見なせる形状が、(a3)には口髭あるいは矢じり(>)に見なせる形状の「ふれ」が観察できる。これらのパラメータは、アクリル製ファントムを超高速X線CTスキャナ

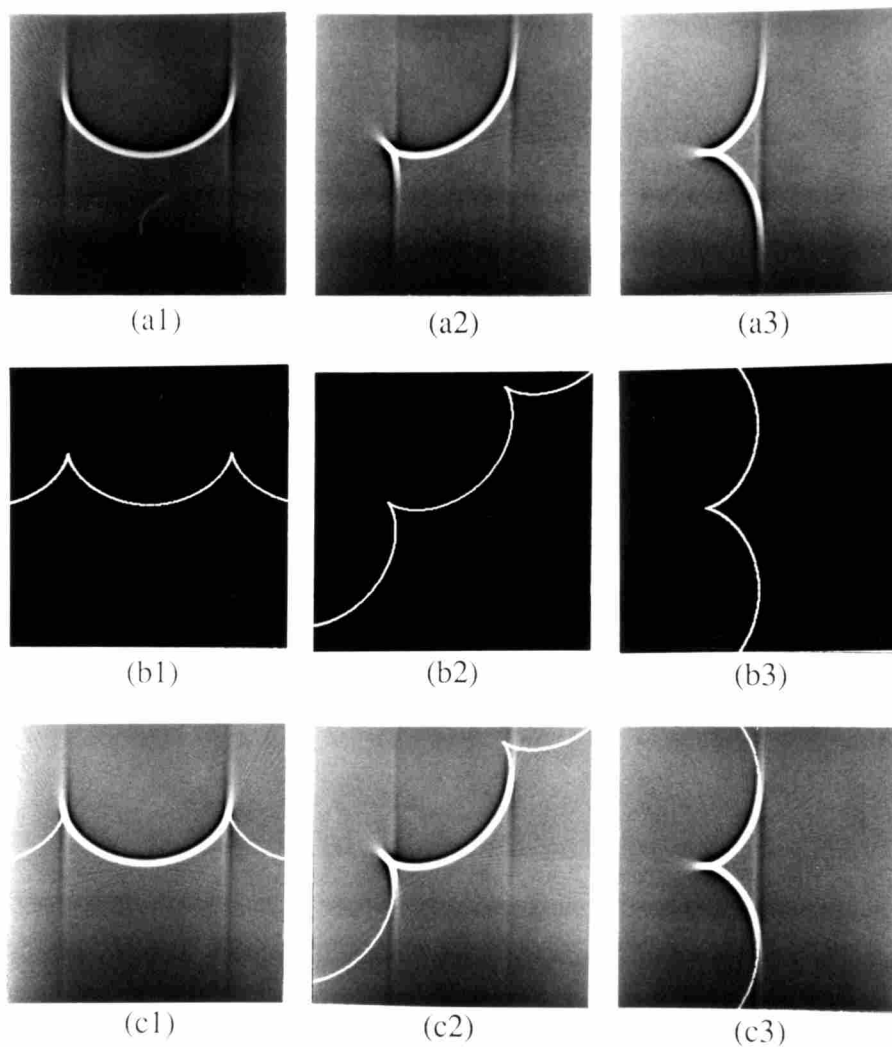


図 18: (a) それぞれ異なる β, γ, ξ, η (表 1) に対する点源のふれ像. (b) サイクロイド曲線. 対応する番号のふれ像と β, γ, ξ, η は共通. (c) a 図と b 図の重ね合わせ. ふれとサイクロイドの軌跡は一致する.

に適用して撮影された CT 画像中のぶれの形状（円弧，コンマ，口髭など．文献 [15] 参照）を，うまく再現するように設定されている．

図 18 (b1) ～ (b3) の 2 値画像は，(4.41) 式のパラメータ β, γ, ξ, η を，上の表に示したように，図 18 (a1) ～ (a3) のパラメータの値とそれぞれ同じ値にして計算した平面曲線（サイクロイド）である．なお CT 画像化されたサイクロイド曲線は，曲線部分を 255 値のハイライト（白）で，背景部分を 0 値の黒で表示させている．ただしサイクロイドの形状を把握し易くするために，(4.41) 式の変数 ϕ は，0 から π の間に限らず，平面曲線が画像中をほぼ横断するように変化する．

図 18 の (c1) ～ (c3) は，図 (a) と図 (b) においてそれぞれ対応する番号の画像どうしを重ね合わせた（加算した）ものである．4.6 節によれば，ぶれの形状とサイクロイドの軌跡は一致する．この図 (c1) ～ (c3) により，点源のぶれとしてサイクロイド曲線の $0 \leq \phi \leq \pi$ に相当する部分が，CT 画像中に描かれるのが良く分かる．

図 19 の (d1) ～ (d3) は，並進運動する点源（円形断層で近似）の再構成画像を 3 次元的に表示したものである．なお再構成画像 (d1) ～ (d3) を CT 画像化し，それをディスプレイに映し出したものが，図 18 の (a1) ～ (a3) である．なお xy 平面上における再構成画像の濃度分布が分かるように，図 19 では $O-xyz$ 空間の z 軸方向に濃度 ($\hat{c}$) 値を取り，濃度分布をグラフ化している．(d4) は原点上に静止する点源の再構成画像を，(d1) ～ (d3) と比較するために 3 次元表示したものである．なお，(d1) ～ (d3) と (d4) は z 軸のスケールが異なる．

図 19 の (d1) ～ (d3) において，平面上に壁のように切り立って見える部分は，CT 画像中のぶれに相当する．これらの 3 次元画像から以下の事実が明らかである：

1. 点源の並進運動に起因するぶれ像は，サイクロイドの尖点に相当する部分では濃度が高く（CT 画像中では明るく），弧に相当する部分では尖点部分より濃度が低い（CT 画像中では暗い）．
2. ぶれ像が描く曲線の内側（尖点の突起が出る方の側面）の濃度は負値，曲線の外側の濃度は正値となっている．

図 18 と図 19 の比較により，(4.41) 式のサイクロイドの曲線は，ぶれ像の外側と内側のちょうど境目あたりに描かれることが分かる．なお 2. の事実を明らかな形で示すため

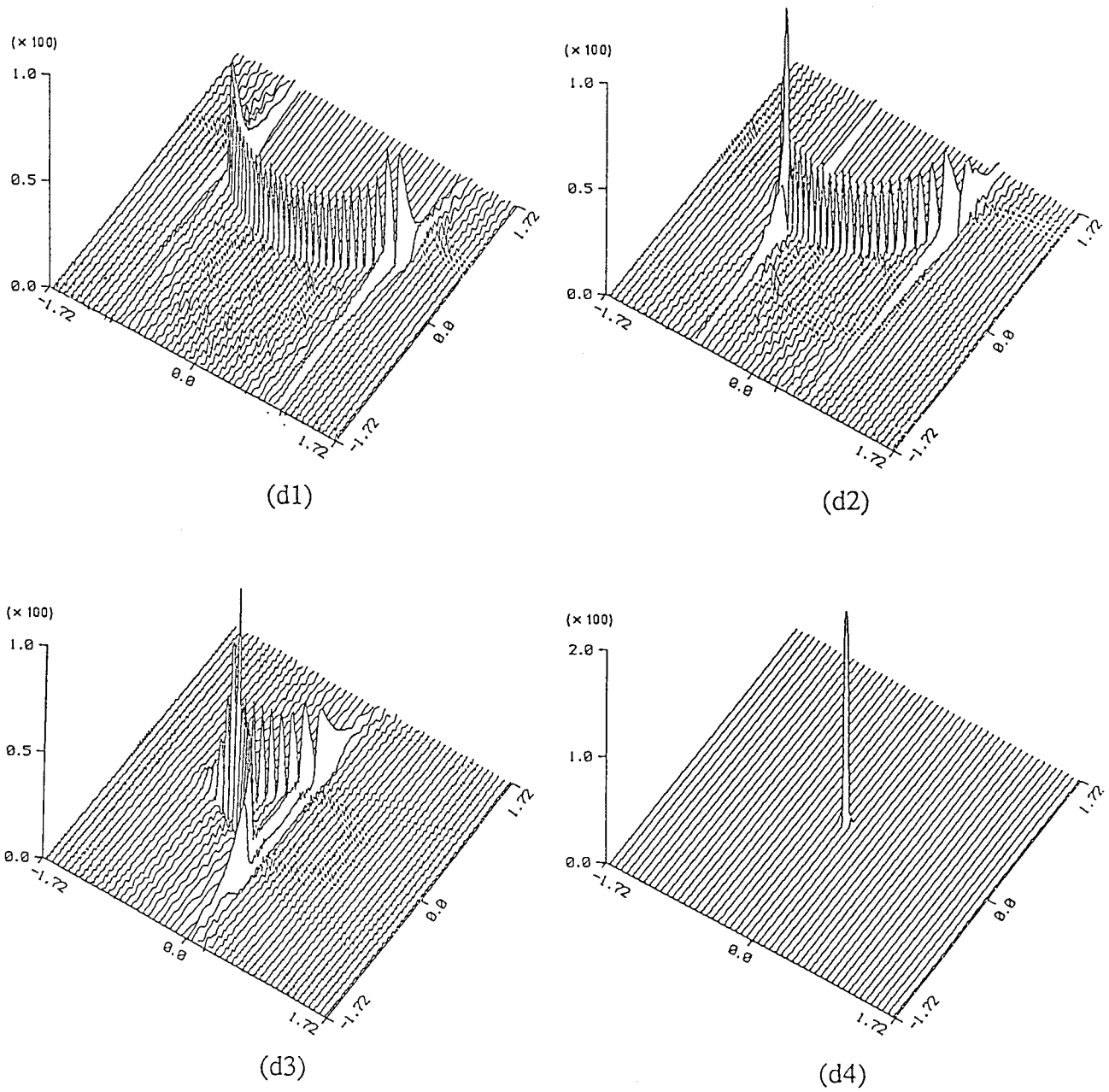


図 19: (d1) ~ (d3) 並進する点源の再構成画像. 対応する番号の CT 画像が 図 18 (a1) ~ (a3) である. (d4) 原点上に静止する点源の再構成画像.

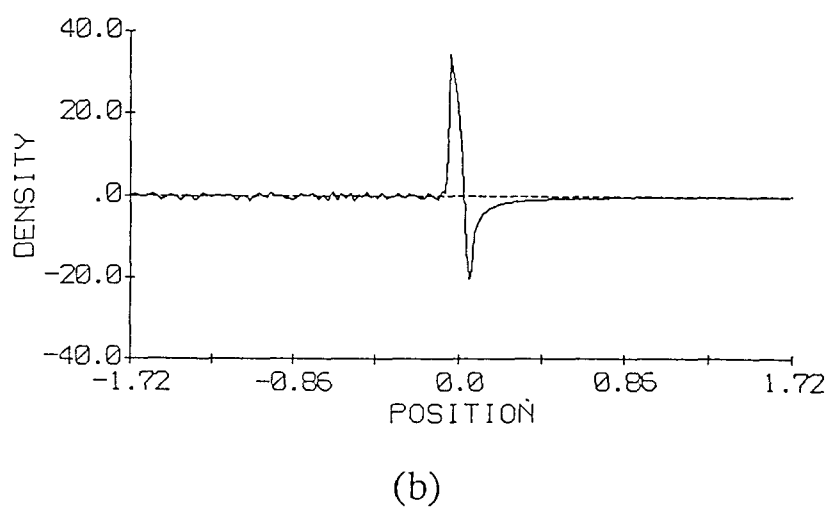
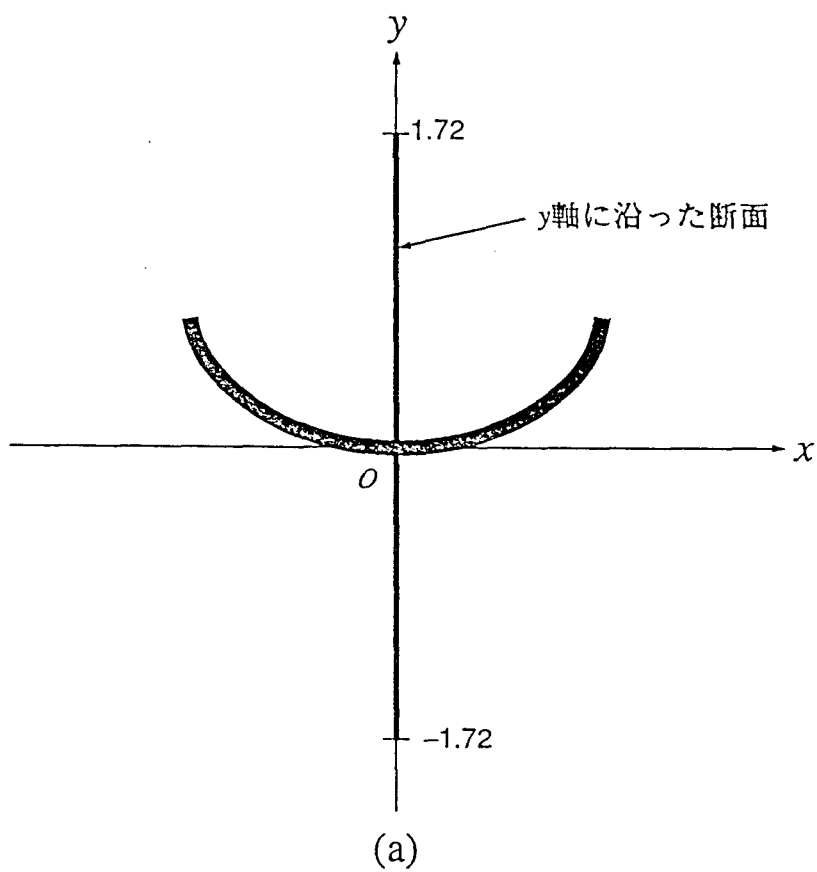


図 20: (a) d1 図を y 軸に沿って切り開く. (b) d1 図の y 軸に沿う断面プロフィール. d1 図において壁のように切り立った部分では, 再構成画像の濃度が正と負の間で急激に変化している.

には、図 19 のふれ像の断面をグラフ化してみれば良い。図 20 のグラフは、図 19 (d1) の 3 次元分布を、 y 軸に沿って切り開いたその断面の濃度分布である。点源の近似として用いた円形断層の半径 ε を小さく、濃度 $1/(\pi\varepsilon^2)$ を高くして、円形断層を 2 次元デルタ関数に近づけると、図 18 (a1) ~ (a3) のふれ像の幅は狭くなり、サイクロイド曲線に一致する。このとき図 19 の再構成画像は、サイクロイド曲線上において正值と負値が急激に入れ替わるような、切り立った濃度分布を持つようになる。

第5章 剛体の並進によるモーションアーチファクト

5.1 並進する剛体断層と画像劣化

断層の形状および濃度が、動きによって変化しない物体（剛体）を再構成の対象としよう。いま剛体が並進運動する場合を想定し、被写体運動に伴う再構成画像の「劣化」を定式化する。スキャンエリア内の任意の剛体断層が、角度 γ 方向へ一定の速度 $\pi\beta/T$ で移動する場合を考える。投影計測の角速度は一定値 π/T とする（ π/T は CT 装置に固有のパラメータである）。剛体断層の濃度とスキャンエリア内のバックグラウンドの濃度（通常ゼロとする）を併せて原画像 $f(x, y; t)$ で表す。混同が生じない場合には、 $f(x, y; t)$ のことを分かりやすく剛体断層と呼ぶ。

以下、並進運動する剛体断層 $f(x, y; t)$ と再構成画像との間に成り立つ関係式（劣化モデル）を導出する。まず時刻 t における剛体断層 $f(x, y; t)$ を、時刻 0 の剛体断層 $f(x, y; 0)$ を用いて次式のように表す：

$$\begin{aligned} f(x, y; t) &= \int \int_{\text{scan area}} \delta(x - x_t, y - y_t) f(\xi, \eta; 0) d\xi d\eta \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}_{\beta, \gamma, t} \{ f(x, y; 0) \} \end{aligned} \quad (5.1)$$

ただし、 x_t と y_t はそれぞれ次式によって与える：

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{\pi\beta \cos \gamma}{T} t + \xi \\ y_t &= \frac{\pi\beta \sin \gamma}{T} t + \eta \end{aligned} \quad (5.2)$$

$\mathcal{T}_{\beta, \gamma, t} \{ \cdot \}$ は時間推移のための線形作用素で、ある時刻 t_0 の剛体断層 $f(x, y; t_0)$ が与えられたとき、パラメータ β, γ, t のもとで時間 t 後の剛体断層 $f(x, y; t_0 + t)$ を算出する。

(5.1) 式の両辺について、投影計測と時刻に関する制限 $\phi = (\pi/T)t$ の下で、(3.4) 式に従って 2 次元 Radon 変換をおこなうと、次式の投影を得る：

$$p^*(u, \phi) = \int \int_{\text{scan area}} \delta(u - x_\phi \cos \phi - y_\phi \sin \phi) f(\xi, \eta; 0) d\xi d\eta \quad (5.3)$$

ただし、 x_ϕ と y_ϕ はそれぞれ次式で与える：

$$\begin{aligned} x_\phi &= (\beta \cos \gamma) \phi + \xi, \\ y_\phi &= (\beta \sin \gamma) \phi + \eta, \end{aligned}$$

さらにフィルタ補正逆投影の操作 1,2 に従い, (5.3) 式の両辺へ, いくつかの線形変換 (Fourier 変換, 逆投影変換など) を再構成のためにほどこす. 4.4 節の結果を用いれば, $\delta(u - x_\phi \cos \phi - y_\phi \sin \phi)$ は操作 1,2 によって $\Delta_{\beta,\gamma}(x - \xi, y - \eta)$ へ変換されることが分かる. よって, 再構成画像 $\hat{f}(x, y)$ は点拡がり関数 $\Delta_{\beta,\gamma}(x - \xi, y - \eta)$ を用いて, 次のように重畳積分として表記できる:

画像劣化の定式化 (時刻 0)

$$\begin{aligned}\hat{f}(x, y) &= \iint_{\text{scan area}} \Delta_{\beta,\gamma}(x - \xi, y - \eta) f(\xi, \eta; 0) d\xi d\eta \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_{\beta,\gamma}\{f(x, y; 0)\}\end{aligned}\quad (5.4)$$

この (5.4) 式による再構成画像の定式化は, 並進運動する剛体の再構成画像 $\hat{f}(x, y)$ が, xy 平面における点拡がり関数の重み付き線形和として表わせることを示している. さらに第 7 章で議論する回転運動, あるいは第 8 章で議論する並進と回転の合成運動の場合と異なり, 並進運動の場合 (5.4) 式のように, 点拡がり関数を重畳核とする 2 次元重畳積分として表現される. この剛体の再構成画像は, パラメータ β, γ と原画像 $f(x, y; 0)$ によって一意に決定できることが分かる.

(5.4) 式は, 時刻ゼロにおける剛体断層と, その剛体断層に対する再構成画像 (劣化画像) の関係も与える. 従って同式は時刻に依存する被写体—計測系と画像再構成系からなる断層撮影モデルの定式化である. また同式を, 時刻ゼロの剛体断層に対する画像劣化モデル [40,41,42] と見なすこともできる. 画像劣化の性質は, モデルの劣化関数 (すなわち点拡がり関数) によって決定されることが知られている.

(4.33) 式から明らかなように, $\Delta_{\beta,\gamma}(x - \xi, y - \eta)$ は x と ξ の差, および y と η の差の関数である. 点拡がり関数が差形の関数として表記できるとき, この点拡がり関数によって表現される劣化を指して「位置 (移動) 不変」と言う. また特に, 位置不変劣化を表す点拡がり関数のことを指して「位置 (移動) 不変点拡がり関数」と呼ぶ [40,41,42]. 位置不変あるいは移動不変と言う呼び方の由来は, 次のような性質による: 時刻 0 の点源 $\delta(x - \xi, y - \eta)$ を入力したとき, 劣化モデルの出力は $\Delta_{\beta,\gamma}(x - \xi, y - \eta)$ と記述することができる. すなわち点源の入力位置が (ξ, η) だけ平行移動すると, 出力画像も (ξ, η) だけ平行移動し, 劣化の性質は点源の位置 (移動) に因らず決定される. それ故位置不変劣化モデルは, (5.4) 式のように積分核 ($\Delta_{\beta,\gamma}(x, y)$) を積分範囲

内の全ての点へ平行移動しながら原画像（ $f(x, y; 0)$ ）を積分する形式、すなわち重畳積分として定式化される。（第7章の剛体の回転運動の場合のように、位置依存劣化モデルの場合、重畳積分では表せない）。（5.4）式から明らかなように、劣化の性質を決定するパラメータは、点源の速度と投影計測の角速度の比 β および点源の運動方向を決める角度 γ である。さらに入力としての時刻 $t = 0$ の剛体断層 $f(x, y; 0)$ が仮定されている。

（5.4）式を、任意の時刻 t ($0 \leq t \leq T$) の剛体断層に対して適用できるように拡張しよう。（5.1）式によれば、時刻ゼロの剛体断層 $f(x, y, 0)$ は $f(x, y; t)$ を用いて次のように表すことができる：

$$f(x, y; 0) = \mathcal{T}_{\beta, \gamma, -t} \{ f(x, y; t) \} \quad (5.5)$$

これを（5.4）式へ適用する。（5.4）式の ξ, η をそれぞれ ξ', η' で置き換えれば、

$$\begin{aligned} \hat{f}(x, y) &= \iint_{\text{scan area}} \Delta_{\beta, \gamma}(x - \xi', y - \eta') \mathcal{T}_{\beta, \gamma, -t} \{ f(\xi', \eta'; t) \} d\xi' d\eta' \\ &= \iint_{\text{scan area}} \left\{ \iint_{\text{scan area}} \Delta_{\beta, \gamma}(x - \xi', y - \eta') \delta(\xi' - x_{-t}, \eta' - y_{-t}) d\xi' d\eta' \right\} \\ &\quad \cdot f(\xi, \eta; t) d\xi d\eta \\ &= \iint_{\text{scan area}} \Delta_{\beta, \gamma}(x - x_{-t}, y - y_{-t}) f(\xi, \eta; t) d\xi d\eta \\ &= \iint_{\text{scan area}} \mathcal{T}_{\beta, \gamma, -t} \{ \Delta_{\beta, \gamma}(x - \xi, y - \eta) \} f(\xi, \eta; t) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (5.6)$$

と変形できる。ここで $\Delta_{\beta, \gamma}(x - \xi, y - \eta)$ を時刻ゼロの点拡がり関数と見なし、また時刻 t の点拡がり関数 $\Delta_{\beta, \gamma, t}(x - \xi, y - \eta)$ を

$$\begin{aligned} \Delta_{\beta, \gamma, t}(x - \xi, y - \eta) &= \mathcal{T}_{\beta, \gamma, -t} \{ \Delta_{\beta, \gamma}(x - \xi, y - \eta) \} \\ &= \Delta_{\beta, \gamma}(x - x_{-t}, y - y_{-t}) \end{aligned} \quad (5.7)$$

のように定義する。然るに、

$$\Delta_{\beta, \gamma, 0}(x - \xi, y - \eta) = \Delta_{\beta, \gamma}(x - \xi, y - \eta) \quad (5.8)$$

である。（5.8）を用いて（5.6）式を書き換えれば、次式を得る：

画像劣化の定式化 (時刻 t)

$$\begin{aligned}\hat{f}(x, y) &= \int \int_{\text{scan area}} \Delta_{\beta, \gamma, t}(x - \xi, y - \eta) f(\xi, \eta; t) d\xi d\eta \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_{\beta, \gamma, t}\{f(x, y; t)\}\end{aligned}\quad (5.9)$$

すなわち、スキャン開始 ($t = 0$) から終了 ($t = T$) に至る間の任意の時刻 t を考えたとき、剛体の並進運動により劣化した再構成画像 $\hat{f}(x, y)$ は、剛体断層 $f(x, y; t)$ を重みとする点拡がり関数 $\Delta_{\beta, \gamma, t}(x - \xi, y - \eta)$ の線形和であることが分かる。あるいは再構成画像 $\hat{f}(x, y)$ は、任意の時刻 t の剛体断層 $f(x, y; t)$ に対し、 t に依存する線形作用素 $\mathcal{D}_{\beta, \gamma, t}\{\cdot\}$ をほどこしたものと見なせる (図 21 参照)。以後、 $\mathcal{D}_{\beta, \gamma, t}\{\cdot\}$ を (時刻 t の) 劣化作用素と呼ぶことにする。

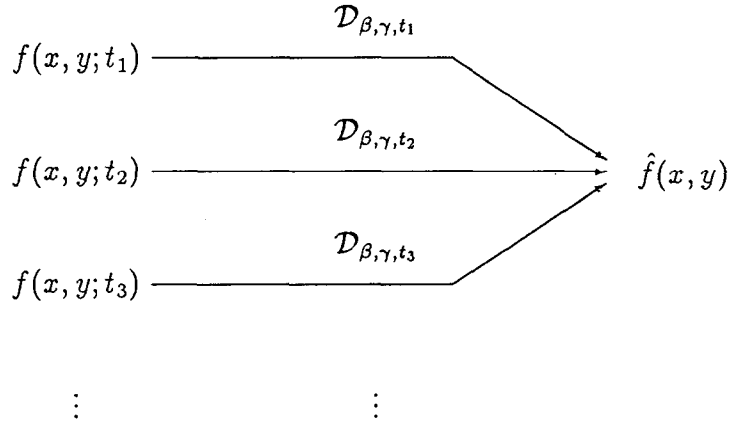


図 21: それぞれ異なる時刻における被写体断層, 例えば $f(x, y; t_1)$, $f(x, y; t_2)$, $f(x, y; t_3)$, $\dots$ ($0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \dots \leq T$) は, 各々の時刻毎に決まる劣化作用素 $\mathcal{D}_{\beta, \gamma, t_1}$, $\mathcal{D}_{\beta, \gamma, t_2}$, $\mathcal{D}_{\beta, \gamma, t_3}$, $\dots$ によって, 再構成画像 (劣化画像) $\hat{f}(x, y)$ へ変換される。

劣化画像 $\hat{f}(x, y)$ から原画像 $f(x, y; t)$ を求める操作は, 画像復元と呼ばれる。たとえば, (5.9) 式のように位置不変点拡がり関数によって劣化した画像は, 以下の手続きによって原画像を復元することができる: まず, 積分核 $\Delta_{\beta, \gamma, t}(x, y)$ と原画像 $f(x, y; t)$ および劣化画像 $\hat{f}(x, y)$ の 2 次元 Fourier 変換をそれぞれ, $D_{\beta, \gamma, t}(w_x, w_y)$, $F(w_x, w_y; t)$,

$\hat{F}(w_x, w_y)$ と表記する：

$$D_{\beta, \gamma, t}(w_x, w_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_{\beta, \gamma, t}(x, y) e^{-j2\pi(w_x x + w_y y)} dx dy \quad (5.10)$$

$$F(w_x, w_y; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y; t) e^{-j2\pi(w_x x + w_y y)} dx dy \quad (5.11)$$

$$\hat{F}(w_x, w_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x, y) e^{-j2\pi(w_x x + w_y y)} dx dy \quad (5.12)$$

(5.9) 式の両辺を 2 次元 Fourier 変換すると次式を得る：

$$\hat{F}(w_x, w_y) = D_{\beta, \gamma, t}(w_x, w_y) F(w_x, w_y; t) \quad (5.13)$$

よって、時刻 t の被写体断層 $f(x, y; t)$ は $F(w_x, w_y; t)$ の 2 次元逆 Fourier 変換、すなわち $\hat{F}(w_x, w_y)/D_{\beta, \gamma, t}(w_x, w_y)$ の 2 次元逆 Fourier 変換によって求めることができる：

$$\begin{aligned} f(x, y; t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(w_x, w_y; t) e^{j2\pi(xw_x + yw_y)} dw_x dw_y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{F}(w_x, w_y)}{D_{\beta, \gamma, t}(w_x, w_y)} e^{j2\pi(xw_x + yw_y)} dw_x dw_y \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_{\beta, \gamma, t}^{-1} \{ \hat{f}(x, y) \} \end{aligned} \quad (5.14)$$

作用素 $\mathcal{D}_{\beta, \gamma, t}^{-1}$ は、劣化作用素 $\mathcal{D}_{\beta, \gamma, t} \{ \cdot \}$ の逆（復元フィルタ）を表す。なお $\hat{f}(x, y)$ に雑音が付加される場合においても、雑音の性質が良ければ、Wiener フィルタ等の様々な画像復元の手法 [40, 41, 42] を用いることによって、時刻 t の被写体断層 $f(x, y; t)$ を推定することが可能である。もし (5.14) 式のように画像復元できるならば、被写体の並進運動が原因で劣化した 1 枚の再構成画像 $\hat{f}(x, y)$ から、様々な時刻における断層像の系列 $f(x, y; t_1)$, $f(x, y; t_2)$, $f(x, y; t_3)$, $\dots$ ($0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \dots \leq T$) を算出することができる。

5.2 モーションアーチファクト

5.1 節では、並進運動する剛体断層 $f(x, y; t)$ を対象に、断層と再構成画像 $\hat{f}(x, y)$ の間に成り立つ関係式（画像劣化モデル）を導出し、被写体運動による再構成画像の劣化が点拡がり関数の言葉によって記述できることを示した。一方この 5.2 節では、5.1 節の議論だけでは明らかにされなかったモーションアーチファクトの性質、 $O-xy$ 平面上におけるモーションアーチファクトの形態、発生する位置等について解析する。

5.2.1 ふれ像

5.1節で議論したように、並進運動する剛体断層の再構成画像は、点拡がり関数の重み付き線形和として表現できる。ここでは再構成画像の CT 画像化について考えてみよう。劣化モデル式 (5.9) の両辺に、CT 画像化のための線形作用素 $\mathcal{I}_{CT}\{\cdot\}$ をほどこすと

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{CT}\{\hat{f}(x, y)\} &= \mathcal{I}_{CT}\left\{\iint_{\text{scan area}} \Delta_{\beta, \gamma, t}(x - \xi, y - \eta) f(\xi, \eta; t) d\xi d\eta\right\} \\ &= \iint_{\text{scan area}} \mathcal{I}_{CT}\{\Delta_{\beta, \gamma, t}(x - \xi, y - \eta)\} f(\xi, \eta; t) d\xi d\eta\end{aligned}\tag{5.15}$$

となる。左辺すなわち $\mathcal{I}_{CT}\{\hat{f}(x, y)\}$ は、再構成画像の CT 画像化（剛体断層のふれ像）を表す。また右辺の $\mathcal{I}_{CT}\{\Delta_{\beta, \gamma, t}(x - \xi, y - \eta)\}$ は、点拡がり関数の CT 画像化（点源のふれ像）を表す。よって右辺は、原画像の濃度 $f(\xi, \eta; t)$ に応じて重み付けられた点源のふれ像を、スキャンエリア内の全ての点 (ξ, η) について積分したものである。(5.15) 式は、剛体断層を構成する各々の点源のふれ像を全て加算したものが、剛体断層から生ずるふれ像であることを示している。

(5.15) 式から明らかなように、原画像 $f(\xi, \eta; t)$ が与えられたときに、剛体のふれ像 $\mathcal{I}_{CT}\{\hat{f}(x, y)\}$ もパラメータ (β, γ) によって一意に定められる（CT 画像化のパラメータ a, b は適宜決められ、固定される）。例えば点源に対するふれの形状は、 xy 平面内における位置関係を保存しながら、剛体のふれ像の中に埋め込まれる。従って、剛体に対するふれが描かれる位置は、剛体を構成する点源の各々についてふれの形状を算出し、これらを全て xy 平面に描くことによって知ることができる（図 22 参照）。

例えば単独の点源 $\delta(x - \xi, y - \eta)$ が CT 画像中に尖点を描くならば、剛体断層を構成する点源 $\delta(x - \xi, y - \eta)$ も同様に、剛体断層の CT 画像中に尖点を描く（あるいは尖点の発生する位置に濃度変化を引き起こす）。従って剛体断層のふれにも、円弧（—）コンマ（,）口髭（>）などの形状が見られる。例えば第 4 章で点源の近似として用いられる円形断層（剛体の一種）のふれの形状は、パラメータ β, γ, ξ, η のサイクロイドであることが、4.8 節の実験結果より明らかである。

任意の剛体を被写体断層とする場合、その並進運動に対するふれ像の形態や濃淡を

詳細に予測することは難しい。しかし特定の剛体を想定したとき、剛体のぶれ像に対する顕著な性質を引き出すことはできる。このことは、次の 5.2.2 において述べる。

5.2.2 ストロボスコープ像

臨床においてストロボスコープ像と呼ばれるアーチファクトは、断層中の明確な線（あるいは明確な縁のある物体）が動きに対して均一にぶれずに、ある所は静止しているかのようにはっきり画像化され、ある所はひどくぶれて画像化されるものである。被写体が止まって見える現象が、二度三度と現れる場合もあり、そのときは被写体が二重三重にぶれて画像化されてしまう。本節ではストロボスコープ像を検証するために、剛体断層の一つとして線源を想定する。線源とは点源（デルタ関数）が直線上に整列したものである。

一本の直線 L をスキャンエリア内に考える。 L が x 軸となす角度を $\theta_0 + (\pi/2)$ とする。また原点から直線 L まで下ろした垂線の長さを l と表記する。この直線は次式で表すことができる：

$$x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0 = l \quad (5.16)$$

この直線上でのみインパルスを持つ xy 平面上の関数（線源）を時刻 0 の被写体断層とする：

$$f(x, y, 0) = \delta(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0 - l) \quad (5.17)$$

この線源を、角度 γ 方向へ、一定の速度 $\beta\pi/T$ で並進運動させる。投影計測の角速度が一定（ π/T ）ならば、点源の速度と投影計測の角速度の比は β で表される。このとき、線源に対する再構成画像の CT 画像化は次式で与えられる：

$$I_{CT} \{ \hat{f}(x, y) \} = \int \int_{\text{scan area}} I_{CT} \{ \Delta_{\beta, \gamma, 0}(x - \xi, y - \eta) \} \delta(\xi \cos \theta_0 + \eta \sin \theta_0 - l) d\xi d\eta \quad (5.18)$$

すなわち線源に対するぶれ像は、直線 L 上の点源の集合 $\{ \delta(x - \xi, y - \eta) | x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0 = l \}$ のぶれ像（サイクロイド曲線）を、 $0 \leq \phi < \pi$ にわたって xy 平面上に全て描いたものである（図 22 参照）。便利のため 4.6 節（(4.41) 式）のサイクロイド曲

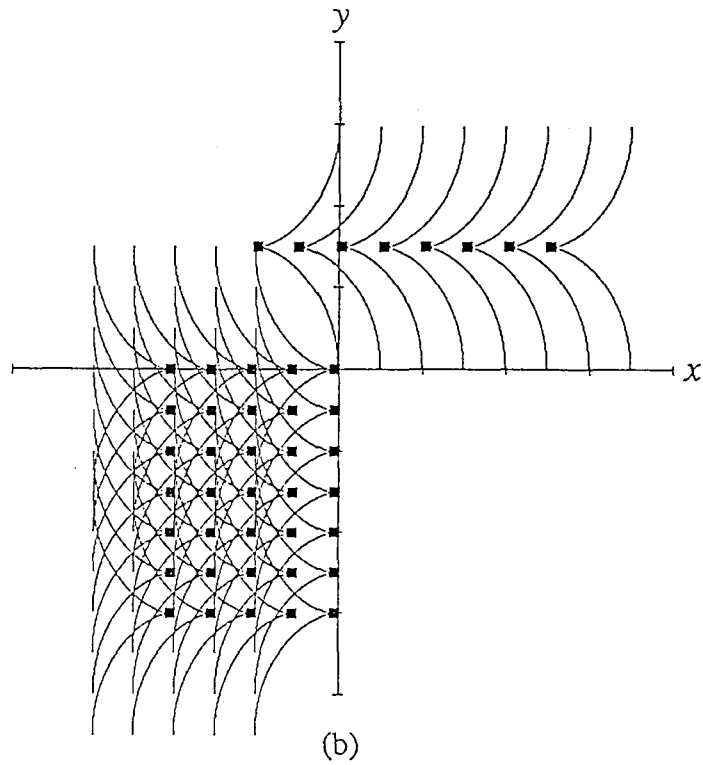
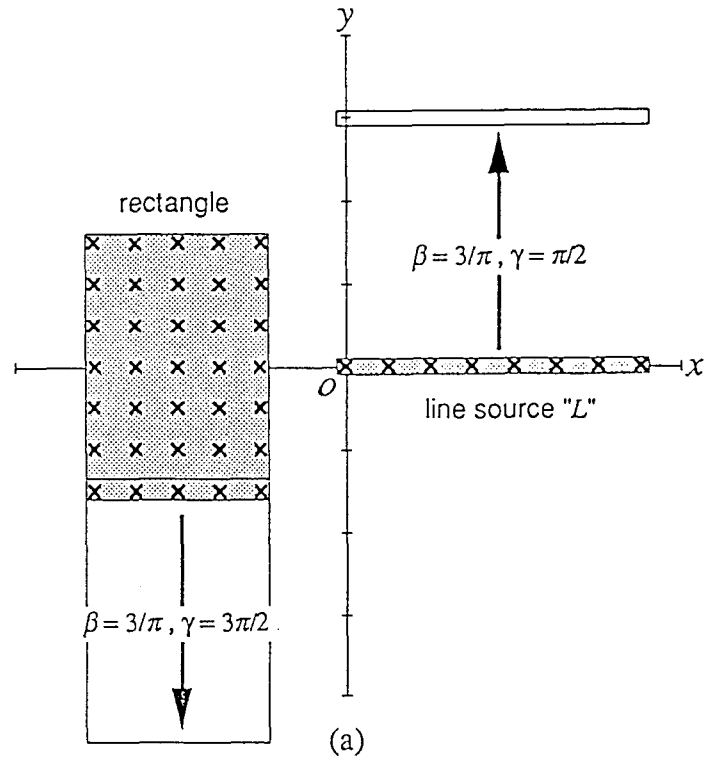


図 22: (a) 並進運動する剛体断層. 線源 L は $\beta = 3/\pi, \gamma = \pi/2$ で, 長方形ファントムは $\beta = 3/\pi, \gamma = 3\pi/2$ でそれぞれ並進する. (b) 点源 (×印) の描くぶれの曲線. 尖点部分 (■印) にストロボスコープ像が発生する.

線を $C_{\beta,\gamma}(\phi; \xi, \eta)$ で表すことにする：

$$C_{\beta,\gamma}(\phi; \xi, \eta) : \begin{cases} x_{\beta,\gamma}(\phi; \xi) = \frac{\beta \cos \gamma}{2} (2\phi - \sin 2\phi) - \frac{\beta \sin \gamma}{2} (1 - \cos 2\phi) + \xi \\ y_{\beta,\gamma}(\phi; \eta) = \frac{\beta \cos \gamma}{2} (1 + \cos 2\phi) + \frac{\beta \sin \gamma}{2} (2\phi - \sin 2\phi) + \eta \end{cases} \quad (5.19)$$

線源に対するふれ像の集合は $\{C_{\beta,\gamma}(\phi; \xi, \eta) | \xi \cos \theta_0 + \eta \sin \theta_0 = l, 0 \leq \phi < \pi\}$ によって表すことができる。

4.6節で述べたように、サイクロイドの形状はパラメータ β, γ によって一意に決められる。従って線源のふれを表すサイクロイド曲線 $\{C_{\beta,\gamma}(\phi; \xi, \eta) | \xi \cos \theta_0 + \eta \sin \theta_0 = l, 0 \leq \phi < \pi\}$ は、点源の初期座標 (ξ, η) によらず全て同じ形状である。一方 xy 平面内にサイクロイド曲線の描かれる位置は、初期座標 (ξ, η) によって決定される。すなわち、サイクロイド曲線 $\{C_{\beta,\gamma}(\phi; \xi, \eta) | \xi \cos \theta_0 + \eta \sin \theta_0 = l, 0 \leq \phi < \pi\}$ は、位相 ϕ を変化させるとき、同じ位相で弧を描き、同じ位相で尖点を描くことが分かる。

ここでスキャンエリア内の任意の2点 (ξ_1, η_1) と (ξ_2, η_2) 、及びそれぞれを初期座標とするサイクロイド上の2点 $(x_{\beta,\gamma}(\phi; \xi_1), y_{\beta,\gamma}(\phi; \eta_1))$ と $(x_{\beta,\gamma}(\phi; \xi_2), y_{\beta,\gamma}(\phi; \eta_2))$ について考える。2点 (ξ_1, η_1) と (ξ_2, η_2) の間の距離を r (定数)、2点を結ぶ直線の傾きを θ (定数) とするとき、どの ϕ についても

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2} \\ &\equiv \sqrt{(x_{\beta,\gamma}(\phi; \xi_2) - x_{\beta,\gamma}(\phi; \xi_1))^2 + (y_{\beta,\gamma}(\phi; \eta_2) - y_{\beta,\gamma}(\phi; \eta_1))^2} \\ \theta &= \arctan \frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1} \equiv \arctan \frac{y_{\beta,\gamma}(\phi; \eta_2) - y_{\beta,\gamma}(\phi; \eta_1)}{x_{\beta,\gamma}(\phi; \xi_2) - x_{\beta,\gamma}(\phi; \xi_1)} \end{aligned}$$

が成立する。すなわち初期座標間の位置関係がサイクロイド曲線においても保たれる。

ここでサイクロイド曲線が形成する尖点にのみ注目してみる。初期座標間の位置関係は、当然、尖点の発生位置 (x', y') においても保たれる。このことは、(4.47) 式～(4.50) 式を見れば、尖点の発生位置が初期座標 (ξ, η) によって平行移動することより明らかである。従って、線源を構成する直線上の点源群が描くサイクロイド曲線 $\{C_{\beta,\gamma}(\phi; \xi, \eta) | \xi \cos \theta_0 + \eta \sin \theta_0 = l, 0 \leq \phi < \pi\}$ は、同一の位相で尖点を描き、かつ線源のふれ像が構成する尖点群も、直線を形成する (図 22 参照)。この直線を $L'_{\beta,\gamma}(\xi, \eta)$

で表すならば,

$$L'_{\beta,\gamma}(\xi, \eta) : x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0 = x' \cos \theta_0 + y' \sin \theta_0 \quad (5.20)$$

である. ただし (x', y') は γ の値に応じて (4.47) 式～(4.50) 式で与えられる:

$\gamma = 0$ のとき;

$$\begin{cases} x' = \xi & (\phi = 0), & \beta\pi + \xi & (\phi = \pi) \\ y' = \beta + \eta \end{cases} \quad (4.47)$$

$0 < \gamma < \pi$ のとき;

$$\begin{cases} x' = \beta(\gamma \cos \gamma - \sin \gamma) + \xi \\ \quad = \beta\sqrt{1 + \gamma^2} \cos \left[\gamma + \arctan \left(\frac{1}{\gamma} \right) \right] + \xi \\ y' = \beta(\cos \gamma + \gamma \sin \gamma) + \eta \\ \quad = \beta\sqrt{1 + \gamma^2} \sin \left[\gamma + \arctan \left(\frac{1}{\gamma} \right) \right] + \eta \end{cases} \quad (4.48)$$

$\gamma = \pi$ のとき;

$$\begin{cases} x' = \xi & (\phi = 0), & -\beta\pi + \xi & (\phi = \pi) \\ y' = -\beta + \eta \end{cases} \quad (4.49)$$

$\pi < \gamma < 2\pi$ のとき;

$$\begin{cases} x' = \beta[(\gamma - \pi) \cos \gamma - \sin \gamma] + \xi \\ \quad = \beta\sqrt{1 + (\gamma - \pi)^2} \cos \left[\gamma + \arctan \left(\frac{1}{\gamma - \pi} \right) \right] + \xi \\ y' = \beta[\cos \gamma + (\gamma - \pi) \sin \gamma] + \eta \\ \quad = \beta\sqrt{1 + (\gamma - \pi)^2} \sin \left[\gamma + \arctan \left(\frac{1}{\gamma - \pi} \right) \right] + \eta \end{cases} \quad (4.50)$$

以上の解析より, 線源がふれ像を描くとき尖点部分は直線状に整列する (例えば直線 $L'_{\beta,\gamma}(\xi, \eta)$) ことが明らかとなった. 第4章で述べたように, 尖点の濃度は他の部分に比して高いので, 尖点部分にだけはっきりした「線像」が現れ, 他の部分はふれて見えないという現象が生ずる. このようにして線源に対するストロボスコープ像の発生は説明できる. また $0 \leq \phi \leq \pi$ において尖点の現れる数は, ストロボスコープ像 (多重像) の現れる回数に等しくなることが分かる [48].

線源の場合ほど顕著ではないが、縁の明確な被写体断層（例：細長い楕円型の断層など）に対しても、線源と同様の理屈でストロボスコープ像は発生する。これは計算機シミュレーションにより確認される。

5.3 計算機シミュレーション

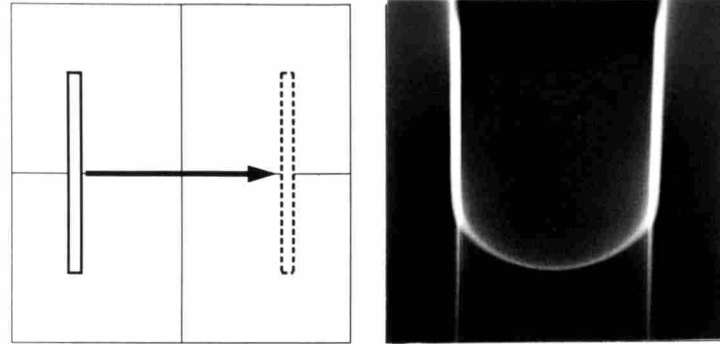
本節では、並進運動する剛体断層に対する計算機シミュレーションの概要と、実験結果についてまとめる。本シミュレーションは、時間に依存する被写体-計測系と画像再構成系から成る断層撮影モデルを計算機上に構築し、剛体断層の並進運動による画像劣化と、CT 画像中の剛体断層のぶれ像、およびストロボスコープ像の検証を目的とする。剛体断層（数値ファントム）としては、細長い長方形（線源を近似する）と Shepp - Logan の頭部ファントムを想定する。これらの数値ファントムは、それぞれに与えられたパラメータに従って、スキャンエリア内を並進運動するものとする。

なお再構成アルゴリズムとしてはフィルタ補正逆投影法を用い、その数値計算には Rosenfeld と Kak の方法（文献[20,21]）を用いる。数値計算された再構成画像はディスプレイに濃度階調で表示され、CT 画像化される。画像再構成および画像表示に関する条件等については、4.8節の 4.8.1に従う。

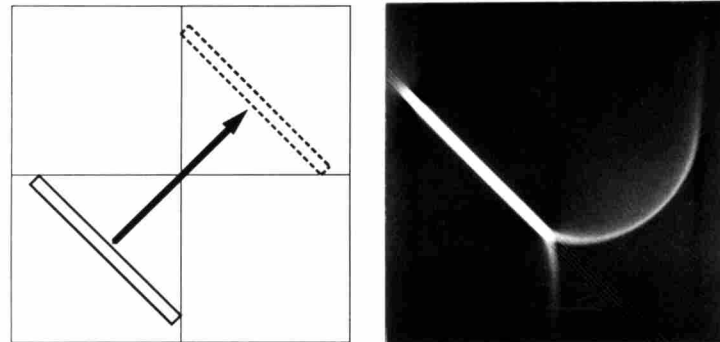
線源を模した長方形ファントム

1 つめの数値ファントムとして細長い長方形（棒状）を考える。この数値ファントムは線源を模したものであり、断層の濃度は一定（ $\rho = 400.0$ ）である。長辺の長さは 2.0、短辺の長さは 0.1 とする。長方形断層の投影については文献[19]を参照すると良い。なお長方形ファントムおよびその再構成画像（ぶれ画像）の CT 画像化は、パラメータ $a = 2.0, b = 50.0, I_0 = 0$ で行う。このファントムを長方形の長辺とは垂直な方向へ並進運動させる。長方形ファントムの傾き（長辺が y 軸となす角度）は運動中変化させず、並進運動の方向 γ と同じになるよう設定する。並進運動の速度 $\pi\beta/T$ 、運動の方向を示す角度 γ はそれぞれ一定と仮定する。

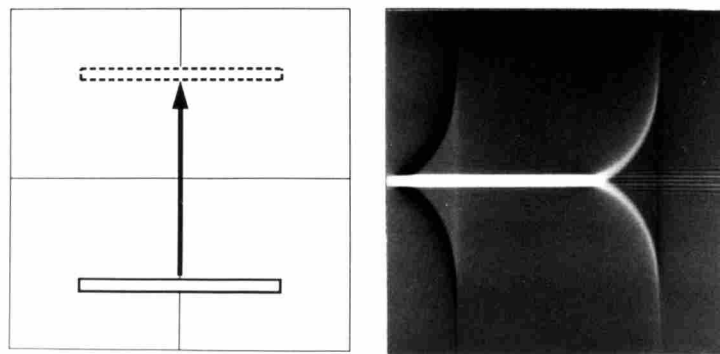
図 23 (1) ～ (3) に長方形ファントムの並進運動による CT 画像のぶれを示す。またパラメータ β, γ, ξ, η は表 2 のように設定する。この表と 4.8 節の表 1 の比較から明らか



(1) $\beta=2.0/\pi, \gamma=0$



(2) $\beta=2.0/\pi, \gamma=\pi/4$



(3) $\beta=2.0/\pi, \gamma=\pi/2$

図 23: 並進運動する長方形ファントム (左) とその CT 画像 (右). 顕著なストロボスコープ像が, (1) には2本, (2) (3) には1本ずつ見られる.

表 2: 図 23のパラメータ設定

図の No.	β の値	γ の値	初期座標 (ξ, η)	ファントムの傾き
(1)	$\frac{2.0}{\pi}$	0	$(-1, 0)$	0
(2)	$\frac{2.0}{\pi}$	$\frac{\pi}{4}$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{\pi}{4}$
(3)	$\frac{2.0}{\pi}$	$\frac{\pi}{2}$	$(0, -1)$	$\frac{\pi}{2}$

注 1) 初期座標 (ξ, η) は、時刻 0 における長方形の重心の座標を表す。

注 2) ファントムの傾きは、長方形の長辺と y 軸のなす角度を表す。

なように、図 18の (a1) ~ (a3) と、図 23の (1) ~ (3) は、それぞれ対応する番号どうし
が同じパラメータ設定となっている。すなわち同じ番号の点源と長方形は、並進の速
度・方向も同じである。なお表 2中の初期座標 (ξ, η) として、時刻 $t = 0$ における長方
形の 2 本の対角線が交わる点（長方形の重心）の座標を用いる。

長方形ファントムは常に一定速度で並進運動しているにも関わらず、その CT 画像
(図 23(1) ~ (3)) には長方形ファントムが並進途中であたかも止まったかの様なふれ
像、すなわちストロボスコープ像が生じている。5.2.2で議論したように、剛体断層か
ら生ずるストロボスコープ像の性質は、断層を構成する微小要素（点源）に対するふれ
像の性質から類推できる。図 23の長方形ファントムの場合、ファントムを構成する微
小要素は、各々がサイクロイド曲線を描き、同一の位相 ϕ において尖点を持つ。ふれ
像の濃度（明るさ）はサイクロイド曲線の尖点部分において高くなるため、そこにス
トロボスコープ像が形成される。このことは、図 18の点源のふれ像が描く尖点の位置・
位相と、図 23のストロボスコープ像の現れる位置・位相を比較すれば明らかである。

Shepp - Logan の頭部ファントム

Shepp - Logan の頭部ファントムは、楕円状の数値ファントムを組み合わせ、人間
の頭蓋断層を模倣したものである（図 24および表 3参照）。頭部ファントムの作製およ
び投影の計算など、文献 [20,21,28] を参照すると良い。この頭部ファントムを静止させ
た（通常）状態で再構成し、CT 画像化したものを図 24 (b) に示す。図 24 (b) の CT

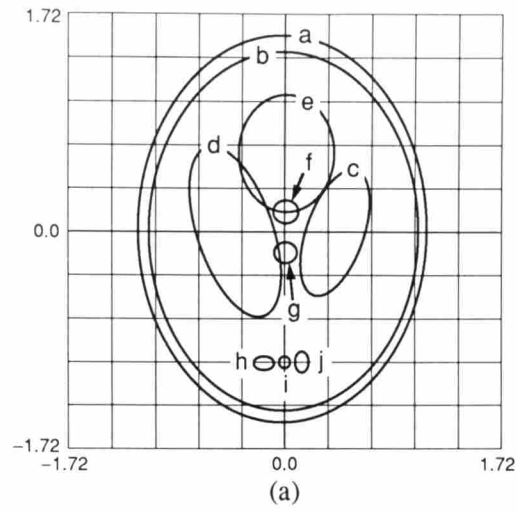


図 24: (a) Shepp - Logan の頭部ファントムは 10 個の楕円から構成される. 楕円 a ~ j のデータは表 3 に示す. (b) 静止する頭部ファントムの CT 画像.

表 3: 頭部ファントムを構成する楕円 a ~ j の各データ

楕円	重心の座標	長軸の長さ	短軸の長さ	楕円の傾き	楕円の濃度
a	(0, 0)	1.5824	1.1868	90°	200.0
b	(0, -0.0316)	1.5033	1.1393	90°	-98.0
c	(0.3784, 0)	0.5332	0.1892	72°	-2.0
d	(-0.3784, 0)	0.7052	0.2752	108°	-2.0
e	(0, 0.602)	0.43	0.3612	90°	1.0
f	(0, 0.172)	0.0791	0.0791	0°	1.0
g	(0, -0.172)	0.0791	0.0791	0°	1.0
h	(-0.1376, -1.0406)	0.0791	0.0396	0°	1.0
i	(0, -1.0406)	0.0396	0.0396	0°	1.0
j	(0.1032, -1.0406)	0.0791	0.0396	90°	1.0

注 1) 楕円の傾きは、長軸と x 軸のなす角度を表す。

画像化のパラメータは $a = 130.0, b = 102.0, I_0 = 128$ に設定されている。

この頭部ファントムは、自身の傾きを変えずに上下左右に一定速度で並進運動する。並進運動のパラメータ β, γ , 初期座標 (ξ, η) , および CT 画像化のパラメータ a, b, I_0 はそれぞれ表 4 のように設定する。なお初期座標 (ξ, η) として、頭部ファントムを構成する最も大きな楕円の時刻 0 における重心の座標を指定する。

このとき図 25 (1) ~ (4) のような CT 画像 (ふれ像) が得られる。図 25(1) は右方向への並進運動によるふれ画像, (2) は左方向への並進運動によるふれ画像である。数値ファントムを構成する楕円のふれ像が、円弧を描いているのが観察できる。またファントムを構成する楕円のストロボスコープ像は、楕円が本来配置されている場所とは異なる所に発生している。例えば (1) の CT 画像に見られる 2 つの黒い楕円は本来の位置関係より離れて画像化され、また (2) では本来の位置関係より近づき重なるようにして画像化されている。なお (1) においてはファントム下部, (2) においてはファントム上部に見られる三日月型 (頭蓋骨の一部が消失) は、CT 画像をディスプレイに映し

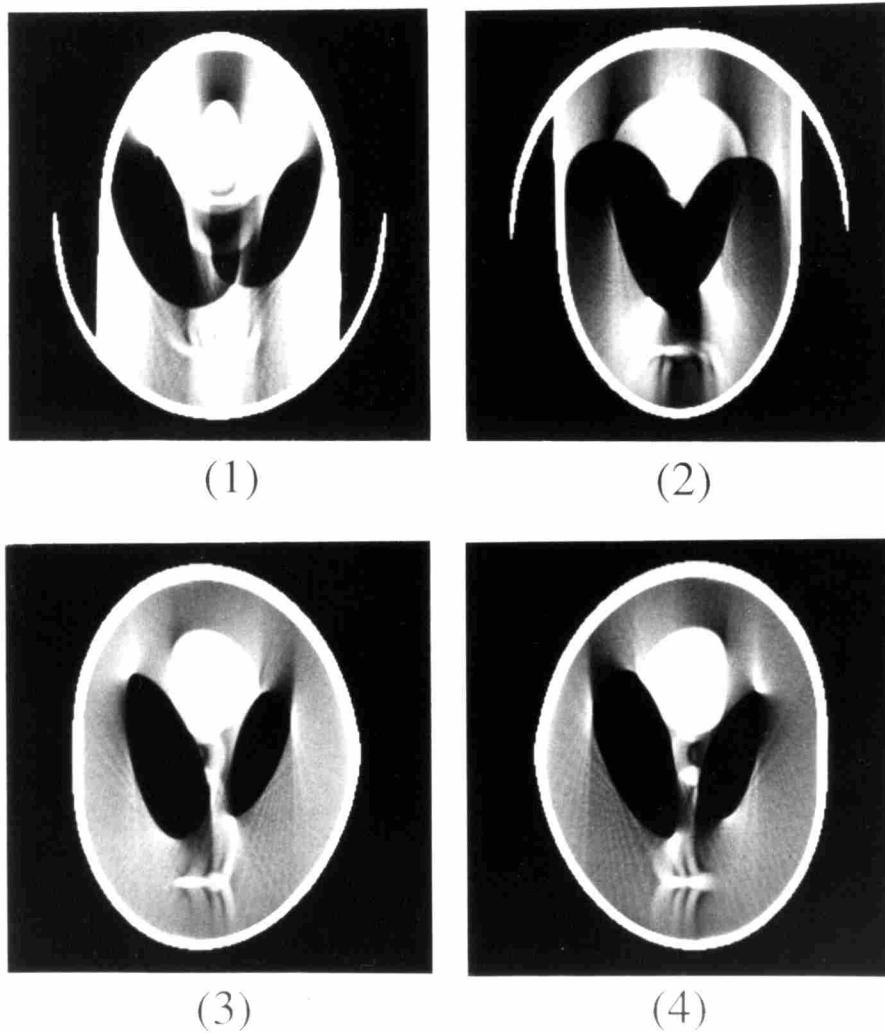


図 25: (1) は右方向へ, (2) は左方向へ, (3) は上方へ, (4) は下方へ, それぞれ並進運動する頭部ファントムの CT 画像 (ぶれ像) である. (1) ~ (4) のパラメータ設定は表 4 に示す.

表 4: 図 25のパラメータ設定

図の No.	並進運動のパラメータ		初期座標	CT 画像化のパラメータ		
	β の値	γ の値	(ξ, η)	a の値	b の値	I_0 の値
(1)	$\frac{0.4}{\pi}$	0	$(-0.2, 0)$	100.0	102.0	128
(2)	$\frac{0.4}{\pi}$	π	$(0.2, 0)$	100.0	102.0	128
(3)	$\frac{0.4}{\pi}$	$\frac{\pi}{2}$	$(0, -0.2)$	100.0	102.0	128
(4)	$\frac{0.4}{\pi}$	$\frac{3\pi}{2}$	$(0, 0.2)$	100.0	102.0	128

注 1) 初期座標 (ξ, η) は, 最も大きな楕円の時刻 0 における重心の座標を表す.

注 2) 頭部ファントムを構成する楕円の位置関係は, 運動に際して変化しない.

出す際, 濃度 0 以下の部位は全て濃度階調 0 とする非線形操作によるものと思われる.

次に, 図 25(3) は上方向への並進運動によるぶれ画像, (4) は下方向への並進運動によるぶれ画像である. 数値ファントムを構成する楕円のぶれ像が, 口髭あるいは矢じりと呼ばれる形状 ((3) では $\prec$ の形, (4) では $\succ$ の形) を描いているのが観察できる. またこのぶれ像の効果と, ストロボスコープ効果とが合いまって, 頭部ファントムはいびつな形状で CT 画像化されている.

なお図 25(1) ~ (4) において, 頭部ファントムを構成する楕円の辺縁から放射される筋状のアーチファクト (streaks) は, 画像再構成演算時の補間誤差, およびエリアシングエラーに因るものであると思われる (例えば文献 [20,21,43,45,44] などが詳しい).

第 6 章 点源の回転によるモーションアーチファクト

第 4 章では点源が並進運動する場合について、再構成画像とぶれ像を解析した。本章では点源が回転運動する場合について、第 4 章とほぼ同じ枠組みで、再構成画像とぶれ像を解析する。ここで得られた結果は、回転運動する剛体断層、あるいは並進と回転の合成運動を行う被写体断層の解析に適用される。

6.1 円形断層の回転運動

時間に依存する被写体—計測系へ適用する被写体として、半径 ε の円形断層を想定する。(図 26)。この円形断層が、 xy 平面内を原点を中心に一定半径で回転運動する場合、再構成画像（ぶれ像）は解析的にはどのように記述されるだろうか。

4.1 節に示したように、 xy 平面のスキャンエリア内に、半径 ε 、濃度 ρ の「円板」を想定する。

$$c(x, y) = \begin{cases} \rho, & x^2 + y^2 \leq \varepsilon^2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6.1)$$

この円板を x 軸方向へ x' 、 y 軸方向へ y' だけ平行移動させたものを、被写体断層と考える。

$$f(x, y) = c(x - x', y - y') \quad (6.2)$$

これを円形断層と呼ぶ。円形断層の位置は円の中心 (x', y') を用いて表す。

半径 ε 、濃度 ρ の円形断層を原点中心に回転運動させよう。スキャン時間を T で表す。 $O-xy$ 原点から円形断層の中心までの距離（回転半径）を $l \geq 0$ とする。円形断層は時刻 T の間に、角度 $\pi\alpha$ だけ回転する。原点を軸とする角速度 $\dot{h}(t)$ の滑らかな回転を仮定する。時刻 t における回転の位相（ x 軸からの回転角度）は、

$$\theta = h(t) + \theta_0, \quad (0 \leq t \leq T, -\pi \leq \theta_0 \leq \pi) \quad (6.3)$$

で与える。 $h(t)$ は t について連続かつ微分可能な関数で、

$$h(0) = 0, \quad h(T) = \pi\alpha$$

を満たす。 θ_0 はスキャン開始時（ $t = 0$ ）における初期位相である。すなわち初期位相は $O-xy$ では $(l \cos \theta_0, l \sin \theta_0)$ と表される。

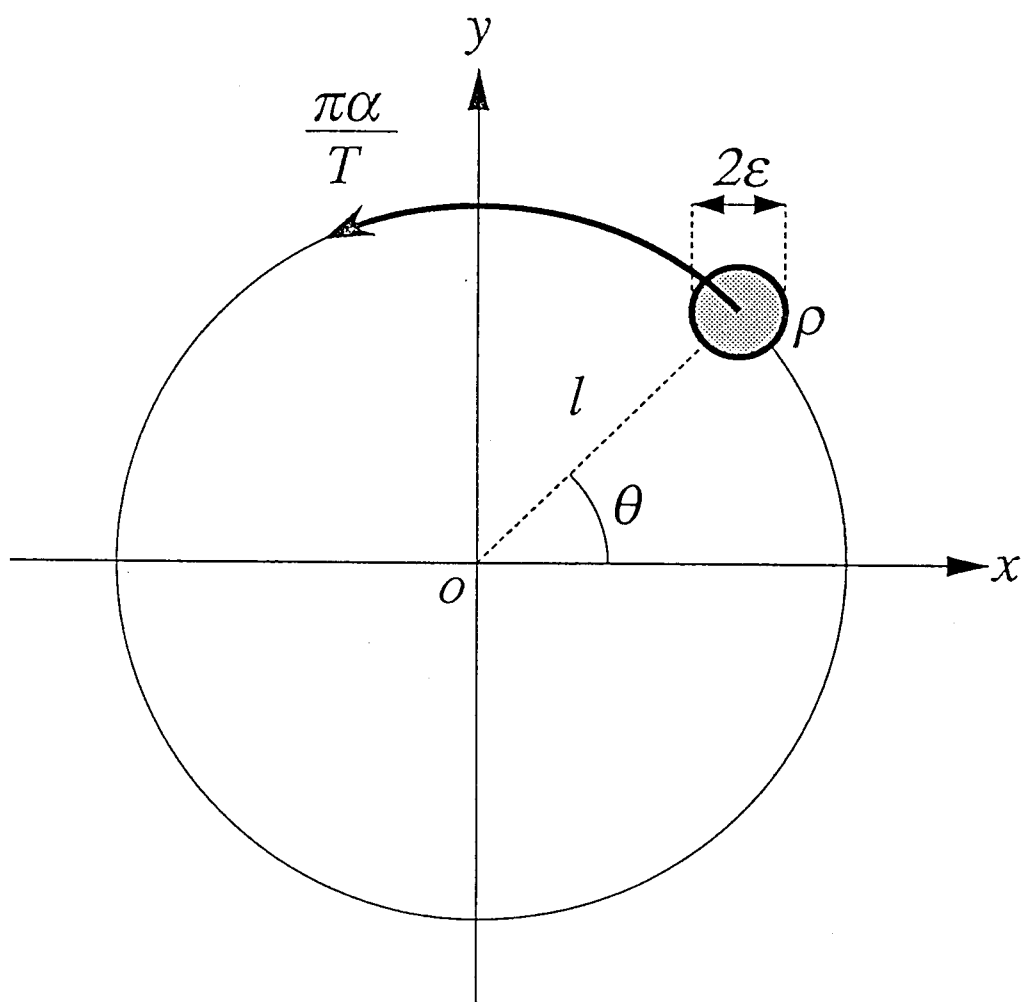


図 26: xy 平面を原点中心に回転運動する円形断層.

このとき、時刻 t における円形断層は次式で与えられる：

$$f(x, y; t) = c \left[x - l \cos(h(t) + \theta_0), y - l \sin(h(t) + \theta_0) \right] \quad (6.4)$$

6.2 円形断層に対する再構成画像

$f(x, y; t)$ を (3.1) 式に従って Radon 変換すると

$$p(u, \phi; t) = \chi \left[u - l \cos(h(t) - \phi + \theta_0) \right] \quad (6.5)$$

を得る。これは時刻 t における円形断層 $f(x, y; t)$ の投影である。ただし、第4章で定義したように $\chi(u)$ は次式を表す：

$$\chi(u) = \begin{cases} 2\rho\sqrt{\varepsilon^2 - u^2}, & |u| \leq \varepsilon \\ 0, & |u| > \varepsilon \end{cases} \quad (6.6)$$

3.2節で紹介した時間に依存する被写体—計測系の枠組みの中で、 $f(x, y; t)$ に対する投影 $p^*(u, \phi)$ を求める。時刻 t における投影の計測角度は3.2節で述べたように $\phi = g(t)$ で与える。この ϕ を用いて回転の位相を表せば次式を得る：

$$\theta = h \circ g^{-1}(\phi) + \theta_0 \quad (6.7)$$

問題を単純化するために、以下のような仮定をおこなう。3.2節で既に述べたように、投影計測（スキャン）の角速度は一定（ $\dot{g} = \pi/T$ ）と見なせる。このとき $g(t)$ は次式で与えられる：

$$g(t) = \frac{\pi}{T}t \quad (0 \leq t \leq T) \quad (6.8)$$

また断層が並進運動する速度も、一回スキャンをおこなう間（時間 T ）ならば一定（ $\dot{h} = \pi\beta/T$ ）と見なせる。従って $h(t)$ は次式で与えられる：

$$h(t) = \frac{\pi\beta}{T}t \quad (0 \leq t \leq T) \quad (6.9)$$

このとき回転の位相は次式で与えられる：

$$\theta = \alpha\phi + \theta_0, \quad (\alpha = \dot{h}/\dot{g}) \quad (6.10)$$

。は関数の合成を表す。定数 α はスキャンに対する被写体回転の角速度比を表す。この条件下において、角度 ϕ のビーム束によって計測される投影は、

$$p^*(u, \phi) = \chi \left[u - l \cos \left((\alpha - 1)\phi + \theta_0 \right) \right] \quad (6.11)$$

となる。

次に (6.11) 式の投影にフィルタ補正逆投影法を適用して再構成画像を求めてみる。まず $p^*(u, \phi)$ のフーリエ変換を計算すると、

$$P^*(w, \phi) = \frac{\varepsilon \rho}{w} J_1(2\pi \varepsilon w) \exp \left[-j2\pi l \cos \left((\alpha - 1)\phi + \theta_0 \right) w \right] \quad (6.12)$$

ただし、 $J_1(\cdot)$ は 1 次の第 1 種ベッセル関数を表す。この $P^*(w, \phi)$ にフィルタ $|w|$ をかけて逆フーリエ変換すると、フィルタ補正投影が得られる：

$$\begin{aligned} q^*(u, \phi) &= 2\varepsilon \rho \int_0^\infty J_1(2\pi \varepsilon w) \cos \left\{ 2\pi \left[u - l \cos \left((\alpha - 1)\phi + \theta_0 \right) \right] w \right\} w dw \\ &= \psi \left[u - l \cos \left((\alpha - 1)\phi + \theta_0 \right) \right] \end{aligned} \quad (6.13)$$

ただし、第 4 章で定義したように、 $\psi(u)$ は次式を表す：

$$\psi(u) = \begin{cases} \frac{\rho}{\pi}, & |u| < \varepsilon \\ \frac{\rho}{\pi} \left(1 - \frac{|u|}{\sqrt{u^2 - \varepsilon^2}} \right), & |u| > \varepsilon \end{cases} \quad (6.14)$$

最後に、フィルタ補正投影 $q^*(u, \phi)$ を逆投影変換すると

$$\hat{c}(x, y) = \int_0^\pi \psi \left[x \cos \phi + y \sin \phi - l \cos \left((\alpha - 1)\phi + \theta_0 \right) \right] d\phi \quad (6.15)$$

が得られる。 $\hat{c}(x, y)$ は、原点中心に回転運動する半径 ε 、濃度 ρ の円形断層 ((6.4) 式) に対する再構成画像である。

もし濃度 $\rho = 1/(\pi \varepsilon^2)$ とするなら、 $\hat{c}(x, y)$ を $\varepsilon \rightarrow 0$ としたときの極限は、回転運動する点源 (2次元デルタ関数) の再構成画像 $\hat{\delta}(x, y)$ である。これを次のように表記する：

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(x, y) &= \lim_{\rho=1/(\pi \varepsilon^2), \varepsilon \rightarrow 0} \hat{c}(x, y) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \psi_\varepsilon \left[x \cos \phi + y \sin \phi - l \cos \left((\alpha - 1)\phi + \theta_0 \right) \right] d\phi \end{aligned} \quad (6.16)$$

ただし, $\psi_\varepsilon(\cdot)$ は次節の (6.22) 式で与えられる. $\hat{\delta}(x, y)$ は, 点源を被写体—計測系と画像再構成系から成る CT システムへ入力したときの出力, すなわち点拡がり関数と見なすことができる. これについては以降で詳しく述べる.

6.3 点源に対する再構成画像の導出

被写体断層として点源 (2次元デルタ関数) を想定する. 点源を原点中心に半径 l , 一定角速度 $\pi\alpha/T$ (α は定数) で回転させる時, 時刻 t における点源の位相 (x 軸からの回転角度) は

$$\theta_t = \frac{\pi\alpha}{T}t + \theta_0 \quad (6.17)$$

で与える. α は被写体回転と投影計測の角速度の比である. また θ_0 は時刻 $t = 0$ における点源の初期位相である. スキャンエリア内の背景濃度は一様にゼロと仮定する. この点源を含む原画像は次式で表される:

$$f(x, y; t) = \delta(x - l \cos \theta_t, y - l \sin \theta_t) \quad (6.18)$$

時間に依存する被写体—計測系において, $\phi = (\pi/T)t$ の下でこの $f(x, y; t)$ から計測される投影は,

$$p^*(u, \phi) = \delta \left[u - l \cos \left((\alpha - 1)\phi + \theta_0 \right) \right] \quad (6.19)$$

である. この投影を画像再構成系に適用する.

$$\begin{aligned} |w| W_\varepsilon(w) &= \frac{J_1(2\pi\varepsilon|w|)}{\pi\varepsilon} \\ &\rightarrow |w| \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (6.20)$$

をフィルタとして用いる. $J_1(\cdot)$ は1次の第1種ベッセル関数である. このときフィルタ補正投影は

$$q^*(u, \phi) = \psi_\varepsilon \left[u - l \cos \left((\alpha - 1)\phi + \theta_0 \right) \right] \quad (6.21)$$

となる. 第4章で定義したように, 関数 $\psi_\varepsilon(u)$ は次式で与える:

$$\psi_\varepsilon(u) = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2\varepsilon^2}, & |u| < \varepsilon \\ \frac{1}{\pi^2\varepsilon^2} \left(1 - \frac{|u|}{\sqrt{u^2 - \varepsilon^2}} \right), & |u| > \varepsilon \end{cases} \quad (6.22)$$

なお、関数 $\psi_\varepsilon(u)$ のプロフィールは図 13 に示した。パラメータ $\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_\varepsilon(u) = -\frac{1}{2\pi^2 u^2}, \quad u \neq 0 \quad (6.23)$$

である。(6.23) 式の右辺に関しては、4.4 節で議論がなされた。回転運動する点源に対する再構成画像 $\hat{\delta}(x, y)$ は、次の逆投影変換式によって形式的に与えられる：

点拡がり関数の定義（回転運動）

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(x, y) &= \int_0^\pi \frac{-d\phi}{2\pi^2 [x \cos \phi + y \sin \phi - l \cos ((\alpha - 1)\phi + \theta_0)]^2} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \Delta_\alpha(x, y; \xi, \eta) \end{aligned} \quad (6.24)$$

$\hat{\delta}(x, y)$ の数値計算例は 6.7 節の図 32 に示した。 $\hat{\delta}(x, y)$ は、点源と投影計測の角速度比 α 、および時刻 0 における点源の位置 $(l \cos \theta_0, l \sin \theta_0) \stackrel{\text{def}}{=} (\xi, \eta)$ により一意に定まる。よって $\hat{\delta}(x, y)$ は $\Delta_\alpha(x, y; \xi, \eta)$ と表記できる。

図 27 に示すように、原点中心にパラメータ α の回転運動を仮定する被写体—計測系および画像再構成系から構成される線形システム（断層撮影モデル）を考える。時刻 0 の点源 $f(x, y; 0) = \delta(x - \xi, y - \eta)$ をこの断層撮影モデルへ入力したとき、その出力

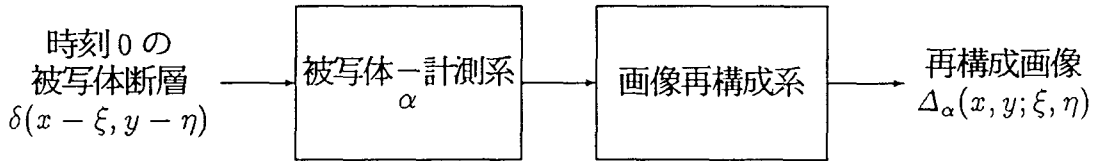


図 27: 原点を中心とする一定の回転運動 (α) を仮定する被写体—計測系、および画像再構成系から構成される CT システムへ、点源 $\delta(x - \xi, y - \eta)$ を入力したとき、出力として得られるのがシステムの点拡がり関数 $\Delta_\alpha(x, y; \xi, \eta)$ である。

として得られるのが $\hat{f}(x, y) = \Delta_\alpha(x, y; \xi, \eta)$ である。従って、第 7 章に後述するように、 $\Delta_\alpha(x, y; \xi, \eta)$ はこの断層撮影モデルの点拡がり関数（劣化関数）と見なせる。

なお並進運動と回転運動の違いが、再構成画像（あるいは CT 画像）にもたらす最も顕著な特質は、この点拡がり関数に反映される。すなわち、第 4 章で議論した並進

運動の場合、断層撮影モデルの点拡がり関数は $\Delta_{\beta,\gamma}(x - \xi, y - \eta)$ のように x と ξ , y と η の差の形として表記できる。一方、回転運動の場合、点拡がり関数 $\Delta_\alpha(x, y; \xi, \eta)$ は x と ξ , y と η の差の形として表すことができない。この点拡がり関数の特質が再構成画像に及ぼす影響等については、第7章で詳しく述べる。

6.4 ふれの発生

(6.15) 式に示したように、回転運動する円形断層（(6.4) 式）に対する再構成画像 $\hat{c}(x, y)$ は、最終的に ϕ に関する積分で表される。この積分を実行するのは難しい。しかし段階的にフィルタ補正投影のプロフィールおよび逆投影変換を解析すれば、CT 画像中にふれが現れる位置や、ふれの形状等を知ることができる。本節では、回転運動する円形断層および点源に対するふれの発生を、積層の考え方に基づいて論ずる。

回転運動する円形断層の再構成プロセスを、直交座標系 $O-xy$ の定義された xy 平面上に再現してみよう。図 28 のように、円形断層（白抜きの小円）からの投影（同図 (a), $p^*(u, \phi_i); i = 1, \dots, 5$ ）は様々な角度から計測され、そのフィルタ補正投影（同図 (b), $q^*(u, \phi_i); i = 1, \dots, 5$ ）は xy 平面上に逆投影される。このとき角度 ϕ のフィルタ補正投影だけを逆投影すると、次式のような層 $\hat{c}_\phi$ が xy 平面上に形成される（2.3 節の層および積層の定義を参照せよ）：

$$\hat{c}_\phi(x, y) = \int_0^\pi \delta(\phi - \varphi) \psi \left[x \cos \varphi + y \sin \varphi - l \cos \left((\alpha - 1)\varphi + \theta_0 \right) \right] d\varphi \quad (6.25)$$

$\delta(\cdot)$ は 1 次元デルタ関数を表す。座標系 $O-xy$ を角度 ϕ だけ回転させた $O-uv$ を用いて $\hat{c}_\phi(x, y)$ を表わせば、

$$\hat{c}_\phi(u \cos \phi - v \sin \phi, u \sin \phi + v \cos \phi) = \psi \left[u - l \cos \left((\alpha - 1)\phi + \theta_0 \right) \right] \quad (6.26)$$

上式の右辺は (6.13) 式に等しくなる。このことは、 $\hat{c}_\phi(x, y)$ の v 軸に垂直な断面プロフィールが、角度 ϕ のフィルタ補正投影に等しいことを表す。例えばフィルタ補正投影の正值の部分、 $\hat{c}_\phi(x, y)$ では $O-xy$ 平面上の幅 2ε の帯状領域（図 28b の灰色の帯）に相当する。

(4.35) 式の両辺を、再び (6.15) 式に従って逆投影変換すると、次式が得られる：

$$\hat{c}(x, y) = \int_0^\pi \hat{c}_\phi(x, y) d\phi \quad (6.27)$$

また再構成画像 $\hat{c}_\epsilon(x, y)$ の CT 画像化は、層 $\hat{c}_\phi(x, y)$ の CT 画像化を様々な角度 ϕ について加算したものである：

$$\mathcal{I}_{CT} \{ \hat{c}(x, y) \} = \int_0^\pi \mathcal{I}_{CT} \{ \hat{c}_\phi(x, y) \} d\phi \quad (6.28)$$

再構成画像 $\hat{c}(x, y)$ は、角度 $\phi = 0$ から π までの $\hat{c}_\phi(x, y)$ を xy 平面上で積層したものである。もし円形断層が静止しているならば、異なる ϕ に対する帯は全て一か所で交わり、そこに濃度 $1/(\pi\epsilon^2)$ の円が再構成される。しかし円形断層が図 28 のように運動している場合、帯は一か所では交わらず、円形断層は正しくは再構成されない。このとき再構成されて CT 画像に現れる図形がモーションアーチファクト、すなわち円形断層に対するふれ像である。 $\hat{c}(x, y)$ の CT 画像にふれ像が構成されるならば、それは図 28b の帯の重なりが多い部分（曲線 C 部分）である。

6.2 節で述べたように、円形断層の半径が ϵ 、濃度が $\rho = 1/(\pi\epsilon^2)$ のとき、その円形断層に対する再構成画像 $\hat{c}(x, y)$ の $\epsilon \rightarrow 0$ 極限は、点源（デルタ関数）に対する再構成画像となる。従って同様の枠組みで、点源に対するふれ像を論じることもしできる。すなわち、円形断層に対するふれ像の極限（ $\rho = 1/(\pi\epsilon^2)$, $\epsilon \rightarrow 0$ ）が点源のふれ像である。

6.5 ふれの形状

円形断層を点源に収束させるとき、フィルタ補正投影の正值の部分（領域）を逆投影させた領域（帯）の幅 2ϵ もゼロとなり、帯は直線と見なせる。この直線を $M(\phi)$ と表記する。直線 $M(\phi)$ は角度 ϕ をパラメータとして、次式で与えられる：

$$x \cos \phi + y \sin \phi = l \cos \left((\alpha - 1)\phi + \theta_0 \right) \quad (6.29)$$

(6.29) 式右辺は $M(\phi)$ が u 軸と交わる位置を表す。また xy 平面内を回転運動する点源の位置は

$$(x_\phi, y_\phi) = (l \cos(\alpha\phi + \theta_0), l \sin(\alpha\phi + \theta_0)) \quad (6.30)$$

で表されるが、どの ϕ に対しても直線 $M(\phi)$ は必ず点 (x_ϕ, y_ϕ) を通る。 $M(\phi)$ は常に図 28b の黒い曲線 (C とする) の接線である。 すなわち、曲線 C は直線群 $\{M(\phi) | 0 \leq \phi \leq \pi\}$ の包絡線である。 点源に対するモーションアーチファクトの図形的同定は、この包絡線を求める問題に帰着される [46]。 (6.29) 式を ϕ に関して微分すれば

$$-x \sin \phi + y \cos \phi + (\alpha - 1)l \sin [(\alpha - 1)\phi + \theta_0] = 0 \quad (6.31)$$

となる。 直線群 $\{M(\phi); 0 \leq \phi \leq \pi\}$ の包絡線は、(6.29) 式および (6.31) 式を同時に満たす。 これらの式を整理して、 x と y をパラメータ ϕ で表したものが包絡線、すなわちモーションアーチファクトの形状を与える：

O - xy 表示による ぶれの形状 (外・内サイクロイド)

$$\begin{cases} x = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)l \cos(\alpha\phi + \theta_0) + \frac{\alpha l}{2} \cos [(\alpha - 2)\phi + \theta_0] \\ y = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)l \sin(\alpha\phi + \theta_0) - \frac{\alpha l}{2} \sin [(\alpha - 2)\phi + \theta_0] \end{cases} \quad (6.32)$$

あるいは (6.32) 式は、 $x = R \cos \Theta$, $y = R \sin \Theta$ なる関係を用いて、極座標系で与えることもできる：

P - $R\Theta$ 表示による ぶれの形状 (外・内サイクロイド)

$$\begin{cases} R = l \sqrt{1 - \alpha(2 - \alpha) \sin^2 [(\alpha - 1)\phi + \theta_0]} \\ \Theta = \phi + \arctan \{ (1 - \alpha) \tan [(\alpha - 1)\phi + \theta_0] \} \end{cases} \quad (6.33)$$

(6.32) 式あるいは (6.33) 式は、 $0 < \alpha < 2$ ($\alpha \neq 1$) のときは外サイクロイド (epicycloid), $\alpha < 0$ もしくは $\alpha > 2$ のときは内サイクロイド (hypocycloid) と呼ばれる平面曲線を表す [34,35,36]。 (特異な場合として、 $\alpha = 1$ のときは円、 $\alpha = 0$ と $\alpha = 2$ のときは点を表す)。

(6.32) 式が外サイクロイドあるいは内サイクロイドであることは、以下のようにして確かめることができる。まず $0 < \alpha < 2$ のときは、

$$\begin{aligned} l &= a + 2b \\ \alpha &= \begin{cases} \frac{2b}{a + 2b} & (0 < \alpha \leq 1) \\ \frac{2(a + b)}{a + 2b} & (1 \leq \alpha < 2) \end{cases} \\ \theta &= \frac{2b}{a + 2b} \phi \end{aligned}$$

なる置き換えを行う。簡単のために初期位相 $\theta_0 = 0$ とする。このとき (6.32) 式は次式のようになる：

外サイクロイド ($\theta_0 = 0$)

$$\begin{cases} x = (a + b) \cos \theta + b \cos \left(\frac{a + b}{b} \theta \right) \\ y = (a + b) \sin \theta + b \sin \left(\frac{a + b}{b} \theta \right) \end{cases} \quad (6.34)$$

この式は、半径 a の円の外側を、半径 b の円が滑らずに転がるとき、半径 b の円の円周上に固定された一点が描く軌跡、すなわち外サイクロイドである (図 29 参照)。なお $\alpha = 1$ のとき $a = 0$ 、 $2b = l$ であり、半径 l の「円」になることが分かる。

つぎに、 $\alpha \leq 0$ もしくは $\alpha \geq 2$ のときは、

$$\begin{aligned} l &= a - 2b \\ \alpha &= \begin{cases} -\frac{2b}{a - 2b} & (\alpha < 0) \\ \frac{2(a - b)}{a - 2b} & (\alpha > 2) \end{cases} \\ \theta &= -\frac{2b}{a - 2b} \phi \end{aligned}$$

なる置き換えを行う。簡単のために初期位相 $\theta_0 = 0$ とする。このとき (6.32) 式は次式のようになる：

内サイクロイド ($\theta_0 = 0$)

$$\begin{cases} x = (a - b) \cos \theta - b \cos \left(\frac{a - b}{b} \theta \right) \\ y = (a - b) \sin \theta + b \sin \left(\frac{a - b}{b} \theta \right) \end{cases} \quad (6.35)$$

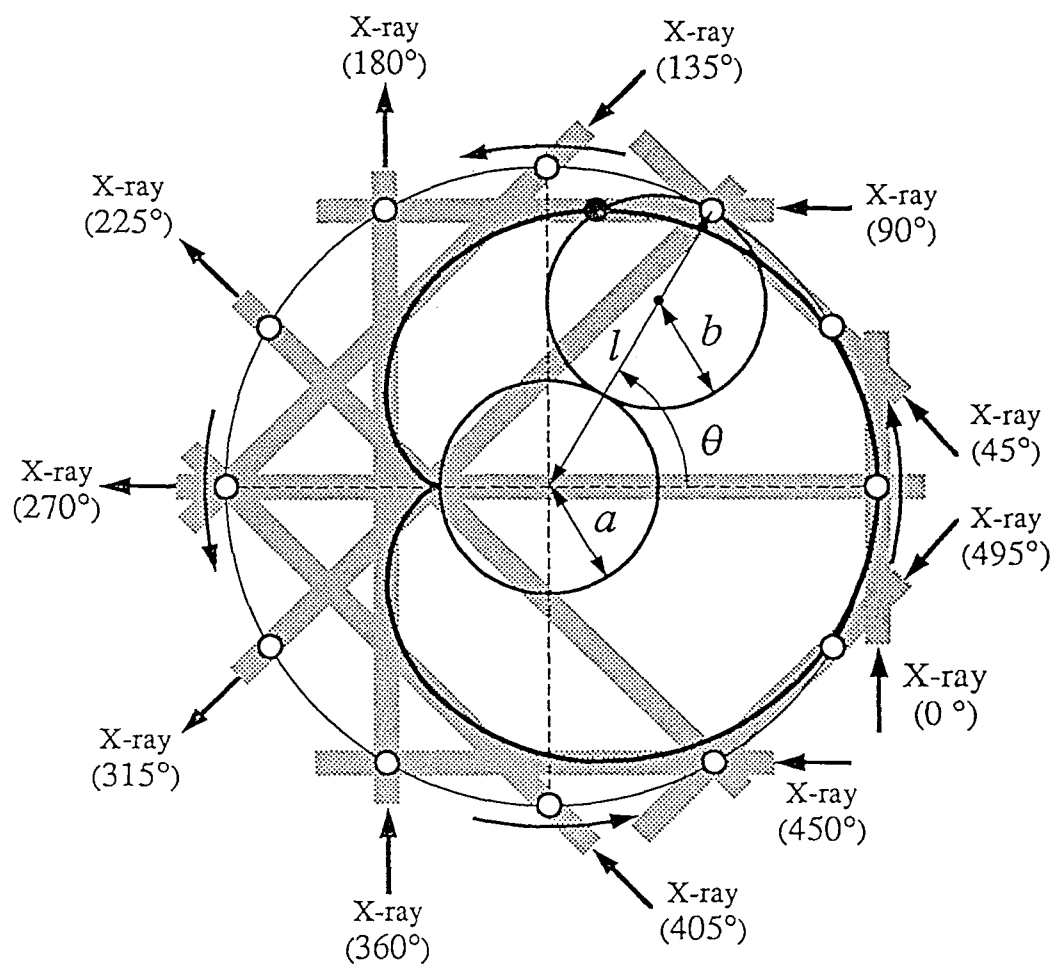


図 29: 点源が $0 < \alpha < 2$ なる回転運動するとき生ずるふれの形状は、半径 a の円の外側を滑らずに転がる半径 b の円の、円周上に固定された一点が描く軌跡、すなわち外サイクロイドに一致する。

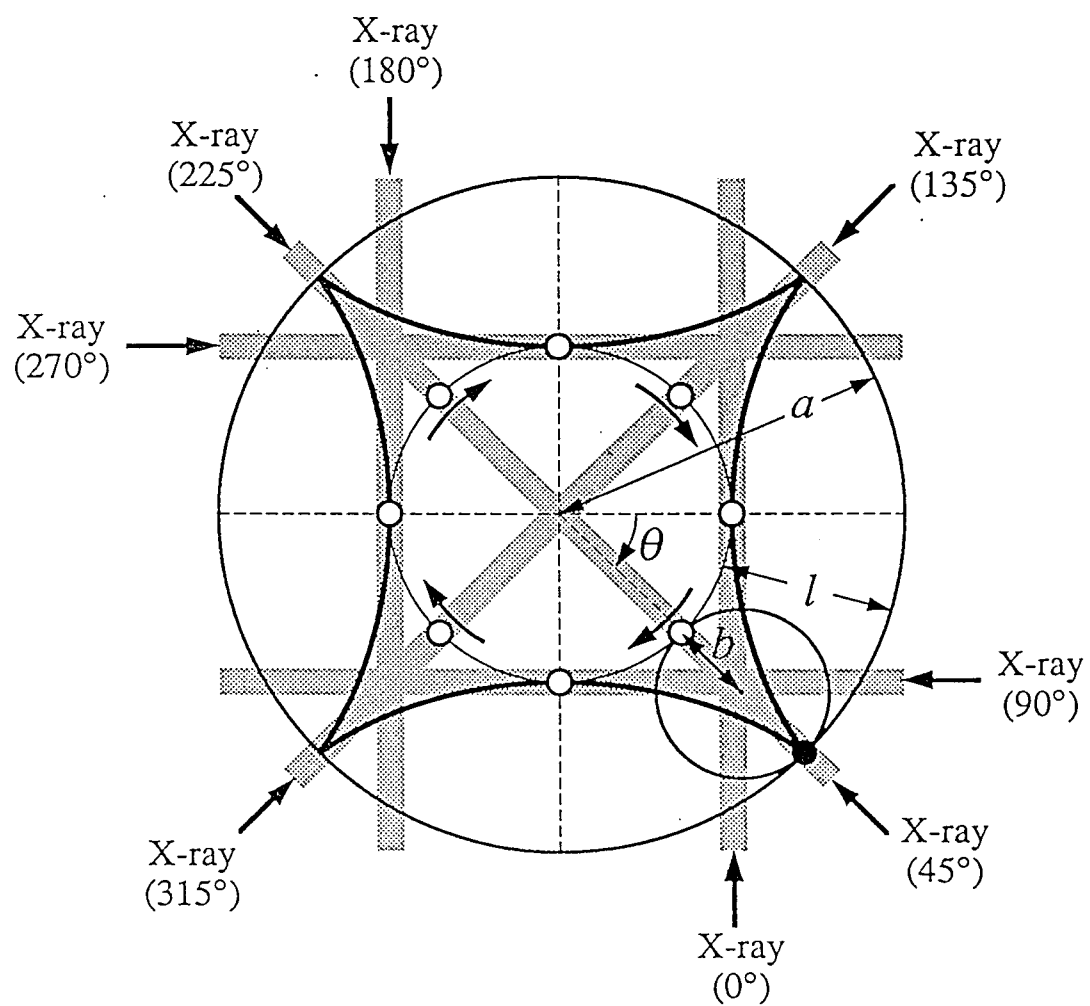


図 30: 点源が $\alpha \leq 0$, $\alpha \geq 2$ なる回転運動するとき生ずるぶれの形状は, 半径 a の円の内側を滑らずに転がる半径 b の円の, 円周上に固定された一点が描く軌跡, すなわち内サイクロイドに一致する.

この式は、半径 a の円の内側を、半径 b の円が滑らずに転がるとき、半径 b の円の円周上に固定された一点が描く軌跡、すなわち内サイクロイドである（図 30 参照）。なお $\alpha = 0$ ないしは $\alpha = 2$ のとき $a = l, b = 0$ であり、円周上の点は動かない（平面上の一点を表す）。

以上の解析から、点源を回転運動させたとき CT 画像に生ずるぶれは、画像中に外（内）サイクロイドと呼ばれる平面曲線を描くことが明らかである。もし点源及び X 線ビームがそれぞれ一定の角速度で動くならば、(6.32) 式で与えられるぶれの形状は、3 つのパラメータ α, l, θ_0 によって一意に定まる。すなわち (6.32) 式は、(6.16) 式の点拡がり関数 $\Delta_\alpha(x, y; \xi, \eta)$ と同様に、スキャンと被写体の角速度比 α と点源の初期座標を与えるパラメータ $(\xi, \eta) = (l \cos \theta_0, l \sin \theta_0)$ だけで決定される。なお並進運動の場合と異なり、初期座標のパラメータ (ξ, η) も平面曲線の形状を左右することは、(6.32) 式より明らかである。

6.6 尖点の発生

回転運動する点源のぶれ像が描く外サイクロイド・内サイクロイドについて考える。これらの曲線は「弧（arc）」の部分と、弧と弧が接続する「尖点（cusp）」の部分から構成される。(4.42) 式で表されるサイクロイド曲線は、 $0 \leq \phi \leq \pi$ の部分だけが CT 画像中にぶれとして描かれるため、パラメータ (α, l, θ_0) の与え方によっては、尖点が見れる場合と、尖点が見れず弧の部分だけが描かれる場合が生ずる。ぶれに固有の形状、すなわち円弧（ $\frown$ ）コンマ（ $,$ ）口髭（ $\succ$ ）などは、こうした背景により生ずる。

以下、サイクロイド曲線に尖点の現れる条件および位置について調べる。回転運動する点源の位置（すなわち軌道）は、 ϕ をパラメータとして

$$(x_\phi, y_\phi) = (l \cos(\alpha\phi + \theta_0), l \sin(\alpha\phi + \theta_0)) \quad (6.30)$$

で表される。パラメータ ϕ について (x_ϕ, y_ϕ) を微分すれば、軌道の接線方向が求められる：

$$(\dot{x}_\phi, \dot{y}_\phi) = (-\alpha l \sin(\alpha\phi + \theta_0), \alpha l \cos(\alpha\phi + \theta_0)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{n} \quad (6.36)$$

(6.36) 式は、点源の辿る軌道 $\{(x_\phi, y_\phi) | 0 \leq \phi \leq \pi\}$ の、角度 ϕ における接線の方角ベクトル ($\mathbf{n}$) を表す。

次に、点源を通過する X 線ビーム（あるいは Radon 変換の積分路）を表す直線 $M(\phi)$ について考える。この直線は (6.29) 式に示したように、次式で与えられる：

$$x \cos \phi + y \sin \phi = l \cos ((\alpha - 1)\phi + \theta_0) \quad (6.29)$$

(6.29) 式より、直線 $M(\phi)$ の方向ベクトルを $\mathbf{m}$ と表記するならば、 $\mathbf{m} = (\sin \phi, -\cos \phi)$ であることが分かる。

6.4 節と 6.5 節で述べたように、ふれ像を表すサイクロイド曲線 ((6.32) 式) は様々な ϕ に対する直線 $\{M(\phi) | 0 \leq \phi \leq \pi\}$ ((6.29) 式) の包絡線である。直線 $M(\phi)$ が点 (x_ϕ, y_ϕ) を必ず通過することを考慮すれば、サイクロイド曲線に尖点が発生するのは、(6.29) 式の直線が点源の進行方向に対して垂直となった時であることが分かる (第 4 章の図 17 を参照)。すなわちこのとき、軌道 $\{(x_\phi, y_\phi) | 0 \leq \phi \leq \pi\}$ の接線方向ベクトルと直線 $M(\phi)$ の方向ベクトルの内積はゼロである：

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = -\alpha l \sin(\alpha\phi + \theta_0) \sin \phi - \alpha l \cos(\alpha\phi + \theta_0) \cos \phi = 0 \quad (6.37)$$

従って、 $\alpha = 0, l = 0$ (点源が移動しないとき) を除けば、サイクロイド曲線に尖点が生ずるのは、次なる条件式を満たす時である：

尖点の発生する条件

$$\cos [(\alpha - 1)\phi + \theta_0] = 0 \quad (6.38)$$

またこのとき、サイクロイド曲線のパラメータ ϕ ($0 \leq \phi \leq \pi$) は、次式を満たせば良い：

$$(\alpha - 1)\phi + \theta_0 = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \alpha \neq 1, -\pi \leq \theta_0 \leq \pi) \quad (6.39)$$

なお $\alpha = 1$ のときには、(6.32) 式は円を表し、尖点は生じない。

さらに、上式に示す ϕ の値をサイクロイド式 (6.33) に適用すれば、尖点の現れる位置も決定することができる：

尖点の発生する位置

$$\begin{cases} R = l\sqrt{1 - \alpha(2 - \alpha)} \\ \theta = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{2} + n \right) \pi - \frac{\theta_0}{\alpha - 1} \end{cases} \quad (6.40)$$

6.7 計算機シミュレーション

本節では、回転運動する点源（円形断層）に対する計算機シミュレーションの概要と、実験結果についてまとめる。すなわち、時間に依存する被写体—計測系と画像再構成系から成る断層撮影モデルを計算機上に構築し、回転運動する点源に対する再構成画像を算出したり、CT 画像中に生ずるモーションアーチファクト（ふれ）を検証する。なお 4.8 節の計算機シミュレーションと同様に、本節では半径が濃度に比して十分小さな円形断層（条件 (4.21) を満たす）を点源の近似として用いる。

6.7.1 方法

画像再構成および画像表示に関しては、4.8.1 と同じ諸条件、数値設定等を用いる。被写体断層およびその運動について、以下まとめる。

円形断層の回転運動および円形断層からの投影計測は、6.1 節で述べたようになされる。円形断層からの投影データは、(6.11) 式から数値化する。点源の代用として用いられる円形断層は、半径 0.04、濃度 200.0（従って体積は $(0.04)^2 \pi \times 200.0 \cong 1.0$ ）に設定する。ただし、距離および濃度の単位は任意とする。点源の初期座標（時刻 $t = 0$ における位置）は $O-xy$ で表せば $(l \cos \theta_0, l \sin \theta_0)$ である。この点源がスキャン時間 T の間に、原点中心に半径 l で角度 $\alpha\pi$ だけ回転運動をする。この時の回転の角速度は一定 ($\dot{h} = \alpha\pi/T$) とする。また投影計測の角速度も一定 ($\dot{g} = \pi/T$) とする。被写体回転の角速度と投影計測の角速度の比 α と、初期位置に関するパラメータ： $(\xi, \eta) = (l \cos \theta_0, l \sin \theta_0)$ は各シミュレーションごとに値を与える（初期座標は極座標を用いて表せば (l, θ_0) と表記される）。なお個々の値は次節にて記述する。

6.7.2 結果

図 31 のふれ像 (a1) ～ (a3) は、スキャンエリア内を原点まわりに一定半径で回転運動する点源の、再構成画像を CT 画像化したものである。本シミュレーションでは点源の近似として円形断層を用いるが、混同が生じない限り、これを点源と呼ぶことにする。図 31 の CT 画像化のパラメータは $a = 2.0, b = 50.0, I_0 = 0$ のように設定する。また各々の図について、パラメータ α, l, θ_0 は表 5 のように設定する。

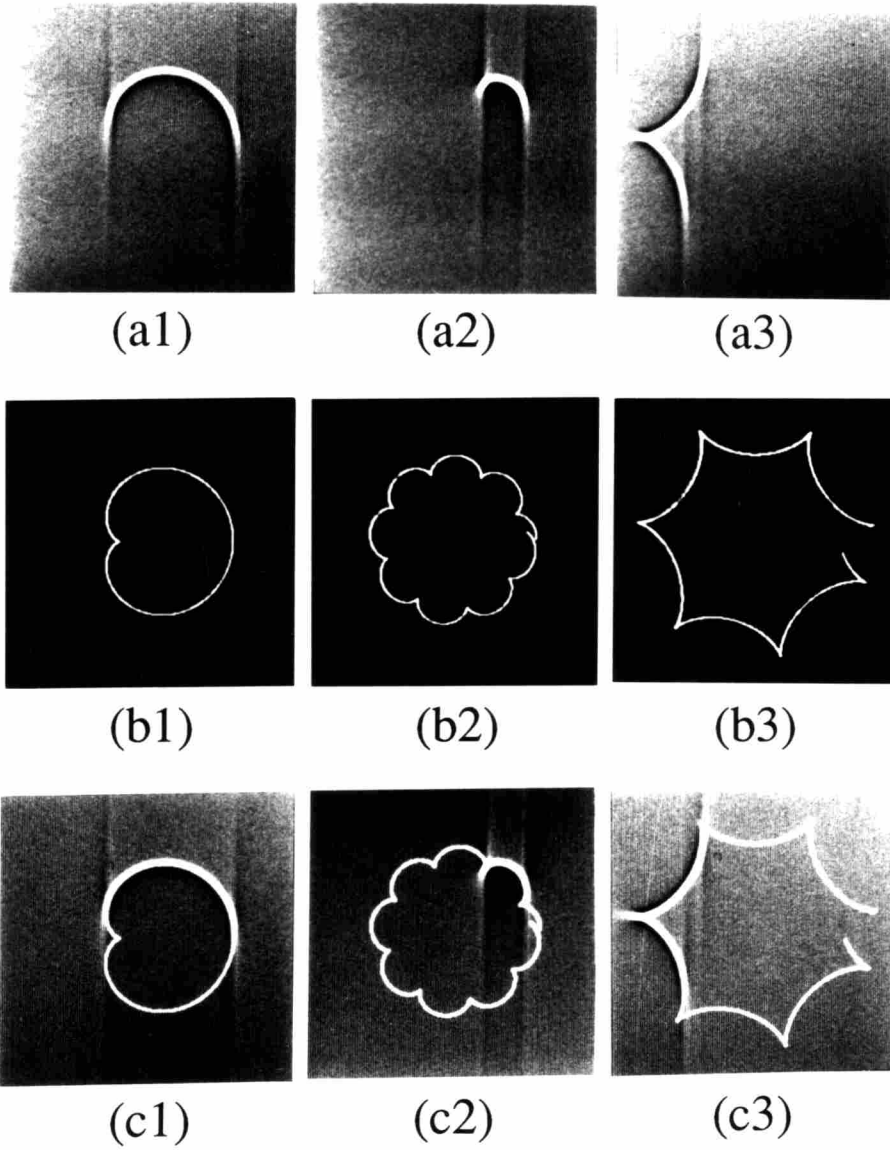


図 31: (a) それぞれ異なる $\alpha, (\xi, \eta)$ (表 5) に対する点源のふれ像. a1 は円弧 (—), a2 はコンマ (,), a3 は口髭 (>) の形状を描く. (b) b1 と b2 は外サイクロイド, b3 は内サイクロイド. 対応する番号のふれ像と $\alpha, (\xi, \eta)$ は共通. (c) a 図と b 図の重ね合わせ. ふれと内・外サイクロイドの軌跡は一致する.

表 5: 図 31のパラメータ設定

図の No.	角速度比 α の値	初期座標 $(\xi, \eta) = (l \cos \theta_0, l \sin \theta_0)$
(a1) (b1)	$\frac{2}{3}$ (約 0.67)	$(\cos 0, \sin 0)$
(a2) (b2)	$\frac{7}{36}$ (約 0.19)	$(\cos \frac{7}{36}\pi, \sin \frac{7}{36}\pi)$
(a3) (b3)	$-\frac{4}{9}$ (約 0.44)	$(\cos -\frac{5}{6}\pi, \sin -\frac{5}{6}\pi)$

図 31(a1) には円弧 (—), (a2) にはコンマ (,), (a3) には口髭あるいは矢じり (ゝ) と見なせる形状の「ふれ」が観察できる. 各々のパラメータは, 超高速 X 線 CT スキャナにアクリル製ファントムを適用したとき, その CT 画像中に生ずるふれの形状 (文献 [15] 参照) をうまく再現するように設定した.

図 31(b1) ~ (b3) の 2 値画像は, (6.32) 式のパラメータ (α, l, θ_0) の値を, 対応する番号の CT 画像 (a1) ~ (a3) と同じにして計算した平面曲線 (内・外サイクロイド) を示す. ただしサイクロイドの形状を把握し易くするために, (6.32) 式の変数 ϕ は 0 から π の間に限らず, 平面曲線が画像中をほぼ一周するよう変化させた. 図 31(c1) ~ (c3) は, 図 (a) と図 (b) のそれぞれ対応する番号の, 画像の重ね合わせ (加算画像) である. 6.5 節によれば, ふれの形状と内・外サイクロイドの軌跡は一致する. この図 (c) より, 点源は, サイクロイド曲線の $0 \leq \phi \leq \pi$ に相当する部分を, ふれ像として CT 画像中に描くのが良く分かる.

図 32の (d1) ~ (d3) は, 回転運動する点源 (円形断層で近似) の再構成画像を 3 次元的に表示したものである. 再構成画像 (d1) ~ (d3) の CT 画像化をディスプレイに映し出したものが, 図 31の (a1) ~ (a3) である. なお xy 平面上における再構成画像の濃度分布が分かるように, 図 32では $O-xyz$ 空間の z 軸方向に濃度 ($\hat{c}$) 値を取り, 濃度分布をグラフ化している. (d4) は原点上に静止する点源の再構成画像を, (d1) ~ (d3) と比較するために 3 次元表示したものである. (d1) ~ (d3) と (d4) は z 軸のスケールが異なる.

図 32の (d1) ~ (d3) について, 平面上に壁のように切り立って見える部分は, CT 画像中のふれに相当する. 図 19の (d1) ~ (d3) (4.8 節) と同様に, これらの 3 次元像か

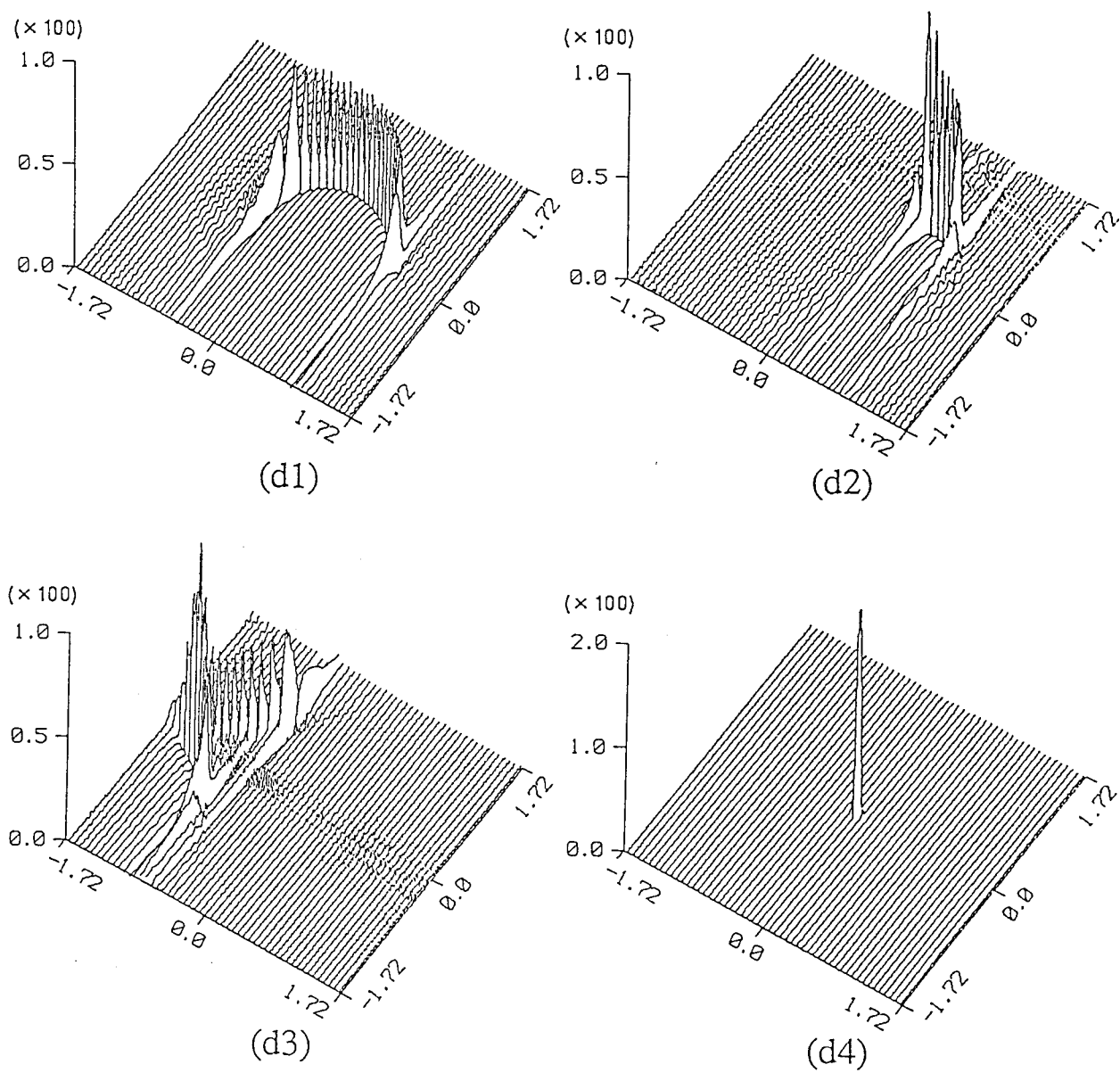


図 32: (d1) ~ (d3) 原点中心に回転運動する点源の再構成画像. 対応する番号の CT 画像が 図 31 (a1) ~ (a3) である. (d4) 原点上に静止する点源の再構成画像.

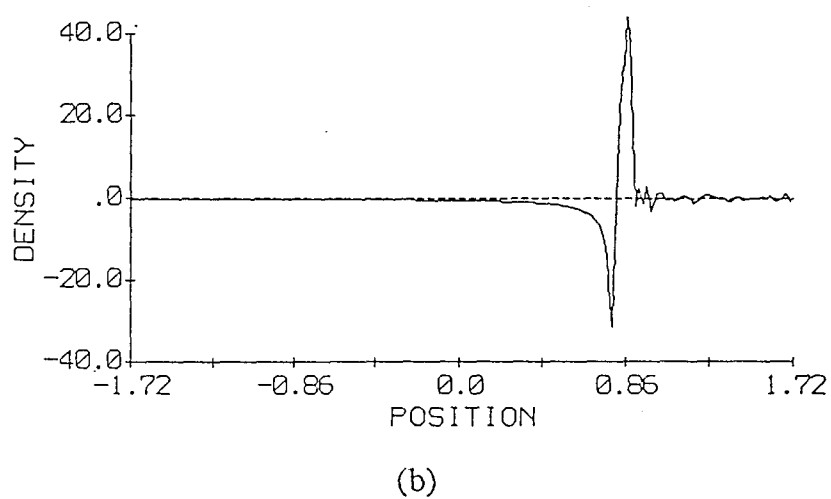
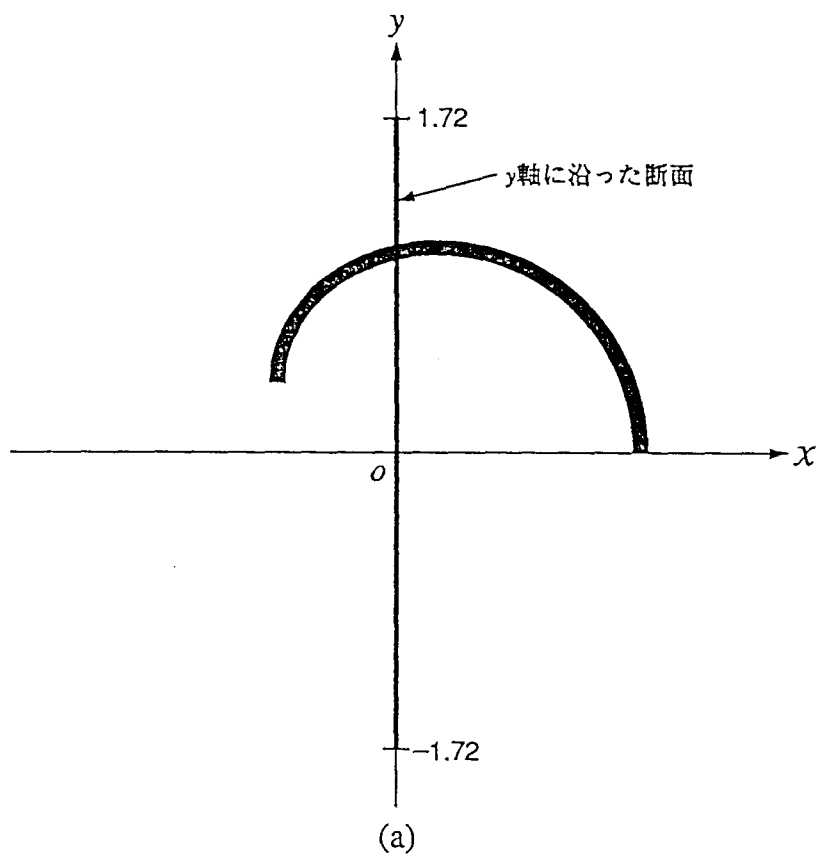


図 33: (a) d1 図を y 軸に沿って切り開く. (b) d1 図の y 軸に沿う断面プロフィール. d1 図において壁のように切り立った部分では, 再構成画像の濃度が正と負の間で急激に変化している.

ら以下の事実が明らかである：

1. 点源の回転運動に起因するふれ像は、内・外サイクロイドの尖点に相当する部分では濃度が高く（CT 画像中では明るく）、弧に相当する部分では尖点部分より濃度が低い（CT 画像中では暗い）。
2. ふれ像が描く曲線の内側（尖点の突起が出る方の側面）の濃度は負値、曲線の外側の濃度は正値となっている。

このことは図 32(d1) の y 軸に沿った濃度断面を見れば良く分かる。この断面の濃度分布を図 33 に示す。(6.32) 式のサイクロイドの曲線は、ふれ像の外側と内側のちょうど境目あたりに描かれる。

点源の近似として用いる円形断層の半径 ε を小さく、濃度 $1/(\pi\varepsilon^2)$ を高くして、円形断層を δ 関数に近づけると、図 31 (a1) ～ (a3) に見られるふれ像の幅は狭くなり、サイクロイド曲線上で、曲線に垂直な断面形状は正と負が急激に入れ替わるような、切り立った濃度分布を持つようになる。

第7章 剛体の回転によるモーションアーチファクト

7.1 回転する剛体断層と画像劣化

被写体断層の形状および濃度が、動きによって変化しない被写体（剛体）を対象に、劣化を定式化する。任意の剛体断層が原点を中心に一定角速度 $\pi\alpha/T$ で回転する場合を考える。スキャンエリア内の剛体断層とバックグラウンドを併せて原画像 $f(x, y; t)$ で表す（便宜上この $f(x, y; t)$ を剛体断層と呼ぶことにする）。剛体断層 $f(x, y; t)$ は時刻0における $f(x, y; 0)$ を用いて、次のように表すことができる：

$$\begin{aligned} f(x, y; t) &= \int \int_{\text{scan area}} \delta(x - l \cos \theta_t, y - l \sin \theta_t) f(\xi, \eta; 0) d\xi d\eta \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}_{\alpha, t} \{ f(x, y; 0) \} \end{aligned} \quad (7.1)$$

但し、(6.17) 式で示したように $\theta_t = (\pi\alpha/T)t + \theta_0$ なので、

$$\begin{aligned} l \cos \theta_t &= \xi \cos \frac{\pi\alpha}{T}t - \eta \sin \frac{\pi\alpha}{T}t \\ l \sin \theta_t &= \xi \sin \frac{\pi\alpha}{T}t + \eta \cos \frac{\pi\alpha}{T}t \end{aligned} \quad (7.2)$$

である。また $\mathcal{T}_{\alpha, t} \{ \cdot \}$ は時間推移のための線形作用素で、ある時刻 t_0 の剛体断層 $f(x, y; t_0)$ が与えられたとき、時間 t 後の剛体断層 $f(x, y; t + t_0)$ を算出する。(7.1) 式の両辺を、制限 $\phi = (\pi/T)t$ の下で Radon 変換すれば、

$$p^*(u, \phi) = \int \int_{\text{scan area}} \delta[u - l \cos((\alpha - 1)\phi + \theta_0)] f(\xi, \eta; 0) d\xi d\eta \quad (7.3)$$

さらにフィルタ補正逆投影法の操作 1, 2 に従って、再構成のための線形変換（フーリエ変換、逆投影変換など）を順次(7.3) 式の両辺へほどこす。すると再構成画像 $\hat{f}(x, y)$ は点拡がり関数 $\Delta_\alpha(x, y; \xi, \eta)$ を用いて、次のように表記される：

画像劣化の定式化（時刻 0）

$$\begin{aligned} \hat{f}(x, y) &= \int \int_{\text{scan area}} \Delta_\alpha(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta; 0) d\xi d\eta \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_\alpha \{ f(x, y; t) \} \end{aligned} \quad (7.4)$$

すなわち再構成画像 $\hat{f}(x, y)$ は、 xy 平面における点拡がり関数の重み付き線形和として表すことができる。ただし第5章で議論したように、回転運動する剛体の再構成画

像は、点拡がり関数の重畳積分の形式では表せない。なお(7.4)式は、時刻ゼロにおける剛体断層とその再構成画像(劣化画像)の関係を与える画像劣化モデル[40,41,42]と見なせる。画像劣化の性質は、モデルの劣化関数(すなわち点拡がり関数)によって決定される。

(6.24)式から明らかなように、 $\Delta_\alpha(x, y; \xi, \eta)$ は並進運動の場合の点拡がり関数のように、差の形(例えば $\Delta_\alpha(x - \xi, y - \eta)$)として表記することはできない。差の形の関数として表記できる「位置不変点拡がり関数」に対して、点源の初期座標 (ξ, η) に依存して (x, y) 平面上での性質が変化する $\Delta_\alpha(x, y; \xi, \eta)$ は、「位置依存点拡がり関数」である。

(7.4)式は、さらに、任意の時刻 t ($0 \leq t \leq T$)の剛体断層に対して拡張できる。 $\Delta_\alpha(x, y; \xi, \eta)$ を時刻ゼロの点拡がり関数と見なし、時刻 t の点拡がり関数 $\Delta_{\alpha,t}(x, y; \xi, \eta)$ を

$$\Delta_{\alpha,t}(x, y; \xi, \eta) = \Delta_\alpha(x, y; l \cos \theta_{-t}, l \sin \theta_{-t}) \quad (\Delta_{\alpha,0} = \Delta_\alpha) \quad (7.5)$$

と定義する。但し θ_{-t} は(6.17)式より得る。時刻ゼロの剛体断層 $f(x, y, 0)$ は

$$f(x, y, 0) = \mathcal{T}_{\alpha,-t} \{ f(x, y, t) \} \quad (7.6)$$

と表せる。(7.5)式と(7.6)式を用いれば、(7.4)式は次のように書き換えられる：

画像劣化の定式化(時刻 t)

$$\begin{aligned} \hat{f}(x, y) &= \iint_{\text{scan area}} \Delta_\alpha(x, y; \xi, \eta) \mathcal{T}_{\alpha,-t} \{ f(\xi, \eta; t) \} d\xi d\eta \\ &= \iint_{\text{scan area}} \Delta_{\alpha,t}(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta; t) d\xi d\eta \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_{\alpha,t} \{ f(x, y; t) \} \end{aligned} \quad (7.7)$$

すなわち、剛体回転により劣化した再構成画像 $\hat{f}(x, y)$ は、スキャン開始($t = 0$)から終了($t = T$)までの任意の時刻 t の剛体断層 $f(x, y, t)$ を重みとする、(7.5)式の点拡がり関数の線形和である。また剛体回転により劣化した再構成画像 $\hat{f}(x, y)$ は、任意の時刻 t における剛体断層 $f(x, y, t)$ に対して、 t に依存する劣化作用素 $\mathcal{D}_{\alpha,t}\{\cdot\}$ をほどこして得られる劣化画像と見なすこともできる(図34参照)。

劣化画像 $\hat{f}(x, y)$ から原画像 $f(x, y, t)$ を求める操作は、画像復元と呼ばれる。(7.7)式のような位置依存点拡がり関数による劣化から、画像復元するアルゴリズムも知られて

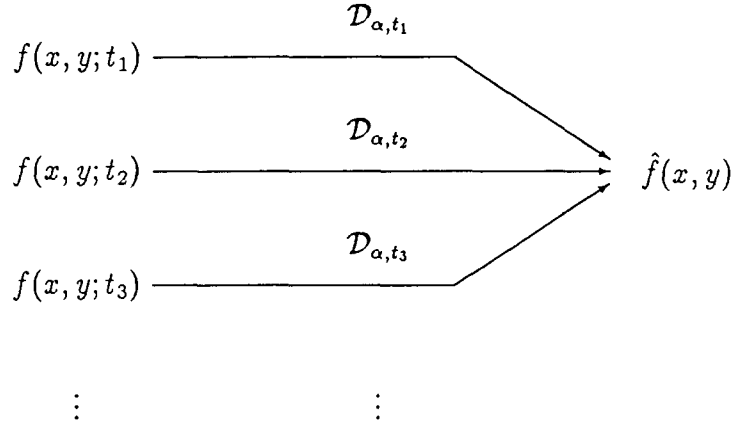


図 34: それぞれ異なる時刻における被写体断層, 例えば $f(x, y; t_1)$, $f(x, y; t_2)$, $f(x, y; t_3)$, $\dots$ ($0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \dots \leq T$) は, 各々の時刻毎に決まる劣化作用素 $\mathcal{D}_{\alpha, t_1}$, $\mathcal{D}_{\alpha, t_2}$, $\mathcal{D}_{\alpha, t_3}$, $\dots$ によって, 再構成画像 (劣化画像) $\hat{f}(x, y)$ へ変換される.

いる [40,41,42]. もし (7.7) 式に画像復元の手法が適用できるなら, 被写体の回転によって劣化した 1 枚の再構成画像 $\hat{f}(x, y)$ から, 様々な時刻における断層像の系列 $f(x, y; t_1)$, $f(x, y; t_2)$, $f(x, y; t_3)$, $\dots$ ($0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \dots \leq T$) を得ることができる. ただし, 本論文では再構成画像の劣化と CT 画像のアーチファクトに話題を絞って議論するため, 位置依存劣化の復元に関する理論および実験は扱わない.

7.2 モーションアーチファクト

7.1 節では再構成画像の濃度分布 $\hat{f}(x, y)$ を対象に「劣化」を議論した. この 7.2 節では, 7.1 節で明らかにされなかった「モーションアーチファクト」の性質と, O - xy 平面上での形態, 発生する位置等について議論する.

アーチファクトについて定性的な議論をするとき, 再構成画像の値 f をディスプレイの濃度階調にどう対応させるか問題となる. 同じ再構成画像であっても, 値 f の切り出し方によってディスプレイに映し出される濃度分布が異って見える. その仕方によって, アーチファクトが発生したり, しなかったりする. また画像表示に際しては, 人間の主観も入り得る. CT 装置を扱う者の立場から考えれば, 再構成画像に生ずる特

微的な変化がディスプレイに表示されるように、値 f を切り出すのが妥当である。本論文では、再構成画像に生ずる特徴的な変化（モーションアーチファクト）を、ディスプレイに適切な濃度階調で表示できるものと仮定する。また適切な濃度階調が割り当てられた再構成画像を CT 画像と呼ぶ。また再構成画像の CT 画像化に際して生ずる非線形性は無視できるものとする。なお CT 画像化については 2.4 節を参照されたい。

7.2.1 ぶれ像

7.1 節で議論したように、回転運動する剛体断層の再構成画像は、点拡がり関数の重み付き線形和として表現できる。ここでは再構成画像の CT 画像化について考えてみよう。劣化モデル式 (5.9) の両辺に、CT 画像化のための線形作用素 $\mathcal{I}_{CT}\{\cdot\}$ をほどこすと

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{CT}\{\hat{f}(x, y)\} &= \mathcal{I}_{CT}\left\{\iint_{\text{scan area}} \Delta_{\alpha,t}(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta; t) d\xi d\eta\right\} \\ &= \iint_{\text{scan area}} \mathcal{I}_{CT}\{\Delta_{\alpha,t}(x, y; \xi, \eta)\} f(\xi, \eta; t) d\xi d\eta\end{aligned}\tag{7.8}$$

となる。左辺すなわち $\mathcal{I}_{CT}\{\hat{f}(x, y)\}$ は、再構成画像の CT 画像化（剛体断層のぶれ像）を表す。また右辺の $\mathcal{I}_{CT}\{\Delta_{\alpha,t}(x, y; \xi, \eta)\}$ は、点拡がり関数の CT 画像化（点源のぶれ像）を表す。よって右辺は、原画像の濃度 $f(\xi, \eta; t)$ に応じて重み付けられた点源のぶれ像を、スキャンエリア内の全ての点 (ξ, η) について積分したものである。(7.8) 式は、剛体断層を構成する各々の点源のぶれ像を全て加算したものが、剛体断層から生ずるぶれ像であることを示している。

第 4 章では、回転運動する点源のぶれ像について解析したが、その結果を以下簡単にまとめる：

1. 点源を原点中心に一定半径、一定角速度で回転させるとき、そのぶれ像は内（外）サイクロイドと呼ばれる平面曲線を描く。
2. 平面曲線 (x, y) は ϕ をパラメータとして (6.32) 式、あるいは (6.33) 式で与えられる。うち $0 \leq \phi \leq \pi$ の部分だけが CT 画像に描かれる。

3. 点拡がり関数 $\Delta_{\alpha}(x, y; \xi, \eta)$ の場合と同様に、角速度比 α と点源の初期座標 $(\xi, \eta) = (l \cos \theta_0, l \sin \theta_0)$ によって、ぶれ像の軌跡は一意に定まる。
4. 内（外）サイクロイドは「弧」と「尖点」から構成される。パラメータ (α, ξ, η) の与え方によって、曲線のどの部分が出現するか決定され、円弧（ $\frown$ ）コンマ（ $,$ ）口髭（ $\succ$ ）などが描かれる。
5. 「弧」に比して「尖点」部分の濃度（階調）は高い。
6. 背景濃度に比して、曲線のすぐ内側（尖点の突起が出る側）の濃度は低く、外側の濃度は高い。

これらの結果を、回転する剛体断層のぶれ像の解析に利用する。

(7.8) 式から明らかなように、原画像 $f(\xi, \eta; t)$ が与えられたときに、剛体のぶれ像 $\mathcal{I}_{CT} \{ \hat{f}(x, y) \}$ もパラメータ (β, γ) によって一意に定められる（CT 画像化のパラメータ a, b は適宜決められ、固定されている）。剛体断層のぶれ像は、剛体断層を構成する点源の各々のぶれ像を全て加算したものと見なせる。例えば点源に対するぶれの形状は、 xy 平面内における位置関係を保存しながら、剛体のぶれ像の中に埋め込まれる。従って、剛体に対するぶれが描かれる位置は、剛体を構成する点源の各々についてのぶれの形状を算出し、これらを全て xy 平面に描くことによって知ることができる（図 35 参照）。点源のぶれが持つ性質は、CT 画像化が線形的であるため、剛体のぶれに対しても保存される。それは例えば尖点の生ずる位置などに反映される。例えば単独の点源 $\delta(x, y; \xi, \eta)$ が CT 画像中に尖点を描くならば、剛体断層を構成する点源 $\delta(x, y; \xi, \eta)$ も同様に、剛体断層の CT 画像中に尖点を描く（あるいは尖点の発生する位置に濃度変化を引き起こす）。従って剛体断層のぶれにも、円弧（ $\frown$ ）コンマ（ $,$ ）口髭（ $\succ$ ）などの形状が見られる。例えば、第 4 章において点源の近似として用いた円形断層（剛体の一種）のぶれは、パラメータ (β, γ) に従って、点源のぶれと同様の形状を CT 画像中に描く（7.3 節を参照）。

任意の剛体を被写体断層とする場合、その回転に対するぶれ像の形態や濃淡を細かく予測することは難しい。しかし、特定の剛体を想定したとき、剛体のぶれ像に対する顕著な性質を引き出すことができる。これを次節で述べる。

7.2.2 ストロボスコープ像

臨床においてストロボスコープ像と呼ばれるアーチファクトは、断層中の明確な線（あるいは明確な縁のある物体）が動きに対して均一にぶれずに、ある所は静止しているかのようにはっきり画像化され、ある所はひどくぶれて画像化されるものである。被写体が止まって見える現象が、二度三度と現れる場合もあり、そのときは被写体が二重三重にぶれて画像化されてしまう。本節では、ストロボスコープ像を検証するために、剛体断層の一つとして線源を想定する。線源は点源（デルタ関数）が直線上に整列したものである。

原点を一端に持つ直線 L をスキャンエリア内に考える。 L が x 軸となす角度を θ_0 とする。この直線上でのみインパルスを持つ画像（線源）を時刻 0 の被写体断層とする。 $x=l \cos \theta$, $y=l \sin \theta$ とすると、2次元デルタ関数 $\delta(x, y)=l^{-1}\delta(l)\delta(\theta)$ が成り立つので、被写体断層は

$$f(x, y, 0) = l^{-1}\delta(\theta_0 - \theta) \quad (7.9)$$

と表せる。この線源を、一定角速度 $\pi\alpha/T$ で回転させるとき、(7.4) 式より再構成画像は次式のように表せる：

$$\begin{aligned} \hat{f}(x, y) &= l^{-1} \int \int_{\text{scan area}} \Delta_{\alpha}(x, y; l \cos \theta, l \sin \theta) \delta(\theta_0 - \theta) l dl d\theta \\ &= \int_0^U \Delta_{\alpha}(x, y; l \cos \theta_0, l \sin \theta_0) dl \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{\alpha}(x, y, \theta_0) \end{aligned} \quad (7.10)$$

$\Lambda_{\alpha}(x, y, \theta_0)$ は、線源を原点中心に回転させて得られる線拡がり関数 [40,41,42] と見なせる。また先拡がり関数の CT 画像化は

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\text{CT}} \{ \hat{f}(x, y) \} &= l^{-1} \int \int_{\text{scan area}} \mathcal{I}_{\text{CT}} \{ \Delta_{\alpha}(x, y; l \cos \theta, l \sin \theta) \} \delta(\theta_0 - \theta) l dl d\theta \\ &= \mathcal{I}_{\text{CT}} \{ \Lambda_{\alpha}(x, y, \theta_0) \} \end{aligned} \quad (7.11)$$

で表される。この式は、線源 $l^{-1}\delta(\theta_0 - \theta)$ を重みとする点拡がり関数 CT 画像の線形和が、線拡がり関数の CT 画像であることを意味する。またパラメータ (α, θ_0) を決定すれば、線拡がり関数の CT 画像が一意に定まることを示す。

以下の解析では便宜上、有限の長さを持つ半直線を扱う。原点を一端に持ち長さ λ の半直線 L をスキャンエリア内に考える。 L が x 軸となす角度を θ_0 とする。 L 上でのみインパルスを持つ画像（線源）を時刻 0 の被写体断層とする。この線源を、一定角速度 $\pi\alpha/T$ で回転させる。このとき、 L 上かつ原点からの距離 l に存在する点源が CT 画像中に描くぶれ像（平面曲線）は、(6.33) 式に示したように、 ϕ をパラメータとして極座標表示できる：

$$\begin{cases} R = l\sqrt{1 - \alpha(2 - \alpha)\sin^2[(\alpha - 1)\phi + \theta_0]} \\ \Theta = \phi + \arctan\{(1 - \alpha)\tan[(\alpha - 1)\phi + \theta_0]\} \end{cases} \quad (6.33)$$

7.1節および 6.5節より、線源に対するぶれ像の軌跡は、(6.33) 式の曲線を $0 \leq l \leq \lambda$ にわたって全て、 xy 平面上に描いたものである（図 35 参照）。従って、線源に対するぶれ像は集合 $\{(R, \Theta); 0 \leq l \leq \lambda\}$ によって表すことができる。この集合を構成する曲線について、6.5節および 6.6節より以下のことが明らかである：

【特質 1】 角速度比が α 、線源 L の初期位相が θ_0 という条件下において、 $0 \leq \phi \leq \pi$ を満たす全ての ϕ に対して、距離 R は l に比例する。すなわち α と θ_0 が同じで l のみ互いに異なる曲線どうしは、互いに交わらない。

【特質 2】 曲線の位相 Θ は l に依存しない。従って L 上の点源は全て同じ位相で尖点および弧を描く。例えば L 上の点源は $0 \leq l \leq \lambda$ を満たすどの l に対しても、 $\sin^2[(\alpha - 1)\phi + \theta_0] = 1$ を満たす ϕ において尖点を持つ。（(6.33) 式は $\alpha = 0, 2$ のとき平面内の 1 点を、 $\alpha = 1$ のとき円を表し、このとき尖点は現れない。）

これらの特質により、線源がぶれ像を描くときは、図 35 のように尖点部分が直線状に整列する。前章で述べたように、尖点の濃度は他の部分に比して高いので、尖点部分にだけはっきりした線像が現れ、他の部分はぶれて見えないという現象が生ずる。線源に対するストロボスコープ像はこのようにして発生する。また $0 \leq \phi \leq \pi$ において尖点の現れる数と、ストロボスコープ像（多重像）の現れる回数は等しいことが分かる。

線源の場合ほど顕著ではないが、縁の明確な被写体断層（例：細長い楕円）に対しても、線源と同様の理屈でストロボスコープ像は発生する。このことは、計算機シミュレーションにより確認される。

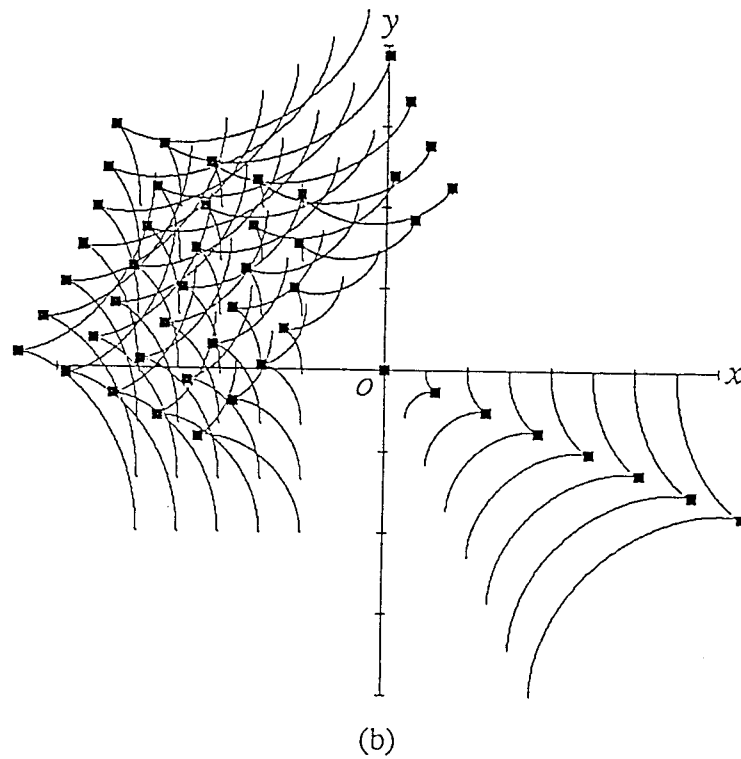
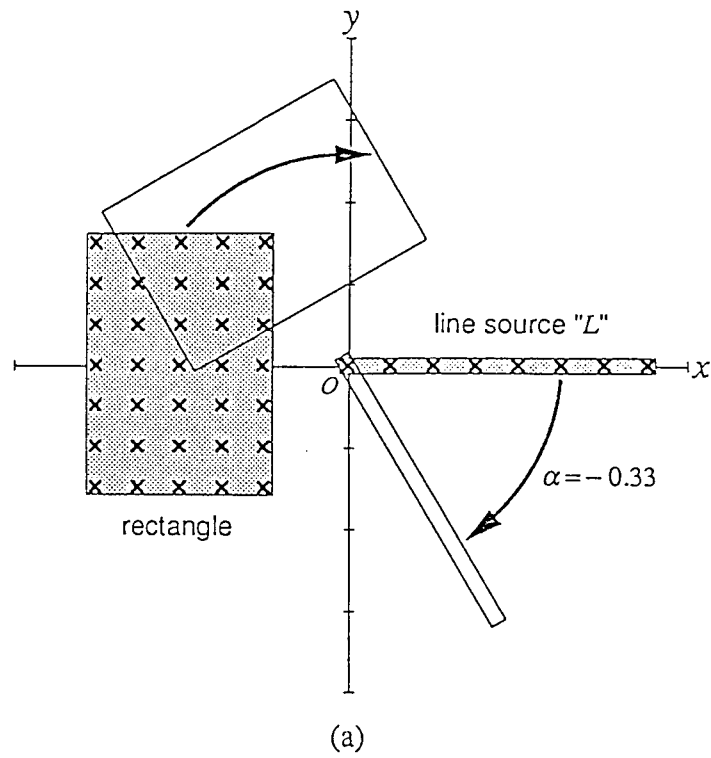


図 35: (a) 回転運動する剛体断層. 線源 L および長方形ファントムは, 原点中心に $\alpha = 1/3$ (約 0.33) で回転する. (b) 点源 ($\times$ 印) の描くふれの曲線. 尖点部分 (■印) にストロボスコープ像が発生する.

7.3 計算機シミュレーション

本節では、回転運動する剛体断層に対する計算機シミュレーションの概要と、実験結果についてまとめる。すなわち、時間に依存する被写体—計測系と画像再構成系から構成される断層撮影モデルを計算機上に構築し、剛体断層の回転運動による画像劣化と、CT 画像中の剛体断層のふれ像、およびストロボスコープ像を検証する。剛体断層（数値ファントム）としては、細長い長方形（線源を近似する）と Shepp - Logan の頭部ファントムを想定する。これらの数値ファントムは、それぞれに与えられたパラメータに従って、スキャンエリアの原点を中心に回転運動する。

なお再構成アルゴリズムとしてはフィルタ補正逆投影法を用い、その数値計算には Rosenfeld と Kak の方法（文献 [20,21]）を用いる。数値計算された再構成画像はディスプレイに濃度階調で表示され、CT 画像化される。画像再構成および画像表示に関する条件等については、4.8節の 4.8.1に従う。

円形ファントム

実験に用いる 1 つめのファントムは、円形で内部に小円を 5 つ含む（図 36 左上）。3 つの小さい方の小円は、半径 0.05、濃度 200.0 である。2 つの大きい方の小円は半径 0.1、濃度 200.0 である。またファントム本体の濃度は 50.0、半径は 1.5 である。5 つの小円は一列に配され、真ん中の一つはファントムの中心に位置する。各々の小円は、近似的に点源と見なせる [50]。この数値ファントムの中心をスキャンエリアの原点に一致させ、ファントム自身を時計廻りに一定角速度 ($-\pi/(3T)$, T はスキャン時間) で回転させる。また角速度比は $\alpha = -1/3$ で与える。CT 画像化は、パラメータ $a = 1.28$, $b = 25.0$, $I_0 = 0$ によってなされる。図 36 左上の円形ファントム断層を時刻ゼロの原画像とし、これを原点中心に回転運動させて CT 画像化すると、図 36 右上のように、ファントム内部の各々の小円から内サイクロイドを描くふれ像が生ずる。この実験結果は、坂下ら X 線 CT 装置を用いて動態撮影したファントムのふれ像（図 3）を良く再現している。また、重み $f(\xi, \eta; 0)$ 付きの点拡がり関数 $\Delta_\alpha(x, y; \xi, \eta)$ を、 xy 平面上で線形的に加算すれば再構成画像 $\hat{f}(x, y)$ が得られるという (7.4) 式の意味を反映している。ファントム本体は濃度一定で回転対称な形状のため、本体からはふれが生じない。

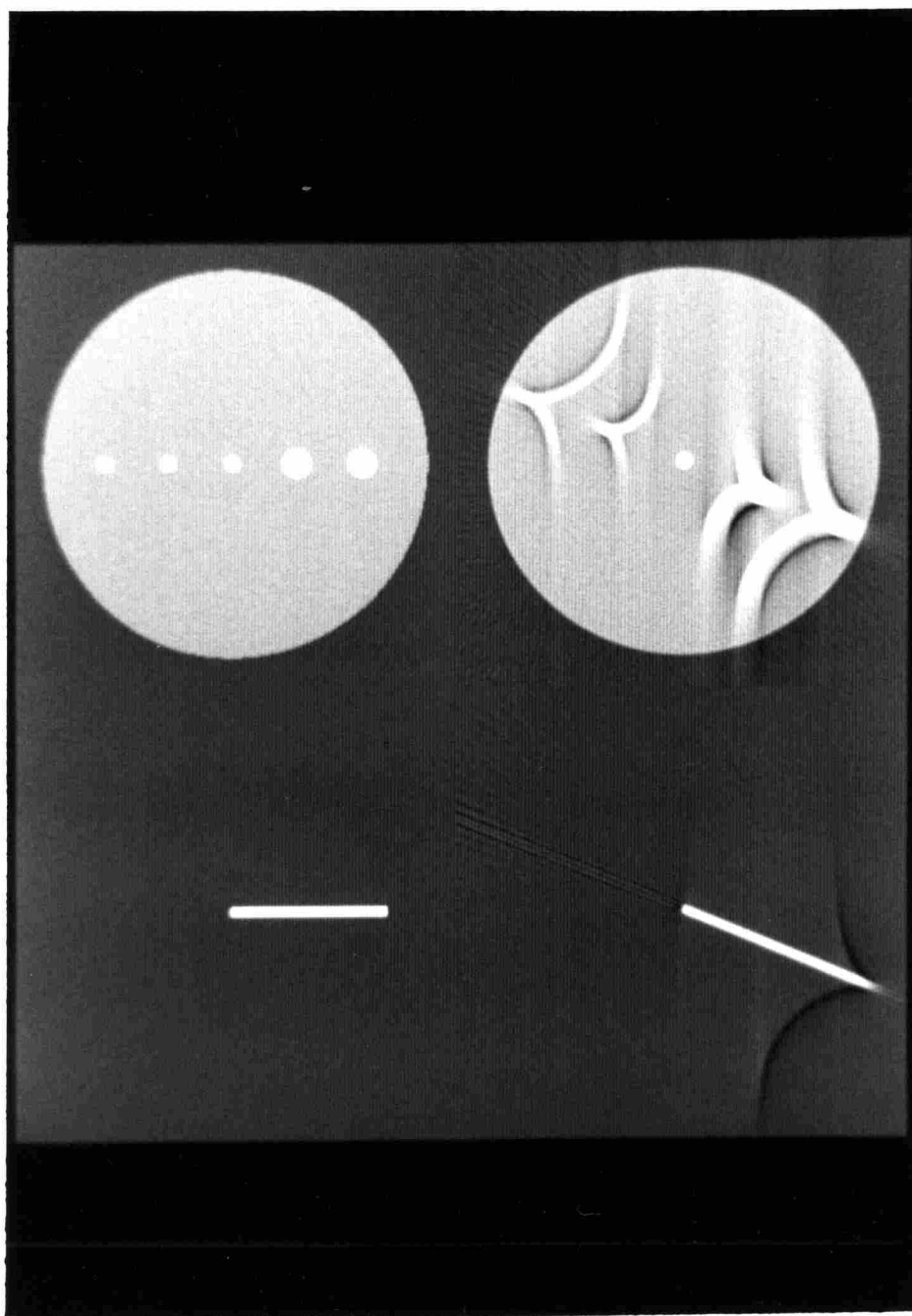


図 36: [左上] 内部に小円を 5 つ含む円形ファントム. [右上] 左の円形ファントムを原点中心に $\alpha = -1/3$ で回転させ得られるぶれ像. [左下] 線源を模した細長い長方形ファントム. その一端は原点上に固定されている. [右下] 左の長方形ファントムを, 円形ファントムと同様の条件で回転させ得られるぶれ像 (ストロボスコープ像).

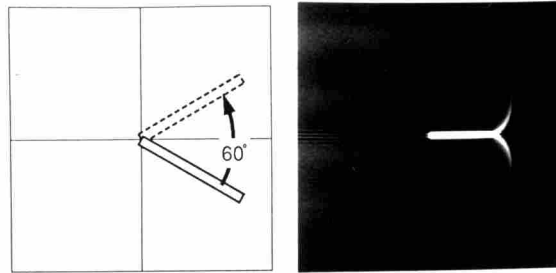
線源を模した長方形ファントム

2 つめのファントム (図 36 左下) は線源を模した濃度一定の棒 (細長い長方形) である。ファントム断層の濃度は一定 ($\rho = 400.0$) である。長辺の長さは 1.0, 短辺の長さは 0.1 とする。長方形断層の投影については文献 [19] を参照すると良い。なお長方形ファントムおよびその再構成画像 (ふれ画像) の CT 画像化は, パラメータ $a = 1.6, b = 50.0, I_0 = 0$ で行う。このファントムは, その一端を原点上に固定した状態で, スキャンエリア内を一定の角速度で回転運動する。ファントムは近似的に線源と見なせる。

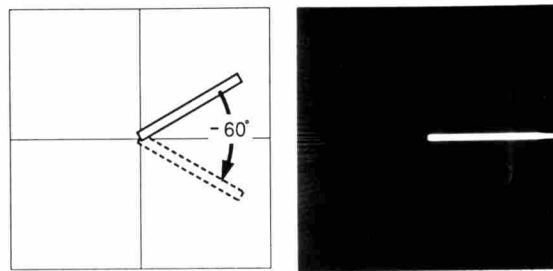
この図 36 左下のファントム断層を時刻ゼロの原画像とし, 先程の円形のファントムと同様の条件 (原点中心, 角速度 $-\pi/(3T)$) で回転させる。ファントムは常に一定角速度で回転しているが, その CT 画像 (図 36 右下) には棒状ファントムが回転途中であたかも一回止まったかの様なふれ像 (ストロボスコープ像) が生じている。

7.2 節で議論したように, 剛体断層から生ずるストロボスコープ像の性質は, 断層を構成する微小要素 (点源) に対するふれ像の性質から類推できる。図 36 の棒状ファントムを例に考えた場合, ファントムを構成する微小要素は, 各々が内サイクロイドを描き, 同一の回転位相において尖点を持つ。ふれ像の濃度 (明るさ) はこの尖点部分において高くなるため, そこにストロボスコープ像が形成される。このことは, 図 36 右上 (ふれ像に尖点の現れる位相) と, 図 36 右下 (ストロボスコープ像の現れる位相) を比較すれば明らかである。

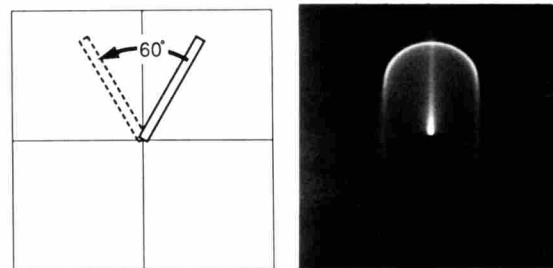
図 37 は, 時刻ゼロにおける角度 θ_0 と, スキャン時間の間に動く角度 $\pi\alpha$ (角速度は $\pi\alpha/T$) がそれぞれ異なる棒状ファントムを, 原点中心に回転させ CT 画像化するとき見られるストロボスコープ像である。CT 画像中の棒の本数は 0~2 本の間で増減し, また棒の長さは実際より長くなったり, 短くなったりしている。現行の X 線 CT 装置は, 計測投影の S/N 比を良くするために, 繰り返しスキャンと投影の加算平均により CT 像を得る。この加算法を併せて用いると, ストロボスコープ像の本数はさらに増える [48]。これらの実験結果は, 臨床で観察される多重像 [11,13,14,15] を良く再現している。



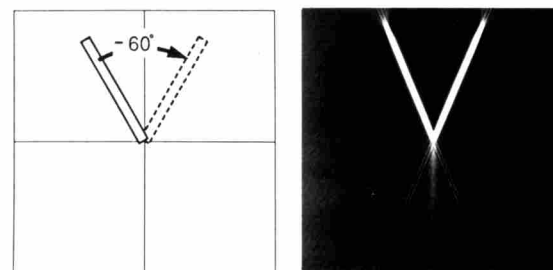
(1) $\alpha = -1/3$



(2) $\alpha = -1/3$



(3) $\alpha = 1/3$



(4) $\alpha = -1/3$

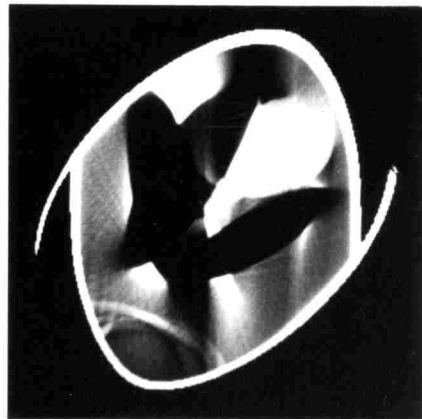
図 37: 時刻ゼロにおける角度 θ_0 と、スキャン時間に動く角度 $\pi\alpha$ がそれぞれ異なる棒状ファントムに対するストロボスコープ像.



(1)



(2)



(3)

図 38: (a) は時刻ゼロにおける頭部ファントム. (b) はファントムを反時計廻りに角速度 $\pi/(3T)$ で回転させた CT 画像, (c) は b と逆方向に角速度 $-\pi/(3T)$ で回転させた CT 画像. ふれ像, ストロボスコープ像が見られる.

Shepp - Logan の頭部ファントム

図 38(a) ～ (c) に, 剛体断層として Shepp - Logan の頭部ファントム (第 5 章の図 24 および表 3 参照) を用いたシミュレーション結果を示す. (a) は時刻ゼロにおける原画像, (b) はファントムを反時計廻りに角速度 $\pi/(3T)$ で回転させた CT 画像, (c) はファントムを (b) とは逆方向に角速度 $-\pi/(3T)$ で回転させた CT 画像である. ファントムを構成する楕円に対するふれ像, ストロボスコープ像が見られる.

第 8 章 並進運動と回転運動の合成

図 39 に示すように, xy 平面内における剛体断層の運動は, 並進運動と回転運動の 2 つの合成によって考えることができる. 本章では, 第 4 章と第 6 章で導出した点拡がり関数, 第 5 章と第 7 章で議論した劣化の解析を, 並進と回転の合成運動に対して拡張する. その後, 並進と回転の合成運動によるぶれ画像中のモーションアーチファクトについて議論し, 線源を近似する長方形ファントムと, Shepp - Logan の頭部ファントムを用いたシミュレーション結果について報告する.

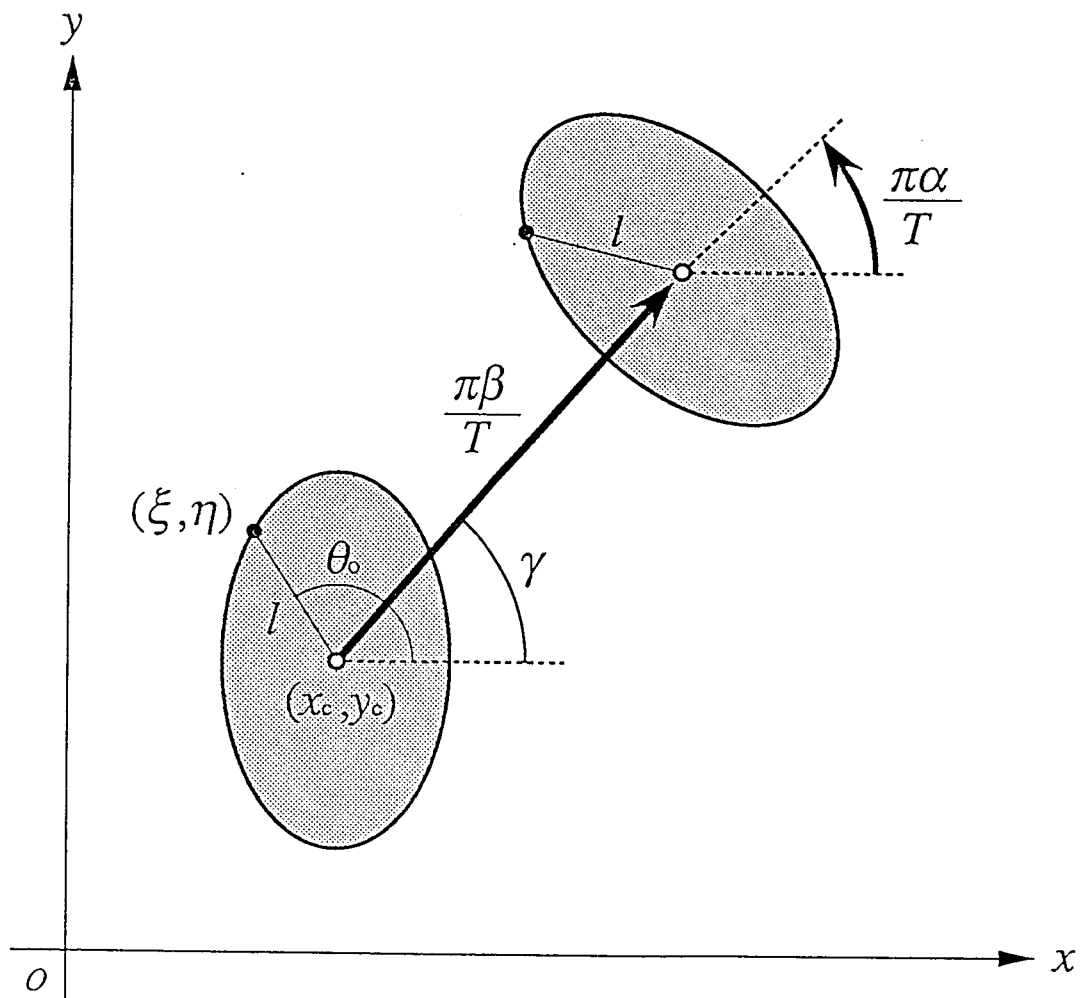


図 39: 剛体断層の運動を, 並進と回転の合成によって考える.

8.1 点拡がり関数の導出

被写体断層として点源（２次元デルタ関数）を想定する．この点源がスキャンエリア内を運動する場合を想定する．点源はスキャン時間 T の間に，角度 γ 方向へ距離 $\pi\beta$ だけ進む運動と，点 (x_c, y_c) を中心に角度 $\pi\alpha$ だけ回転する運動，すなわち並進と回転の合成された運動を行うものとする．なお被写体からの投影計測がなされる時間 T の間ならば，点源の並進運動については速度一定，回転運動については角速度一定と仮定できる．いま，並進運動の速度を一定値 $\pi\beta/T$ とし，かつ回転運動の角速度も一定値 $\pi\alpha/T$ とする．また投影計測の角速度も一定 (π/T) とする．時刻 t における点源の位置 (X_t, Y_t) は，次式によって与えられる：

$$\begin{cases} X_t = x_t + (\xi - x_c) \cos \theta_t - (\eta - y_c) \sin \theta_t + x_c \\ Y_t = y_t + (\xi - x_c) \sin \theta_t + (\eta - y_c) \cos \theta_t + y_c \end{cases} \quad (8.1)$$

$$(0 \leq t \leq T, 0 \leq \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \leq U)$$

ただし，式中の (x_t, y_t) と θ_t は次式を表すものとする：

$$\begin{cases} x_t = \frac{\pi\beta \cos \gamma}{T} t \\ y_t = \frac{\pi\beta \sin \gamma}{T} t \end{cases} \quad (8.2)$$

$$\theta_t = \frac{\pi\alpha}{T} t \quad (8.3)$$

定数 α は投影計測に対する回転運動の角速度比を，定数 β は投影計測の角速度に対する並進運動の速度の比を， (ξ, η) はスキャン開始時 ($t = 0$) における O - xy 平面内での点源の位置（初期座標）を表す．

スキャンエリア内の背景濃度を一様にゼロと仮定する．この点源を含む原画像は次式で表される：

$$f(x, y; t) = \delta(x - X_t, y - Y_t) \quad (8.4)$$

3.2節で導入した時間に依存する被写体—計測系をこの点源断層に応用する．投影の角度と時刻に関する制限 $\phi = (\pi/T)t$ の下で，この $f(x, y; t)$ から計測される投影は，

$$p^*(u, \phi) = \delta(u - X_\phi \cos \phi - Y_\phi \sin \phi) \quad (8.5)$$

である。ただし (X_ϕ, Y_ϕ) は、 $\phi = (\pi/T)t$ なる関係を用いて、点源の位置を表す (8.1) 式を、角度 ϕ をパラメータとして表したものである：

$$\begin{cases} X_\phi = (\beta \cos \gamma)\phi + (\xi - x_c) \cos \alpha\phi - (\eta - y_c) \sin \alpha\phi + x_c \\ Y_\phi = (\beta \sin \gamma)\phi + (\xi - x_c) \sin \alpha\phi + (\eta - y_c) \cos \alpha\phi + y_c \end{cases} \quad (8.6)$$

この投影を画像再構成系の処理（フィルタ補正逆投影法の操作 1,2）に従って変換して行く。4.4節と 6.3節において示した点からの再構成画像の導出の議論に、(8.5) 式の投影に適用すれば、(8.4) 式の並進と回転の合成運動を行う点源に対する再構成画像は、以下に示すような逆投影変換によって形式的に与えられる：

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(x, y) &= \int_0^\pi \frac{-d\phi}{2\pi^2 [(x - X_\phi) \cos \phi + (y - Y_\phi) \sin \phi]^2} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \Delta_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c}(x, y; \xi, \eta) \end{aligned} \quad (8.7)$$

この式は、点源の回転運動の角速度と投影計測の角速度の比 α 、回転運動の中心 (x_c, y_c) 、並進運動の速度と投影計測の角速度の比 β 、並進運動の方向を決める角度 γ 、および時刻 0 における点源の位置 (ξ, η) により一意に定まる。よって (8.7) 式は $\Delta_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c}(x, y; \xi, \eta)$ と表記することができる。CT 装置は、時間に依存する被写体—計測系と、画像再構成系から構成される一つの線形システム（断層撮影モデル）と見なすことができる。従って $\Delta_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c}(x, y; \xi, \eta)$ は次節に示すように、時刻 0 の剛体断層を入力とし、また剛体断層が並進と回転の合成運動するときその再構成画像を出力とする線形システムの、点拡がり関数と見なすことができる。

8.2 画像劣化モデル

断層の形状および濃度が、動きによって変化しない物体（剛体）を再構成の対象としよう。この剛体の運動を、並進運動と回転運動の組み合わせによって表す。また剛体の運動に伴う再構成画像の「劣化」を定式化する。スキャンエリア内に任意の剛体断層を想定する。この剛体断層の運動は、角度 γ 方向へ一定の速度 $\pi\beta/T$ で並進する運動と、点 (x_c, y_c) を中心に一定角速度 $\pi\alpha/T$ で回転する運動の組み合わせと考えられる（スキャン時間 T の間、剛体の運動は一定と見なせる）。投影計測の角速度は一定値 π/T とする（ π/T は CT 装置に固有のパラメータである）。剛体断層の濃度とスキャ

ンエリア内のバックグラウンドの濃度（通常ゼロとする）を併せて原画像 $f(x, y; t)$ で表す。混同が生じない場合には、 $f(x, y; t)$ のことを分かりやすく剛体断層と呼ぶ。

以下、スキャンエリア内を運動する剛体断層 $f(x, y; t)$ と再構成画像との間に成り立つ関係式（画像劣化モデル）を導出する。まず時刻 t における剛体断層 $f(x, y; t)$ を、時刻 0 の剛体断層 $f(x, y; 0)$ を用いて次式のように表す：

$$\begin{aligned} f(x, y; t) &= \int \int_{\text{scan area}} \delta(x - X_t, y - Y_t) f(\xi, \eta; 0) d\xi d\eta \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c; t} \{f(x, y; 0)\} \end{aligned} \quad (8.8)$$

ただし、 X_t と Y_t はそれぞれ (8.1) 式によって与える。 $\mathcal{T}_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c; t} \{ \cdot \}$ は時間推移のための線形作用素で、ある時刻 t_0 の剛体断層 $f(x, y; t_0)$ が与えられたとき、パラメータ $\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c, t$ のもとで時間 t 後の剛体断層 $f(x, y; t_0 + t)$ を算出する。

(8.8) 式の両辺について、投影計測と時刻に関する制限 $\phi = (\pi/T)t$ の下で、(3.4) 式および (8.5) 式に従って 2 次元 Radon 変換をおこなうと、次式の投影を得る：

$$p^*(u, \phi) = \int \int_{\text{scan area}} \delta(u - X_\phi \cos \phi - Y_\phi \sin \phi) f(\xi, \eta; 0) d\xi d\eta \quad (8.9)$$

ただし、 X_ϕ と Y_ϕ はそれぞれ (8.6) 式で与える。

さらにフィルタ補正逆投影の操作 1, 2 に従い、(8.9) 式の両辺へ、いくつかの線形変換（Fourier 変換、逆投影変換など）を再構成のためにほどこす。8.1 節の結果を用いれば、 $\delta(u - X_\phi \cos \phi - Y_\phi \sin \phi)$ は操作 1, 2 によって $\Delta_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c}(x, y; \xi, \eta)$ へ変換される。よって、再構成画像 $\hat{f}(x, y)$ は点拡がり関数 $\Delta_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c}(x, y; \xi, \eta)$ を用いて、次のように表記できる：

画像劣化の定式化（時刻 0）

$$\begin{aligned} \hat{f}(x, y) &= \int \int_{\text{scan area}} \Delta_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c}(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta; 0) d\xi d\eta \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c} \{f(x, y; 0)\} \end{aligned} \quad (8.10)$$

この (8.10) 式による再構成画像の定式化は、剛体が並進と回転の合成運動をするときの再構成画像 $\hat{f}(x, y)$ が、 xy 平面における点拡がり関数の重み付き線形和として表せることを表している。しかし第 5 章で議論した並進運動の場合と異なり、点拡がり関数を重畳核とする 2 次元重畳積分として、(8.10) 式を表すことはできない。

なお(8.10)式より並進と回転をともなう剛体の再構成画像は、パラメータ $\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c, \xi, \eta$ と原画像 $f(x, y; 0)$ (時刻 $t = 0$) によって一意に決定できることが分かる。よって(8.10)式は、時刻ゼロにおける剛体断層とその再構成画像(劣化画像)の関係を与える画像劣化モデル[40,41,42]と見なせる。画像劣化の性質はモデルの劣化関数(すなわち点拡がり関数)によって決定される。(8.7)式から明らかなように、 $\Delta_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c}(x, y; \xi, \eta)$ は並進運動の場合の点拡がり関数のように、差の形(例えば $\Delta_{\alpha}(x - \xi, y - \eta)$)と表記することは、いかなる変数の置き換えによってもできない。したがって $\Delta_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c}(x, y; \xi, \eta)$ は、点源の初期座標 (ξ, η) に依存して (x, y) 平面上での性質が変化する $\Delta_{\alpha}(x, y; \xi, \eta)$ は、「位置依存点拡がり関数」である。また(8.7)式によって定式化された再構成画像には、平面上の位置に依存して、劣化の生じていることが分かる。

(8.10)式を、任意の時刻 t ($0 \leq t \leq T$) の剛体断層に対して適用できるように拡張しよう。(8.8)式によれば、時刻ゼロの剛体断層 $f(x, y, 0)$ は $f(x, y; t)$ を用いて次のように表すことができる：

$$f(x, y; 0) = \mathcal{T}_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c; -t} \{ f(x, y; t) \} \quad (8.11)$$

これを(8.10)式へ適用する。(8.10)式の ξ, η をそれぞれ ξ', η' で置き換えれば、

$$\begin{aligned} \hat{f}(x, y) &= \iint_{\text{scan area}} \Delta_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c}(x, y; \xi', \eta') \mathcal{T}_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c; -t} \{ f(\xi', \eta'; t) \} d\xi' d\eta' \\ &= \iint_{\text{scan area}} \left\{ \iint_{\text{scan area}} \Delta_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c}(x, y; \xi', \eta') \delta(\xi' - X_{-t}, \eta' - Y_{-t}) d\xi' d\eta' \right\} \\ &\quad \cdot f(\xi, \eta; t) d\xi d\eta \\ &= \iint_{\text{scan area}} \Delta_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c}(x, y; X_{-t}, Y_{-t}) f(\xi, \eta; t) d\xi d\eta \\ &= \iint_{\text{scan area}} \mathcal{T}_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c; -t} \{ \Delta_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c}(x, y; \xi, \eta) \} f(\xi, \eta; t) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (8.12)$$

と変形できる。ここで $\Delta_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c}(x, y; \xi, \eta)$ を時刻ゼロの点拡がり関数と見なし、また時刻 t の点拡がり関数を

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c; t}(x, y; \xi, \eta) &= \mathcal{T}_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c; -t} \{ \Delta_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c}(x, y; \xi, \eta) \} \\ &= \Delta_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c}(x, y; X_{-t}, Y_{-t}) \end{aligned} \quad (8.13)$$

と定義する。然るに、

$$\Delta_{\alpha,\beta,\gamma,x_c,y_c;0}(x,y;\xi,\eta) = \Delta_{\alpha,\beta,\gamma,x_c,y_c}(x,y;\xi,\eta) \quad (8.14)$$

である。(8.13)を用いて(8.12)式を書き換えれば、次式を得る：

画像劣化の定式化 (時刻 t)

$$\begin{aligned} \hat{f}(x,y) &= \int \int_{\text{scan area}} \Delta_{\alpha,\beta,\gamma,x_c,y_c;t}(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta;t) d\xi d\eta \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_{\alpha,\beta,\gamma,x_c,y_c;t} \{ f(x,y;t) \} \end{aligned} \quad (8.15)$$

すなわち、スキャン開始 ($t=0$) から終了 ($t=T$) に至る間の任意の時刻 t を考えたとき、剛体の並進と回転の合成運動により劣化した再構成画像 $\hat{f}(x,y)$ は、剛体断層 $f(x,y;t)$ を重みとする点拡がり関数 $\Delta_{\alpha,\beta,\gamma,x_c,y_c;t}(x,y;\xi,\eta)$ の線形和であることが分かる。あるいは再構成画像 $\hat{f}(x,y)$ は、剛体断層 $f(x,y;t)$ に対し t に依存する劣化作用素 $\mathcal{D}_{\alpha,\beta,\gamma,x_c,y_c;t} \{ \cdot \}$ をほどこしたものと見なせる。

8.3 点源のふれ像

本節では、並進と回転をともなう剛体断層の CT 画像に生ずるモーションアーチファクト、とくにふれ像について解析した結果をまとめる。まず点源が並進と回転の合成運動をするときに、その再構成画像 (点拡がり関数 $\Delta_{\alpha,\beta,\gamma,x_c,y_c;t}(x,y;\xi,\eta)$) の CT 画像化に生ずるふれの形状について議論する。さらに、そのふれの形状が平面曲線であり、かつ尖点 (◁) と呼ばれる突起部分を曲線の途中に持つこと、尖点の発生位置が特定できることなどについて述べる。

8.3.1 ふれの形状

4.5節や6.4節で議論したように、運動する点源に対する CT 画像は、点源からのフィルタ補正投影プロファイルを層と見なして、これを積層 (逆投影) することによって解析することができる。そして点源に対するふれ像が CT 画像中に現れる場所は、運動する点源を通過した X 線ビーム (Radon 変換の積分路) を表す直線群 $\{ M(\phi) \}$ の包絡線上である。これらの解析結果は、点源が並進と回転の合成運動をする場合においても適用することができる。

スキャンエリア内を運動する点源の位置を、 ϕ をパラメータとする O - xy 座標 (X_ϕ, Y_ϕ) によって表せば

$$\begin{cases} X_\phi = (\beta \cos \gamma)\phi + (\xi - x_c) \cos \alpha\phi - (\eta - y_c) \sin \alpha\phi + x_c \\ Y_\phi = (\beta \sin \gamma)\phi + (\xi - x_c) \sin \alpha\phi + (\eta - y_c) \cos \alpha\phi + y_c \end{cases} \quad (8.16)$$

である。どの ϕ に対しても、点 (x_ϕ, y_ϕ) を必ず通る直線 $M(\phi)$ は次式によって与えられる：

$$x \cos \phi + y \sin \phi = X_\phi \cos \phi + Y_\phi \sin \phi \quad (8.17)$$

直線群 $\{M(\phi) \mid 0 \leq \phi \leq \pi\}$ の包絡線がぶれの形状を表す。すなわち、並進と回転の合成運動をする点源から生ずるぶれの図形的同定は、この包絡線を求める問題に帰着される。この包絡線を求めるために、(8.17) 式を ϕ について微分する：

$$-x \sin \phi + y \cos \phi = \dot{X}_\phi \cos \phi - X_\phi \sin \phi + \dot{Y}_\phi \sin \phi + Y_\phi \cos \phi \quad (8.18)$$

ただし、 X_ϕ, Y_ϕ を ϕ で微分したものを、それぞれ $\dot{X}_\phi, \dot{Y}_\phi$ と表記するならば、

$$\begin{cases} \dot{X}_\phi = \beta \cos \gamma - \alpha(\xi - x_c) \sin \alpha\phi - \alpha(\eta - y_c) \cos \alpha\phi \\ \dot{Y}_\phi = \beta \sin \gamma + \alpha(\xi - x_c) \cos \alpha\phi - \alpha(\eta - y_c) \sin \alpha\phi \end{cases} \quad (8.19)$$

によって与えられる。直線群 $\{M(\phi) \mid 0 \leq \phi \leq \pi\}$ の包絡線は、(4.38) 式および (4.40) 式を同時に満たす。これらの式を整理して、 x と y をパラメータ ϕ で表したものが包絡線、すなわちぶれの形状を与える：

ぶれの形状 (一般式)

$$\begin{cases} x = X_\phi - [\dot{X}_\phi \cos \phi + \dot{Y}_\phi \sin \phi] \sin \phi \\ y = Y_\phi + [\dot{X}_\phi \cos \phi + \dot{Y}_\phi \sin \phi] \cos \phi \end{cases} \quad (8.20)$$

さらに $X_\phi, Y_\phi \sim$ (8.16) 式を適用し、また $\dot{X}_\phi, \dot{Y}_\phi \sim$ (8.19) 式を適用すれば、次式を得る：

ぶれ像の形状 (並進運動と回転運動の合成)

$$\begin{cases} x = \frac{\beta \cos \gamma}{2} (2\phi - \sin 2\phi) - \frac{\beta \sin \gamma}{2} (1 - \cos 2\phi) + x_c \\ \quad + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) l \cos(\alpha\phi + \theta_0) + \frac{\alpha l}{2} \cos[(\alpha - 2)\phi + \theta_0] \\ y = \frac{\beta \cos \gamma}{2} (1 + \cos 2\phi) + \frac{\beta \sin \gamma}{2} (2\phi - \sin 2\phi) + y_c \\ \quad + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) l \sin(\alpha\phi + \theta_0) - \frac{\alpha l}{2} \sin[(\alpha - 2)\phi + \theta_0] \end{cases} \quad (8.21)$$

なお (8.21) 式中の l と θ_0 はそれぞれ次式で与える：

$$\begin{cases} l &= \sqrt{(\xi - x_c)^2 + (\eta - y_c)^2} \\ \theta_0 &= \arctan\left(\frac{\eta - y_c}{\xi - x_c}\right) \end{cases} \quad (8.22)$$

(8.21) 式は、4.6節の (4.41) 式に示した並進によるふれの形状（サイクロイド）と、6.5節の (6.32) 式に示した回転によるふれの形状（外・内サイクロイド）を足し算したものである。このことから、並進と回転の合成による点源のふれの形状も、（一般的あるいは広義の意味での）サイクロイド曲線であることが分かる。

以上の解析から、並進と回転の合成による運動をする点源が、CT 画像中に（広義の意味での）サイクロイド曲線をふれとして描くことが分かる。(8.7) 式の点拡がり関数 $\Delta_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c}(x, y; \xi, \eta)$ と同様に、(8.21) 式のサイクロイド曲線も 6 つのパラメータ $\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c, \xi, \eta$ によって一意に定まり、 xy 平面上においてサイクロイドの描かれる位置が決定される。

8.3.2 尖点の発生

4.6節や 6.5節で述べたように、サイクロイドあるいは内・外サイクロイドは、「弧（arc）」の部分と、弧と弧が接続する「尖点（cusp）」の部分から構成される。(8.21) 式で表されるサイクロイド曲線は、 $0 \leq \phi \leq \pi$ の部分だけが CT 画像中にふれとして描かれる。従って、パラメータ $\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c, \xi, \eta$ の与え方によっては、尖点が現れる場合と、尖点が現れず弧の部分だけが描かれる場合が生ずる。ふれに固有の形状、すなわち円弧（ $\frown$ ）コンマ（ $,$ ）口髭（ $\smile$ ）などは、こうした背景により生ずる。以下、サイクロイド曲線に尖点の現れる条件および位置について調べる。

前節において既に述べたように、ふれ像の形状を表すサイクロイド曲線は、様々な ϕ に対する直線 $\{M(\phi) | 0 \leq \phi \leq \pi\}$ の包絡線である。直線 $M(\phi)$ が点 (x_ϕ, y_ϕ) を必ず通過することを考慮すれば、サイクロイド曲線に尖点が発生するのは、(4.38) 式の直線が点源の進行方向に対して垂直となった時であることが分かる。このとき、軌道 (x_ϕ, y_ϕ) ($0 \leq \phi \leq \pi$) の接線方向ベクトル $\mathbf{n} = (\dot{X}_\phi, \dot{Y}_\phi)$ と直線 $M(\phi)$ の方向ベクトル $\mathbf{m} = (\sin \phi, -\cos \phi)$ の内積はゼロである：

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = \dot{X}_\phi \sin \phi - \dot{Y}_\phi \cos \phi = 0 \quad (8.23)$$

すなわち (8.23) 式は、尖点が生ずるための条件を表している。同式の $(\dot{X}_\phi, \dot{Y}_\phi)$ へ (8.19) 式を適用すれば、点源がパラメータ $\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c, \xi, \eta$ で一意に定まるような並進と回転の合成運動をする際の、尖点の現れるための条件式が求められる：

$$\beta \sin(\phi - \gamma) - \alpha(\xi - x_c) \cos[(\alpha - 1)\phi] + \alpha(\eta - y_c) \sin[(\alpha - 1)\phi] = 0 \quad (8.24)$$

この (8.24) 式を満たす ϕ を、ふれの形状を表す (8.21) 式へ代入すれば、 xy 平面上で尖点の現れる位置を求めることができる。

8.4 剛体断層のふれ像

8.2節で議論したように、並進と回転の合成運動の場合についても、剛体断層の再構成画像は点拡がり関数の重み付き線形和として表現できる。再構成画像の CT 画像化について考えてみよう。劣化モデル式 (8.15) の両辺に、CT 画像化のための線形作用素 $I_{CT}\{\cdot\}$ をほどこすと

$$\begin{aligned} I_{CT}\{\hat{f}(x, y)\} &= I_{CT}\left\{\iint_{\text{scan area}} \Delta_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c; t}(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta\right\} \\ &= \iint_{\text{scan area}} I_{CT}\left\{\Delta_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c; t}(x, y; \xi, \eta)\right\} f(\xi, \eta; t) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (8.25)$$

となる。左辺すなわち $I_{CT}\{\hat{f}(x, y)\}$ は、再構成画像の CT 画像化（剛体断層のふれ像）を表す。また右辺の $I_{CT}\left\{\Delta_{\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c; t}(x, y; \xi, \eta)\right\}$ は、点拡がり関数の CT 画像化（点源のふれ像）を表す。よって右辺は、原画像の濃度 $f(\xi, \eta; t)$ に応じて重み付けられた点源のふれ像を、スキャンエリア内の全ての点 (ξ, η) について積分したものである。(8.25) 式は、剛体断層を構成する各々の点源のふれ像を全て加算したものが、剛体断層から生ずるふれ像であることを示している。

(8.25) 式から明らかなように、原画像 $f(\xi, \eta; t)$ が与えられたときに、剛体のふれ像 $I_{CT}\{\hat{f}(x, y)\}$ もパラメータ $\alpha, \beta, \gamma, x_c, y_c, \xi, \eta$ によって一意に定められる（CT 画像化のパラメータ a, b は適宜決められ、固定されている）。例えば点源に対するふれの形状は、 $O-xy$ 平面内における位置関係を保存しながら、剛体のふれ像の中に埋め込まれる。従って、剛体に対するふれが描かれる位置は、剛体を構成する点源の各々につい

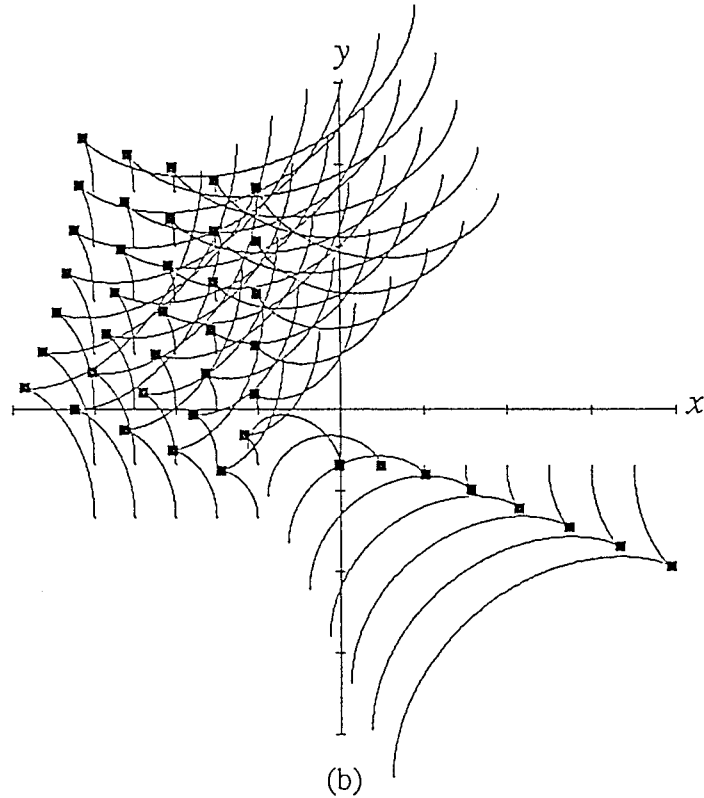
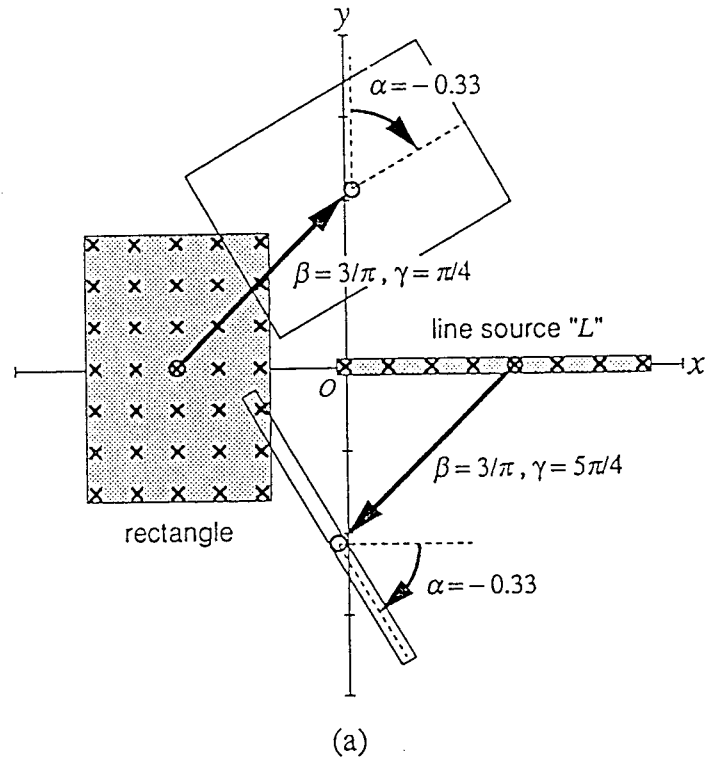


図 40: (a) 並進と回転の合成運動をする剛体断層. 線源 L は $\alpha = 1/3$ (約 0.33) , $\beta = 3/\pi, \gamma = \pi/2$ で, 長方形ファントムは $\alpha = 1/3, \beta = 3/\pi, \gamma = 3\pi/2$ で運動する. (b) 点源 (×印) の描くふれ. 尖点部分 (■印) にストロボスコープ像が発生する.

てぶれの形状を算出し、これらを全て $O-xy$ 平面に描くことによって知ることができる (図 40)。例えば剛体断層のぶれにも、円弧 (—) コンマ (,) 口髭 (⌢) などの形状が見られる。また単独の点源 $\delta(x - \xi, y - \eta)$ が CT 画像中に尖点を描くならば、剛体断層を構成する点源も同様に、剛体断層の CT 画像中に尖点を描く。尖点部分は濃度が大きくなる傾向があるため、尖点の発生する位置に濃度変化を引き起こし、その部位は特に明るく (白く) CT 画像化される。剛体断層内に縁のはっきりした閉領域や線源と見なせる部位を含む場合、尖点部分にはストロボスコープ像が発生する。

任意の剛体を被写体断層と想定する場合、剛体断層が並進と回転の合成で表されるような運動をすると、ぶれ像の形態や濃淡は複雑である。しかし線源など特定の剛体を想定したときは、ストロボスコープ像などの顕著なアーチファクトも見られる。剛体運動が並進と回転の合成の場合についても、第 5 章や第 7 章と同様に、剛体に対するぶれ像やストロボスコープ像を確認することができる。このことは、次節の計算機シミュレーションにおいて検証される。

8.5 計算機シミュレーション

本節では、並進と回転の合成運動をする剛体断層を対象に、計算機を用いた画像再構成実験の概要とその結果についてまとめる。本シミュレーションは、時間に依存する被写体—計測系と画像再構成系から成る断層撮影モデルを計算機上に構築した上で、剛体断層の並進と回転の合成運動によるぶれ像、およびストロボスコープ像を検証する。剛体断層 (数値ファントム) としては、細長い長方形 (線源を近似する) と Shepp - Logan の頭部ファントムを想定する。これらの数値ファントムは、それぞれに与えられたパラメータに従って、スキャンエリア内を運動するものとする。

なお再構成アルゴリズムとしてはフィルタ補正逆投影法を用い、その数値計算には Rosenfeld と Kak の方法 (文献 [20,21]) を用いる。数値計算された再構成画像はディスプレイに濃度階調で表示され、CT 画像化される。画像再構成および画像表示に関する条件等については、4.8 節の 4.8.1 に従う。

線源を模した長方形ファントム

表 6: 図 41のパラメータ設定

No.	α の値	β の値	γ の値	初期座標 (ξ, η)
(1)	$\frac{1}{3}$ (約 0.33)	$\frac{2.0}{\pi}$	0	$(-1, 0)$
(2)	$-\frac{1}{3}$ (約-0.33)	$\frac{2.0}{\pi}$	0	$(-1, 0)$
(3)	$\frac{1}{3}$ (約 0.33)	$\frac{2.0}{\pi}$	$\frac{\pi}{2}$	$(0, -1)$
(4)	$-\frac{1}{3}$ (約-0.33)	$\frac{2.0}{\pi}$	$\frac{\pi}{2}$	$(0, -1)$

注 1) 初期座標 (ξ, η) , 時刻 0 におけるファントムの回転中心 (x_c, y_c) , および長方形の重心は一致する.

1つめの数値ファントムとして, 5.3節で実験に用いたのと同じ細長い長方形(棒状)を考える. この数値ファントムは線源を模したものであり, 断層の濃度は一定 ($\rho = 400.0$) である. 長辺の長さは 2.0, 短辺の長さは 0.1 とする. 長方形断層の投影については文献[19]を参照すると良い. なお長方形ファントムおよびその再構成画像(ふれ画像)の CT 画像化は, パラメータ $a = 2.0, b = 50.0, I_0 = 0$ によってなされる. このファントムを右方向, あるいは上方向へ並進運動させながら, かつファントムの重心を軸(中心)に時計・反時計回りに回転運動させる. ファントムの傾き(長辺が y 軸となす角度)は, 時刻 $t = 0$ において, 並進運動の方向 γ と同じであるように設定する. 並進運動の速度 ($\pi\beta/T$) および運動の方向を示す角度 (γ) は, 回転運動の角速度 ($\pi\alpha/T$), 投影計測の角速度 (π/T) はそれぞれ一定と仮定する. なお回転中心 (x_c, y_c) とファントムの初期座標 (ξ, η) は共にファントムの重心に一致させる. これらのパラメータの値は実験ごとに与える(表 6 参照).

図 41 (1) ~ (4) に長方形ファントムの運動によって生じた CT 画像のふれを示す. それぞれの CT 画像についてのパラメータは表 6 のように設定する. 長方形ファントムは常に一定の運動をしているにも関わらず, 長方形ファントムが並進途中であたかも止まった様なふれ像, すなわちストロボスコープ像が, 図 41 (1) ~ (4) の CT 画像には生じている. 剛体断層から生ずるストロボスコープ像の性質は, 断層を構成する微小要素(点源)に対するふれ像の性質から類推できる. 図 41 の長方形ファントムの場合,

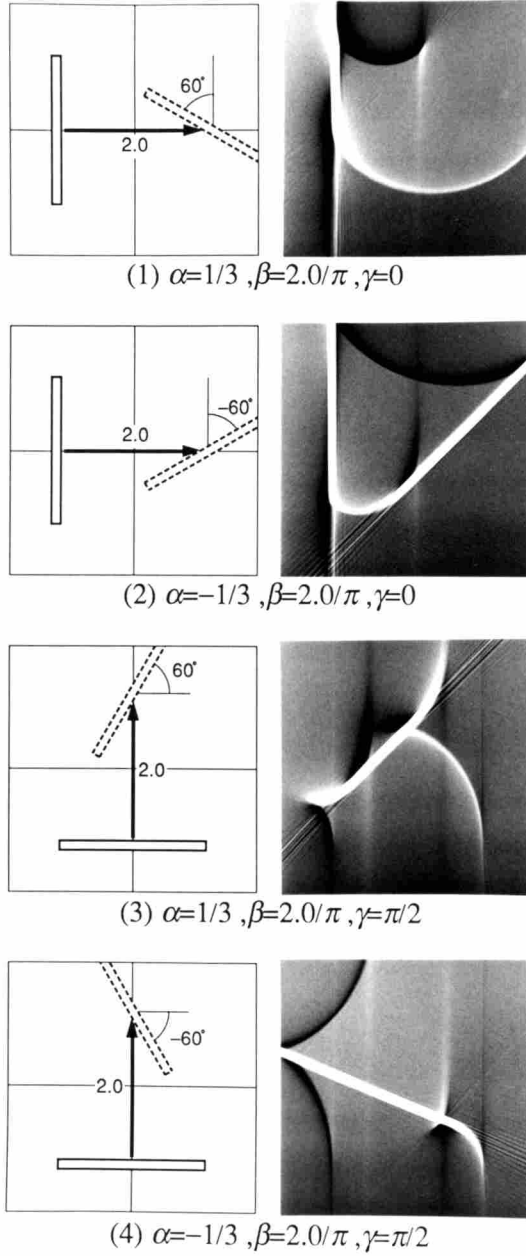


図 41: 並進と回転の合成運動をする長方形ファントム (左) とその CT 画像 (右). 各々についてパラメータは表 6 で与える. (8.21) 式のサイクロイドを描くふれ像と顕著なストロボスコープ像が観察できる.

表 7: 図 42のパラメータ設定

No.	並進運動のパラメータ			初期座標	CT 画像化のパラメータ		
	α の値	β の値	γ の値	(ξ, η)	a の値	b の値	I_0 の値
(1)	$\frac{1}{6}$ (約 0.17)	$\frac{0.4}{\pi}$	0	$(-0.2, 0)$	100.0	97.0	128
(2)	$-\frac{1}{6}$ (約-0.17)	$\frac{0.4}{\pi}$	0	$(-0.2, 0)$	100.0	106.5	128
(3)	$\frac{1}{6}$ (約 0.17)	$\frac{0.4}{\pi}$	$\frac{\pi}{2}$	$(0, -0.2)$	100.0	97.0	128
(4)	$-\frac{1}{6}$ (約-0.17)	$\frac{0.4}{\pi}$	$\frac{\pi}{2}$	$(0, -0.2)$	100.0	106.5	128

注 1) 初期座標 (ξ, η) と, 時刻 0 におけるファントムの回転中心 (x_c, y_c) は, 最も大きな楕円の時刻 0 における重心に一致する.

ファントムを構成する微小要素は, 各々がサイクロイド曲線を描き, 同一の位相 ϕ において尖点を持つ. ふれ像の濃度 (明るさ) はサイクロイド曲線の尖点部分において高くなるため, そこにストロボスコープ像が形成される. ストロボ像の数は 1 つとは限らず, パラメータの設定によっては, 図 41 (2) のように, 2 本のストロボスコープ像が生じるケースも有り得る.

Shepp - Logan の頭部ファントム

Shepp - Logan の頭部ファントムは, 楕円状の数値ファントムを組み合わせ, 人間の頭蓋断層を模倣したものである. 頭部ファントムの作製, および投影の計算等は, 文献 [20,21] を参照すると良い. この頭部ファントムを静止させた (通常) 状態で再構成し CT 画像化したものは, 5.3 節の図 24 に示した.

この頭部ファントムは, 右方向あるいは上方向に一定速度で並進運動しながら, かつ時計廻りあるいは反時計廻りに回転運動する. このとき図 42(1) ~ (4) のような CT 画像 (ふれ像) が得られる. それぞれの CT 画像について, 運動のパラメータ α, β, γ , 初期座標 (ξ, η) , および CT 画像化のパラメータ a, b, I_0 は表 7 のように設定される. なお初期座標 (ξ, η) およびファントムの回転中心 (x_c, y_c) として, 頭部ファントムを構成

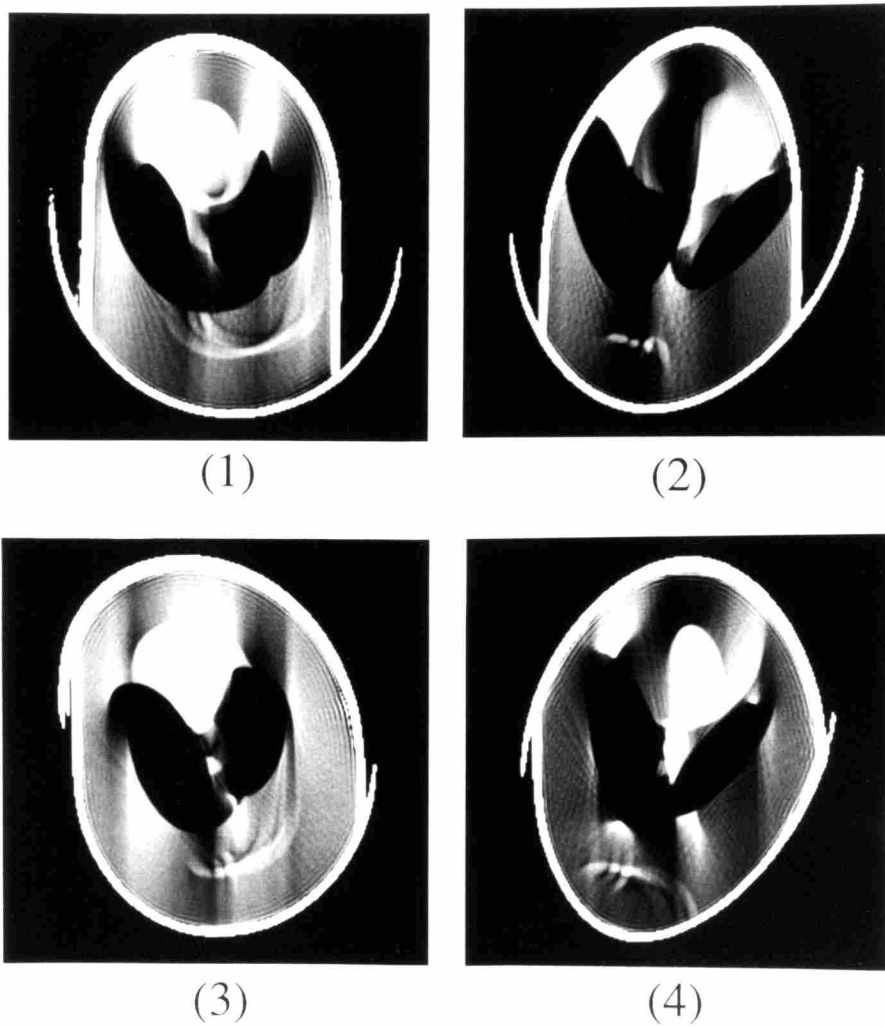


図 42: 並進と回転の合成運動をする Shepp - Logan の頭部ファントムの CT 画像. (1) 右へ並進, 反時計回転, (2) 右へ並進, 時計回転, (3) 上へ並進, 反時計回転, (4) 上へ並進, 時計回転. 各々のパラメータは表 7 で与える.

する最も大きな楕円の時刻0における重心の座標を指定する。

図42 (1) は右方向への並進運動と、反時計廻りの回転運動によるふれ画像、(2) は右方向への並進運動と時計廻りの回転運動によるふれ画像である。数値ファントムを構成する楕円のふれ像（円弧あるいはコンマ）が確認できる。またファントムを構成する楕円のストロボスコープ像は、楕円が本来配置されている場所とは異なる所に発生している。またファントム全体、あるいはファントムを構成する楕円そのものが、いびつに変形しているのが観察できる。なお(1) (2) においてはファントム下部に見られる三日月型（頭蓋骨の一部が消失）は、CT 画像をディスプレイに映し出す際、濃度0以下の部位は全て濃度階調0とする非線形操作によるものと思われる。

図42 (3) は上方向への並進運動と、反時計廻りの回転運動によるふれ画像、(4) は上方向への並進運動と、時計廻りの回転運動によるふれ画像である。数値ファントムを構成する楕円のふれ像が、コンマあるいは口髭と呼ばれる形状を描いているのが観察できる。またこのふれ像の効果と、ストロボスコープ効果とが合いまって、頭部ファントムはいびつな形状でCT 画像化されている。

なお図42 (1) ～(4) において、頭部ファントムを構成する楕円の辺縁から放射される筋状のアーチファクト（streaks）は、画像再構成演算時の補間誤差、およびエリアシングエラーに因るものであると類推される（文献[20,21,43,45,44]などを参照）。

第 9 章 結論および今後の課題

本論文は、スキャン時間が無限小でない（理想的でない）通常の X 線 CT 装置を想定し、運動する被写体を断層撮影するときに、再構成画像がどのように劣化するか、被写体を映し出す CT 画像にはどのようなモーションアーチファクトが発生するか、などを明らかにした。X 線 CT スキャナにおける被写体-計測系は、物理的に複雑であり、かつ対象となる被写体が未知であるため、厳密には再現できない。そこで本研究ではモーションアーチファクトを解析するために、その発生をモデル化した。被写体投影から通常の再構成をおこなう公式には、スキャン時間の概念がない。本研究では、被写体断層からの投影計測に時間の概念を導入し、時刻と計測角度に関する単純な仮定のもとで、断層像を再構成する断層撮影モデルを構築した。また再構成画像および X 線 CT 画像のぶれを解析的・数値的に再現した。次に運動する被写体の再構成画像の劣化を定式化し、モーションアーチファクトに関する種々の性質を明らかにした。その結果、計算機シミュレーションによって検証した。これらの解析の結果、CT 画像中のぶれ像としてサイクロイドと呼ばれる平面曲線が描かれること、平面曲線の尖点部分にストロボスコープ像と呼ばれる鮮明な（しかし偽りの）像が形成されること、再構成画像は点拡がり関数を用いた画像劣化モデルとして定式化されること、などが明らかとなった。

これら解析結果により、被写体断層の一樣な動きによる「X 線 CT 画像のぶれ」は、我々がよく目にするカメラで撮影された「写真のぶれ」から類推できないことが明らかである。例えば、写真のぶれは被写体の動きとぶれの方向、程度が一致するが、CT 像のぶれでは殆ど一致しない。この事実はシミュレーション結果からも明らかである。画像劣化モデルの比較においても両者は異なっていた。

本論文の断層撮影モデルは、CT 画像のぶれには「ある時刻には決まった角度の投影しか計測できない」という制限が、最も大きく関わるというアイデアを具現化したものである。モデル化に際しては、この制限以外のエラー要因は排除し、また理論的解析を容易にするために、平行投影に基づく再構成公式を用いた。従って、本モデルは特定の世代（方式）の CT を模したものではない。現行の X 線 CT で撮影されたぶれ像 [15] と比較すると、しかし本稿のぶれ像はその特質をよく反映している。本稿

では理論的解析を容易にするため、画像再構成には平行投影を用いた。第3章において時間に依存する被写体-計測系を議論する際、この系を扇状投影に対して適用するための基本的な考え方について述べた。一般に、扇状投影 $p(\Upsilon, \Phi)$ は、X線源の位置を表す角度 Φ と、扇の中のビーム位置を表す角度 Υ を用いて表される。3.2節の仮定1,2を扇状投影に適用するためには、仮定1の ϕ を Φ に、仮定2の u を Υ に読み替えば良い。なお本論文とは別に、扇状投影に上述の制限を加える計算機実験も行われ、平行投影と扇状投影のぶれ像に有意な差がないことを確認している[46]。また坂下らがファンビーム方式のX線CTで撮影したぶれ画像[15]を見る限りでは、我々がシミュレートしたぶれ像は、現実のぶれ像の特質をよく反映している。このことから、スキャン時間と投影の計測角度を考慮する我々の考え方は、モーションアーチファクトの解析に対しては妥当であろう。本論文の解析結果は、即現実のCT装置に適用できるわけではない。なぜならば、本研究では投影計測に関する考察以外に、扇状投影を解析の対象として扱っていないため、本解析結果をそのまま扇状投影のCT画像に適用することができないからである。現行のCTスキャナは殆ど全てファンビーム方式であり、これらの投影やCT画像を解析するためには、ファンビーム方式に対するぶれの理論と研究が必要であろう。

本研究では、被写体運動とモーションアーチファクトあるいは再構成画像の劣化との関係を明らかにすることができた。これらの解析から得られた知識を応用すれば、再構成画像あるいはそのCT画像から、元の被写体断層に関する何らかの情報が得られる可能性がある。これを探ることも今後の課題である。また逆に再構成画像中に、特異な形状が観測された場合には、被写体断層中にその形状が存在するのではなく、外部から観測できないが、内部に変形を伴わずに運動するものがあるという可能性を示唆する。いずれにしても本研究結果は、X線CTを用いた画像診断に新しい知見を与えるものと思われる。

本研究では、臨床で最も頻繁に発生する筋状のモーションアーチファクトについての解析ができなかった。我々の解析結果および実験結果において、筋状のモーションアーチファクトを扱えなかった原因は、Yang *et al.* の報告[7]との比較から、被写体の動き（我々は滑らかな運動を仮定している、Yang *et al.* は急激な運動、静止を扱っている）にあると考えられる。今後、被写体の様々な挙動がX線CT画像に及ぼす影

響等について、詳しい解析がなされるべきである。

本論文では、劣化した CT 画像を用いる静止断層像の復元についても触れた。実際に画像復元をおこなうためには、動きのパラメータをどのようにして推定するか、劣化作用素の逆あるいはそれに類する作用素をどのようにして決定するかなど、解決しなければならない問題が幾つか存在する。動きのパラメータの推定は、ぶれ像の形状やストロボスコープ像の発生位置などを頼りに、おおよそを推定することが可能であると思われる。あるいは投影計測時に被写体運動を知ることのできる情報をあわせて計測し、これを用いて被写体の運動を推定する方法も考えられる。劣化作用素の逆あるいはそれに類する作用素の決定に関しては、位置不変劣化の場合は逆フィルタ等が容易に求められるため、5.1節に示した用に、時刻 t の被写体断層 $f(x, y; t)$ を推定することも可能であろう。また再構成画像 $\hat{f}(x, y)$ に雑音が付加される場合においても、雑音の性質が良ければ、Wiener フィルタ等の様々な画像復元の手法 [40,41,42] を用いることによって、時刻 t の被写体断層 $f(x, y; t)$ を推定することが可能であろう。被写体運動が回転運動や並進と回転の合成の場合は、劣化が位置依存のため逆フィルタは容易に求められない。しかし、位置依存劣化に対する画像復元アルゴリズムも幾つか存在する [40,41,42]。これらを合わせて用いることによって、劣化した再構成画像からの静止断層像の復元が考えられる。こうしたアイディアに基づいて劣化画像からの復元を行った例が（X 線 CT ではないが）、文献 [16,17,18] に報告されている。X 線 CT 画像に対して画像復元が可能になれば、被写体の並進運動が原因で劣化した 1 枚の再構成画像 $\hat{f}(x, y)$ から、様々な時刻における断層像の系列 $f(x, y; t_1)$, $f(x, y; t_2)$, $f(x, y; t_3)$, $\dots$ ($0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \dots \leq T$) を算出することができる。本解析を基礎に研究を進めることで、被写体の動きによってぶれた X 線 CT 画像から、様々な時刻における静止画像 (系列) の復元が可能になるだろう。

以下、各章別に本研究成果をまとめる。

第 1 章ではモーションアーチファクトに関する研究の目的および意義についてまとめた。CT 技術が成熟しかつ様々な分野において CT 装置が使われている現状においても、モーションアーチファクトにまつわる多くの問題が存在することを例示し、モーションアーチファクトの発生と性質の解析が不可欠であること等を主張した。また

本研究と関連が深いと思われる幾つかの報告についても触れた。特に坂下らの報告 [8,9,10,11,12,13,14,15] について詳しいレビューを行った。

第2章では被写体からの投影計測および画像再構成に関する基礎について述べた。まず X 線 CT における投影の計測についてまとめた後、被写体断層の再構成問題を定式化するために、被写体および投影を数学的に定義した。また投影からの画像再構成法を、2次元 Fourier 変換をもとに導いた。つぎに、CT 装置を一つのシステムと見なす概念を導入し、このシステムを構成する被写体-計測系ならびに画像再構成系について述べた。また画像再構成に欠かせない逆投影変換の性質、特に再構成画像を考える上で重要な層と積層の概念についてまとめた。最後に、アーチファクトを解析する上で欠かすことのできない CT 画像化（再構成画像をディスプレイに映し出すこと）について議論した。

第3章では時間に依存する被写体-計測系と、画像再構成系からなる断層撮影モデルの概要についてまとめた。X 線 CT 装置は、被写体断層から投影を計測するシステム（被写体-計測系）と、投影を用いて被写体断層を再構成するシステム（画像再構成系）から構成される。ここではスキャン時間が無限小でない CT 装置を想定し、ある簡単な条件を加味することによって時間を考慮する被写体-計測系がモデル化できることを紹介した。また本モデルで得られた投影が、画像再構成系においてどのように処理されるか、そのプロセスについても言及した。

第4章では点源（2次元デルタ関数）が並進運動する場合について再構成画像を求め、その CT 画像に生ずるふれの形状等についてまとめた。まず円形断層を定義し、その再構成画像を数式によって記述した後、円形断層の極限としての点源（2次元デルタ関数）とその再構成画像（点拡がり関数）について述べた。また点源が xy 平面内を並進運動するとき、CT 画像中に描かれるふれ像の形状と顕著な性質（尖点の発生等）についてまとめた。あわせて計算機シミュレーションの結果も示した。

第5章では剛体断層が並進運動する場合について再構成画像を求め、再構成画像の劣化を定式化した。再構成画像が点拡がり関数の線形和として定式化されること、この式を画像劣化モデルと見なせることなどについてまとめた。また CT 画像に生ずる剛体（断層の形状、濃度が変化しない被写体）のふれ像、ストロボスコープ像などについて考察した。

第6章では点源（2次元デルタ関数）が回転運動する場合について再構成画像を求め、そのCT画像に生ずるふれの形状等についてまとめた。あわせて計算機シミュレーションの結果も示した。

第7章では剛体断層が回転運動する場合について再構成画像を求め、再構成画像の劣化を定式化した。またCT画像に生ずる剛体のふれ像、ストロボスコープ像などについて考察した。

第8章では第4章～第7章の内容を踏まえ、被写体断層が並進と回転の合成運動をする場合について画像劣化を考察し、点源および剛体断層に対するモーションアーチファクトの解析をした。

第9章では本論文のまとめをおこない、本論文でなされた解析を今後、どのように応用するか等について考察した。

10 謝辞

本研究をまとめるにあたり、遅筆で、数学が苦手な、おまけに物分りの悪い私を、叱咤激励しながらも熱心にご指導してくださいました大阪大学基礎工学部佐藤俊輔教授に、厚く御礼申し上げます。また、国立循環器病センター放射線診療部坂下善治主任技師（現在、国立療養所千石荘病院副技師長）、高宮誠部長、同センター研究所宇山親雄部長からは、本研究を始めるにあたって様々な御協力を賜りました。本論文の副査をしてくださった本学基礎工学部福島邦彦教授、並びに本学医学部附属バイオメディカル教育研究センター田村進一教授には、論文の隅々まで丁寧な査読をして頂きました。心より御礼申し上げます。

本学基礎工学部佐藤研究室の諸氏、とくに牧川方昭助教授、土居伸二助手、大学院生の譚玉峰さん、および国立循環器病センター研究所放射線医学部の諸氏、九州工業大学情報工学部古川徹生助手からは貴重な助言を幾つも戴きました。本学機械工学科志茂大治郎技官には、中央イメージ実験室の計算機運用に際していつもご協力を賜りました。この場を借りて御礼申し上げます。

なお本研究の一部は医科学応用研究財団の助成によって行われました。また数値計算の一部は大阪大学基礎工学部中央イメージ実験室にて行われました。

第 11 章 参考文献

参考文献

- [1] G.T. Herman: “Image Reconstruction from Projections, Implementation and Applications, Topics in Applied Physics”, Vol.32, Springer-Verlag (1979).
- [2] G.T. Herman: “Image Reconstruction from Projections, The Fundamentals of Computerized Tomography”, Academic Press (1980).
- [3] 小川英光, 佐藤誠: “投影からの画像再構成”, 別冊 O plus E “画像処理アルゴリズムの最新動向”, pp.20-32 (1986).
- [4] 岩井貴典 (編): “CT スキャナー”, 電子工学進歩シリーズ, 9, コロナ社 (1978).
- [5] P.M. Joseph: “Artifacts in computed tomography” in *Radiology of the skull and brain, Technical aspects of computed tomography*, (Ed.) T.H. Newton, D.G. Potts, The C.V.Mosby Company (1981).
- [6] R.J. Alfidi, W.J. Mac Intyre, J.R. Haaga: “The effects of biological motion on CT resolution”, *Am. J. Roentgenol.*, 127, 11-15 (1976).
- [7] C.-K. Yang, S.C. Orphanoudakis, J.W. Strohbehn: “A simulation study of motion artefacts in computed tomography”, *Phys. Med. Biol.*, 27, 1, 51-61 (1982).
- [8] 坂下善治, 本杉伸, 大西義隆, 山田幸典, 小倉裕樹, 巢組一男: “CT 用動態解析ファントムの試作”, *日本放射線技術学会雑誌*, 45, 8, pp.1362 (1989).
- [9] 坂下善治, 本杉伸, 小倉裕樹, 山崎秀敏, 山田雅巨, 巢組一男: “超高速 CT の基礎と臨床”, *日本放射線技術学会関西支部会報*, 2, pp.2-10 (1990).
- [10] 坂下善治, 小倉裕樹, 福西康修, 山田雅巨, 大西義隆, 山田幸典: “CT 用運動解析ファントムの試作 (第 2 報)”, *日本放射線技術学会雑誌*, 46, 8, pp.1419 (1990).

- [11] 坂下善治, 本杉伸, 内田英治, 中鶴茂浩, 上野智明, 巢組一男: “超高速 CT における動態検査 (第 5 報 心臓 CT 検査における motion artifact についての検討)”, 日本放射線技術学会雑誌, 46, 8, pp.1306 (1990).
- [12] 坂下善治, 本杉伸, 佐合正義, 佐久間利治, 山田幸典, 上野智明: “CT 用運動解析ファントムの試作 (第 3 報)”, 日本放射線技術学会雑誌, 47, 2, pp.255 (1991).
- [13] 坂下善治, 本杉伸, 小倉裕樹, 山田雅亘, 山崎秀敏, 巢組一男: “超高速 CT の性能評価と臨床的適応”, 日本放射線技術学会雑誌, 47, 10, pp.1800-1807 (1991).
- [14] 坂下善治: “超高速 CT の技術的評価”, 日放技学誌, 48, 1, pp.62-69 (1992).
- [15] 坂下善治, 小倉裕樹, 大西義隆: “CT 用運動解析ファントムの試作—モーションアーチファクトの解析—”, 日放技学誌, 48, 6, pp.852-859 (1992).
- [16] 井宮淳, 山本良巳, 中山佳行: “回転する画像の投影からの再構成”, 信学論 (D-II), J72-D-II, 12, pp.1992-1999 (1989).
- [17] 工藤博幸, 斎藤恒雄: “逐次近似法による MRI 画像再構成”, 信学論 (D-II), J73-D-II, 12, pp.2029-2038 (1990).
- [18] 工藤博幸, 斎藤恒雄: “MRI における静磁場不均一性と被写体の動きの推定”, 信学論 (D-II), J73-D-II, 12, pp.2039-2046 (1990).
- [19] S.R. Deans: “The Radon Transform and Some of Its Applications”, A Wiley-Interscience Publ. (1983).
- [20] A. Rosenfeld, A.C. Kak: “Digital Picture Processing, 2nd.ed.”, Academic Press (1982).
- [21] A.C. Kak, M. Slaney: “Principles of Computerized Tomographic Imaging”, IEEE Press (1987).
- [22] 尾上守夫 (編): “医用画像処理”, 朝倉書店 (1982).
- [23] 岩井貴典 (編): “医用画像処理装置”, コロナ社 (1988).

- [24] R.A. Brooks, G. DiChiro: "Theory of Image Reconstruction in Computed Tomography", *Radiology*, **117**, 561-572. (1975).
- [25] R.A. Brooks, G. DiChiro: "Principles of computer assisted tomography (CAT) in radiographic and radioisotopic imaging", *Phys. Med. Biol.*, **21**, 5, 689-732. (1976).
- [26] 有本 卓: "信号・画像のディジタル処理", 産業図書 (1980).
- [27] G.N. Ramachandran, A.V.Lakshminarayanan: "Three-dimensional Reconstruction from Radiographs and Electron Micrographs: Application of Convolutions instead of Fourier Transforms", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, Vol.68, 9, pp.2236-2240 (1971).
- [28] L.A. Shepp, B.F. Logan: "The Fourier Reconstruction of a Head Section", *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, vol.NS-21, 3, 21-43 (1974)
- [29] R.H.T. Bates, T.M. Peters: "Towards improvements in Tomography", *N. Z. J. Sci.*, **14**, pp.883-896 (1971).
- [30] P.R. Smith, T.M. Peters, R.H.T. Bates: "Image reconstruction from finite numbers of projections", *J. Phys. A: Math. Nucl. Gen.*, **6**, pp.361-382 (1973).
- [31] F. Bowman (平野鉄太郎 邦訳): "ベッセル函数入門", 実用数学全書, 日新出版 (1977).
- [32] 森口繁一, 宇田川鉄久, 一松信: "数学公式, I I I, 特殊函数", 岩波書店 (1960).
- [33] J.W. Goodman: "Introduction to Fourier Optics", McGraw-Hill (1968).
- [34] 佐藤伊助: "いろいろな曲線と曲面", 基礎数学選書 20, 裳華房 (1979).
- [35] 森口繁一, 宇田川鉄久, 一松信: "数学公式, I, 微分積分・平面曲線", 岩波書店 (1956).
- [36] 日本数学会編集: "数学辞典, 第3版", 岩波書店 (1985).

- [37] I.M. Gel'fand, G.E. Shilov: "Generalized Function", Volume 1, Academic Press (1964). (功力金二郎, 井関清志, 麦林布道 邦訳: "超関数論入門, I", 共立全書, 526, 共立出版 (1963).)
- [38] 金子晃: "超関数入門 (上)", UP 応用数学選書 1, 東京大学出版会 (1990).
- [39] M.J. Lighthill: "フーリエ解析と超関数", ダイヤモンド社 (1975).
- [40] H.C. Andrews, B.R. Hunt: "Digital Image Restoration", Prentice-Hall (1977).
- [41] 小川英光, 佐藤誠: "画像復元", 別冊 O plus E "画像処理アルゴリズムの最新動向", pp.33-50 (1986).
- [42] 小川英光: "信号と画像の復元 [I]—画像復元の普遍性", 信学誌, 71, 5, pp.491-497 (1988-05).
- [43] 坂本隆: "CT 投影からの画像再構成に関する基礎解析", 大阪大学基礎工学部, 卒業論文, 昭和 63 年 3 月
- [44] 坂本隆, 佐藤俊輔: "CT 再構成画像へ及ぼすギブス現象の影響について", 信学技報, 1989-05, Vol.89, No.46, MBE89-26, pp.81-88.
- [45] 坂本隆: "CT 画像に生ずる接線アーチファクトとその原因について", 大阪大学基礎工学部, 修士論文, 平成 2 年 3 月
- [46] 坂本隆, 佐藤俊輔, 坂下善治, 高宮誠, 宇山親雄: "コンピュータ断層撮影時の被写体回転によるモーションアーチファクト", 信学技報, MBE90-49 (1990).
- [47] 佐藤俊輔, 坂本隆: "X 線 CT 再構成画像におけるアーチファクト", 医用電子と生体工学, 第 28 巻秋季特別号, pp.132 (1990).
- [48] 坂本隆, 佐藤俊輔, 坂下善治, 高宮誠: "被写体回転に伴う X 線 CT 画像に現れるストロボスコープ効果", 信学技報, MBE90-99 (1991).
- [49] T. Sakamoto, S.Sato, Y.Sakashita, M.Takamiya: "Artifacts in a CT-image caused by the rotary motion of the object", Med. & Biol. Eng. & Comput., 29, Sup., pp.701 (1991).

- [50] 坂本隆, 佐藤俊輔: “被写体回転による X 線 CT 画像のふれ一点源を被写体断層とする場合—”, 信学論 (D-II), J76-D-II, 3, (1993). (印刷中)
- [51] 坂本隆, 佐藤俊輔: “X 線 CT における被写体回転による画像劣化とストロボスコープ像”, 信学論 (D-II), 医用画像処理技術小特集号, J76-D-II, 2, (1993). (印刷中)

第 12 章 関連発表論文

1. 学術論文

1. 坂本隆, 佐藤俊輔: “被写体回転による X 線 CT 画像のふれ—点源を被写体断層とする場合—”, 信学論 (D-II), J76-D-II, 3, (1993). (印刷中)
2. 坂本隆, 佐藤俊輔: “X 線 CT における被写体回転による画像劣化とストロボスコープ像”, 信学論 (D-II), 医用画像処理技術小特集号, J76-D-II, 2, (1993). (印刷中)

2. 国際会議（査読あり）における発表

1. S. Sato, T. Sakamoto: “Streaks Appearing in The X-ray CT Image by Filtered-Backprojection Algorithm” (*in Proc. of The 3rd Sino-Japan Symposium on BME*, 3, pp.2-9), The 3rd Sino-Japan Symposium on BME, Shanghai, China (June. 1990).
2. T. Sakamoto, S. Sato, Y. Sakashita, M. Takamiya: “Artifacts in a CT-image caused by the rotary motion of the object” (*in Med. & Biol. Eng. & Comput.*, 29, Suppl.2, p.701), World congress on medical physics and biomedical engineering, Kyoto, Japan (July. 1991).

3. 国内における学会発表

1. 坂本隆, 佐藤俊輔: “CT 画像にみられるフィルタリング依存性アーチファクトの解析” (医用電子と生体工学, 第 27 巻, 特別号, pp.74), 第 28 回日本 ME 学会大会, 大阪国際交流センター (1989 年 5 月).
2. 坂本隆, 佐藤俊輔: “CT 画像の辺縁に生ずる接線アーチファクトについて” (医用電子と生体工学, 第 28 巻, 特別号, pp.149), 第 29 回日本 ME 学会大会, 仙台市民会館 (1990 年 5 月).

3. 佐藤俊輔, 坂本隆: “X 線 CT 再構成画像におけるアーチファクト” (医用電子と生体工学, 第 28 巻, 秋季特別号, pp.132), 第 5 回日本 ME 学会秋季大会, 東京大学工学部 (1990 年 10 月).
4. 坂本隆, 佐藤俊輔: “CT 画像に見られるモーションアーチファクトの解析および計算機シミュレーション” (医用電子と生体工学, 第 30 巻, 特別号, pp.229), 第 31 回日本 ME 学会大会, 東京電機大学工学部 (1992 年 5 月).

4. 技術報告

1. 坂本隆, 佐藤俊輔: “CT 再構成画像へ及ぼすギブス現象の影響について”, 信学技報, Vol.89, No.46, **MBE89-26**, pp.81-88 (1989-05).
2. 坂本隆, 佐藤俊輔, 坂下善治, 高宮誠, 宇山親雄: “コンピュータ断層撮影時の被写体回転によるモーションアーチファクト”, 信学技報, Vol.90, No.151, **MBE90-49**, pp.69-76 (1990-07).
3. 坂本隆, 佐藤俊輔, 坂下善治, 高宮誠: “被写体回転に伴う X 線 CT 画像に現れるストロボスコープ効果”, 信学技報, Vol.90, No.427, **MBE90-99**, pp.45-49 (1991-01).

5. 卒業論文及び修士論文

1. “CT 投影からの画像再構成に関する基礎解析”, 大阪大学基礎工学部, 卒業論文, 昭和 63 年 3 月
2. “CT 画像に生ずる接線アーチファクトとその原因について”, 大阪大学大学院基礎工学研究科, 修士論文, 平成 2 年 3 月