【 8 】

氏　　　　　名	遠藤久顕（えんどう ひさあき）
博士の専攻分野の名称	博　　士（理　　学）
学 位 記 番 号	第　13473　号
学位授与年月日	平 成 9 年 12 月 16 日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当 理学研究科　数学専攻
学 位 論 文 名	A construction of surface bundles over surfaces with non-zero signature （符号数が0でない曲面上の曲面束の一構成法）
論文審査委員	（主査） 教 授 川久保勝夫 （副査） 教 授 坂根 由昌　教 授 小磯 憲史　教 授 藤木 明 助教授 作間 誠　講 師 長崎 生光

論 文 内 容 の 要 旨

本論文では曲面上の曲面束について，その全空間の符号数と底及びファイバーの種数との関係を考察した。

Σ_g, Σ_h をそれぞれ種数 g, h の有向閉曲面とし，$\mathrm{Diff}_+\Sigma_h$ を Σ_h の向きを保存する自己微分同相全体のなす群とする。このとき，C^∞ ファイバー束 $\xi=(E, \Sigma_g, p, \Sigma_h, \mathrm{Diff}_+\Sigma_h)$ を Σ_g 上の Σ_h 束，または単に曲面上の曲面束と呼ぶ。ただし，E は全空間，$p: E\to\Sigma_g$ は射影，$\mathrm{Diff}_+\Sigma_g$ は構造群である。我々は ξ の全空間Eの4次元有向多様体としての符号数 $\tau(E)$ に注目することにする。

Eが自明束の場合は符号数の積公式から $\tau(E)=\tau(\Sigma_g)\tau(\Sigma_h)=0$ となる。Chern-Hirzebruch-Serre (1957) は底の基本群がファイバーのコホモロジーに自明に作用する場合にも符号数の積公式が成り立つことを示した。従って，$\pi_1(\Sigma_g)$ が $H^1(\Sigma_h; \mathbf{R})$ に自明に作用するときも，やはり $\tau(E)=\tau(\Sigma_g)\tau(\Sigma_h)=0$ となる。積公式が成り立たない，つまり $\tau(E)\neq 0$ となる ξ の例を最初に構成したのは Kodaira (1967) であった。その構成法は2つのリーマン面の積の中に適当な因子をとり，その上で分岐する巡回分岐被覆をとるというものである。曲面上の曲面束の符号数を与える一般的な公式は Meyer (1973) によって signature cocycle を用いて書き下された。Meyer はそれを用いて次のことを示した。

(1)　$g=0, 1$ または $h=0, 1, 2$ であれば常に $\tau(E)=0$ である。

(2)　任意の $h\geqq 3$ と $n\in\mathbf{Z}$ に対して，$g\geqq 0$ を十分大とすれば，$\tau(E)=4n$ となるような ξ が存在する。

この Meyer の結果(2)から次の問題が自然に想起される。

問題　各 $h\geqq 3$ と $n\in\mathbf{Z}$ に対して，$\tau(E)=4n$ となるような Σ_g 上の Σ_h 束 ξ が存在する最小の g を $g(h, n)$ とかく。$g(h, n)$ の値を決定せよ。

我々はこの $g(h, n)$ の値に関して次の評価式を得た。

定理1　任意の $h\geqq 3$ と $n\in\mathbf{Z}\ (n\neq 0)$ について次の不等式が成り立つ。

$$\frac{|n|}{h-1}+1 \leqq g(h, n) \leqq 111|n|$$

この定理の証明において鍵となる発想は写像類群の Wajnryb 表示と signature cocycle を合わせて考察したこと，組合せ群論的手法で曲面の基本群の表現を構成したこと，L^2-Betti 数についての Lück の結果に着目したことなどであ

る。定理 1 の証明に関連して次の定理を証明することができる。

定理 2　$\tau(E)\neq 0$ となる曲面上の曲面束 ξ であって，Kodaira によって構成されたどの例よりも底及びファイバーの種数がともに小さいものが存在する。

さらに，Meyer による次の定理を Atiyah-Singer 指数定理を用いずに再証明できた。

定理 3　任意の曲面上の曲面束 ξ について，$\tau(E)\equiv 0 \pmod 4$ である。

論文審査の結果の要旨

本論文では，写像類群の有限表示を用いるという新しいアプローチによって，曲面上の曲面束の符号数と底及びファイバーの種数との関係を研究し，これらの間にある不等式が成り立つことを証明した。これは，曲面束のトポロジー及び 4 次元多様体論の研究に貢献するところ大であり，博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。