



Title	ファジイ推論法に関する研究
Author(s)	深海, 悟
Citation	大阪大学, 1989, 博士論文
Version Type	VoR
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/124">https://hdl.handle.net/11094/124</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

# ファジィ推論法に関する研究

1989年5月

深海 悟

## 内容梗概

近年ファジイ集合論の各種制御システム、エキスパートシステム等への応用が実用レベルでさかんに行なわれている。これらファジイ集合論の応用に際しその核となる技術がファジイ集合で表現されたあいまいな概念を含んだルール、データをもとにした推論、すなわちファジイ推論である。

本論文はこのファジイ推論に関するものであり、ファジイ集合で表現されたあいまいな概念を含む” I F … T H E N … ”形式のルール（ファジイ条件命題）をもとにした推論（ファジイ条件推論）について主として論じる。

本論文の概要は以下の通りである。

まず第1章では本研究の一般的背景について述べる。

第2章では、ファジイ推論に関する研究の流れを整理するとともに、このなかにおける本研究の位置づけを明らかにする。

第3章は本論文の中心をなす部分であり、一般化 *modus ponens* 及び一般化 *modus tollens* の形式のファジイ条件推論法について述べる。

まず、すでに提案されていた *Zadeh* の方法および *Mamdani* の方法では妥当と思われる結論が得られないとの事実から出発し、我々が日常行なっているこの種の推論に対する検討をもとに、これら形式の推論において成立すべきと考えられる前提と結論の関係、言い替えるならばファジイ条件推論における妥当性条件を設定する。なお、この種の推論では、同一の形式の前提であっても状況により求められる結論が異なる場合もあり、唯一の推論方法ですべてをカバーするのは困難であるとの立場から、特性の異なる4種類の推論タイプを想定した条件を設定する。

これら条件に基づき、すでに提案されていた *Zadeh* の方法および *Mamdani* の方法の妥当性について調べ、これら方法ではほとんどの条件が満たされず妥当な推論方法とは言えないことを明らかにする。

つぎに、一般化 *modus ponens* の形式の推論に対し、設定した条件のうち最も基本的と考えられる以下の条件、すなわち、”If *x* is *A* then *y* is *B*.” と ”*x* is *A*” からは ”*y* is *B*” が結論として導かれるべきであるとの条件、を満たす推論を実現するための必要条件を明らかにした上で、設定した各条件を満たす推論方法を4種類定式化する。

これに引続き、これら各推論方法が一般化modus tollensの形式の推論に対して設定した条件の大部分を満たすことを明らかにするとともに、これらの方法はZadehの方法では成立しなかった推移律を満たすこと、さらにその一部は対偶律も満たすことを明らかにする。

第4章では、most、few等いわゆるファジイ限定詞を含んだ命題を前提とする推論を対象とし、まずこれらを4種類の推論形式に整理した上でその各々について第3章で定式化した方法を応用して実現方法を定式化する。

第5章では、本研究により定式化した推論方法の具体的応用事例として、K. S. Leungらの開発したエキスパートシステムについて紹介し、本論文で定式化した推論方法の有効性を示す。

最後に第6章では、本論文についてまとめる。

# 目 次

1. 序 論	1
2. 本研究の背景及び位置づけ	3
2. 1 緒 言	3
2. 2 ファジイ集合に関する基本事項	3
2. 3 ファジイ推論に関する研究経緯及び本研究の位置づけ	8
2. 4 結 言	15
3. ファジイ条件推論法	16
3. 1 緒 言	16
3. 2 Z a d e h、M a m d a n i の方法	18
3. 3 妥当なファジイ条件推論のための条件	22
3. 4 従来方法の問題点	26
3. 5 新たなファジイ条件推論方法の定式化	
-- 一般化modus ponensの立場から --	43
3. 6 一般化modus tollensの成立性	60
3. 7 推移律、対偶律の成立性	66
3. 8 塚本の規範的基準について	77
3. 9 その他の性質等について	80
3. 10 結 言	84
4. ファジイ限定詞を含む推論	86
4. 1 緒 言	86
4. 2 ファジイ限定詞	86
4. 3 対象とする推論形式	87
4. 4 推論方法の定式化	90
4. 5 結 言	95

5. 応用事例	96
5. 1 緒 言	96
5. 2 エキスパートシステム Z-II	96
5. 3 結 言	98
6. 結 論	99
参考文献	102
謝 辞	108

## 1. 序 論

従来コンピュータによる処理あるいは制御が困難とされていた問題領域に、*ill-defined*な問題群がある。これら問題群には、厳密な仕様記述ができないあるいは困難である、厳密なデータが得られないといった特徴がある。すなわち、言い替えるならば、これら問題は、非決定性、不確実性、不完全性、非整合性、ファジイ性等の言葉で表されるあいまい性が含まれていると言える。近年これらあいまい性を含んだ問題の工学的重要性に対する認識の高まりもあり、その取扱い手法に対する研究も盛んになっている [HaM85] [Ish84] [Ish85] [IwK84] [II086] [OoT87] [SMD88]。

本論文ではこれらのうちファジイ性について取り扱う。

ファジイ性とは、輪郭、境界のはっきりしない概念の持つあいまい性である。この種のあいまい性は自然言語に非常に多く現われるものであり、例をあげると以下のような概念はすべてファジイ性を内在していると言えよう。

中年、 老年、 頭が良い、 背が高い、 遠い、 近い、

果物が熟している、 温度上昇が急激ならば、 ハンドルを少し右に切れ、

テストの結果がよければ、 e t c.

また、これら我々が日常使用する概念以外にも、医療診断の方法、各種プラントの内部制御方法等に、熟練者によるファジイ性を含んだ表現でしか言い表せない場合があることも指摘されている [MiN84] [Hir87]。

このようなファジイ性を工学的に取り扱うための一方法として Z a d e h [Zad65] により提案されたのがファジイ集合論である。ファジイ集合とは、各要素がその集合に属する度合を、属する／属さないの2値で割り切るのではなく、区間  $[0, 1]$  の実数値（これを”メンバシップグレード”と呼ぶ）で表現するもので、あいまい性をこのメンバシップグレードに集約して取り扱う。

ファジイ集合論は提案以来主として理論面から研究がなされていたが、M a m d a n i [Mam77] がスチームエンジンの制御に適用して制御への応用可能性を示唆し、H o l m b l a d ら [Ho082] が実用のセメントキルプロセスの制御に応用して以来、ファジイ制御の考え方は広く受け入れられるようになり、数多くの実用システムが開発されてきた。これらのなかには、浄水場への薬品注入制御 [YIS84]、発酵プロセス制御 [SK84]、高炉炉熱制御 [WSA88]、列車の運転制御 [YMI84]、糖分抽出プロセス制御 [S

aM88]、等があり、いずれも対象が *ill defined* なため従来自動化が困難で熟練オペレータに頼らざるを得なかったものが多い。そしてこれらプロセスに対するファジイ制御の方法は、いずれも熟練オペレータの制御ノウハウをファジイ概念を含んだルールとして抽出し、これらルールに基づいて制御するものであり、いわゆるエキスパートシステムによる制御とも言えるものである。また、制御以外の分野においても、例えば医療診断支援の為のエキスパートシステム [HTY88]、精神分析エキスパートシステム [LeL87] [LeL88] 等に应用されている。

これらファジイ集合論のエキスパートシステムへの応用に際し、その核となる技術がファジイ集合で表現されたあいまいな概念を含んだルール、データをもとにした推論、すなわちファジイ推論（近似的推論と呼ばれることもある）である。

本論文はこのファジイ推論に関するものであり、ファジイ集合で表現されたあいまいな概念を含む "IF ... THEN ..." 形式のルール（ファジイ条件命題）をもとにした推論について論じる。

本論文の概要は以下の通りである。

まず第2章では、ファジイ推論に関する研究の流れを整理するとともに、このなかにおける本研究の位置付けおよび目的を明らかにする。

第3章は本論文の中心をなす部分であり、まずファジイ条件命題を前提とする推論の妥当性に関する基準を整理し、これら基準のもとでの従来方法の問題点を明らかにした後、これら基準を満たす新たな方法を定式化する。また、これら方法の各種特性を明らかにする。

第4章では、第3章で定式化した方法を応用し、*most*、*few*等いわゆるファジイ限定詞を含んだ命題を前提とする推論の方法を定式化する。

第5章では、本研究により定式化した推論方法の具体的応用事例として、K. S. Leungら [LeL87] [LeL88] の開発したエキスパートシステムについて紹介し、本論文で定式化した推論方法の有効性を示す。

最後に第6章では、本論文についてまとめる。

## 2. 本研究の背景及び位置づけ

### 2. 1 緒言

本章ではまずファジイ集合に関する基本事項について説明した後、ファジイ推論に関する研究の流れ及びそのなかにおける本研究の位置付けについて述べる。

### 2. 2 ファジイ集合に関する基本事項

本節ではファジイ集合に関する基本的概念、術語等につき、本論文で必要な範囲にしぼって説明する。

#### (1) ファジイ集合 [Zad65]

全体集合  $U$  上のファジイ集合  $A$  とは、

$$\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$$

なるメンバシップ関数  $\mu_A$  によって特性付けられる集合で、 $\mu_A(u) \in [0, 1]$  は  $u \in U$  が  $A$  に属する度合 (メンバシップグレード) を表す。

ファジイ集合の表記法としては、 $U$  が連続値集合の場合、

$$A = \int_U \mu_A(u) / u$$

を採用し、 $U$  が有限集合の場合、

$$A = \mu_A(u_1) / u_1 + \mu_A(u_2) / u_2 + \cdots + \mu_A(u_n) / u_n$$

を採用する。ここで  $+$  は union を表し、 $\int_U$  は  $U$  全域にわたる union を表す。

#### (2) ファジイ集合に対する演算 [Zad65] [Zad75] [Zad77]

$U$  上のファジイ集合  $A$  と  $B$  が各々以下のように定義されているものとする。

$$A = \int_U \mu_A(u) / u$$

$$B = \int_U \mu_B(u) / u$$

このとき、 $A$  と  $B$  の和集合  $A \cup B$ 、共通集合  $A \cap B$ 、限界和 (bounded sum)  $A \oplus B$ 、 $A$  の補集合  $\neg A$ 、 $A$  のべき乗  $A^d$  ( $d$  は実数) は各々以下のように定義される。

$$A \cup B = \int_U \mu_A(u) \vee \mu_B(u) / u$$

$$A \cap B = \int_U \mu_A(u) \wedge \mu_B(u) / u$$

$$A \oplus B = \int_U 1 \wedge (\mu_A(u) + \mu_B(u)) / u$$

$$\neg A = \int_U (1 - \mu_A(u)) / u$$

$$A^d = \int_U \mu_{A^d}(u) / u$$

ただし  $\wedge$ 、 $\vee$  はそれぞれ  $\min$ 、 $\max$  を意味する。

### (3) 直積 [ZAd75] [Zad77]

$A_1, A_2, \dots, A_n$  をそれぞれ  $U_1, U_2, \dots, U_n$  上のファジイ集合とすると、 $A_1, A_2, \dots, A_n$  の直積 (Cartesian Product) は以下で定義される  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$  上のファジイ集合である。

$$\begin{aligned} & A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \\ &= \int_{U_1 \times \dots \times U_n} (\mu_{A_1}(u_1) \wedge \dots \wedge \mu_{A_n}(u_n)) / (u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

### (4) ファジイ関係 [Zad75] [Zad77]

$U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$  ( $n \geq 1$ ) 上の  $n$  項ファジイ関係  $R$  は、

$$\mu_R : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \rightarrow [0, 1]$$

なるメンバシップ関数によって特性付けられる関係である。ただしここで  $\times$  は直積を表す。また  $n = 1$  のとき通常ファジイ集合となるが、特にこれを単項ファジイ関係と呼ぶこともある。

$U \times W, W \times V$  上の 2 項ファジイ関係をそれぞれ  $R, S$  とする。このとき、 $R$  と  $S$  の合成 (composition) は以下のように定義される。

$$R \circ S = \int_{U \times V} \bigvee_{w \in W} (\mu_R(u, w) \wedge \mu_S(w, v)) / (u, v)$$

ここで左辺の  $\circ$  は合成を表す演算子であり、右辺の  $\bigvee_{w \in W}$  は  $W$  全域における上限を示す。

また、 $R$  が  $W$  上での単項ファジイ関係 (すなわちファジイ集合) であるとき、 $R$  と  $S$  の

合成  $R \circ S$  は以下で定義される。

$$R \circ S = \int_V \bigvee_{w \in W} (\mu_R(w) \wedge \mu_S(w, v)) / v$$

(5) 拡張原理 [Zad75] [Zad77]

一般に  $f$  を  $U$  から  $V$  への関数とする。

$$v = f(u) \quad \text{但し、} v \in V, \quad u \in U$$

また、 $A$  を以下で定義された  $U$  上のファジイ集合とする。

$$A = \int_U \mu_A(u) / u$$

このとき、 $f(A)$  を以下のように定義する。

$$f(A) = \int_V \mu_A(u) / f(u)$$

同様に  $f$  が  $U \times V$  から  $W$  への関数であり、 $A$  と  $B$  をそれぞれ  $U$  と  $V$  上のファジイ集合とすると、

$$f(A, B) = \int_W \mu_A(u) \wedge \mu_B(v) / f(u, v)$$

と定義する。また、一般にこれらを総称して拡張原理と呼ぶ。

(6) 言語修飾語 [Zad72] [Lak73]

一般に言語で表現されたあいまいな概念 (例えば、young、old等) に対し、very、slightly等の修飾語 (Linguistic Hedge) を付加することにより、新たな概念が定義できる。すなわち、これら修飾語は一種の単項演算子とみなすことができる。

Zadeh [Zad72]、Lakoff [Lak73] らはこの点に注目し、これら修飾語の意味を分析することにより、これら修飾語に対しファジイ集合で表現された概念に対する演算子としての定義を与えた。本論文中でもこれら定義の一部を使用している為、以下に簡単に説明する。

まず最初にこれら定義中で使用する基本演算子について述べる。

ファジイ集合  $A$  に対する集中化 (Concentration)  $CON(A)$ 、拡大化 (Dilation)  $DIL(A)$ 、明暗強化 (Contrast Intensification)  $INT(A)$ 、正規化 (Normalization)  $NORM(A)$ 、は各々以下のように定義される。

$$\text{CON}(A) = A^2$$

$$= \int_U \mu_A^2(u) / u$$

$$\text{DIL}(A) = A^{0.5}$$

$$= \int_U \mu_A^{0.5}(u) / u$$

$$\text{INT}(A) = \begin{cases} 2A^2 & 0 \leq \mu_A(u) \leq 0.5 \\ \neg 2(\neg A)^2 & 0.5 \leq \mu_A(u) \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int_U 2\mu_A^2(u) / u & 0 \leq \mu_A(u) \leq 0.5 \\ \int_U 1 - 2(1 - \mu_A(u))^2 / u & 0.5 \leq \mu_A(u) \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{NORM}(A) = (1 / |\mu_A|) A$$

$$= \int_U (1 / |\mu_A|) \mu_A(u) / u$$

$$\text{但し、} |\mu_A| = \bigvee_U \mu_A(u)$$

これら演算子を用いることにより、修飾語 *very*、*more or less*、*slightly*、*sort of*、*rather* は以下のように定義される。

$$\text{very } A = \text{CON}(A)$$

$$\text{more or less } A = \text{DIL}(A)$$

$$\text{slightly } A = \text{NORM}(A \cap \neg \text{very } A)$$

$$\text{sort of } A = \text{NORM}(\neg \text{CON}(A)^2 \cap \text{DIL}(A))$$

$$\text{rather } A = \text{NORM}(\text{INT}(A))$$

最後にこれら演算子の使用例を図2.1に示す。

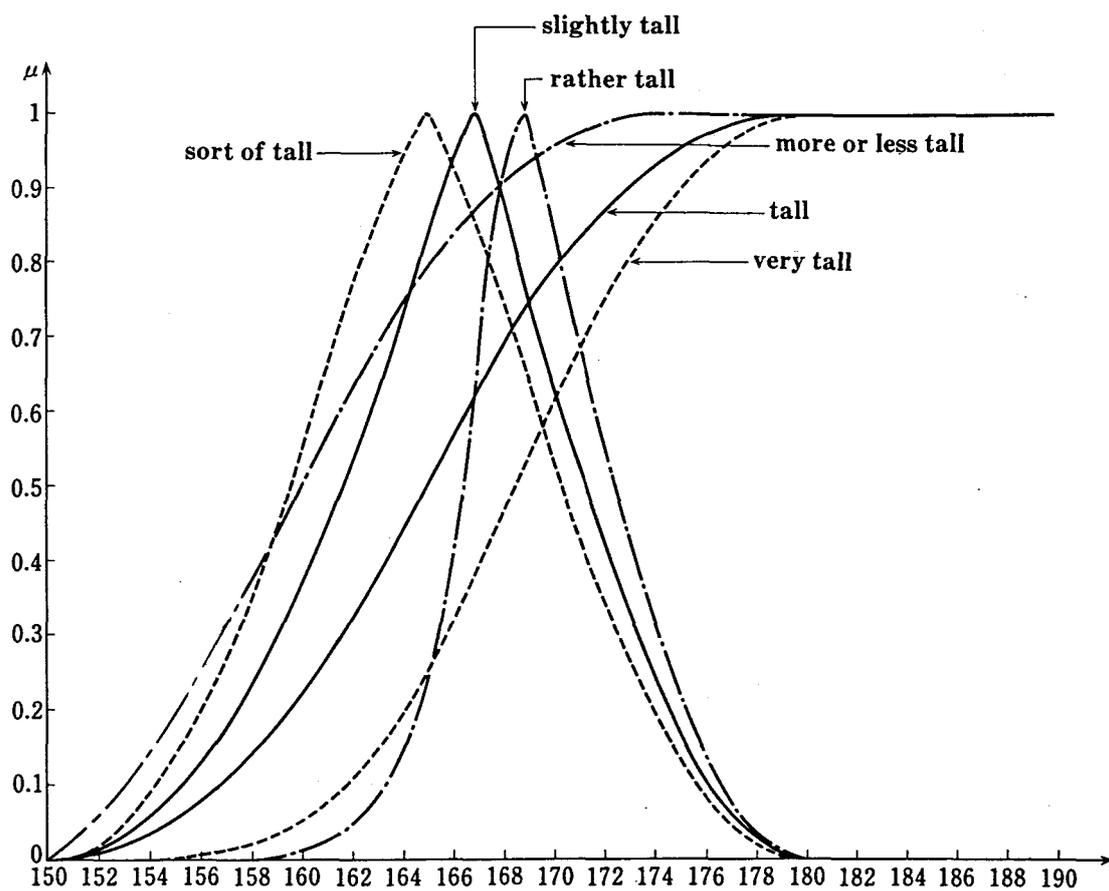


図 2. 1 言語修飾語の効果例

## 2. 3 ファジイ推論に関する研究経緯 及び本研究の位置づけ

ファジイ推論法は、Z a d e h [Zad73] が推論の合成規則 (Compositional rule of inference: 以下CRIと略す) を提案したことに端を発する。

CRIとは、例えば関数  $y = f(x)$  及び  $x$  の値  $a$  が与えられたときに  $y$  の値を求める手続きの一般化とも考えられるものである。以下ではこのCRIをまずあいまいさを含まない場合について説明した後、ファジイ集合を含む一般の場合について説明する。まず、一般に以下の形式の推論について考える。

前提1:  $x$  and  $y$  are  $R$ .

前提2:  $x$  is  $A$ .

---

結論:  $y$  is  $B$ .

ここで  $R$  は  $x$  と  $y$  の関係を表している。具体的には、 $x$  および  $y$  の値の全体集合  $U$ 、 $V$  をそれぞれ、

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

としたとき、 $R \subseteq U \times V$  であり、 $R$  の特性関数  $\mu_R(u, v)$  は以下のように定義される。

$$\mu_R(u, v) = \begin{cases} 1 & \dots \text{ } x \text{ の値が } u \text{ の時、} y \text{ の値が } v \text{ である可能性がある場合} \\ 0 & \dots \text{ } \text{その他の場合} \end{cases} \quad (2.1)$$

また、 $A$  は  $x$  の値の可能性分布 [Zad78] を表す集合で、 $A$  の特性関数を  $\mu_A(u)$  とする。

このとき、上記推論の結論、すなわち  $y$  の値に関する可能性分布を表す集合  $B$  は以下に示す通り  $A$  と  $R$  の  $\max - \min$  合成により得られる。

$$B = A \circ R \quad (2.2)$$

ここで  $\circ$  は  $\max - \min$  合成を表す演算子であり、 $B$  の特性関数を  $\mu_B(v)$  とすると、 $\mu_B(v)$  はその名の通り  $\max(\vee)$  と  $\min(\wedge)$  の演算により得られる。

$$\mu_B(v) = \bigvee_{u \in U} (\mu_A(u) \wedge \mu_R(u, v)) \quad (2.3)$$

このようにして得られた  $\mu_B(v)$  が  $y$  の値に関する可能性分布を示していることは  $\mu_A(u)$  及び  $\mu_R(u, v)$  の定義より明かであろう。

以上があいまいさを含まない場合のCRIの概要である。

以下このCRIによる推論例をいくつか示す。

[例1]

xとyの値の全体集合U、Vを以下の通りとする。

$$U = V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ここで以下の推論を考える。

前提1: xとyは差が1以下である。

前提2: xは1もしくは2である。

結論: yは1、2もしくは3である。

本推論をCRIを適用して実行するために、前提1より式(2.1)の定義に従いxとyの関係Rを求めると以下のようなになる。

$$R = \begin{array}{c} \begin{array}{c} U \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} V \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \\ \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

また、前提2より、Aとして{1, 2}が得られる。

従って、AとRのmax-min合成により結論としてyの可能性分布Bが以下のよう  
に得られる。

$$\begin{aligned} B &= A \circ R \\ &= (1, 1, 0, 0, 0) \circ R \\ &= (1, 1, 1, 0, 0) \\ &= \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

これが上記2つの前提からの妥当な帰結であることは明かであろう。

[例2]

xとyの値の全体集合U、Vを以下の通りとする。

$$U = V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

ここで以下の推論を考える。

前提1: If x is {2, 3} then y is {4, 5}.

前提2: x is A.

---

結論: y is B.

本推論の場合、式(2.1)で定義されるxとyの関係Rを以下のように構成すればよい。

$$R = \begin{array}{c|ccccc} & \text{U} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \text{V} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

この関係Rは、前提1中の{2, 3}の特性関数を $\mu_x(u)$ 、{4, 5}の特性関数を $\mu_y(v)$ とすると、これらから以下のようにして得たものであり、これは古典2値論理における含意の定義、すなわち、任意の命題P、Qに対し、 $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$ 、に基づくものである。

$$\mu_R(u, v) = (1 - \mu_x(u)) \vee \mu_y(v)$$

ここで前提2のAとしてA1 = {1}、A2 = {2}、A3 = {3, 4}、A4 = {1, 4, 5}、A5 = {2, 3}をとりRとの間にCRIを適用すると、結論Bはそれぞれ以下ようになる。

$$\begin{aligned} B1 &= A1 \circ R \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B2 &= A2 \circ R \\ &= \{4, 5\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B3 &= A3 \circ R \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_4 &= A_4 \circ R \\
&= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\
B_5 &= A_5 \circ R \\
&= \{4, 5\}
\end{aligned}$$

これら結論がいずれも上記前提からの正しい論理的帰結となっていることは容易に確認できるであろう。

以上の説明では、前提中の  $x$  と  $y$  の値の可能性分布はすべて通常の集合で表現される場合に限られていた。次に Zadeh [Zad73] [Zad75a] [Zad75b] が提案した可能性分布がファジイ集合で表現される場合も含むCRIについて説明する。

一般に  $x$  と  $y$  の値の全体集合を  $U$ 、 $V$  とし、以下の形式の推論について考える。

$$\begin{array}{l}
\text{前提 1 : } x \text{ and } y \text{ are } R. \\
\text{前提 2 : } x \text{ is } A. \\
\hline
\text{結論 : } y \text{ is } B.
\end{array}$$

ここで  $R$  は一般に以下のように定義された  $x$  と  $y$  の値の組  $(u, v)$  の可能性分布を表すファジイ関係であり、 $A$  は一般に以下のように定義された  $x$  の値の可能性分布を表現するファジイ集合である。

$$\begin{aligned}
R &= \int_{U \times V} \mu_R(u, v) / (u, v) \\
A &= \int_U \mu_A(u) / u
\end{aligned}$$

このとき、結論すなわち  $y$  の値の可能性分布をあらわすファジイ集合  $B$  は以下のように  $A$  と  $R$  の  $\max - \min$  合成により得られるとするのがCRIである。

$$\begin{aligned}
B &= A \circ R \\
&= \int_U \mu_A(u) / u \circ \int_{U \times V} \mu_R(u, v) / (u, v) \\
&= \int_V \bigvee_{u \in U} (\mu_A(u) \wedge \mu_R(u, v)) / v \tag{2.4}
\end{aligned}$$

以上の定義からも明らかなように、CRIにより妥当な推論結果を得るためには、ファジイ関係  $R$  の構成のしかたがポイントとなる。本論文では、前提1として応用上特に重要な以下のファジイ条件命題を対象とし、これに対応するファジイ関係  $R$  の構成法について主として論じる。

P : I F x is A then y is B.

ここで、A、Bはそれぞれxとyの値の可能性分布をあらわすファジイ集合に対応づけられているとする。

本条件命題Pに対応するファジイ関係Rの構成法としては、Z a d e h [Zad73] [Zad75a] は以下の2種類の方法を提案した。なお以下の式中のVはBの全体集合である。

$$R_m = (A \times B) \cup (\neg A \times V)$$

$$R_a = (\neg A \times V) \oplus (U \times B)$$

一方、M a m d a n i [Mam77] は以下の構成法を提案した。そしてこれをスチームエンジンの制御に応用し、よい制御結果が得られたと報告した。

$$R_c = A \times B$$

以上が本研究を開始した当時までのファジイ推論に関する研究状況であった。このような状況のなかで、これらZ a d e h、M a m d a n i の提案したファジイ関係に対しC R Iを適用し、様々な場合について実際に推論結果を求めてみたところ、得られる結論があまり妥当とは言えないとの印象を持った。また、彼らは推論方法の妥当性については特に議論は行なっていなかった。本研究はこれらのことが出発点となり、より妥当性のある推論方法の定式化を目的として行なった。

本研究ではまず、妥当なファジイ条件推論とはどのようなものであるべきかについての検討からスタートし、その結果としてファジイ条件推論において満たされるべき基準を設定した。次に、これら基準にもとづき、これらを満たす新たなファジイ条件推論法、具体的には、ファジイ条件命題からのファジイ関係Rの構成法をいくつか提案した。また、これらファジイ関係が以下の形式の推論にも適用可能であることを示した。

I f x is A then y is B.

y is B' .

---

x is A' .

さらに、新たに提案したファジイ関係は、Z a d e hの定義したファジイ関係では成立しなかった推移律等の好ましい性質を有することもあわせて明らかにした。そして、このファジイ条件推論法を応用することにより、almost all、most、few 等いわゆるファジイ限定詞によって限定された命題を前提とする推論の方法も新たに定式化した。

以上が本研究の概要であるが、次に本研究以後における本分野の状況について概観する。

本研究で提案した方法の特性はその後水本 [Miz81] [Miz82a] [Miz82b] [Miz82d] [Miz82e] [Miz83] によりさらに詳しく調べられるとともに、より複雑な形式の推論、具体的には、” If x is A then y is B else y is C.” なる形の前提を持つ推論に応用された。また、本研究では Z a d e h の定義した C R I、すなわち m a x - m i n 合成による推論の枠内で行なわれたが、水本 [Miz82c] [Miz85] は他の合成演算を用いる方法を提案した。そしてこの合成演算を用いた場合でも、本研究で提案したファジイ関係が良好な推論結果をもたらすことが示された。

本研究は主として理論的立場から行なった為、推論の前提中にあらわれるあいまいな概念に対応するファジイ集合は、原則として連続的に定義されたメンバシップ関数をもつことを仮定したが、実際にインプリメントする際に必要となる離散的に定義されたファジイ集合を使用した場合のこれら方法のふるまいについては、D r i a n k o v により検討された [Dri87]。

一方、ファジイ条件推論の妥当性の基準については、その後江沢・水本 [Ez83]、塚本 [Tsu83]、D u b o i s ら [Du85] [Du88] によって研究が進められ、本研究で提案した基準を含む形でより一般的、抽象的基準が提案されている。

また、以上述べた方法とは別に、間接法と呼ばれるファジイ推論方法が B a l d w i n [Bal79]、塚本 [Tsu79b] らによって新たに提案された。なお、間接法が提案されたことから、本論文で取り扱う方法が直接法と呼ばれることもある。

間接法では、真理値空間をあらわす区間  $T = [0, 1]$  上のファジイ集合（これをファジイ真理値と呼ぶ）が重要な役割を演じる。ファジイ真理値としては、例えば以下のようなものが使用される。

$$\text{true} = \int_T \mu_{\text{true}}(t) / t = \int_T t / t$$

$$\text{false} = \int_T \mu_{\text{false}}(t) / t = \int_T 1 - t / t$$

これらファジイ真理値を使用する間接法では一般に以下の手順で推論処理が実行される。

**Step 1:** 前提の” If x is A then y is B.” および ” x is A'.” より、まず (x is A') のもとでの (x is A) のファジイ真理値  $\tau_A$  を以下のようにして求める。

$$\begin{aligned}\tau_A &= \text{Truth}(x \text{ is } A / x \text{ is } A') \\ &= \int_T \mu_{A'}(u) / \mu_A(u)\end{aligned}$$

**Step 2:**  $\tau_A$ と "If x is A then y is B." より、"y is B." のファジイ真理値  $\tau_B$  を求める。

**Step 3:** "(y is B) is  $\tau_B$ ." より、以下のようにして  $B'$  を求める。

$$B' = \int_V \mu_{\tau_B}(\mu_B(v)) / v$$

これにより結論 "y is  $B'$ ." が得られたことになる。

間接法では原則として以上のステップによって結論が得られる。この中で、Step 2 の具体的方法が種々提案されており、例えば、Baldwin [Bal79] の方法では以下のようにして  $\tau_B$  が求められる。すなわち、ファジイ真理値 **true** に対しては、

$$(x \text{ is } A) \text{ is true} = x \text{ is } A.$$

が成立することから、

$$\text{If } x \text{ is } A \text{ then } y \text{ is } B.$$

を、

$$\text{If } (x \text{ is } A) \text{ is true then } (y \text{ is } B) \text{ is true.}$$

すなわち、

$$\text{If } a \text{ is true then } b \text{ is true.}$$

と考え、これに対する  $T \times T$  上のファジイ関係  $R$  を Zadeh の方法により構成する。そしてこの  $R$  と Step 1 で得られた  $\tau_A$  に対し CRI を適用し、以下のように  $\tau_B$  を求める。

$$\tau_B = \tau_A \circ R$$

本方法により得られる結論  $B'$  は、先に述べた Zadeh の直接法のそれと等しいことが Tongら [ToF82] により示されている。また、本方法で、上記  $R$  を本論文で提案する方法により構成した場合、本論文で提案する直接法によるのと同じ結論の得られることが水本 [Miz87b] により示されている。

間接法の範疇にはいる方法としては、他に塚本 [Tsu79b]、Yager [Yag80]、水本 [Miz87a] らによる方法が提案されている。また、塚本の方法の多次元推論への拡張が菅野・高木 [SuT83] によりなされている。

直接法と間接法を比較していずれが優れているかの判断を下すことは一般には困難であるが、応用例の上からは、例えば制御分野では主として直接法が使用されている [Sug88]。なお、これら推論法の計算における高速化を図る為、簡略推論法なるものもいくつか提案されている（たとえば [MaM88]）。

## 2. 4 結言

本章では、ファジイ集合に関する基本事項について述べた後、ファジイ推論法の研究の流れおよびその中における本研究の位置づけを明らかにした。

### 3. ファジイ条件推論法

#### 3. 1 緒言

本章では以下の形のファジイ条件推論法について論じる。

$$\begin{array}{l} \text{I f } x \text{ i s } A \text{ t h e n } y \text{ i s } B. \\ x \text{ i s } A'. \\ \hline y \text{ i s } B'. \end{array} \quad (3.1)$$

$$\begin{array}{l} \text{I f } x \text{ i s } A \text{ t h e n } y \text{ i s } B. \\ y \text{ i s } B'. \\ \hline x \text{ i s } A'. \end{array} \quad (3.2)$$

ここで、A、B、A'、B' は、一般にあいまいな概念であり、それぞれの概念を表すファジイ集合と対応付けられているものとする。なお、以下ではA、B等を対応するファジイ集合の名前と解釈する。

本形式の推論の具体例としては例えば以下のようなものが考えられる。

If a tomato is red then the tomato is ripe.  
This tomato is more or less red.  

---

This tomato is more or less ripe.

上記(3.1)、(3.2)の形式の推論において、A、B、A'、B'があいまいさを含まない場合、命題P、Qをそれぞれ、

P: x is A.  
Q: y is B.

とおくと、これらはそれぞれ2値論理においてよく知られた推論規則、すなわち”modus ponens”、及び”modus tollens”に帰着される。

$$\begin{array}{l} \text{m o d u s } \text{ p o n e n s} \\ P \rightarrow Q \\ P \\ \hline Q \end{array} \quad (3.3)$$

modus tollens

$P \rightarrow Q$

$\neg Q$

---

$P$

(3.4)

このことより、(3.1)、(3.2)の形式の推論はそれぞれ一般化modus ponens、一般化modus tollensと呼ばれている [Miz81]。また、その形より、前向きファジイ推論、後ろ向きファジイ推論とそれぞれよばれることもある [Yam87]。

これら形式の推論において、一般に  $A' \neq A$ 、 $B' \neq \neg B$  かつ  $A$ 、 $B$  がファジイ概念である場合、 $A$ 、 $B$  の意味内容に立ち入ることなく2値論理的な形式的手法で取り扱うことは困難である。そこで、第2章でも述べた通り、Zadeh [Zad73] [Zad75a] [Zad75b] は一般にファジイ概念を含んだ推論を機械的に実行する手法として推論の合成規則 (Compositional rule of inference ;以下CRIと略す) を提案し、これを用いて(3.1)、(3.2)の形式の推論を行なう具体的手法を与えた。また、Mamdani [Mam77] も、CRIを使用するがZadehのとは異なった手法を与え、これをスチームエンジン制御システムに応用した。

しかし、彼らの方法では、得られる推論結果が必ずしも我々の直感とは合致しない場合があり、さらに彼らは推論方法の妥当性については何等議論を行なっていなかった。

以上の状況を踏まえ、本章ではまず(3.1)、(3.2)の形式の推論において成立すべきと考えられる前提と結論の関係を整理することにより、妥当なファジイ条件推論の満たすべき条件をいくつか設定する。次に、Zadeh、Mamdaniの方法がこれら条件の一部しか満たさないことを示した上で、これら条件を満たす新たな方法を提案する。

本章の構成は以下の通りである。

まず、3.2節ではZadeh、及びMamdaniの方法について述べる。3.3節では妥当なファジイ条件推論法において満たされるべき条件を設定する。次に3.4節でZadeh、Mamdaniの方法がこれら条件の一部しか満たさないことを示した上で、3.5節で一般化modus ponensに関する条件を満たす新たな方法を提案する。続いて3.6節ではこれら新しい方法が一般化modus tollensに関する条件のかなりの部分を満たすことを示す。また、3.7節ではこれら新しい

方法のその他の性質について述べる。一方、塚本 [Tsu83] は筆者とは独立にファジイ条件推論法において満たされるべき条件を提案した。3. 8節では、本章で提案する方法がこれら条件をも大部分満たしていることを示す。本章で提案する推論方法は既に多くの研究者によって様々な角度から検討が加えられている。3. 9節ではこれらの概要について述べる。そして3. 10節では本章の結果をまとめる。

### 3. 2 Z a d e h、M a m d a n i の方法

本節では Z a d e h [Zad73] [Zad75a] [Zad75b] 及び M a m d a n i [Mam77] によって提案されたファジイ条件推論法について述べる。

第2章でも述べたように、Z a d e h は一般化 *modus ponens*、すなわち、

$$\begin{array}{l} \text{前提 1 : } \quad \text{I f } x \text{ i s } A \text{ t h e n } y \text{ i s } B. \\ \text{前提 2 : } \quad \quad \quad x \text{ i s } A'. \\ \hline \text{結論 : } \quad \quad \quad y \text{ i s } B'. \end{array} \quad (3.5)$$

の形式の推論に対し、前提1を  $x$  と  $y$  の適当なファジイ関係  $R$  に変換し、これと前提2からただちに得られる単項ファジイ関係  $R' = A'$  に推論の合成規則 (C R I) を適用することにより、結論  $B'$  が得られるとした。

$$B' = A' \circ R \quad (3.6)$$

また、一般化 *modus tollens* の場合も同様に、

$$A' = R \circ B' \quad (3.7)$$

で結論  $A'$  が得られる。

従って、本方法によりファジイ条件推論を実現するに際しては、ファジイ関係  $R$  の構成法をどのように定義するかがポイントとなる。

ファジイ関係  $R$  の構成方法として Z a d e h は以下の2つの方法を提案した [Zad73] [Zad75a] [Zad75b]。

(1) **M a x i m i n** 規則 (Maximin rule of conditional proposition)

$$R_m = (A \times B) \cup (\neg A \times V) \quad (3.8)$$

但しここで、 $V$  は  $B$  の全体集合である。

(2) **算術規則** (Arithmetic rule of conditional proposition)

$$R_a = (\neg A \times V) \oplus (U \times B) \quad (3.9)$$

但しここで、 $U$  は  $A$  の、 $V$  は  $B$  の全体集合である。

また、Mamdani [Mam77] は以下の方法を提案した。

(3) Mini規則 (Mini operation rule of conditional proposition)

$$R_c = A \times B \quad (3.10)$$

これらファジイ関係を使用することにより、一般化modus ponensの形式のファジイ条件推論に対しては以下により結論B' が得られることになる。

$$B' = A' \circ R_m$$

$$B' = A' \circ R_a$$

$$B' = A' \circ R_c$$

また同様に、一般化modus tollensの形式の推論に対しては以下により結論A' が得られる。

$$A' = R_m \circ B'$$

$$A' = R_a \circ B'$$

$$A' = R_c \circ B'$$

しかしながら、これら方法は以下に述べる具体例からもわかるように、必ずしも我々の直観にてらして妥当な結論を導出するとは限らない。

[Zadehの方法による推論の具体例]

U、V上のファジイ集合が以下のように定義されているとする。

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\text{small} = 1/1 + 0.8/2 + 0.3/3 + 0.1/4$$

$$\text{large} = 0.1/4 + 0.3/5 + 0.8/6 + 1/7$$

$$\text{sort of small} = 0.2/1 + 1/2 + 0.4/3 + 0.1/4$$

$$\text{more or less small} = 1/1 + 0.9/2 + 0.54/3 + 0.3/4$$

$$\text{sort of large} = 0.1/4 + 0.4/5 + 1/6 + 0.2/7$$

$$\text{more or less large} = 0.3/4 + 0.54/5 + 0.9/6 + 1/7$$

ここで、sort of、more or lessは2.2節でも述べたようにファジイ集合で表現されたsmall、largeに対する一種の単項演算子としての機能を持つものである。

次に、ファジイ条件命題Pを、

P: If x is small then y is large.

とする。このとき Zadeh の定義した Rm、Ra は各々以下のようになる。

$$R_m = (\text{small} \times \text{large}) \cup (\neg \text{small} \times V)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.3 & 0.8 & 1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.8 & 0.8 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_a = (\neg \text{small} \times V) \oplus (U \times \text{large})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.3 & 0.8 & 1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.8 & 1 & 1 & 1 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

これら Rm、Ra を使用して以下の推論を実行してみよう。

If x is small then y is large.

x is small.

---

y is ?.

本推論に対する結論として” y is large ” を期待することには誰も異存は

ないであろう。しかしながら Z a d e h の方法では以下のように先に述べた l a r g e の定義とは大きく異なったものが結論として得られる。

$$B' m = \text{small} \circ R m \\ = 0.3/1 + 0.3/2 + 0.3/3 + 0.3/4 + 0.3/5 + 0.8/6 + 1/7$$

$$B' a = \text{small} \circ R a \\ = 0.3/1 + 0.3/2 + 0.3/3 + 0.3/4 + 0.3/5 + 0.8/6 + 1/7$$

次に以下の推論について考えてみる。

I f x i s s m a l l t h e n y i s l a r g e .  
x i s s o r t o f s m a l l .

---

y i s ? .

本推論に対する結論としては、

y i s s o r t o f l a r g e .

もしくは

y i s m o r e o r l e s s l a r g e .

といったところが直観的に考えて妥当と言えよう。しかし、実際に Z a d e h の方法を適用してみると、

$$B' m = (\text{sort of small}) \circ R m \\ = 0.4/1 + 0.4/2 + 0.4/3 + 0.4/4 + 0.4/5 + 0.8/6 + 0.8/7$$

$$B' a = (\text{sort of small}) \circ R a \\ = 0.4/1 + 0.4/2 + 0.4/3 + 0.4/4 + 0.5/5 + 1/6 + 1/7$$

となり、s o r t o f l a r g e 、 m o r e o r l e s s l a r g e の定義のいずれとも大きく異なった結論が得られることがわかる。 [例終]

以上 Z a d e h の方法について具体例を示したが、M a m d a n i の方法でも同様の結果が得られ、いずれをとっても我々の直観に照らして妥当な結論が得られるとは言い難いことがわかる。そこで次節では、より良いファジイ条件推論方式定式化のための足がかりとして、妥当なファジイ条件推論のための条件を設定する。

### 3. 3 妥当なファジイ条件推論 のための条件

一般に、あいまいな概念を含む前提条件からの推論においては、妥当な推論であるための条件を厳密に定義することは困難と考えられる。そこで本論文では、ファジイ条件推論において一般に成立すべきと考えられる前提と結論の関係をいくつか設定し、これら関係が満足される推論方法を妥当な推論方法とする。

#### 3. 3. 1 一般化modus ponensにおける条件

本節では一般化modus ponens、すなわち、

前提1 : If x is A then y is B.

前提2 : x is A'.

---

結論 : y is B'.

の形式の推論において、前提2のA'と結論のB'の間に一般に成立すべきであろうと考えられる関係を整理する [FMT78a] [FMT78b] [FMT80]。

[関係 I]

前提1 : If x is A then y is B.

前提2 : x is A.

---

結論 : y is B.

本関係はmodus ponensそのものであり、当然の要求条件であろう。

[関係 II - 1]

前提1 : If x is A then y is B.

前提2 : x is very A.

---

結論 : y is very B.

ここで、veryはファジイ集合A、Bに対し限定を加える演算子として機能するものであり、本関係は前提に加えられた限定が結論におよぶことを要求している。本関係の成立が要求される場合のあることは、例えば以下の例からも明かであろう。

If an apple is red then the apple is ripe.

This apple is very red.

---

This apple is very ripe.

なお、“x is A”と“y is B”の間に強い因果関係が存在しない場合も考慮し、前提に加えられた限定が結論におよばない以下の関係もあげておく。

[関係Ⅱ-2]

前提1 : If x is A then y is B.

前提2 : x is very A.

---

結論 : y is B.

[関係Ⅲ]

前提1 : If x is A then y is B.

前提2 : x is more or less A.

---

結論 : y is more or less B.

ここで“more or less”は、“very”とは逆に、ファジイ集合A、Bに対する限定を弱める働きをする、言い替えるならばよりあいまいさを増す演算子として機能する。一般に前提のあいまいさが増せば当然結論のあいまいさも増すべきであり、本関係も当然の要求と考えられる。

[関係Ⅳ]

前提1 : If x is A then y is B.

前提2 : x is not A.

---

結論 : y is B'.

本関係においては、前提1が“x is not A”の場合に関する情報を陽には全く含んでいないことより、結論B'はunknown（これはファジイ集合Bの全体集合Vに対応する）とするのが最も自然である。しかしながら、我々が日常前提1の形の条件文を使用する場合、暗黙のうちに以下の意味で使用する場合も多い。

If x is A then y is B else y is not B.

もしくは

If and only if x is A then y is B.

このような場合、結論B'は当然“not B”であることが要求される。

以上より、関係Ⅳは以下の2つに分けることとする。

[関係Ⅳ-1]

前提1 : I f x i s A t h e n y i s B.  
前提2 : x i s n o t A.  
-----  
結論 : y i s u n k n o w n.

[関係Ⅳ-2]

前提1 : I f x i s A t h e n y i s B.  
前提2 : x i s n o t A.  
-----  
結論 : y i s n o t B.

### 3. 3. 2 一般化modus tollensにおける条件

本節では一般化modus tollensの形式のファジイ条件推論に対し、前節と同様の関係を整理する。[MFT78b] [MFT79a]

[関係Ⅴ]

前提1 : I f x i s A t h e n y i s B.  
前提2 : y i s n o t B.  
-----  
結論 : x i s n o t A.

これはmodus tollensそのものであり、当然の要求条件であろう。

[関係Ⅵ]

前提1 : I f x i s A t h e n y i s B.  
前提2 : y i s n o t v e r y B.  
-----  
結論 : x i s n o t v e r y A.

本関係は関係Ⅱ-1に対応するものである。

なお、前提2の "not very B" は "not B" に包含されるものではない為、本推論の結論を "x is not A" とするのは無理があると考えられる。

[関係Ⅶ]

前提1 : I f x i s A t h e n y i s B .

前提2 : y i s n o t m o r e o r l e s s B .

---

結論 : x i s n o t m o r e o r l e s s A .

本関係は関係Ⅲに対応するものである。

[関係Ⅷ-1]

前提1 : I f x i s A t h e n y i s B .

前提2 : y i s B .

---

結論 : x i s u n k n o w n .

[関係Ⅷ-2]

前提1 : I f x i s A t h e n y i s B .

前提2 : y i s B .

---

結論 : x i s A .

ここで関係Ⅷ-1は関係Ⅳ-1に対応するものである。また、関係Ⅷ-2は関係Ⅳ-2の場合と同様前提1が暗黙のうちに、

I f x i s A t h e n y i s B e l s e y i s n o t B .

もしくは

I f a n d o n l y i f x i s A t h e n y i s B .

を意味している場合に対応する。

### 3. 4 従来方法の問題点

本節では、3. 2節で述べたZadeh及びMamdaniの方法では前節で設定した関係Ⅰ～関係Ⅷ-2のほとんどが満たされないことを示す [FMT78a] [FMT78b] [FMT80] [MFT78b] [MFT79a]。

なお、本節では一般化modus ponens及び一般化modus tollensの形の推論、すなわち、

$$\begin{array}{l}
 \text{前提1: } I f \ x \ i s \ A \ t h e n \ y \ i s \ B. \\
 \text{前提2: } \quad \quad \quad x \ i s \ A'. \\
 \hline
 \text{結論: } \quad \quad \quad y \ i s \ B'.
 \end{array} \tag{3.11}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{前提1: } I f \ x \ i s \ A \ t h e n \ y \ i s \ B. \\
 \text{前提2: } \quad \quad \quad y \ i s \ B'. \\
 \hline
 \text{結論: } \quad \quad \quad x \ i s \ A'.
 \end{array} \tag{3.12}$$

において、ファジイ集合A、Bを一般に、

$$A = \int_U \mu_A(u) / u \tag{3.13}$$

$$B = \int_V \mu_B(v) / v \tag{3.14}$$

とし、 $\mu_A(u)$ 、 $\mu_B(v)$ は各々以下の条件を満たすものとする。

$$\exists u \in U \ \mu_A(u) = 0, \quad \exists u' \in U \ \mu_A(u') = 1 \tag{3.15}$$

$$\exists v \in U \ \mu_B(v) = 0, \quad \exists v' \in U \ \mu_B(v') = 1 \tag{3.16}$$

また、推論結果のB'もしくはA'を図によって例示する場合があるが、その場合前提1中のファジイ集合AおよびBは各々図3. 1、図3. 2の通りであるとする。

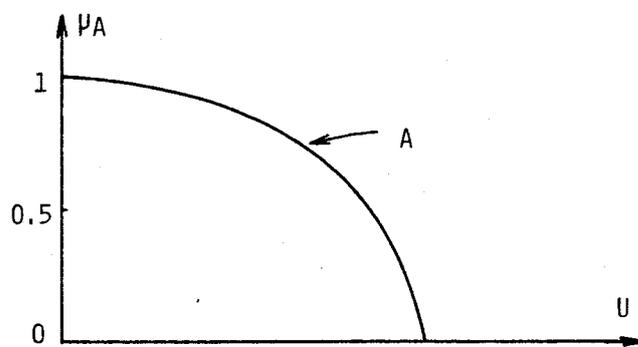


図3. 1 ファジイ集合Aのメンバーシップ関数 $\mu_A(u)$

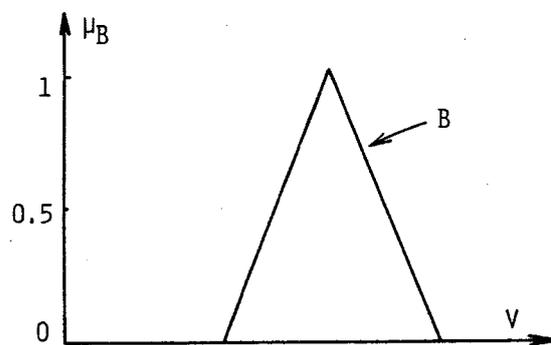


図3. 2 ファジイ集合Bのメンバーシップ関数 $\mu_B(v)$

### 3. 4. 1 Zadehの方法 (maximin規則) の場合

maximin規則を使用した場合、一般化modus ponensの形式の推論に対しては、結論 $Bm'$ は以下の式により得られる。

$$Bm' = A' \circ [(A \times B) \cup (\neg A \times V)] \quad (3.17)$$

以下では式(3.17)の $A'$ として、 $A$ 、 $very\ A = A^2$ 、 $more\ or\ less\ A = A^{1/2}$ 、 $not\ A = \neg A$ を具体的に与え、関係I~IV-2が成立するか否かを調べる。

(1)  $A' = A$ の場合

$$\begin{aligned} Bm' &= A \circ [(A \times B) \cup (\neg A \times V)] \\ &= \int_U \mu_A(u) / u \circ \int_{U \times V} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u)) / (u, v) \\ &= \int_V \bigvee_{u \in U} [\mu_A(u) \wedge ((\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u)))] / v \end{aligned}$$

ここで、 $Sm(\mu_A(u))$ を以下のように定義する。

$$Sm(\mu_A(u)) = \mu_A(u) \wedge ((\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u)))$$

$Sm(\mu_A(u))$ の値はパラメータ $\mu_B(v)$ の値に応じて図3.3に示す通りに変化する。すなわち、図3.3においてたとえば $\mu_B(v) = 0.3$ であるとすると $Sm(\mu_A(u))$ は-----で示される値をとる。一方、式(3.15)及び式(3.16)の仮定より、 $\mu_A(u)$ は $u \in U$ の値の変化に応じて区間 $[0, 1]$ のすべての値をとる。従って図3.3より以下が得られる。

$$\bigvee_{u \in U} Sm(\mu_A(u)) = \begin{cases} \mu_B(v) & \cdots \mu_B(v) > 0.5 \\ 0.5 & \cdots \mu_B(v) \leq 0.5 \end{cases}$$

以上より $Bm'$ は以下の通りとなる。

$$\begin{aligned} Bm' &= \int_V \bigvee_{u \in U} Sm(\mu_A(u)) / v \\ &= \int_V (0.5 \vee \mu_B(v)) / v \end{aligned}$$

これは $Bm' \neq B$ 、すなわち関係Iの不成立を示している。

なお、 $A$ 、 $B$ を各々図3.1、図3.2と仮定したとき、 $Bm'$ は図3.4の通りとなる。これより、 $Bm'$ が $B$ とは大きく異なっていることが容易に理解できるであろう。

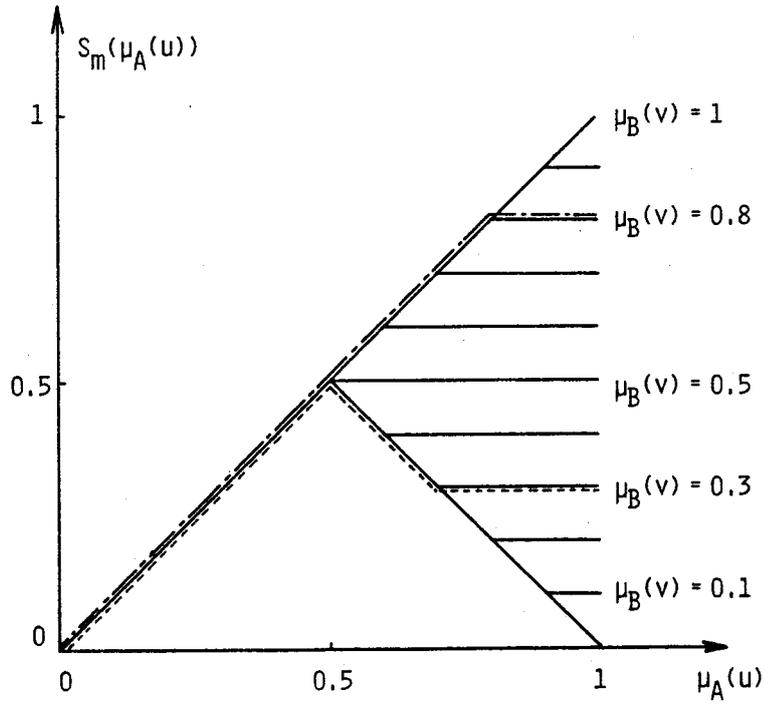


図 3. 3  $S_m(\mu_A(u))$

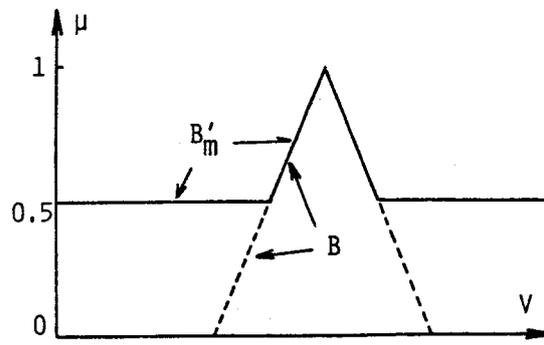


図 3. 4  $A' = A$  の場合の結論  $B'_m$

(2)  $A' = \text{very } A$  の場合

$$\begin{aligned} Bm' &= A^2 \circ [(A \times B) \cup (\neg A \times V)] \\ &= \int_U \mu_A^2(u) / u \circ \int_{U \times V} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u)) / (u, v) \\ &= \int_V \bigvee_{u \in U} [\mu_A^2(u) \wedge ((\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u)))] / v \end{aligned}$$

ここで、 $Sm'(\mu_A(u))$  を以下のように定義する。

$$Sm'(\mu_A(u)) = \mu_A^2(u) \wedge ((\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u)))$$

$Sm'(\mu_A(u))$  の値はパラメータ  $\mu_B(v)$  の値に応じて図3. 5に示す通りに変化する。

従って、図3. 5と式(3. 15)及び式(3. 16)の仮定より以下が得られる。

$$\bigvee_{u \in U} Sm'(\mu_A(u)) = \begin{cases} \mu_B(v) & \cdots \mu_B(v) > (3 - \sqrt{5}) / 2 \\ (3 - \sqrt{5}) / 2 & \cdots \mu_B(v) \leq (3 - \sqrt{5}) / 2 \end{cases}$$

以上より  $Bm'$  は以下の通りとなる。

$$\begin{aligned} Bm' &= \int_V \bigvee_{u \in U} Sm'(\mu_A(u)) / v \\ &= \int_V [((3 - \sqrt{5}) / 2) \vee \mu_B(v)] / v \end{aligned}$$

これは  $Bm' \neq \text{very } B$ 、 $Bm' \neq B$ 、すなわち関係II-1、関係II-2の不成立を示している。

なお、 $A$ 、 $B$ を各々図3. 1、図3. 2の通りと仮定したとき、 $Bm'$  は図3. 6の通りとなる。

(3)  $A' = \text{more or less } A$  の場合

$A' = \text{more or less } A$  の場合、結論  $Bm'$  は以下の式により得られる。

$$Bm' = A^{0.5} \circ [(A \times B) \cup (\neg A \times V)]$$

本式の値は、 $A' = \text{very } A$  の場合と同様の方法で容易に得ることができ、その結果は以下の通りとなる。

$$Bm' = \int_V [((-1 + \sqrt{5}) / 2) \vee \mu_B(v)] / v$$

これは  $Bm' \neq \text{more or less } B$ 、すなわち関係IIIの不成立を示している。

なお、 $A$ 、 $B$ を各々図3. 1、図3. 2の通りと仮定したとき、 $Bm'$  は図3. 7の通りとなる。

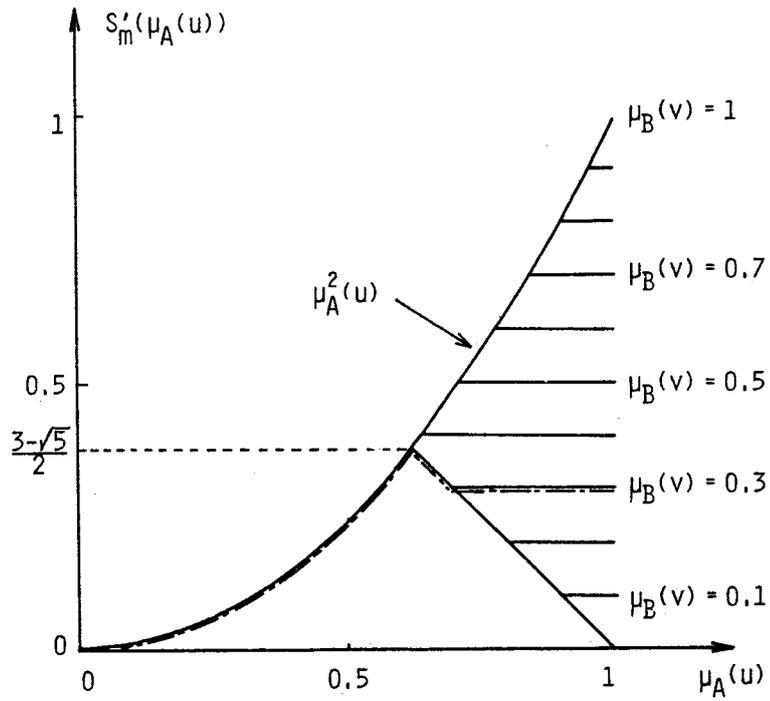


図 3. 5  $S'_m(\mu_A(u))$

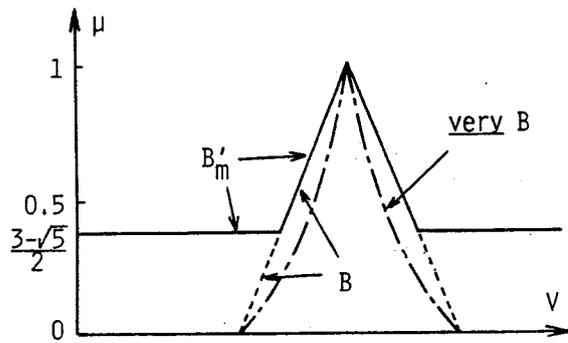


図 3. 6  $A' = \text{very } A$  の場合の結論  $B'_m$

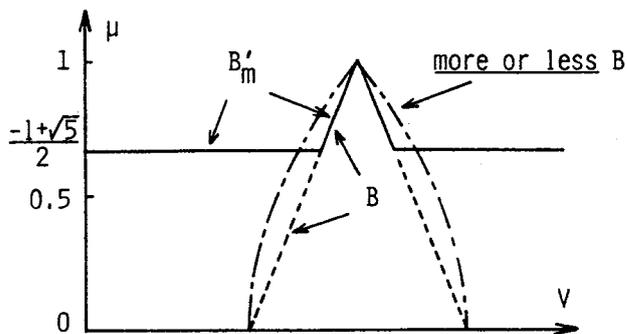


図 3. 7  $A' = \text{more or less } A$  の場合の結論  $B'_m$

(4)  $A' = \text{not } A$  の場合

$$\begin{aligned}
 Bm' &= \neg A \circ [ (A \times B) \cup (\neg A \times V) ] \\
 &= \int_U (1 - \mu_A(u)) / u \\
 &\quad \circ \int_{U \times V} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u)) / (u, v) \\
 &= \int_V \bigvee_{u \in U} [ (1 - \mu_A(u)) \\
 &\quad \wedge ( (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u)) ) ] / v \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

ここで式 (3.15) の仮定より、 $\mu_A(u) = 0$  なる  $u$  が存在することから、式 (3.18) は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
 &\text{式 (3.18)} \\
 &= \int_V 1 \wedge [ (0 \wedge \mu_B(v)) \vee 1 ] / v \\
 &= \int_V 1 / v \\
 &= V = \text{unknown}
 \end{aligned}$$

これは関係 IV-1 の成立を示している。一方関係 IV-2 は関係 IV-1 と背反するため、これよりただちに関係 IV-2 の不成立が言える。

以上より、maximin 規則を使用した場合一般化 modus ponens に関する関係は関係 IV-1 を除き成立しないことが証明された。

次に一般化 modus tollens の場合について述べる。

一般化 modus tollens の形式の推論に対しては、maximin 規則を使用した場合、結論  $Am'$  は以下の式により得られる。

$$Am' = [ (A \times B) \cup (\neg A \times V) ] \circ B' \quad (3.19)$$

以下では式 (3.19) の  $B'$  として、 $\text{not } B = \neg B$ 、 $\text{not very } B = \neg B^2$ 、 $\text{not more or less } B = \neg B^{1/2}$ 、および  $B$  を具体的に与え、関係 V~VIII-2 が成立するか否かを調べる。

(1)  $B' = \text{not } B$  の場合

$$\begin{aligned}
 Am' &= [ (A \times B) \cup (\neg A \times V) ] \circ (\neg B) \\
 &= \int_{U \times V} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u)) / (u, v) \\
 &\quad \circ \int_V (1 - \mu_B(v)) / v \\
 &= \int_U \bigvee_{v \in V} [ ( (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u)) ) \\
 &\quad \wedge (1 - \mu_B(v)) ] / u \\
 &= \int_U (0.5 \vee (1 - \mu_A(u))) / u \\
 &\neq \neg A
 \end{aligned}$$

これは関係  $V$  の不成立を示している。

(2)  $B' = \text{not very } B$  の場合

$$\begin{aligned}
 Am' &= [ (A \times B) \cup (\neg A \times V) ] \circ (\neg B^2) \\
 &= \int_{U \times V} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u)) / (u, v) \\
 &\quad \circ \int_V (1 - \mu_{B^2}(v)) / v \\
 &= \int_U \bigvee_{v \in V} [ ( (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u)) ) \\
 &\quad \wedge (1 - \mu_{B^2}(v)) ] / u \\
 &= \int_U (1 - \mu_A(u)) \vee ( ((\sqrt{5}-1)/2) \wedge \mu_A(u) ) / u \\
 &\neq \neg A^2 = \text{not very } A
 \end{aligned}$$

これは関係  $VI$  の不成立を示している。

(3)  $B' = \text{not more or less } B$  の場合

$$\begin{aligned}
 Am' &= [ (A \times B) \cup (\neg A \times V) ] \circ (\neg B^{1/2}) \\
 &= \int_{U \times V} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u)) / (u, v) \\
 &\quad \circ \int_V (1 - \mu_{B^{1/2}}(v)) / v \\
 &= \int_U \bigvee_{v \in V} [ ( (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u)) ) \\
 &\quad \wedge (1 - \mu_{B^{1/2}}(v)) ] / u
 \end{aligned}$$

$$= \int_U (1 - \mu_A(u)) \vee ((3-\sqrt{5})/2) / u$$

$$\neq \neg A^{1/2} = \text{not more or less } A$$

これは関係Ⅶの不成立を示している。

(4)  $B' = B$ の場合

$$A m' = [ (A \times B) \cup (\neg A \times V) ] \circ B$$

$$= \int_{U \times V} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u)) / (u, v)$$

$$\circ \int_V \mu_B(v) / v$$

$$= \int_U \bigvee_{v \in V} [ (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u)) ] \wedge \mu_B(v) / u$$

$$= \int_U \mu_A(u) \vee (1 - \mu_A(u)) / u$$

これより  $A m' \neq A$ 、 $A m' \neq U$  となり、関係Ⅷ-1、関係Ⅷ-2共に成立しないことがわかる。

以上より、maximin規則を使用して一般化modus tollensを実行した場合、関係Ⅴ～関係Ⅷ-2のいずれもが成立しないことが証明された。

### 3.4.2 Zadehの方法(算術規則)の場合

本節ではZadehの算術規則を用いた場合においても、maximin規則を使用した場合同様、関係Ⅰ～関係Ⅷ-2のほとんどが成立しないことを示す。

算術規則を用いた場合、一般化modus ponensの形の推論に対しては、結論  $B a'$  は以下の式により得られる。

$$B a' = A' \circ [ (\neg A \times V) \oplus (U \times B) ] \quad (3.20)$$

ここで一般に  $A' = A^d$  ( $d > 0$ ) とおくと、 $B a'$  は以下の通りとなる。

$$B a' = A^d \circ [ (\neg A \times V) \oplus (U \times B) ]$$

$$= \int_U \mu_A^d(u) / u \circ \int_{U \times V} 1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v)) / (u, v)$$

$$= \int_V \bigvee_{u \in U} [ \mu_A^d(u) \wedge (1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v))) ] / v$$

ここで、 $S a(\mu_A(u), d)$  を以下のように定義する。

$$S a (\mu_A(u), d) = \mu_A^d(u) \wedge (1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v)))$$

式(3.15)及び式(3.16)の仮定より、 $\mu_A(u)$ は $u \in U$ の値の変化に応じて区間 $[0, 1]$ のすべての値をとる。従って図3.8より、 $d = 1$ の場合、以下の式が成立する。

$$\begin{aligned} & \bigvee_{u \in U} S a (\mu_A(u), 1) \\ &= \bigvee_{u \in U} \mu_A(u) \wedge (1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v))) \\ &= (1 + \mu_B(v)) / 2 \end{aligned}$$

従って、 $B a'$ は以下のようにになる。

$$\begin{aligned} B a' &= \int_V \bigvee_{u \in U} S a (\mu_A(u), 1) / v \\ &= \int_V [(1 + \mu_B(v)) / 2] / v \\ &\neq B \end{aligned}$$

また、 $d = 2$ の場合、同じく図3.8より $B a'$ は以下のように得られる。

$$\begin{aligned} B a' &= \int_V \bigvee_{u \in U} S a (\mu_A(u), 2) / v \\ &= \int_V [(3 + 2\mu_B(v) - \sqrt{5 + 4\mu_B(v)}) / 2] / v \end{aligned}$$

これより、 $B a' \neq \text{very } B$ 、 $B a' \neq B$ が得られる。

さらに、 $d = 1/2$ の場合についても同様にして $B a'$ は以下のように得られる。

$$\begin{aligned} B a' &= \int_V \bigvee_{u \in U} S a (\mu_A(u), 0.5) / v \\ &= \int_V [(-1 + \sqrt{5 + 4\mu_B(v)}) / 2] / v \\ &\neq B^{1/2} = \text{more or less } B \end{aligned}$$

以上により算術規則を使用した場合の関係I～関係IIIの不成立が証明された。

なお、 $A$ 、 $B$ として図3.1、図3.2を仮定し、 $A'$ を $A$ 、 $\text{very } A = A^2$ 、 $\text{more or less } A = A^{1/2}$ とした場合の算術規則による推論結果を図3.9、図3.10、図3.11にそれぞれ示す。

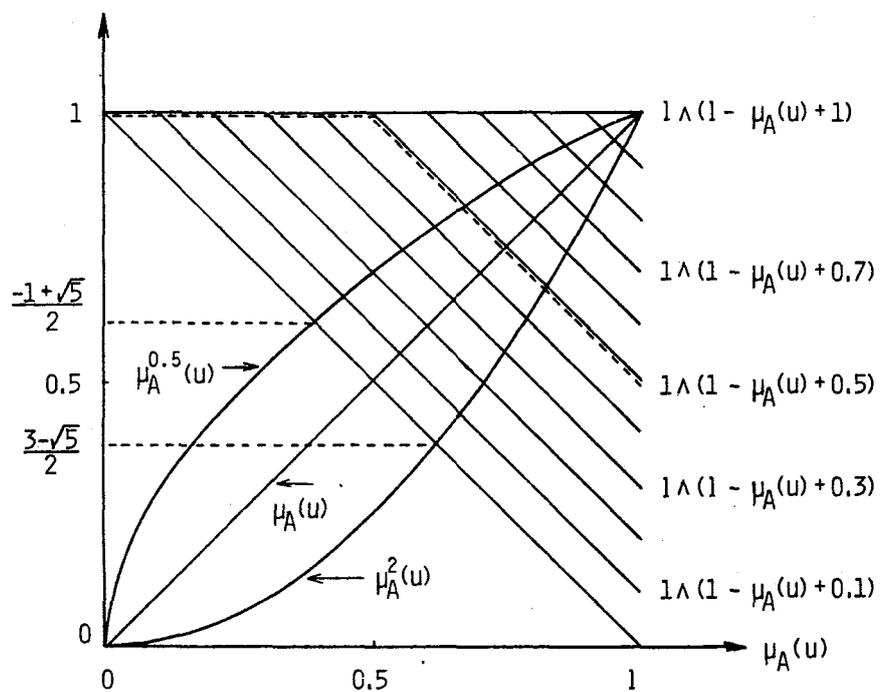


図 3. 8  $S a (\mu_A(u), d)$

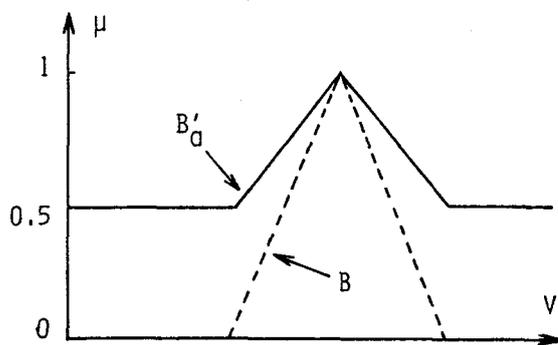


図 3. 9  $A' = A$  の場合の結論  $B a'$

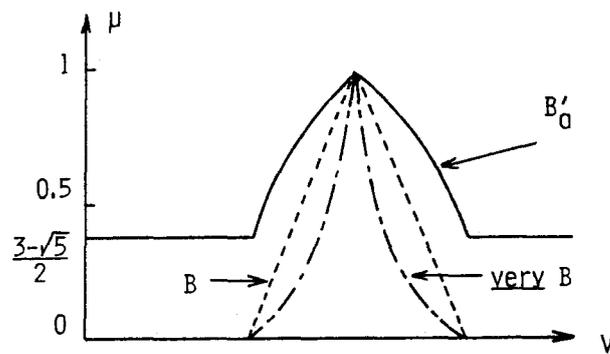


図3.10  $A' = \text{very } A$  の場合の結論  $B a'$

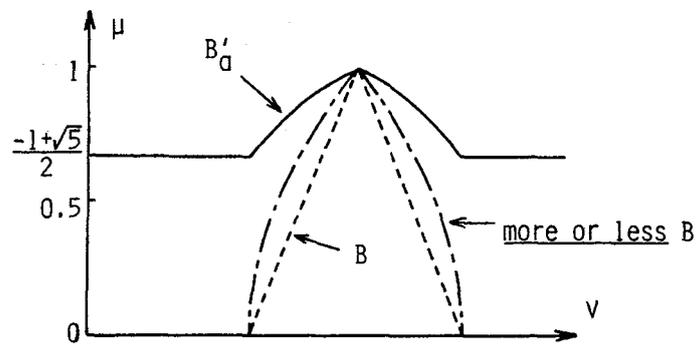


図3.11  $A' = \text{more or less } A$  の場合の結論  $B a'$

次に  $A' = \text{not } A$  の場合について示す。

$A' = \text{not } A$  の場合、算術規則による推論結果は以下の通りとなる。

$$\begin{aligned}
 B a' &= \neg A \circ [ (\neg A \times V) \oplus (U \times B) ] \\
 &= \int_U (1 - \mu_A(u)) / u \circ \int_{U \times V} 1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v)) / (u, v) \\
 &= \int_V \bigvee_{u \in U} [ (1 - \mu_A(u)) \wedge (1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v))) ] / v \\
 &= \int_V 1 \wedge (1 \wedge (1 + \mu_B(v))) / v \\
 &= \int_V 1 / v \\
 &= V = \text{unknown}
 \end{aligned}$$

これは関係IV-1の成立を示している。また、これよりただちに関係IV-2の不成立が  
いえる。

以上により、算術規則を使用した場合一般化modus ponensの形式の推論  
に対しては、関係IV-1を除き他は成立しないことが証明された。

次に一般化modus tollensの場合について述べる。

算術規則を使用した場合、一般化modus tollensの形式の推論に対して  
は、結論  $A a'$  は以下の式により得られる。

$$A a' = [ (\neg A \times V) \oplus (U \times B) ] \circ B' \quad (3.21)$$

ここで一般に  $B'$  として  $\neg B^d$  ( $d > 0$ ) を代入すると、 $A a'$  は以下の通りとなる。

$$\begin{aligned}
 A a' &= [ (\neg A \times V) \oplus (U \times B) ] \circ \neg B^d \\
 &= \int_{U \times V} 1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v)) / (u, v) \circ \int_V (1 - \mu_B^d(v)) / v \\
 &= \int_U \bigvee_{v \in V} [ (1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v))) \wedge (1 - \mu_B^d(v)) ] / v \\
 & \hspace{15em} (3.22)
 \end{aligned}$$

式(3.22)は  $d = 1$  の場合以下の通りとなる。

$$A a' = \int_U 1 - (1/2) \mu_A(u) / u$$

また、 $d = 2$  の場合は以下のようなになる。

$$A a' = \int_U [ (1 - 2\mu_A(u) + \sqrt{1 + 4\mu_A(u)}) / 2 ] / u$$

さらに、 $d = 1/2$  の場合は以下のようなになる。

$$A a' = \int_U [(3 - \sqrt{1 + 4\mu_A(u)}) / 2] / u$$

以上より、算術規則を使用した場合、関係V～関係VIIはいずれも成立しないことが示された。

次に  $B' = B$  の場合について述べる。

$$\begin{aligned} A a' &= [(\neg A \times V) \oplus (U \times B)] \circ B \\ &= \int_{U \times V} 1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v)) / (u, v) \circ \int_V \mu_B(v) / v \\ &= \int_U \bigvee_{v \in V} [(1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v))) \wedge \mu_B(v)] / v \\ &= \int_U (1 \wedge (1 - \mu_A(u) + 1) \wedge 1) / v \\ &= \int_U 1 / v \\ &= U = \text{unknown} \end{aligned}$$

これより、関係VIII-1の成立及び関係VIII-2の不成立が示された。

以上により、算術規則を一般化modus ponens及び一般化modus tollensの形式の推論に適用した場合、関係IV-1、関係VIII-1を除いては成立しないことが証明された。

### 3. 4. 3 Mamdaniの方法の場合

Mamdaniの方法では、一般化modus ponensの形の推論に対する結論  $B c'$  は以下の式により得られる。

$$B c' = A' \circ (A \times B) \tag{3.23}$$

ここで一般に  $A' = A^d$  ( $d > 0$ ) とすると、 $B c'$  は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} B c' &= A^d \circ (A \times B) \\ &= \int_U \mu_A^d(u) / u \circ \int_{U \times V} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) / (u, v) \\ &= \int_V \bigvee_{u \in U} [\mu_A^d(u) \wedge \mu_A(u) \wedge \mu_B(v)] / v \end{aligned} \tag{3.24}$$

ここで式(3.15)の仮定より、 $\mu_A(u) = 1$  なる  $u \in U$  が存在することに注意すれば、式(3.24)は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
B c' &= \int_V 1 \wedge 1 \wedge \mu_B(v) / v \\
&= \int_V \mu_B(v) / v \\
&= B
\end{aligned}$$

これは関係Ⅰ、関係Ⅱ-2が成立し、関係Ⅱ-1および関係Ⅲが成立しないことを示している。

また、 $A' = \text{not } A (= \neg A)$  とおくと  $B c'$  は以下の通りとなる。

$$\begin{aligned}
B c' &= \neg A \circ (A \times B) \\
&= \int_U 1 - \mu_A(u) / u \circ \int_{U \times V} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) / (u, v) \\
&= \int_V \bigvee_{u \in U} [(1 - \mu_A(u)) \wedge \mu_A(u) \wedge \mu_B(v)] / v \\
&= \int_V 0.5 \wedge \mu_B(v) / v
\end{aligned}$$

これは関係Ⅳ-1、関係Ⅳ-2が共に成立しないことを示している。

なお、本方法では以下に示すように  $A' = \text{unknown } (= U)$  とおくと、結論  $B c'$  は  $B$  に等しくなる。これは明らかに論理性を欠くものと言わざるをえない。

$$\begin{aligned}
B c' &= U \circ (A \times B) \\
&= \int_U 1 / u \circ \int_{U \times V} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) / (u, v) \\
&= \int_V \bigvee_{u \in U} [1 \wedge \mu_A(u) \wedge \mu_B(v)] / v \\
&= \int_V \mu_B(v) / v \\
&= B
\end{aligned}$$

次に一般化modus tollensの場合について示す。

Mamdaniの方法では、一般化modus tollensに対する結論  $A c'$  は以下により得られる。

$$A c' = (A \times B) \circ B' \tag{3.25}$$

ここで  $B'$  として一般に  $\neg B^d$  ( $d > 0$ ) を代入すると以下の通りとなる。

$$A c' = (A \times B) \circ (\neg B^d)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{U \times V} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) / (u, v) \circ \int_V 1 - \mu_B^d(v) / v \\
&= \int_U \bigvee_{v \in V} [\mu_A(u) \wedge \mu_B(v) \wedge (1 - \mu_B^d(v))] / u \\
&= \int_U \mu_A(u) \wedge \left[ \bigvee_{v \in V} \mu_B(v) \wedge (1 - \mu_B^d(v)) \right] / u
\end{aligned}$$

ここで  $d = 1$  とおくと  $A c'$  は以下のようなになる。

$$A c' = \int_U \mu_A(u) \wedge 0.5 / u \quad (3.26)$$

また、 $d = 2$  とおくと  $A c'$  は以下のようなになる。

$$A c' = \int_U \mu_A(u) \wedge ((\sqrt{5}-1)/2) / u \quad (3.27)$$

さらに  $d = 1/2$  とおくと  $A c'$  は以下のようなになる。

$$A c' = \int_U \mu_A(u) \wedge ((3-\sqrt{5})/2) / u \quad (3.28)$$

以上の式 (3.26)、式 (3.27)、及び式 (3.28) は関係 V ~ VII の不成立を示している。

さらに  $B'$  として  $B$  を式 (3.25) に代入すると、結論  $A c'$  は以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
A c' &= (A \times B) \circ B \\
&= \int_{U \times V} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) / (u, v) \circ \int_V \mu_B(v) / v \\
&= \int_U \bigvee_{v \in V} [\mu_A(u) \wedge \mu_B(v) \wedge \mu_B(v)] / u \\
&= \int_U \mu_A(u) / u \\
&= A
\end{aligned}$$

これは関係 VIII-1 の不成立をそして関係 VIII-2 の成立を示している。

以上により、Mamdani の方法では関係 I、関係 II-2 及び関係 VIII-2 のみが成立し、他は成立しないことが証明された。

ここで、以上で述べた結果をまとめると表 3.1 の通りとなる。

表3.1 Zadeh、Mamdaniの方法における各関係の成立状況

関係	Zadehの方法 (maximin規則)	Zadehの方法 (算術規則)	Mamdaniの方法
I	×	×	○
II-1	×	×	×
II-2	×	×	○
III	×	×	×
IV-1	○	○	×
IV-2	×	×	×
V	×	×	×
VI	×	×	×
VII	×	×	×
VIII-1	×	○	×
VIII-2	×	×	○

○：成立      ×：不成立

### 3. 5 新たなファジイ条件推論方法

#### の定式化 [FMT78a] [FMT80]

-----一般化modus ponensの立場から-----

前節ではZadeh、Mamdaniの方法が3. 2節で述べた前提と結論の関係のほとんどを満たさないことを示した。そこで本節では、まず一般化modus ponensの形式の推論に対し、これら関係を満たす新たな方法を定式化する。

#### 3. 5. 1 ファジイ条件推論法の分類

3. 2節で設定した各関係をまとめると表3. 2となる。本表において一般化modus ponensで成立すべき関係は関係I～関係IV-2であり、このなかで関係II-1と関係II-2、及び関係IV-1と関係IV-2は互いに背反する条件となっている。そこでこれら背反する関係のいずれが成立するかにより、ファジイ条件推論法を表3. 3の4つのタイプに分類する。

表3. 2 ファジイ条件推論において成立すべき関係

関係	前提 2	結論
I	A	B
II-1	very A	very B
II-2	very A	B
III	more or less A	more or less B
IV-1	not A	unknown
IV-2	not A	not B
V	not B	not A
VI	not very B	not very A
VII	not more or less B	not more or less A
VIII-1	B	unknown
VIII-2	B	A

表 3. 3 ファジイ条件推論法のタイプ

タイプ	成立が要求される関係
1	関係 I、 II-1、 III、 IV-1
2	関係 I、 II-2、 III、 IV-1
3	関係 I、 II-1、 III、 IV-2
4	関係 I、 II-2、 III、 IV-2

以下においては各タイプ毎に、要求される関係を満たす方法を定式化する。

### 3. 5. 2 関係 I を満たすファジイ関係 R を構成するための必要条件

条件命題 "If x is A then y is B." に対して Z a d e h が定義したファジイ関係  $R_a$ 、すなわち、

$$\begin{aligned}
 R_a &= (\neg A \times V) \oplus (U \times B) & (3.29) \\
 &= \int_{U \times V} 1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v)) / (u, v)
 \end{aligned}$$

において、そのメンバシップ関数  $[1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v))]$  は Ł u k a s i e w i c z の定義した多値論理体系  $L_{\aleph}$  における含意の定義 [Res69] に依っている。すなわち、 $L_{\aleph}$  での含意は以下のように定義されている。

$$v(P \rightarrow Q) = 1 \wedge (1 - v(P) + v(Q))$$

ここで、P、Q、は任意の命題であり、 $v(P)$  は命題 P の真理値を表す。

以下ではこの点に注目し、一般に多値論理体系の含意の定義式を利用して式 (3. 29) と同様のファジイ関係 R を構成し、この R を一般化 *modus ponens* の形式の推論に適用した場合に関係 I が成立するためには、どのような性質を持つ含意の定義式であることが必要かについて考察する。

条件命題 P = "If x is A then y is B." に対しファジイ集合 A、B が以下のように定義されているものとする。

$$\begin{aligned}
 A &= \int_U \mu_A(u) / u \\
 B &= \int_V \mu_B(v) / v
 \end{aligned}$$

そして条件命題 P より、一般に以下のファジイ関係 R を構成する。

$$\begin{aligned}
R &= A \times V \rightarrow U \times B \\
&= \int_{U \times V} \mu_A(u) / (u, v) \rightarrow \int_{U \times V} \mu_B(v) / (u, v) \\
&= \int_{U \times V} \mu_A(u) \rightarrow \mu_B(v) / (u, v) \tag{3.30}
\end{aligned}$$

ここで、 $[\mu_A(u) \rightarrow \mu_B(v)]$  は採用した含意の定義により得られるものである。例えば  $L_{aleph}$  の定義を使用すれば以下のように定義される。

$$\mu_A(u) \rightarrow \mu_B(v) = 1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v))$$

本  $R$  と  $A$  に対し  $CR I$  を適用すると、結論  $B'$  は一般に以下の通りとなる。

$$\begin{aligned}
B' &= A \circ R \\
&= \int_U \mu_A(u) / u \circ \int_{U \times V} (\mu_A(u) \rightarrow \mu_B(v)) / (u, v) \\
&= \int_V \bigvee_{u \in U} [\mu_A(u) \wedge (\mu_A(u) \rightarrow \mu_B(v))] / v
\end{aligned}$$

従って、関係  $I$  が成立する、すなわち  $B' = B$  となるためには任意の  $v \in V$  に対して以下の式が成立することが必要となる。

$$\bigvee_{u \in U} [\mu_A(u) \wedge (\mu_A(u) \rightarrow \mu_B(v))] = \mu_B(v)$$

また、本等式が成立するためには、任意の  $v \in V$  および任意の  $u \in U$  に対して少なくとも以下の不等式が成立する必要がある。

$$[\mu_A(u) \wedge (\mu_A(u) \rightarrow \mu_B(v))] \leq \mu_B(v)$$

以上の議論より、式 (3.30) で定義されるファジイ関係  $R$  に  $CR I$  を適用して関係  $I$  を満たす一般化 *modus ponens* の形式の推論を実現するためには、少なくとも任意の命題  $P$ 、 $Q$  に対して以下の不等式が成立する含意を採用しなければならないことが結論として得られる。

$$v(P \wedge (P \rightarrow Q)) \leq v(Q) \tag{3.31}$$

ちなみに  $L_{aleph}$  における含意では以下の例が示すようにこの関係は成立しない。

$$\begin{aligned}
&v(P \wedge (P \rightarrow Q)) \\
&= v(P) \wedge (1 \wedge (1 - v(P) + v(Q))) \\
&\quad \text{ここで } v(P) = 0.5、v(Q) = 0 \text{ とおくと、} \\
&= 0.5 \wedge (1 \wedge (1 - 0.5 + 0)) \\
&= 0.5 > v(Q)
\end{aligned}$$

以下では、真理値として区間  $[0, 1]$  の実数値をとる多値論理体系のなかで、不等式 (3. 31) を満たす体系の含意の定義式を使用し、前節で分類した各タイプ毎に各関係を満たす推論を実現するファジイ関係を構成する。

### 3. 5. 3 タイプ1の条件を満たす推論方法の定式化

一般化 *modus ponens* の形式でタイプ1の条件を満たす推論について再度まとめると以下の通りである。すなわち、

前提1 :  $I f \ x \ i s \ A \ t h e n \ y \ i s \ B .$

前提2 :  $\quad \quad \quad x \ i s \ A' .$

---

結論 :  $\quad \quad \quad y \ i s \ B' .$

の形式の推論で、前提2のA' と結論のB' の間に表3. 4に示す関係が成立するものである。

表3. 4 タイプ1のファジイ条件推論に要求される関係

関係	前提2	結論
I	A	B
II-1	very A	very B
III	more or less A	more or less B
IV-1	not A	unknown

このタイプの推論に対しては、前提1を以下で定義されるファジイ関係  $R_s$  に変換すれば  $A' \circ R_s$  により上記の関係を満たす結論  $B'$  が得られる。

#### [定義3. 1]

U上のファジイ集合A、V上のファジイ集合Bが各々以下のように定義されており、かつこれらは式 (3. 34) ~式 (3. 36) の条件を満たすものとする。

$$A = \int_U \mu_A(u) / u \quad (3. 32)$$

$$B = \int_V \mu_B(v) / v \quad (3. 33)$$

$$\{\mu_A(u) \mid u \in U\} \supseteq \{\mu_B(v) \mid v \in V\} \quad (3. 34)$$

$$\exists u \in U \quad \mu_A(u) = 0, \quad \exists u' \in U \quad \mu_A(u') = 1 \quad (3.35)$$

$$\exists v \in V \quad \mu_B(v) = 0, \quad \exists v' \in V \quad \mu_B(v') = 1 \quad (3.36)$$

このときファジイ関係  $R_s$  を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} R_s &= A \times V \xrightarrow{-s} U \times B \\ &= \int_{U \times V} \mu_A(u) / (u, v) \xrightarrow{-s} \int_{U \times V} \mu_B(v) / (u, v) \\ &= \int_{U \times V} \mu_A(u) \xrightarrow{-s} \mu_B(v) / (u, v) \end{aligned} \quad (3.37)$$

ただし  $\mu_A(u) \xrightarrow{-s} \mu_B(v)$  は以下のように定義される。

$$\mu_A(u) \xrightarrow{-s} \mu_B(v) = \begin{cases} 1 & \dots \mu_A(u) \leq \mu_B(v) \\ 0 & \dots \mu_A(u) > \mu_B(v) \end{cases}$$

[定義終]

本定義における  $\xrightarrow{-s}$  は The Standard Sequence  $S_{\text{alph}}$  [Res69] における含意の定義式による。

また、式 (3.34) ~ 式 (3.36) の条件はメンバシップ関数が連続関数として定義されている限り通常必ず満たされるものであり、特別の制約を与えるものではない。

次に  $R_s$  を使用するとタイプ 1 に課せられた各関係が成立することを証明する。

[定理 3. 1]

定義 3. 1 の  $R_s$  を一般化 *modus ponens* の形式の推論に適用した場合、関係 I、II-1、III、および IV-1 が満たされる。

[定理終]

[証明]

一般に  $A' = A^d$  ( $d > 0$ ) とおいて  $R_s$  との間で CRI を適用すると、結論  $B'$  は以下の通りとなる。

$$\begin{aligned} B' &= A^d \circ [ (A \times V) \xrightarrow{-s} (U \times B) ] \\ &= \int_U \mu_{A^d}(u) / u \circ \int_{U \times V} \mu_A(u) \xrightarrow{-s} \mu_B(v) / (u, v) \\ &= \int_V \bigvee_{u \in U} [ \mu_{A^d}(u) \wedge (\mu_A(u) \xrightarrow{-s} \mu_B(v)) ] / v \end{aligned} \quad (3.38)$$

ここで、任意の  $v \in V$  に対し、 $U$  を以下の条件を満たす 2 つの部分集合  $U_1(v)$  と  $U_2(v)$  に分割する。

$$U_1(v) \cup U_2(v) = U, \quad U_1(v) \cap U_2(v) = \phi \quad (3.39)$$

$$\forall u \in U_1(v) \quad \mu_A(u) \leq \mu_B(v) \quad (3.40)$$

$$\forall u \in U_2(v) \quad \mu_A(u) > \mu_B(v) \quad (3.41)$$

これら  $U_1(v)$ 、 $U_2(v)$  を使用すれば式 (3.38) は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} & \text{式 (3.38)} \\ &= \int_V \bigvee_{u \in U_1(v)} \mu_{A^d}(u) / v \\ &= \int_V \mu_{B^d}(v) / v \quad \because \text{式(3.34)および式(3.40)の仮定より} \\ &= B^d \end{aligned}$$

以上により関係 I、II-1 および III の成立が示された。

次に、 $A' = \text{not } A (= \neg A)$  として  $R_s$  との間に  $CR I$  を適用すると、結論  $B'$  は以下の通りとなる。

$$\begin{aligned} B' &= \neg A \circ [ (A \times V) \text{--}_s \rightarrow (U \times B) ] \\ &= \int_U 1 - \mu_A(u) / u \circ \int_{U \times V} \mu_A(u) \text{--}_s \rightarrow \mu_B(v) / (u, v) \\ &= \int_V \bigvee_{u \in U} [ (1 - \mu_A(u)) \wedge (\mu_A(u) \text{--}_s \rightarrow \mu_B(v)) ] / v \quad (3.42) \end{aligned}$$

式 (3.35) の仮定より、 $\mu_A(u) = 0$  となる  $u \in U$  が少なくとも 1 点は存在することより、以下が成立する。

$$\begin{aligned} & \bigvee_{u \in U} [ (1 - \mu_A(u)) \wedge (\mu_A(u) \text{--}_s \rightarrow \mu_B(v)) ] = 1 \\ \therefore \text{式 (3.42)} &= \int_V 1 / v \\ &= V = \text{unknown} \end{aligned}$$

これは関係 IV-1 の成立を示している。

以上ですべての関係の成立が証明された。

[証明終]

### 3. 5. 4 タイプ2の条件を満たす推論方法の定式化

一般化modus ponensの形式でタイプ2の条件を満たす推論について再度まとめると以下の通りである。すなわち、

前提1 : If x is A then y is B.

前提2 : x is A'.

---

結論 : y is B'.

の形式の推論で、前提2のA'と結論のB'の間に表3. 5に示す関係が成立するものである。

表3. 5 タイプ2のファジイ条件推論に要求される関係

関係	前提2	結論
I	A	B
II-2	very A	B
III	more or less A	more or less B
IV-1	not A	unknown

このタイプの推論に対しては、前提1を以下で定義されるファジイ関係R<sub>g</sub>に変換すればA' o R<sub>g</sub>により上記の条件を満たす結論B'が得られる。

#### [定義3. 2]

U上のファジイ集合A、V上のファジイ集合Bが各々以下のように定義されており、かつこれらは式(3. 45)～式(3. 47)の条件を満たすものとする。

$$A = \int_U \mu_A(u) / u \quad (3.43)$$

$$B = \int_V \mu_B(v) / v \quad (3.44)$$

$$\{\mu_A(u) \mid u \in U\} \supseteq \{\mu_B(v) \mid v \in V\} \quad (3.45)$$

$$\exists u \in U \quad \mu_A(u) = 0, \quad \exists u' \in U \quad \mu_A(u') = 1 \quad (3.46)$$

$$\exists v \in V \quad \mu_B(v) = 0, \quad \exists v' \in V \quad \mu_B(v') = 1 \quad (3.47)$$

このときファジイ関係R<sub>g</sub>を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}
Rg &= A \times V - g \rightarrow U \times B \\
&= \int_{U \times V} \mu_A(u) / (u, v) - g \rightarrow \int_{U \times V} \mu_B(v) / (u, v) \\
&= \int_{U \times V} \mu_A(u) - g \rightarrow \mu_B(v) / (u, v) \tag{3.48}
\end{aligned}$$

ただし  $\mu_A(u) - g \rightarrow \mu_B(v)$  は以下のように定義される。

$$\mu_A(u) - g \rightarrow \mu_B(v) = \begin{cases} 1 & \cdots \mu_A(u) \leq \mu_B(v) \\ \mu_B(v) & \cdots \mu_A(u) > \mu_B(v) \end{cases}$$

[定義終]

本定義における  $-g \rightarrow$  は The Gödelian Sequence Galeph [Res69] における含意の定義式による。

次に  $Rg$  を使用するとタイプ 2 に課せられた各関係が成立することを証明する。

[定理 3. 2]

定義 3. 2 の  $Rg$  を一般化 *modus ponens* の形式の推論に適用した場合、関係 I、II-2、III、および IV-1 が満たされる。

[定理終]

[証明]

一般に  $A' = A^d$  ( $d > 0$ ) とおいて  $Rg$  との間で *CR I* を適用すると、結論  $B'$  は以下の通りとなる。

$$\begin{aligned}
B' &= A^d \circ [ (A \times V) - g \rightarrow (U \times B) ] \\
&= \int_U \mu_{A^d}(u) / u \circ \int_{U \times V} \mu_A(u) - g \rightarrow \mu_B(v) / (u, v) \\
&= \int_V \bigvee_{u \in U} [ \mu_{A^d}(u) \wedge (\mu_A(u) - g \rightarrow \mu_B(v)) ] / v \tag{3.49}
\end{aligned}$$

ここで、任意の  $v \in V$  に対し、 $U$  を以下の条件を満たす 2 つの部分集合  $U_1(v)$  と  $U_2(v)$  に分割する。

$$U_1(v) \cup U_2(v) = U, \quad U_1(v) \cap U_2(v) = \phi \tag{3.50}$$

$$\forall u \in U_1(v) \quad \mu_A(u) \leq \mu_B(v) \tag{3.51}$$

$$\forall u \in U_2(v) \quad \mu_A(u) > \mu_B(v) \tag{3.52}$$

これら  $U_1(v)$ 、 $U_2(v)$  を使用すれば式 (3. 49) は以下のように変形できる。

式 (3. 49)

$$\begin{aligned}
 &= \int_V \left( \bigvee_{u \in U_1(v)} \mu_{A^d}(u) \right) \bigvee \left( \bigvee_{u \in U_2(v)} \mu_{A^d}(u) \wedge \mu_B(v) \right) / v \\
 &= \int_V \mu_{B^d}(u) \bigvee \left[ \left( \bigvee_{u \in U_2(v)} \mu_{A^d}(u) \right) \wedge \mu_B(v) \right] / v \\
 &= \int_V \mu_{B^d}(u) \bigvee (1 \wedge \mu_B(v)) / v
 \end{aligned}$$

$\therefore$  式(3.45), (3.51)および式(3.52)の仮定より

$$= \begin{cases} \int_V \mu_{B^d}(u) / v = B^d & \dots d \leq 1 \\ \int_V \mu_B(v) / v = B & \dots d > 1 \end{cases}$$

これは  $d = 1$ 、 $d = 2$ 、及び  $d = 0.5$  のとき関係 I、II-2 および III が成立することを示している。

次に、 $A' = \text{not } A (= \neg A)$  として  $R_s$  との間に CRI を適用すると、結論  $B'$  は以下の通りとなる。

$$\begin{aligned}
 B' &= \neg A \circ [ (A \times V) - g \rightarrow (U \times B) ] \\
 &= \int_U 1 - \mu_A(u) / u \circ \int_{U \times V} \mu_A(u) - g \rightarrow \mu_B(v) / (u, v) \\
 &= \int_V \bigvee_{u \in U} [ (1 - \mu_A(u)) \wedge (\mu_A(u) - g \rightarrow \mu_B(v)) ] / v \quad (3.53)
 \end{aligned}$$

式 (3. 46) の仮定より、 $\mu_A(u) = 0$  となる  $u \in U$  が少なくとも 1 点は存在することより、以下が成立する。

$$\bigvee_{u \in U} [ (1 - \mu_A(u)) \wedge (\mu_A(u) - g \rightarrow \mu_B(v)) ] = 1$$

$$\therefore \text{式 (3. 53)} = \int_V 1 / v$$

$$= V = \text{unknown}$$

これは関係 IV-1 の成立を示している。

以上ですべての関係の成立が証明された。

[証明終]

### 3. 5. 5 タイプ3の条件を満たす推論方法の定式化

一般化modus ponensの形式でタイプ3の条件を満たす推論について再度まとめると以下の通りである。すなわち、

前提1: If x is A then y is B.

前提2: x is A'.

結論: y is B'.

の形式の推論で、前提2のA'と結論のB'の間に表3. 6に示す関係が成立するものである。

表3. 6 タイプ3のファジイ条件推論に要求される関係

関係	前提2	結論
I	A	B
II-1	very A	very B
III	more or less A	more or less B
IV-2	not A	not B

このタイプの推論に対しては、前提1を以下で定義されるファジイ関係R<sub>s g</sub>に変換すればA' o R<sub>s g</sub>により上記関係を満たす結論B'が得られる。

#### [定義3. 3]

U上のファジイ集合A、V上のファジイ集合Bが各々以下のように定義されており、かつこれらは式(3. 56)～式(3. 58)の条件を満たすものとする。

$$A = \int_U \mu_A(u) / u \quad (3.54)$$

$$B = \int_V \mu_B(v) / v \quad (3.55)$$

$$\{\mu_A(u) \mid u \in U\} \supseteq \{\mu_B(v) \mid v \in V\} \quad (3.56)$$

$$\exists u \in U \quad \mu_A(u) = 0, \quad \exists u' \in U \quad \mu_A(u') = 1 \quad (3.57)$$

$$\exists v \in V \quad \mu_B(v) = 0, \quad \exists v' \in V \quad \mu_B(v') = 1 \quad (3.58)$$

このときファジイ関係R<sub>s g</sub>を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}
R s g &= (A \times V - s g \rightarrow U \times B) \\
&= (A \times V - s \rightarrow U \times B) \cap (\neg A \times V - g \rightarrow U \times \neg B) \quad (3.59)
\end{aligned}$$

[定義終]

次に  $R s g$  を使用するとタイプ 3 に課せられた各関係が成立することを証明する。

[定理 3. 3]

定義 3. 3 の  $R s g$  を一般化 *modus ponens* の形式の推論に適用した場合、関係 I、II-1、III、および IV-2 が満たされる。

[定理終]

[証明]

一般に  $A' = A^d$  ( $d > 0$ ) とおいて  $R s g$  との間で *CR I* を適用すると、結論  $B'$  は以下の通りとなる。

$$\begin{aligned}
B' &= A^d \circ [ (A \times V - s \rightarrow U \times B) \cap (\neg A \times V - g \rightarrow U \times \neg B) ] \\
&= \int_U \mu_{A^d}(u) / u \circ \int_{U \times V} ( \mu_A(u) - s \rightarrow \mu_B(v) ) \\
&\quad \wedge ( (1 - \mu_A(u)) - g \rightarrow (1 - \mu_B(v)) ) / (u, v) \\
&= \int_V \bigvee_{u \in U} [ \mu_{A^d}(u) \wedge \{ ( \mu_A(u) - s \rightarrow \mu_B(v) ) \\
&\quad \wedge ( (1 - \mu_A(u)) - g \rightarrow (1 - \mu_B(v)) ) \} ] / v \quad (3.60)
\end{aligned}$$

ここで、任意の  $v \in V$  に対し、 $U$  を以下の条件を満たす 3 つの部分集合  $U_1(v)$ 、 $U_2(v)$  および  $U_3(v)$  に分割する。

$$U_1(v) \cup U_2(v) \cup U_3(v) = U \quad (3.61)$$

$$U_i(v) \cap U_j(v) = \phi \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j \quad (3.62)$$

$$\forall u \in U_1(v) \quad \mu_A(u) < \mu_B(v) \quad (3.63)$$

$$\forall u \in U_2(v) \quad \mu_A(u) = \mu_B(v) \quad (3.64)$$

$$\forall u \in U_3(v) \quad \mu_A(u) > \mu_B(v) \quad (3.65)$$

これら  $U_1(v)$ 、 $U_2(v)$ 、 $U_3(v)$  を使用すれば式 (3. 60) は以下のように変形できる。

式 (3. 60)

$$\begin{aligned}
 &= \int_V \left( \bigvee_{u \in U_1(v)} \mu_{A^d}(u) \wedge (1 - \mu_B(v)) \right) \\
 &\qquad \qquad \qquad \bigvee \left( \bigvee_{u \in U_2(v)} \mu_{A^d}(u) \right) / v \\
 &= \int_V \bigvee_{u \in U_2(v)} \mu_{A^d}(u) / v \\
 &= \int_V \mu_{B^d}(v) / v \\
 &= B^d
 \end{aligned}$$

これは  $d = 1$ 、 $d = 2$ 、及び  $d = 0, 5$  のとき関係 I、II-1 および III が成立することを示している。

次に、 $A' = \text{not } A (= \neg A)$  として R s g との間に C R I を適用したときに関係 IV-2 が成立することを示す。

$$\begin{aligned}
 B' &= \neg A \circ [ (A \times V - s \rightarrow U \times B) \cap (\neg A \times V - g \rightarrow U \times \neg B) ] \\
 &= \int_U (1 - \mu_A(u)) / u \circ \int_{U \times V} (\mu_A(u) - s \rightarrow \mu_B(v)) \\
 &\qquad \qquad \qquad \wedge ( (1 - \mu_A(u)) - g \rightarrow (1 - \mu_B(v)) ) / (u, v) \\
 &= \int_V \bigvee_{u \in U} [ (1 - \mu_A(u)) \wedge \{ (\mu_A(u) - s \rightarrow \mu_B(v)) \\
 &\qquad \qquad \qquad \wedge ( (1 - \mu_A(u)) - g \rightarrow (1 - \mu_B(v)) ) \} ] / v \\
 &= \int_V \left( \bigvee_{u \in U_1(v)} (1 - \mu_A(u)) \wedge (1 - \mu_B(v)) \right) \\
 &\qquad \qquad \qquad \bigvee \left( \bigvee_{u \in U_2(v)} 1 - \mu_A(u) \right) / v \\
 &= \int_V (1 - \mu_B(v)) \bigvee (1 - \mu_B(v)) / v \\
 &= \int_V (1 - \mu_B(v)) / v \\
 &= \neg B = \text{not } B
 \end{aligned}$$

これは関係 IV-2 の成立を示している。

以上ですべての関係の成立が証明された。

[証明終]

### 3. 5. 6 タイプ4の条件を満たす推論方法の定式化

一般化modus ponensの形式でタイプ4の条件を満たす推論について再度まとめると以下の通りである。すなわち、

前提1 : If x is A then y is B.

前提2 : x is A'.

結論 : y is B'.

の形式の推論で、前提2のA'と結論のB'の間に表3. 7に示す関係が成立するものである。

表3. 7 タイプ4のファジイ条件推論に要求される関係

関係	前提2	結論
I	A	B
II-2	very A	B
III	more or less A	more or less B
IV-2	not A	not B

このタイプの推論に対しては、前提1を以下で定義されるファジイ関係R g gに変換すればA' o R g gにより上記関係を満たす結論B'が得られる。

#### [定義3. 4]

U上のファジイ集合A、V上のファジイ集合Bが各々以下のように定義されており、かつこれらは式(3. 68)～式(3. 70)の条件を満たすものとする。

$$A = \int_U \mu_A(u) / u \quad (3.66)$$

$$B = \int_V \mu_B(v) / v \quad (3.67)$$

$$\{\mu_A(u) \mid u \in U\} \supseteq \{\mu_B(v) \mid v \in V\} \quad (3.68)$$

$$\exists u \in U \quad \mu_A(u) = 0, \quad \exists u' \in U \quad \mu_A(u') = 1 \quad (3.69)$$

$$\exists v \in V \quad \mu_B(v) = 0, \quad \exists v' \in V \quad \mu_B(v') = 1 \quad (3.70)$$

このときファジイ関係R g gを以下のように定義する。

$$\begin{aligned}
R g g &= (A \times V - g \rightarrow U \times B) \\
&= (A \times V - g \rightarrow U \times B) \cap (\neg A \times V - g \rightarrow U \times \neg B) \quad (3.71)
\end{aligned}$$

[定義終]

次に  $R g g$  を使用するとタイプ 4 に課せられた各関係が成立することを証明する。

[定理 3. 4]

定義 3. 4 の  $R g g$  を一般化 *modus ponens* の形式の推論に適用した場合、関係 I、II-2、III、および IV-2 が満たされる。

[定理終]

[証明]

一般に  $A' = A^d$  ( $d > 0$ ) とおいて  $R g g$  との間で CRI を適用すると、結論  $B'$  は以下の通りとなる。

$$\begin{aligned}
B' &= A^d \circ [ (A \times V - g \rightarrow U \times B) \cap (\neg A \times V - g \rightarrow U \times \neg B) ] \\
&= \int_U \mu_{A^d}(u) / u \circ \int_{U \times V} (\mu_A(u) - g \rightarrow \mu_B(v)) \\
&\quad \wedge ( (1 - \mu_A(u)) - g \rightarrow (1 - \mu_B(v)) ) / (u, v) \\
&= \int_V \bigvee_{u \in U} [ \mu_{A^d}(u) \wedge \{ (\mu_A(u) - g \rightarrow \mu_B(v)) \\
&\quad \wedge ( (1 - \mu_A(u)) - g \rightarrow (1 - \mu_B(v)) ) \} ] / v \quad (3.72)
\end{aligned}$$

ここで、任意の  $v \in V$  に対し、 $U$  を式 (3. 61) ~ 式 (3. 65) の条件を満たす 3 つの部分集合  $U_1(v)$ 、 $U_2(v)$  および  $U_3(v)$  に分割する。これら  $U_1(v)$ 、 $U_2(v)$ 、 $U_3(v)$  を使用すれば式 (3. 72) は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
&\text{式 (3. 72)} \\
&= \int_V ( \bigvee_{u \in U_1(v)} \mu_{A^d}(u) \wedge (1 - \mu_B(v)) ) \vee ( \bigvee_{u \in U_2(v)} \mu_{A^d}(u) ) \\
&\quad \vee ( \bigvee_{u \in U_3(v)} (\mu_{A^d}(u) \wedge \mu_B(v)) ) / v \\
&= \begin{cases} \int_V \mu_B(v) / v = B & \dots d \geq 1 \\ \int_V \mu_{B^d}(v) / v = B^d & \dots d < 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

以上で関係 I、II-2 および III の成立が示された。

また、 $A' = \text{not } A (= \neg A)$  の場合は以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
 B' &= \neg A \circ [ (A \times V - g \rightarrow U \times B) \cap (\neg A \times V - g \rightarrow U \times \neg B) ] \\
 &= \int_U (1 - \mu_A(u)) / u \circ \int_{U \times V} (\mu_A(u) - g \rightarrow \mu_B(v)) \\
 &\quad \wedge ( (1 - \mu_A(u)) - g \rightarrow (1 - \mu_B(v)) ) / (u, v) \\
 &= \int_V \bigvee_{u \in U} [ (1 - \mu_A(u)) \wedge \{ (\mu_A(u) - g \rightarrow \mu_B(v)) \\
 &\quad \wedge ( (1 - \mu_A(u)) - g \rightarrow (1 - \mu_B(v)) ) \} ] / v \\
 &= \int_V ( \bigvee_{u \in U_1(v)} (1 - \mu_A(u)) \wedge (1 - \mu_B(v)) ) \vee ( \bigvee_{u \in U_2(v)} 1 - \mu_A(u) ) \\
 &\quad \vee ( \bigvee_{u \in U_3(v)} ( (1 - \mu_A(u)) \wedge \mu_B(v) ) ) / v \\
 &= \int_V (1 - \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_B(v)) \vee \nu(v) / v \\
 &\hspace{15em} \text{但しここで } \nu(v) \leq 1 - \mu_B(v) \\
 &= \int_V (1 - \mu_B(v)) / v \\
 &= \neg B = \text{not } B
 \end{aligned}$$

これは関係IV-2の成立を示している。

以上ですべての関係の成立が証明された。

[証明終]

### 3. 5. 7 推論例

前節までにおいて種々のタイプのファジイ条件推論方法を定式化した。本節では、これら推論の具体例をいくつか示す。

U上のファジイ集合A、V上のファジイ集合Bおよびファジイ条件命題Pを以下の通りとする。

$$U = V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A = \text{small} = 1/0 + 0.8/1 + 0.6/2 + 0.4/3 + 0.2/4$$

$$B = \text{middle} = 0.2/2 + 0.4/3 + 0.8/4 + 1/5 + 0.8/6 + 0.4/7 + 0.2/8$$

P : If x is small then y is middle.

上記Pに対してファジイ関係Rsを構成すると次のようになる。

$$R s = \text{small} \times V - s \rightarrow U \times \text{middle}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

本Rsに対し、A'としてsmall、very small、not small、middleを選びCRIを適用すると、結論は各々以下ようになる。

$$\begin{aligned} (1) \quad B' &= \text{small} \circ R s \\ &= (1/0 + 0.8/1 + 0.6/2 + 0.4/3 + 0.2/4) \circ R s \\ &= 0.2/2 + 0.4/3 + 0.8/4 + 1/5 + 0.8/6 + 0.4/7 + 0.2/8 \\ &= \text{middle} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad B' &= (\text{very small}) \circ R s \\ &= (\text{small})^2 \circ R s \\ &= (1/0 + 0.64/1 + 0.36/2 + 0.16/3 + 0.04/4) \circ R s \\ &= 0.04/2 + 0.16/3 + 0.64/4 + 1/5 + 0.64/6 + 0.16/7 + 0.04/8 \\ &= (\text{middle})^2 \\ &= \text{very middle} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad B' &= (\text{not small}) \circ R s \\ &= (0.2/1 + 0.4/2 + 0.6/3 + 0.8/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 \\ &\quad + 1/9 + 1/10) \circ R s \\ &= V \\ &= \text{unknown} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) \quad B' &= (\text{middle}) \circ R s \\
&= (0.2/2 + 0.4/3 + 0.8/4 + 1/5 + 0.8/6 + 0.4/7 + 0.2/8) \\
&\quad \circ R s \\
&= V \\
&= \text{unknown}
\end{aligned}$$

以上の推論を言葉で表現すると、各々以下のようになる。

(1) If x is small then y is middle.  
x is small.  


---

y is middle.

(2) If x is small then y is middle.  
x is very small.  


---

y is very middle.

(3) If x is small then y is middle.  
x is not small.  


---

y is unknown.

(4) If x is small then y is middle.  
x is middle.  


---

y is unknown.

### 3. 6 一般化modus tollens の成立性 [MFT78b] [MFT79a]

本節では、3. 5節で定義したファジイ関係  $R_s$ 、 $R_g$ 、 $R_{sg}$ 、 $R_{gg}$  を一般化modus tollens の形式の推論に適用した場合、3. 3節で設定した関係  $V \sim$  関係 VIII-2 が成立するか否かについて論じる。

なお、本節では一般に、

前提1 : If  $x$  is  $A$  then  $y$  is  $B$ .

前提2 :  $y$  is  $B'$ .

---

結論 :  $x$  is  $A'$ .

の形式の推論において、 $U$ 上のファジイ集合  $A$ 、 $V$ 上のファジイ集合  $B$  が各々以下のよう  
に定義されており、かつこれらは前節の場合と同様、式 (3. 75) ~ 式 (3. 77)  
の条件を満たすものとする。

$$A = \int_U \mu_A(u) / u \quad (3.73)$$

$$B = \int_V \mu_B(v) / v \quad (3.74)$$

$$\{\mu_A(u) \mid u \in U\} \supseteq \{\mu_B(v) \mid v \in V\} \quad (3.75)$$

$$\exists u \in U \quad \mu_A(u) = 0, \quad \exists u' \in U \quad \mu_A(u') = 1 \quad (3.76)$$

$$\exists v \in V \quad \mu_B(v) = 0, \quad \exists v' \in V \quad \mu_B(v') = 1 \quad (3.77)$$

#### [定理 3. 5]

ファジイ関係  $R_s$  を一般化modus tollens の形式の推論に適用した場合、  
関係  $V$ 、 $VI$ 、 $VII$ 、及び  $VIII-1$  が成立する。

[定理終]

#### [証明]

$B'$  を一般に  $\neg B^d$  ( $d > 0$ ) として  $R_s$  との間に  $CR I$  を適用すると、結論  $A'$  は以  
下のようなになる。

$$\begin{aligned} A' &= R_s \circ (\neg B^d) \\ &= \int_{U \times V} \mu_A(u) -_s \rightarrow \mu_B(v) / (u, v) \circ \int_V 1 - \mu_B^d(v) / v \\ &= \int_U \bigvee_{v \in V} [ (1 - \mu_B^d(v)) \wedge (\mu_A(u) -_s \rightarrow \mu_B(v)) ] / u \quad (3.78) \end{aligned}$$

ここで、任意の  $u \in U$  に対し、 $V$  は以下の条件を満たす 2 つの部分集合  $V_1(u)$  と  $V_2(u)$  に分割できる。

$$V_1(u) \cup V_2(u) = V, \quad V_1(u) \cap V_2(u) = \phi \quad (3.79)$$

$$\forall v \in V_1(u) \quad \mu_A(u) \leq \mu_B(v) \quad (3.80)$$

$$\forall v \in V_2(u) \quad \mu_A(u) > \mu_B(v) \quad (3.81)$$

従ってこれら  $V_1(u)$ 、 $V_2(u)$  を使用すれば式 (3.78) は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} & \text{式 (3.78)} \\ &= \int_U \bigvee_{v \in V_1(u)} 1 - \mu_{B^d}(v) / u \\ &= \int_U 1 - \mu_{A^d}(u) / u \quad \because \text{式 (3.75) および式 (3.80) の仮定より} \\ &= \neg A^d \end{aligned}$$

以上により関係 V、VI、および VII の成立が示された。

次に、 $B' = B$  として  $R_s$  との間には CRI を適用すると、結論  $A'$  は以下の通りとなる。

$$\begin{aligned} A' &= [ (A \times V) -_s \rightarrow (U \times B) ] \circ B \\ &= \int_U \bigvee_{v \in V} [ (\mu_A(u) -_s \mu_B(v)) \wedge \mu_B(v) ] / u \\ &= \int_U 1 / u \\ &= U = \text{unknown} \end{aligned}$$

これは関係 IV-1 の成立を示している。

以上ですべての関係の成立が証明された。

[証明終]

### [定理 3.6]

ファジイ関係  $R_g$  を一般化 *modus tollens* の形式の推論に適用した場合、関係 V、VI、VII は成立せず、関係 VIII-1 のみが成立する。

[定理終]

[証明]

$B'$  を一般に  $\neg B^d$  ( $d > 0$ ) として  $R_g$  との間には CRI を適用すると、結論  $A'$  は以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
A' &= Rg \circ (\neg B^d) \\
&= \int_{U \times V} \mu_A(u) - g \rightarrow \mu_B(v) / (u, v) \circ \int_V 1 - \mu_B^d(v) / v \\
&= \int_U \bigvee_{v \in V} [ (1 - \mu_B^d(v)) \wedge (\mu_A(u) - g \rightarrow \mu_B(v)) ] / u \\
&= \int_U ( \bigvee_{v \in V_1(u)} 1 - \mu_B^d(v) ) \vee ( \bigvee_{v \in V_2(u)} (1 - \mu_B^d(v)) \wedge \mu_B(v) ) / u
\end{aligned}$$

ここで、 $V_1(u)$ ,  $V_2(u)$ は式(3.79)～式(3.81)の条件を満たすものとする。

$$= \int_U (1 - \mu_A^d(u)) \vee \gamma(d) / u$$

但し、 $\gamma(d)$ は方程式  $x^d + x - 1 = 0$  の解のうち、区間  $[0, 1]$  の値をとるものである。

$$= \begin{cases} \int_U (1 - \mu_A(u)) \vee 0.5 / u & \dots \quad d = 1 \text{ の場合} \\ \int_U (1 - \mu_A^2(u)) \vee ((\sqrt{5}-1)/2) / u & \dots \quad d = 2 \text{ の場合} \\ \int_U (1 - \mu_A^{1/2}(u)) \vee ((3-\sqrt{5})/2) / u & \dots \quad d = 1/2 \text{ の場合} \end{cases}$$

以上により関係V、VI、およびVIIの不成立が示された。

次に、 $B' = B$ としてRsとの間にCRIを適用すると、結論 $A'$ は以下の通りとなる。

$$\begin{aligned}
A' &= [ (A \times V) - g \rightarrow (U \times B) ] \circ B \\
&= \int_U \bigvee_{v \in V} [ (\mu_A(u) - g \rightarrow \mu_B(v)) \wedge \mu_B(v) ] / u \\
&= \int_U \bigvee_{v \in V} \mu_B(v) / u \\
&= \int_U 1 / u \\
&= U = \text{unknown}
\end{aligned}$$

これは関係IV-1の成立を示している。

[証明終]

### [定理3.7]

ファジイ関係Rs gを一般化modus tollensの形式の推論に適用した

場合、関係 V、VI、VII は成立するが、関係 VIII-1、VIII-2 は共に成立しない。

[定理終]

[証明]

B' を一般に  $\neg B^d$  ( $d > 0$ ) として R s g との間に C R I を適用すると、結論 A' は以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
 A' &= R s g \circ (\neg B^d) \\
 &= \int_{U \times V} (\mu_A(u) - s \rightarrow \mu_B(v)) \wedge \\
 &\quad ((1 - \mu_A(u)) - g \rightarrow (1 - \mu_B(v))) / (u, v) \\
 &\quad \circ \int_V 1 - \mu_B^d(v) / v \\
 &= \int_U \bigvee_{v \in V} [ (\mu_A(u) - s \rightarrow \mu_B(v)) \wedge \\
 &\quad ((1 - \mu_A(u)) - g \rightarrow (1 - \mu_B(v))) \wedge (1 - \mu_B^d(v)) ] / u
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

ここで、任意の  $u \in U$  に対し、V を以下の条件を満たす 2 つの部分集合  $V_1(u)$ 、 $V_2(u)$  および  $V_3(u)$  に分割する。

$$V_1(u) \cup V_2(u) \cup V_3(u) = V \tag{3.83}$$

$$V_i(u) \cap V_j(u) = \phi \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j \tag{3.84}$$

$$\forall v \in V_1(u) \quad \mu_A(u) < \mu_B(v) \tag{3.85}$$

$$\forall v \in V_2(u) \quad \mu_A(u) = \mu_B(v) \tag{3.86}$$

$$\forall v \in V_3(u) \quad \mu_A(u) > \mu_B(v) \tag{3.87}$$

従ってこれら  $V_1(u)$ 、 $V_2(u)$  および  $V_3(u)$  を使用すれば式 (3.82) は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
 &\text{式 (3.82)} \\
 &= \int_U \left( \bigvee_{v \in V_1(u)} (1 - \mu_B(v)) \wedge (1 - \mu_B^d(v)) \right) \\
 &\quad \bigvee \left( \bigvee_{v \in V_2(u)} (1 - \mu_B^d(v)) \right) / u \\
 &= \int_U 1 - \mu_A^d(u) / u \quad \because \text{式(3.75), (3.85) および式(3.86)の仮定より} \\
 &= \neg A^d
 \end{aligned}$$

以上により関係 V、VI、および VII の成立が示された。

次に、 $B' = B$ として  $Rsg$  との間には  $CR I$  を適用すると、結論  $A'$  は以下の通りとなる。

$$\begin{aligned}
 A' &= Rsg \circ B \\
 &= \int_U \bigvee_{v \in V} [ (\mu_A(u) - s \rightarrow \mu_B(v)) \wedge \\
 &\quad ( (1 - \mu_A(u)) - g \rightarrow (1 - \mu_B(v)) ) \wedge \mu_B(v) ] / u \\
 &= \int_U [ \bigvee_{v \in V_1(u)} (1 - \mu_B(v)) \wedge \mu_B(v) ] \bigvee [ \bigvee_{v \in V_2(u)} \mu_B(v) ] / u \\
 &= \int_U 0.5 \bigvee \mu_A(u) / u
 \end{aligned}$$

これは関係 IV-1、IV-2 の不成立を示している。

[証明終]

[定理 3. 8]

ファジイ関係  $Rgg$  を一般化 *modus tollens* の形式の推論に適用した場合、関係 V、VI、VII、VIII-1 及び VIII-2 は共に成立しない。

[定理終]

[証明]

$B'$  を一般に  $\neg B^d$  ( $d > 0$ ) として  $Rgg$  との間には  $CR I$  を適用すると、結論  $A'$  は以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
 A' &= Rgg \circ (\neg B^d) \\
 &= \int_{U \times V} (\mu_A(u) - g \rightarrow \mu_B(v)) \wedge \\
 &\quad ( (1 - \mu_A(u)) - g \rightarrow (1 - \mu_B(v)) ) / (u, v) \\
 &\quad \circ \int_V 1 - \mu_B^d(v) / v \\
 &= \int_U \bigvee_{v \in V} [ (\mu_A(u) - s \rightarrow \mu_B(v)) \wedge \\
 &\quad ( (1 - \mu_A(u)) - g \rightarrow (1 - \mu_B(v)) ) \wedge (1 - \mu_B^d(v)) ] / u \\
 &= \int_U ( \bigvee_{v \in V_1(u)} (1 - \mu_B(v)) \wedge (1 - \mu_B^d(v)) ) \\
 &\quad \bigvee ( \bigvee_{v \in V_2(u)} (1 - \mu_B^d(v)) ) \\
 &\quad \bigvee ( \bigvee_{v \in V_3(u)} \mu_B(v) \wedge (1 - \mu_B^d(v)) ) / u
 \end{aligned}$$

ここで、 $V_1(u)$ 、 $V_2(u)$ および $V_3(u)$ は式(3.83)～式(3.87)の条件を満たすものとする。

$$= \int_U (1 - \mu_A^d(u)) \vee \gamma(d) / u$$

但し、 $\gamma(d)$ は方程式  $x^d + x - 1 = 0$  の解のうち、区間  $[0, 1]$  の値をとるものである。

$$= \begin{cases} \int_U (1 - \mu_A(u)) \vee 0.5 / u & \dots d = 1 \text{ の場合} \\ \int_U (1 - \mu_A^2(u)) \vee ((\sqrt{5}-1)/2) / u & \dots d = 2 \text{ の場合} \\ \int_U (1 - \mu_A^{1/2}(u)) \vee ((3-\sqrt{5})/2) / u & \dots d = 1/2 \text{ の場合} \end{cases}$$

以上により関係V、VI、およびVIIの不成立が示された。

次に、 $B' = B$ としてRsgとの間にCRIを適用すると、結論A'は以下の通りとなる。

$$\begin{aligned} A' &= Rgg \circ B \\ &= \int_U \bigvee_{v \in V} [(\mu_A(u) - g \rightarrow \mu_B(v)) \wedge ((1 - \mu_A(u)) - g \rightarrow (1 - \mu_B(v))) \wedge \mu_B(v)] / u \\ &= \int_U [\bigvee_{v \in V_1(u)} (1 - \mu_B(v)) \wedge \mu_B(v)] \vee [\bigvee_{v \in V_2(u)} \mu_B(v)] / u \\ &= \int_U 0.5 \vee \mu_A(u) / u \end{aligned}$$

これは関係VIII-1、VIII-2の不成立を示している。

[証明終]

以上において、ファジイ関係Rs、Rg、RsgおよびRggを一般化modus tollensに適用した場合に3.3節で設定した関係V～VIII-2が満たされるか否かを調べた結果について述べた。その結果、RsおよびRsgは一般化modus tollensの形式の推論においても妥当な結論を導くことが示された。

### 3. 7 推移律、対偶律の成立性 [FMT78a] [FMT80]

#### 3. 7. 1 推移律について

P、Q、Rを古典2値論理に於ける命題としたとき、一般に以下の式が成立する。

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$$

これは命題 $P \rightarrow Q$ 、 $Q \rightarrow R$ を仮定すると、 $P \rightarrow R$ が証明可能であること、すなわち推移律が成立することを示している。

一方、ファジイ条件文においてもこれと同様の関係が成立することは、意味的にもごく自然であり、さらに、成立が保証されれば以下のようなメリットも生じる。すなわち、たとえば前節で述べたファジイ条件推論法をエキスパートシステム等に適用した場合を考える。ここで推移律が成立しない場合、

If x is A then y is B.

If y is B then z is C.

の2つのルールに対して”x is A' ”が与えられたとき、zに関する値C'を求める為にはxとyの関係R1に対してまずA' o R1を実行し、さらにyとzの関係R2に対して(A' o R1) o R2を実行する必要がある。しかし、推移律の成立が保証されていれば、上記2つの条件文中のAとCからxとzの関係R3を直接構成し、A' o R3を実行すればただちに答えが得られる。これは計算量の低減をもたらすものであり、効果的と言えよう。

以上より、本節では前節までに述べてきた各ファジイ関係が推移律を満たすか否かについて議論する。

#### [定義3. 5]

ファジイ条件文から生成されるファジイ関係RがCRIのもとで推移律を満たすとは、以下の関係が成り立つことを言う。

$$P1 : \text{If } x \text{ is } A \text{ then } y \text{ is } B. \text{ ---} \rightarrow R1$$

$$P2 : \text{If } y \text{ is } B \text{ then } z \text{ is } C. \text{ ---} \rightarrow R2$$

---

$$P3 : \text{If } x \text{ is } A \text{ then } z \text{ is } C. \text{ ---} \rightarrow R3 = R1 \circ R2$$

すなわち、ファジイ条件文P3から生成されるファジイ関係R3は、P1およびP2からそれぞれ生成されるファジイ関係にCRIを適用したものに等しい。 [定義終]

以下では、ZadehによるRm、Ra、MamdaniによるRcおよび本論文で定義したRs、Rg、Rsg、Rggが推移律を満たすか否かについて述べる。

なお、以下ではいずれも3つのファジイ条件文、

P1: If x is A then y is B.

P2: If y is B then z is C.

P3: If x is A then z is C.

に対し、ファジイ集合A、B、Cが次のように定義されており、かつそのメンバシップ関数は式(3.91)～式(3.94)の条件を満たすものとする。

$$A = \int_U \mu_A(u) / u \quad (3.88)$$

$$B = \int_V \mu_B(v) / v \quad (3.89)$$

$$C = \int_W \mu_C(w) / w \quad (3.90)$$

$$\{\mu_A(u) \mid u \in U\} \supseteq \{\mu_B(v) \mid v \in V\} \supseteq \{\mu_C(w) \mid w \in W\} \quad (3.91)$$

$$\exists u \in U \quad \mu_A(u) = 0, \quad \exists u' \in U \quad \mu_A(u') = 1 \quad (3.92)$$

$$\exists v \in V \quad \mu_B(v) = 0, \quad \exists v' \in V \quad \mu_B(v') = 1 \quad (3.93)$$

$$\exists w \in W \quad \mu_C(w) = 0, \quad \exists w' \in W \quad \mu_C(w') = 1 \quad (3.94)$$

**[定理3.9]**

Zadehの定義したファジイ関係Rm、Raとともに推移律を満たさない。

[証明]

(1) Rmの場合

P1、P2およびP3のファジイ条件文から生成されるファジイ関係をRm1、Rm2およびRm3とする。

$$\begin{aligned} & Rm1 \circ Rm2 \\ &= [ (A \times B) \cup (\neg A \times V) ] \circ [ (B \times C) \cup (\neg B \times W) ] \\ &= \int_{U \times V} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u)) / (u, v) \\ &\quad \circ \int_{V \times W} (\mu_B(v) \wedge \mu_C(w)) \vee (1 - \mu_B(v)) / (v, w) \end{aligned}$$

$$= \int_{U \times W} \bigvee_{v \in V} [ (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u)) ] \wedge [ (\mu_B(v) \wedge \mu_C(w)) \vee (1 - \mu_B(v)) ] / (u, w)$$

ここでたとえば  $\mu_A(u') = 0.6$ 、 $\mu_C(w') = 0.3$  となる  $u'$ 、 $w'$  を選ぶと、これらに対して  $Rm1 \circ Rm2$  は以下のようになる。

$$\begin{aligned} & Rm1 \circ Rm2 (u', w') \\ &= \bigvee_{v \in V} [ (0.6 \wedge \mu_B(v)) \vee 0.4 ] \wedge [ (\mu_B(v) \wedge 0.3) \vee (1 - \mu_B(v)) ] \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

一方、 $Rm3$  に上記  $u'$ 、 $w'$  を代入すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} & Rm3 (u', w') \\ &= (\mu_A(u') \wedge \mu_C(w')) \vee (1 - \mu_A(u')) \\ &= (0.6 \wedge 0.3) \vee (0.4) \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

$$\neq 0.5 = Rm1 \circ Rm2 (u', w')$$

以上で  $Rm$  の推移律不成立が示された。

## (2) $Ra$ の場合

$Rm$  の場合と同様  $P1$ 、 $P2$  および  $P3$  のファジイ条件文から生成されるファジイ関係を  $Ra1$ 、 $Ra2$  および  $Ra3$  とする。

$$\begin{aligned} & Ra1 \circ Ra2 \\ &= [ (\neg A \times V) \oplus (U \times B) ] \circ [ (\neg B \times W) \oplus (V \times C) ] \\ &= \int_{U \times V} 1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v)) / (u, v) \\ &\quad \circ \int_{V \times W} 1 \wedge (1 - \mu_B(v) + \mu_C(w)) / (v, w) \\ &= \int_{U \times W} \bigvee_{v \in V} [ 1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v)) \wedge (1 - \mu_B(v) + \mu_C(w)) ] / (u, w) \end{aligned}$$

ここで  $\mu_A(u') = 0.6$ 、 $\mu_C(w') = 0.4$  となる  $u'$ 、 $w'$  を選ぶと、これらに対して  $Ra1 \circ Ra2$  は以下のようになる。

$$\begin{aligned} & Ra1 \circ Ra2 (u', w') \\ &= \bigvee_{v \in V} [ 1 \wedge (0.4 + \mu_B(v)) \wedge (1.4 - \mu_B(v)) ] \end{aligned}$$

$$= 0.9$$

一方、R a 3 に上記 u'、w' を代入すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} & R a 3 (u', w') \\ &= 1 \wedge (1 - \mu_A(u') + \mu_C(w')) \\ &= 1 \wedge (1 - 0.6 + 0.4) \\ &= 0.8 \\ &\neq 0.9 = R a 1 \circ R a 2 (u', w') \end{aligned}$$

以上で R a の推移律不成立が示された。

[証明終]

### [定理 3. 10]

M a m d a n i の定義したファジイ関係 R c は推移律を満たす。

[証明]

R m の場合と同様 P 1、P 2 および P 3 のファジイ条件文から生成されるファジイ関係を R c 1、R c 2 および R c 3 とする。

$$\begin{aligned} & R c 1 \circ R c 2 \\ &= (A \times B) \circ (B \times C) \\ &= \int_{U \times V} \mu_A(u) \wedge \mu_B(v) / (u, v) \\ &\quad \circ \int_{V \times W} \mu_B(v) \wedge \mu_C(w) / (v, w) \\ &= \int_{U \times W} \bigvee_{v \in V} [\mu_A(u) \wedge \mu_B(v) \wedge \mu_C(w)] / (u, w) \\ &= \int_{U \times W} \mu_A(u) \wedge \mu_C(w) / (u, w) \\ &= R c 3 \end{aligned}$$

以上で R c の推移律成立が証明された。

[証明終]

### [定理 3. 11]

ファジイ関係 R s、R g、R s g、R g g は共に推移律を満たす。

[証明]

(1)  $R_s$  の場合

$R_m$  の場合と同様  $P_1$ 、 $P_2$  および  $P_3$  のファジイ条件文から生成されるファジイ関係を  $R_{s1}$ 、 $R_{s2}$  および  $R_{s3}$  とする。

$$\begin{aligned}
 & R_{s1} \circ R_{s2} \\
 &= (A \times V - s \rightarrow U \times B) \circ (B \times W - s \rightarrow V \times C) \\
 &= \int_{U \times V} \mu_A(u) - s \rightarrow \mu_B(v) / (u, v) \\
 &\quad \circ \int_{V \times W} \mu_B(v) - s \rightarrow \mu_C(w) / (v, w) \\
 &= \int_{U \times W} \bigvee_{v \in V} [ (\mu_A(u) - s \rightarrow \mu_B(v)) \wedge (\mu_B(v) - s \rightarrow \mu_C(w)) ] / (u, w)
 \end{aligned}
 \tag{3.95}$$

ここで、 $S(v)$  を以下のように定義する。

$$S(v) = (\mu_A(u) - s \rightarrow \mu_B(v)) \wedge (\mu_B(v) - s \rightarrow \mu_C(w))$$

本定義のもとで  $S(v)$  は以下の値をとる。

$$S(v) = \begin{cases} 1 & \dots \mu_A(u) \leq \mu_B(v) \leq \mu_C(w) \text{ の場合} \\ 0 & \dots \text{その他の場合} \end{cases}$$

一方、式 (3.91) ~ 式 (3.94) の仮定より、

$$\mu_A(u) \leq \mu_C(w)$$

が成立するときは常にある  $v \in V$  が存在し、

$$\mu_A(u) \leq \mu_B(v) \leq \mu_C(w)$$

が成立する。以上の議論より、次の式の成立が言える。

$$\bigvee_{v \in V} S(v) = \begin{cases} 1 & \dots \mu_A(u) \leq \mu_C(w) \text{ の場合} \\ 0 & \dots \mu_A(u) > \mu_C(w) \text{ の場合} \end{cases}$$

従ってこのことより式 (3.95) は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
 & \text{式 (3.95)} \\
 &= \int_{U \times W} \bigvee_{v \in V} S(v) / (u, w) \\
 &= \int_{U \times W} \mu_A(u) - s \rightarrow \mu_C(w) / (u, w)
 \end{aligned}$$

= R s 3

以上で R s の推移律成立が証明された。

(2) R g の場合

$$\begin{aligned}
 & R g 1 \circ R g 2 \\
 &= \int_{U \times V} \mu_A(u) - g \rightarrow \mu_B(v) / (u, v) \\
 &\quad \circ \int_{V \times W} \mu_B(v) - g \rightarrow \mu_C(w) / (v, w) \\
 &= \int_{U \times W} \bigvee_{v \in V} [ (\mu_A(u) - g \rightarrow \mu_B(v)) \wedge (\mu_B(v) - g \rightarrow \mu_C(w)) ] / (u, w)
 \end{aligned}
 \tag{3.96}$$

ここで、

$$S(v) = (\mu_A(u) - g \rightarrow \mu_B(v)) \wedge (\mu_B(v) - g \rightarrow \mu_C(w))$$

とおくと R s の場合と同様にして以下が示せる。

$$\bigvee_{v \in V} S(v) = \begin{cases} 1 & \cdots \mu_A(u) \leq \mu_C(w) \text{ の場合} \\ \mu_C(w) & \cdots \mu_A(u) > \mu_C(w) \text{ の場合} \end{cases}$$

従ってこのことより式 (3.96) は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
 & \int_{U \times W} \bigvee_{v \in V} S(v) / (u, w) \\
 &= \int_{U \times W} \mu_A(u) - g \rightarrow \mu_C(w) / (u, w) \\
 &= R g 3
 \end{aligned}$$

以上で R g の推移律成立が証明された。

(3) R s g の場合

$$\begin{aligned}
 & R s g 1 \circ R s g 2 \\
 &= \int_{U \times V} (\mu_A(u) - s \rightarrow \mu_B(v)) \wedge ((1 - \mu_A(u)) - g \rightarrow (1 - \mu_B(v))) / (u, v) \\
 &\quad \circ \int_{V \times W} (\mu_B(v) - s \rightarrow \mu_C(w)) \wedge ((1 - \mu_B(v)) - g \rightarrow (1 - \mu_C(w))) / (v, w) \\
 &= \int_{U \times W} \bigvee_{v \in V} [ (\mu_A(u) - s \rightarrow \mu_B(v)) \wedge (\mu_B(v) - s \rightarrow \mu_C(w)) ] / (u, w)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \wedge ((1-\mu_A(u)) - g \rightarrow (1-\mu_B(v))) \\
& \wedge ((1-\mu_B(v)) - g \rightarrow (1-\mu_C(w))) / (u, w) \\
= & \int_{U \times W} (\mu_A(u) - s \rightarrow \mu_C(w)) \wedge ((1-\mu_A(u)) - g \rightarrow (1-\mu_C(w))) / (u, w) \\
= & R s g 3
\end{aligned}$$

以上でR s gの推移律成立が証明された。

また、R g gについても同様にして証明できる。

[証明終]

ここで推移律成立の具体例を1つ示す。

ファジイ条件文P1、P2およびP3を以下の通りとする。

P1: If x is A then y is B.

P2: If y is B then z is C.

P3: If x is A then z is C.

また、ファジイ集合A、B、Cを以下のように定める。

$$U = V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A = 1/1 + 0.8/2 + 0.6/3 + 0.4/4 + 0.2/5$$

$$B = 0.2/4 + 0.4/5 + 0.8/6 + 1/7$$

$$C = 0.4/2 + 0.8/3 + 1/4 + 0.8/5 + 0.2/6$$

ここでP1、P2およびP3からR gの定義に従って生成されるファジイ関係をR g1、

R g2、R g3とすると、これらは各々以下のようなになる。

$$R g 1 = A \times V - g \rightarrow U \times B$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & .2 & .4 & .8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .2 & .4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .2 & .4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R g 2 = B \times W - g \rightarrow V \times C$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & .2 & 0 \\ 0 & .4 & 1 & 1 & 1 & .2 & 0 \\ 0 & .4 & .8 & 1 & .8 & .2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R g 3 = A \times W - g \rightarrow U \times C$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & .4 & .8 & 1 & .8 & .2 & 0 \\ 0 & .4 & 1 & 1 & 1 & .2 & 0 \\ 0 & .4 & 1 & 1 & 1 & .2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & .2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで具体的に  $R g 1 \circ R g 2$  を計算してみると、以下のとおり  $R g 3$  に一致する。

$$R g 1 \circ R g 2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & .2 & .4 & .8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .2 & .4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .2 & .4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & .2 & 0 \\ 0 & .4 & 1 & 1 & 1 & .2 & 0 \\ 0 & .4 & .8 & 1 & .8 & .2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & .4 & .8 & 1 & .8 & .2 & 0 \\ 0 & .4 & 1 & 1 & 1 & .2 & 0 \\ 0 & .4 & 1 & 1 & 1 & .2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & .2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

= R g 3

### 3. 7. 2 対偶律について

本章で述べた各種ファジイ関係のうち、R a および R s は以下に示す興味ある性質を持つ。

#### [定理 3. 1 2]

互いに対偶の関係にある2つのファジイ条件文、

P 1 : I f x i s A t h e n y i s B .

P 2 : I f y i s n o t B t h e n x i s n o t A .

に対し、ファジイ集合 A、B が以下のように定義されているものとする。

$$A = \int_U \mu_A(u) / u \quad (3.97)$$

$$B = \int_V \mu_B(v) / v \quad (3.98)$$

このとき、P 1、P 2 より得られる R a の定義に従ったファジイ関係をそれぞれ R a 1、R a 2 とし、R s の定義に従ったファジイ関係をそれぞれ R s 1、R s 2 とすると、以下の関係式が成立する。

$$R a 2 = R a 1^t \quad (3.99)$$

$$R s 2 = R s 1^t \quad (3.100)$$

ここで R<sup>t</sup> は R の逆関係を表す。すなわち R が行列表現されている場合、R<sup>t</sup> は R の転置

行列となる。

[定理終]

本定理を図式表現すると以下のようになる。



[証明]

(1)  $R_a$  の場合

$$\begin{aligned}
 R_{a1} &= (\neg A \times V) \oplus (U \times B) \\
 &= \int_{U \times V} 1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v)) / (u, v) \\
 R_{a1}^t &= \int_{V \times U} 1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v)) / (v, u) \\
 &= \int_{V \times U} 1 \wedge (1 - (1 - \mu_B(v)) + (1 - \mu_A(u))) / (v, u) \\
 &= (\neg(\neg B) \times U) \oplus (V \times (\neg A)) \\
 &= R_{a2}
 \end{aligned}$$

(2)  $R_s$  の場合

$$\begin{aligned}
 R_{s1} &= (A \times V) - s \rightarrow (U \times B) \\
 &= \int_{U \times V} \mu_A(u) - s \rightarrow \mu_B(v) / (u, v) \\
 R_{s1}^t &= \int_{V \times U} \mu_A(u) - s \rightarrow \mu_B(v) / (v, u) \\
 &= \int_{V \times U} (1 - \mu_B(v)) - s \rightarrow (1 - \mu_A(u)) / (v, u) \\
 &= (\neg B) \times U - s \rightarrow V \times (\neg A) \\
 &= R_{s2}
 \end{aligned}$$

[証明終]

以下に対偶律に関する具体例を1つ示す。

ファジイ条件命題P1、P2およびファジイ集合A、Bを以下のようにおく。

$$P1: \text{If } x \text{ is } A \text{ then } y \text{ is } B.$$

$$P2: \text{If } y \text{ is not } B \text{ then } x \text{ is not } A.$$

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$V = \{8, 9, 10, 11, 12, 13\}$$

$$A = 1/1 + 0.8/2 + 0.5/3 + 0.3/4$$

$$B = 0.2/10 + 0.4/11 + 0.7/12 + 1/13$$

ここでP1よりRsの定義に従って生成されるファジイ関係をRs1、同様にP2より生成されるファジイ関係をRs2とおくと、これらは以下のようになる。

$$R_{s1} = (A \times V) - s \rightarrow (U \times B)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{s2} = (\neg B) \times U - s \rightarrow V \times (\neg A)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

上記より、 $R_{s1}^t = R_{s2}$ 、 $R_{s2}^t = R_{s1}$ が成立していることは明かであろう。

### 3. 8 塚本の規範的基準について

ファジイ条件推論に対するアプローチのしかたとして、直接法と間接法の2通りがあることは第2章でも述べた通りであるが、塚本 [Tsu83] は間接法の立場から、ファジイ条件推論法において満たされるべき条件（塚本はこれを「規範的基準」と呼んだ）をいくつか定め、これらを満たす推論方法について研究した。

本節では、塚本の規範的基準を直接法の観点から解釈しなおし、本論文で提案した方法とこれら基準との関係を明かにする。

まず塚本の規範的基準を以下に示す。

[塚本の規範的基準] [Tsu83]

- (1) 推論の結果として得られる結論の真理度 (Linguistic Truth Value: LTV) は前提のLTVより制約的でない。
- (2) 前提と結論のLTVには単調性がある。
- (3) 条件命題における前件（後件）が肯定（否定）的でないとき、一般化modus ponens（一般化modus tollens）にもとづく結論は完全に非制約的になる。
- (4) 一般化modus ponensと一般化modus tollensの間には対称性がある。
- (5) 推論を行なう回数がふえるにつれて、結論はより非制約的となる。
- (6) いつでも2値論理に帰還できる。またはそれを特別な場合として含む。
- (7) 多次元推論への拡張が可能である。

以上の7項目が塚本の規範的基準である。なお、上記における「制約的」という言葉は、以下のように定義される。すなわち、ファジイ集合A、Bに対し、AがBより制約的であるとは、A、Bのメンバシップ関数 $\mu_A(u)$ 、 $\mu_B(v)$ の間に以下の関係が成立することを言う。

$$\forall u \in U \quad \mu_A(u) \leq \mu_B(v)$$

次にこれら7項目の基準を直接法によるファジイ条件推論の観点から表現を見直したものを以下に示す。

まず説明の都合上ファジイ条件推論法の形式を示しておく。

前提1 : If x is A then y is B.

前提2 : x is A' . (y is not B" . )

(3.101)

結論 : y is B' . (x is not A" . )

(1) 上記推論形式において、Bに対するB'の制約の強さは、Aに対するA'の制約の強さ以下でなくてはならない。また、Bに対するB"の制約の強さは、Aに対するA"の制約の強さ以上でなくてはならない。

これはたとえば、A' = very Aのとき、B' = B、B' = very Bであるのは許すが、B' = very very Bとなるのは許さないことを意味している。

(2) A'がAに対しより制約的(非制約的)であれば、B'もBに対しより制約的(非制約的)でなくてはならない。

また、B"がBに対しより制約的(非制約的)であれば、A"もAに対しより制約的(非制約的)でなくてはならない。

(3) A'がnot A(not B"がB)の場合、結論は完全に非制約的、すなわちunknownでなくてはならない。

(4) 一般化modus ponensと一般化modus tollensの対称性。

ここで言う対称性とは、たとえば一般化modus ponensにおいてA' = Aのとき、B' = B、A' = very AのときB' = very Bなら、一般化modus tollensにおいても同様にB" = BのときA" = A、B" = very BのときA" = very Aが成立することを要求している。

(5) 推論を重ねるにつれて、結論はより非制約的となる。

(6) いつでも2値論理に帰還できる。またはそれを特別な場合として含む。言い替えるならば、上記A、B、A'、B"がファジイ集合ではなく通常の集合である場合も含めて統一的に扱える。

(7) 多次元推論への拡張が可能である。ここで多次元推論とは、例えば以下のような条件命題を前提とする推論である。

If x is A and y is B then z is C.

If x is A or y is not B then z is C. e.t.c.

以上述べた7項目の基準に対し、本章で提案した4つの方法、すなわちRs、Rg、Rsg、Rggを使用する方法がどのような関係にあるかについて以下に論じる。

まず  $R_s$  の場合について述べる。

式 (3. 1 0 1) の形式の推論において  $R_s$  を使用して  $CR I$  を適用した場合、第 3 章で示したように任意の正の実数  $d$  に対し以下の式が成立する。

$$A^d \circ R_s = B^d$$

$$R_s \circ (\neg B^d) = \neg A^d$$

これは上記基準 (1)、(2) の成立を示していると共に (4) の成立も同時に示している。さらに、(3. 1 0 1) の形式の推論において  $R_s$  を使用して  $CR I$  を適用した場合、以下の式も成立する。

$$(\neg A) \circ R_s = \text{unknown}$$

$$R_s \circ B = \text{unknown}$$

これは上記基準 (3) の成立を意味している。

また、前節で示したように、 $R_s$  については推移律が成立する。これは推論を重ねるにつれて結論がより制約的となることはないことを示している。従ってこの意味で基準 (5) も満たされていると言えよう。

基準 (6) については、(3. 1 0 1) において  $A$ 、 $B$  が通常の集合であっても  $R_s$  はその定義に変更を加えることなく構成できること、さらにはこの  $R_s$  に  $CR I$  を適用可能であることから、成立は明かである。

次に基準 (7) についてであるが、 $K. S. Leung$  ら [Le188] の開発したエキスパートシステム  $Z-II$  では、 $R_s$  を使用しての多次元推論が実現されている。

以上により、 $R_s$  を使用した方法は塚本の規範的基準を満たしているといえる。

次に  $R_g$  を使用した場合であるが、基準 (4) が成立しない点を除き  $R_s$  の場合と同様である。

また、 $R_{sg}$ 、 $R_{gg}$  は、" If  $x$  is  $A$  then  $y$  is  $B$ ." の形のファジイ条件命題が暗黙のうちに " If  $x$  is  $A$  then  $y$  is  $B$  else  $y$  is not  $B$ ." を意味している場合を想定しているため、当然のことながら基準 (3) は成立しない。なお、 $R_{gg}$  は  $R_g$  と同様基準 (4) も満たさない。

以上本節では塚本 [Tsu83] が提案したファジイ条件推論法が満たすべき基準を、本論文で提案した方法がそのほとんどを満たしていることを示した。このことは、塚本の基準はいずれをとっても比較的妥当と考えられることから、本論文で提案した方法、なかでも特に  $R_s$ 、 $R_{sg}$  を使用する方法、の妥当性に対し傍証を与えるものと言えよう。

### 3. 9 その他の性質等について

前節までにおいて、ファジイ条件推論法の新しい方法をいくつか提案し、それらの性質等について論じた。一方、これら方法は、発表以来他の研究者達によっても様々な角度から検討が加えられてきた [Dri87] [DuP85] [EzM83] [Mar87] [MaS88] [Miz81] [Miz82b] [Miz82b] [Miz83] [Ped84] [Pra85] [Tsu83] [Ueh87] [WhS83] [Yag80] [Zad83a]。本節ではこれらのなかからいくつかを選びその概要を述べる。

#### 3. 9. 1 準同型ヘッジと合理的ファジイ推論

第2章でも述べたように、Zadeh [Zad72]、Lakof [Lak73]らは、very、more or less等の修飾語句 (Linguistic hedge: 以下単にヘッジと呼ぶ) がファジイ集合で表現されたあいまいな概念に付加された場合、これらヘッジをファジイ集合に対する演算子と解釈することを提案した。すなわち、任意のヘッジ $\phi$ に対し、 $\phi$ をファジイ集合のメンバシップ関数 $\mu(u)$ を他のメンバシップ関数 $\mu'(u)$ に変換する関数と解釈した。

$$\mu'(u) = \phi(\mu(u))$$

そして、very、more or less等の個々のヘッジに対しその意味論的考察をもとに具体的な関数 $\phi$ を定めた [Zad72] [Lak73]。例えば、本論文中でもしばしば用いている通り、veryに対しては以下のように定義した。

$$\begin{aligned} \text{very } A &= \text{very} \left( \int_U \mu(u) / u \right) \\ &= \int_U \phi_{\text{very}}(\mu(u)) / u \\ &= \int_U \mu^2(u) / u \\ &= A^2 \end{aligned}$$

一方、江沢・水本 [EzM83] は、このようなヘッジのうちで、

$$\mu(u) \leq \mu'(u) \quad \text{ならば} \quad \phi(\mu(u)) \leq \phi(\mu'(u))$$

なる関係を満たすものを準同型ヘッジと定義し、一般化modus ponensの形式の推論において、下記の関係が任意の準同型ヘッジ $\phi$ に対して成立するとき、これを合理的ファジイ推論であると定義した。

前提1 : If x is A then y is B.

前提2 : x is  $\phi$ (A).

---

結論 : y is  $\phi$ (B).

2章で述べた各ヘッジのうち、very、more or less等は準同型ヘッジであり、slightly、sort of等は準同型ヘッジではない。また、合理的ファジイ推論の定義は、例えば前提2の $\phi$ (A)がvery Aであれば結論の $\phi$ (B)はvery Bであることを要求するものであり、3.2節で述べた関係I、関係II-1および関係IIIを含むより一般的な表現となっている。そして江沢らは、Rm、Ra、Rc、Rs、Rg、Rsg、RggらにCRIを適用したとき合理的ファジイ推論となるかを調べ、このなかではRs、Rsgのみが合理的ファジイ推論を実現させることを明らかにした。

### 3.9.2 離散的に定義されたファジイ集合を使用した場合について

3.5節においてRs、Rg等のファジイ関係を定義した際、ファジイ条件文”If x is A then y is B”中のファジイ集合A、Bのメンバシップ関数 $\mu_A(u)$ 、 $\mu_B(v)$ が以下の条件を満たすことを仮定した。

$$\{\mu_A(u) \mid u \in U\} = \{\mu_B(v) \mid v \in V\} \quad (3.102)$$

$$\exists u \in U \quad \mu_A(u) = 0, \quad \exists u' \in U \quad \mu_A(u') = 1 \quad (3.103)$$

$$\exists v \in V \quad \mu_B(v) = 0, \quad \exists v' \in V \quad \mu_B(v') = 1 \quad (3.104)$$

そしてこれら仮定のもとで、要求される各関係が成立することを証明した。

これら仮定は、 $\mu_A(u)$ 、 $\mu_B(v)$ が連続関数である場合には特に問題となることはなく、通常必ず成立すると考えてよい。しかしながら、現実に本手法をデジタルコンピュータ上で走行するプログラムでインプリメントする場合、一般には離散的に定義されたメンバシップ関数を使用することになる。従って、離散的に定義されたメンバシップ関数を持つファジイ集合からRs、Rg等を構成し、これに対しCRIを適用した場合、要求される各関係を満たすか否かという点が実用上重要となる。

Driankov [Dri87]はこの観点より、具体的にRgを対象としてこの問題を検討した。その結果、RgにCRIを適用した場合、関係I、II-2及びIVの成立には式(3.102)の仮定は不用であるが、関係IIIの成立には必須であることを示した上で、 $\mu_A(u)$ 、 $\mu_B(v)$ が離散的に定義された関数の場合、式(3.103)、式(3.10

4) の仮定はともかくとしても、式 (3. 102) の仮定はかなりきびしいものとなる為、Rg を使用した推論において関係Ⅲの成立を要求することは、メンバシップ関数決定に際しての自由度をそこなうことになることも併せて指摘した。

Dr i a n k o v のこの指摘は確かに事実であるため、以下では問題点の所在について検討を行なう。

一般に  $A' = A^d$  ( $d > 0$ ) として  $A^d$  と Rg の間でCRI を適用したとき、結論  $B'$  は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} B' &= A^d \circ Rg \\ &= \int_U \mu_{A^d}(u) / u \circ \int_{U \times V} \mu_A(u) - g \rightarrow \mu_B(v) / (u, v) \\ &= \int_V \bigvee_{u \in U} (\mu_{A^d}(u) \wedge (\mu_A(u) - g \rightarrow \mu_B(v))) / v \end{aligned} \quad (3.105)$$

3. 5 節における定理 3. 2 の証明においては、ここで各  $v \in V$  に対し  $U$  を以下の 2 つの部分集合  $U_1(v)$  と  $U_2(v)$  に分割した。

$$U_1(v) \cup U_2(v) = U \quad U_1(v) \cap U_2(v) = \phi \quad (3.106)$$

$$\forall u \in U_1(v) \quad \mu_A(u) \leq \mu_B(v) \quad (3.107)$$

$$\forall u \in U_2(v) \quad \mu_A(u) > \mu_B(v) \quad (3.108)$$

そしてこれらを使用して式 (3. 105) を以下のように変形した。

$$\begin{aligned} &\text{式 (3. 105)} \\ &= \int_V \left( \bigvee_{u \in U_1(v)} \mu_{A^d}(u) \right) \bigvee \left( \bigvee_{u \in U_2(v)} \mu_{A^d}(u) \wedge \mu_B(v) \right) / v \end{aligned} \quad (3.109)$$

ここで式 (3. 102) の仮定が満たされている場合、これと式 (3. 107) より、

$$\bigvee_{u \in U_1(v)} \mu_{A^d}(u) = \mu_{B^d}(v)$$

が成立し、これより式 (3. 109) は以下の通り変形を続けることができる。

$$\begin{aligned} &\text{式 (3. 109)} \\ &= \int_V \mu_{B^d}(v) \bigvee \left( \bigvee_{u \in U_2(v)} \mu_{A^d}(u) \wedge \mu_B(v) \right) / v \\ &= \int_V \mu_{B^d}(v) \bigvee (1 \wedge \mu_B(v)) / v \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \int_V \mu_{B^d}(v) / v = B^d & \dots d \leq 1 \\ \int_V \mu_B(v) / v = B & \dots d \geq 1 \end{cases}$$

以上より、式(3.102)の条件が必要となるのは式(3.109)の変形時のみであり、従って上記より  $d \geq 1$  の場合は式(3.102)の条件が不要であることも明らかである。以上の議論より *Driankov* の指摘に対しては以下のように応えることができよう。すなわち、*Rg* を使用した推論において式(3.102)の条件が満たされない場合、関係Ⅲは一般には成立しない。これは式(3.102)の条件が満たされている場合は、

$$\mu_{B'}(v) = \bigvee_{u \in U_1(v)} \mu_{A^d}(u) = \mu_{B^d}(v) \quad (\text{但し、} 0 < d < 1)$$

となるべき  $\mu_{B'}(v)$  を、式(3.102)の条件が満たされていないが故に

$$\mu_{B'}(v) = \bigvee_{u \in U_1(v)} \mu_{A^d}(u) < \mu_{B^d}(v)$$

で近似することによる。従ってその誤差は以下の通りである。

$$\forall v \in V \quad \bigwedge_{u \in U_1(v)} (\mu_{B^d}(v) - \mu_{A^d}(u)) \quad (3.110)$$

これより、式(3.102)の条件が満たされていない場合関係Ⅲは式(3.110)の誤差をもって近似的に成立すると言える。

なお、*Driankov* は *Rg* の場合についてのみ調べているが、*Rgg* を使用した場合でも同じく関係Ⅲの成立に、*Rsg*、*Rsgg* を使用した場合は関係Ⅰ、関係Ⅱ-1、及び関係Ⅲの成立にそれぞれ式(3.102)の条件は必須であり、これが満たされない場合は上記と同様のことが言える。

### 3. 1 0 結 言

本章では一般化modus ponens及び一般化modus tollensの形式のファジイ条件推論法について述べた。まず、すでに提案されていたZadehの方法およびMamdaniの方法では直観的に妥当と思われる結論が得られないとの事実から出発し、我々が日常行なっているこの種の推論に対する検討をもとに、これら形式の推論において最低限満たすべきであろうと考えられる前提と結論の関係を整理した。そして、Zadeh、Mamdaniの方法ではこれら関係の大部分が満たされないことを示した上で、これら関係を満たす新たな方法を定式化し、これら方法のもつ種々の性質について明らかにした。ここで本章で提案した方法の特性を整理すると、表3. 8、表3. 9の通りとなる。

本章で新たに提案した方法は、ファジイ関係 $R_s$ を使用するもの、 $R_g$ を使用するもの、 $R_{sg}$ を使用するものおよび $R_{gg}$ を使用するものの4種類あるが、これは、我々が日常行なっているこの種の推論も状況に応じて暗黙のうちにいくつかのタイプのものを使いわけているとの考えによるものである。従って、これら4種類の方法は、優劣の判断の対象とすべきではなく、状況に応じて使いわけるべきものと考えている。実際、5章で詳しく述べるが、K. S. Leungらの開発したエキスパートシステムZ-II [LeL87] [LeL88] では本論文で提案した推論方法が採用されているが、Z-IIでは特に指定のない限り $R_{sg}$ を使用して推論を実行するが、指定により $R_s$ 、 $R_g$ も使用可能な構成となっている。

なお、これら方法をうまく使い分ける為には各方法の特性を詳しく把握しておくことが必要となるが、これについては、水本 [Miz82b] [Miz83] による結果が参考になろう。実際これら論文では、 $R_s$ 、 $R_g$ 等を使用した推論において、種々の前提に対しその結論がどのようなになるかが詳しく調べられている。

本章で提案した4つの推論方法のうち、 $R_g$ および $R_{gg}$ を使用する方法は、一般化modus tollensの形式の推論においては要求される各関係の一部しか成立しなかった。この点については、その後水本 [Miz82c] [Miz85] が $R_g$ 、 $R_{gg}$ の定義はそのままとした上でCRIにおける合成演算方法に変更を加えることにより、すべての関係を満たす方法を提案している。

表 3. 8 本章で提案した方法における各関係の成立状況

関係	R s	R g	R s g	R g g
I	○	○	○	○
II - 1	○	×	○	×
II - 2	×	○	×	○
III	○	○	○	○
IV - 1	○	○	×	×
IV - 2	×	×	○	○
V	○	×	○	×
VI	○	×	○	×
VII	○	×	○	×
VIII - 1	○	○	×	×
VIII - 2	×	×	×	×

表 3. 9 推移律、対偶律の成立状況

	R m	R a	R c	R s	R g	R s g	R g g
推移律	×	×	○	○	○	○	○
対偶律	×	○	×	○	×	×	×

## 4. ファジイ限定詞を含む推論 [FMT78c] [MPT79b]

### 4. 1 緒言

通常の論理の世界において、“ $\forall$ ”（任意の、すべての）、“ $\exists$ ”（存在する）の2つの限定詞（quantifire）が広く使われている。

一方、我々は日常これら以外に、almost all、most、few、といったあいまいさを含む限定詞（以下ファジイ限定詞と呼ぶ）を使用し、これらによって限定された命題をもとにした推論をよく行なっている。これら推論の具体例をあげると、例えば以下のようなものがある。

Most Swedes are blond.

Karl is a swede.

---

It is likely that Karl is blond.

Most tall men are well built.

Tom is very tall.

---

It is likely that Tom is well built.

本章では、このような形式の推論に対し、第3章で述べたファジイ条件推論法の手法を応用し、機械的に実行する方法を提案する。

### 4. 2 ファジイ限定詞

一般にファジイ限定詞と考えられるものには種々のものが存在する [Zad88] が、本章では以下の2つのクラスファジイ限定詞を考える。その1つは、most、few等に代表されるものであり、一般にある集合Xの要素のうち特定の性質を持つ要素の比率を表すときに使用されるものである。また、他の一つは、集合Xの個々の要素に対し、特定の性質を持つ確率を表す際に使用されるものである。前者のファジイ限定詞の集合をFQ1、後者のそれをFQ2とすると、これらは各々以下のようなになる。

FQ1 = {all, almost all, most, many, few, a few,  
about half, about 70%, ... }

$FQ2 = \{ \text{very likely, likely, not likely, } \dots \}$

本章では、一般に  $FQ1$  に属するファジイ限定詞については、割合（比率）を表す区間  $[0, 1]$  上のファジイ集合で、 $FQ2$  に属するファジイ限定詞については、確率を表す区間  $[0, 1]$  上のファジイ集合でそれぞれ表現するものとする。すなわち、言い替えるならば、 $FQ1$ 、 $FQ2$  の各要素をファジイ集合の名前と考える。

### 4. 3 対象とする推論形式

本章で対象とするファジイ限定詞を含む推論の形式について整理する。

#### (1) タイプA

ここでタイプAと名付ける形式の推論は、具体例を挙げると以下のようなものである。

前提1 : Most Americans are tall.

前提2 : Tom is an American.

---

結論 : It is likely that Tom is tall.

これを一般的に記号で表現すれば以下のようなになる。

前提1 :  $m \ x \ (x \in A \rightarrow x \ is \ E)$

前提2 :  $\exists \ a \ (a \in A)$

---

結論 :  $P(a \ is \ E) = r$

(4.1)

但し  $m \in FQ1$

$A$  : 任意の集合

$E$  :  $x$ 、 $a$  のある属性の値

$P(a \ is \ E)$  : "  $a \ is \ E$  " の確率

$r \in FQ2$

以上よりもわかるように、本タイプはファジイ限定詞を含む推論のなかで、もっとも単純な形式のものと言えよう。

#### (2) タイプB

このタイプの形式の推論の具体例を挙げると以下のようなものである。

前提1 : Most tall Americans are well built.

前提2 : Tom is a more or less tall American.

---

結論 : It is likely that Tom is well built.

これを一般的に記号で表現すれば以下のようになる。

前提1 :  $\mu_x ((x \in A) \wedge (x \text{ is } F) \rightarrow x \text{ is } E)$

前提2 :  $\exists a ((a \in A) \wedge (a \text{ is } F'))$

---

結論 :  $P(a \text{ is } E) = r$

(4.2)

但し  $m \in FQ1$

A : 任意の集合

F, F' : ファジイ集合で表現された x と a のある属性の値

一般にあいまいな概念である

E : x, y のある属性の値

P(a is E) : "a is E" の確率

$r \in FQ2$

このタイプは、前提1の前件部(上記例では Most tall Americans の部分)にファジイ限定詞以外のあいまいな概念が含まれているものである。

### (3) タイプC

このタイプの形式の推論の具体例を挙げると以下のようである。

前提1 : Tall Americans are quite likely to be well built.

前提2 : Tom is a more or less tall American.

---

結論 : It is likely that Tom is well built.

これを一般的に記号で表現すれば以下のようになる。

前提1 :  $\forall x ((x \in A) \wedge (x \text{ is } F) \rightarrow P(x \text{ is } E) = r_1)$

前提2 :  $\exists a ((a \in A) \wedge (a \text{ is } F'))$

---

結論 :  $P(a \text{ is } E) = r_2$

(4.3)

但し  $r_1, r_2 \in FQ2$

A : 任意の集合

F, F' : ファジイ集合で表現された x と a のある属性の値

一般にあいまいな概念である

E : x、a のある属性の値

P ( a i s E ) : ” a i s E ” の確率

このタイプの推論形式は、タイプBでは前提1をFQ1に属するファジイ限定詞を使用して表現していたものを、FQ2に属するファジイ限定詞を使用した表現に言い替えたものと考えられる。従って形式上はタイプBとは異なるが、意味的には差異は無いと考えられる。

#### (4) タイプD

このタイプの形式の推論の具体例を挙げると以下のようなものである。

前提1 : Most tall Americans are well built.

前提2 : It is very likery that Tom is a tall American.

結論 : It is likely that Tom is well built.

これを一般的に記号で表現すれば以下のようなになる。

前提1 :  $m \ x \ ( ( x \in A ) \wedge ( x \ i s \ F ) \rightarrow x \ i s \ E )$

前提2 :  $\exists \ a \ ( ( a \in A ) \wedge P ( a \ i s \ F' ) = r_1 )$

結論 :  $P ( a \ i s \ E ) = r_2$

(4.4)

但し  $m \in FQ1$

$r_1, r_2 \in FQ2$

A : 任意の集合

F, F' : ファジイ集合で表現された x と a のある属性の値

一般にあいまいな概念である

E : x、a のある属性の値

P ( a i s E ) : ” a i s E ” の確率

このタイプの推論形式は、タイプBの前提2にFQ2に属するファジイ限定詞が追加されたものと考えられる。

以上示した通りここではファジイ限定詞を含んだ推論の形式を4つあげた。我々が日常使用している推論形式としては、これら以外にもさらに複雑なものがあると考えられる。しかし、あまり複雑になると、あいまいさが増し、意味のある結論を得ることが困難になると考えられる。そこで、本章では基本的と考えられる以上の4つのタイプの推

論形式を対象とし、結論を導く方法を定式化する。

#### 4. 4 推論方法の定式化

以下では前節で述べたタイプA～タイプDの各推論形式に対し、具体的推論方法を定式化する。

##### 4. 4. 1 タイプAの場合

本タイプの推論形式は以下の通りであった。

前提1 :  $m \quad x \quad (x \in A \rightarrow x \text{ is } E)$

前提2 :  $\exists \quad a \quad (a \in A)$

---

結論 :  $P(a \text{ is } E) = r$

ここで、 $m \in FQ1$ 、 $r \in FQ2$ であり、 $m$ は比率を表す区間 $[0, 1]$ 上の、 $r$ は確率を表す区間 $[0, 1]$ 上のそれぞれファジイ集合に対応付けられているものとする。

本形式の推論においては、求めるべき結論は $r$ であり、また、 $r$ は前提中の $m$ のみによって決定されることは明かである。一方、 $m$ の値の全体集合（比率を表す区間 $[0, 1]$ ）と、 $r$ の値の全体集合（確率を表す区間 $[0, 1]$ ）はそのまま1対1対応をなしていると考えてよい。すなわち、例えばある集合 $X$ の要素のうち特定の性質を有するものの比率が0.7であるとすると、 $X$ から1つの要素を取り出したとき、これが当該の性質を有する確率は当然0.7と考えてよい。従って、比率を表す区間 $[0, 1]$ から確率を表す区間 $[0, 1]$ への恒等関数 $f$  ( $f(x) = x$ )に $m$ を適用すれば、 $r$ を得ることができる。なお、このとき、 $m$ はファジイ集合であることを考慮し、関数 $f$ への $m$ の適用にあたっては以下のように拡張原理に基づき計算する。

$$\begin{aligned} r &= f(m) \\ &= f\left(\int_U \mu_m(u) / u\right) \\ &= \int_V \mu_m(u) / f(u) \\ &= \int_V \mu_m(v) / v \end{aligned}$$

以上の計算により得られたファジイ集合 $r$ を*likely*等の言葉で再表現（ファジイ集合の言語近似）すれば結論が得られたことになる。

#### 4. 4. 2 タイプBの場合

本タイプの推論形式は以下の通りであった。

前提1 :  $m \quad x \quad ( (x \in A) \wedge (x \text{ is } F) \rightarrow x \text{ is } E )$

前提2 :  $\exists a \quad ( (a \in A) \wedge (a \text{ is } F' ) )$

---

結論 :  $P ( a \text{ is } E ) = r$

ここで  $m \in FQ1$ 、 $r \in FQ2$  であり、求めるべき結論は  $r$  である点はタイプAの場合と同様である。しかし、前提に  $F$ 、 $F'$  なるファジイ概念が含まれていることより、結論  $r$  は  $m$  のみから決定することはできない。そこで、このタイプの推論に対しては、以下のように考える。すなわち、まず前提1を次のように解釈する。

$$\forall x \in A \quad ( \text{If } x \text{ is } F \text{ then } P ( x \text{ is } E ) = f ( m ) )$$

ここで  $f$  は先に導入した恒等関数である。

この解釈のもとでは、本形式の推論は以下のように表現できる。

$$\forall x \in A \quad ( \text{If } x \text{ is } F \text{ then } P ( x \text{ is } E ) = f ( m ) )$$

$$\exists a \in A \quad ( a \text{ is } F' )$$


---


$$P ( a \text{ is } E ) = r \tag{4.5}$$

すなわちこれは前章で取り扱ったファジイ条件推論そのものである。従ってこれより、結論  $r$  は以下のようにして得られる。

$$r = F' \circ ( F \times [0, 1] \text{ -- } * \text{ -- } \rightarrow U \times f ( m ) ) \tag{4.6}$$

ただしここで  $U$  は  $F$ 、 $F'$  の全体集合である。また、 $- * \rightarrow$  は前章で定義した  $- s \rightarrow$ 、 $- g \rightarrow$ 、 $- s g \rightarrow$  もしくは  $- g g \rightarrow$  のいずれかであり、いずれを採用するかは状況に応じて判断すべきものである。

ここでタイプBの推論を具体的に本定式化に従って計算した例を1つ示す。

まず前提として以下の命題を考える。

前提1 : Most young employees of this company are low salary.

そして、most、young は以下のファジイ集合で定義されているものとする。

$$\text{most} = 1/1 + 0.8/0.9 + 0.6/0.8 + 0.4/0.7 + 0.2/0.6$$

$$f(\text{most}) = \text{likely}$$

$$\text{young} = 1/22 + 1/23 + 0.9/24 + 0.8/25$$

$$+ 0.6/26 + 0.4/27 + 0.2/28$$

ただし、young の全体集合  $U$  は以下の通りとする。

$$U = \{22, 23, \dots, 28, 29, 30\}$$

以上より、式(4.6)の $-* \rightarrow$ として $-g \rightarrow$ を採用すると、ファジイ関係 $R_g$ は以下のように得られる。

$$R_g = (\text{young}) \times [0, 1] - g \rightarrow U \times f(\text{most})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & .4 & .6 & .8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & .4 & .6 & .8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & .4 & .6 & .8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & .4 & .6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & .4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

従ってこれより、前提2を以下のように置いた場合の結論は各々次に示す通りとなる。

(1) Tom is a young employee of this company.

$$\begin{aligned} r_2 &= \text{young} \circ R_g \\ &= 1/1 + 0.8/0.9 + 0.6/0.8 + 0.4/0.7 + 0.2/0.6 \\ &= f(\text{most}) \\ &= \text{likely} \end{aligned}$$

(2) Tom is a very young employee of this company.

$$\begin{aligned} r_2 &= (\text{very young}) \circ R_g \\ &= (\text{young})^2 \circ R_g \\ &= f(\text{most}) \\ &= \text{likely} \end{aligned}$$

(3) Tom is a more or less young employee of this company.

$$\begin{aligned} r_2 &= (\text{more or less young}) \circ R_g \\ &= (\text{young})^{1/2} \circ R_g \end{aligned}$$

$$= (f(\text{most}))^{1/2}$$

= more or less likely

(4) Tom is not a young employee of this company.

$$r_2 = (\text{not young}) \circ Rg$$

$$= (0.1/24 + 0.2/25 + 0.4/26 + 0.6/27 + 0.8/28 + 1/29 + 1/30) \circ Rg$$

= unknown

(5) Tom is a slightly young employee of this company.

$$r_2 = (\text{slightly young}) \circ Rg$$

$$= (\text{NORM}(\text{young and not very young})) \circ Rg$$

$$= (0.32/24 + 0.6/25 + 1/26 + 0.67/27 + 0.33/28) \circ Rg$$

$$= 0.33/0.6 + 0.67/0.7 + 1/0.8 + 1/0.9 + 1/1$$

≈ more or less likely

#### 4.4.3 タイプCの場合

本タイプの推論形式は以下の通りであった。

$$\text{前提1} : \forall x ((x \in A) \wedge (x \text{ is } F) \rightarrow P(x \text{ is } E) = r_1)$$

$$\text{前提2} : \exists a ((a \in A) \wedge (a \text{ is } F'))$$

---


$$\text{結論} : P(a \text{ is } E) = r_2$$

ここで  $r_1$ 、 $r_2$  は共に FQ2 の要素である。

このタイプは一見してわかる通り、式(4.5)の形式と同じである。従って、タイプBの場合と同様にして結論  $r_2$  を求めることができる。

$$r_2 = F' \circ (F \times [0, 1] - * \rightarrow U \times r_1) \quad (4.7)$$

ここで  $U$  は  $F$ 、 $F'$  の全体集合であり、 $- * \rightarrow$  は前章で定義した  $-s \rightarrow$ 、 $-g \rightarrow$ 、 $-sg \rightarrow$  もしくは  $-gg \rightarrow$  のいずれかを状況に応じて選択するものとする。

#### 4.4.4 タイプDの場合

本タイプの推論形式は以下の通りであった。

$$\text{前提1} : \forall x ((x \in A) \wedge (x \text{ is } F) \rightarrow x \text{ is } E)$$

$$\text{前提2} : \exists a ((a \in A) \wedge P(a \text{ is } F') = r_1)$$

---


$$\text{結論} : P(a \text{ is } E) = r_2$$

本タイプの推論形式において、結論  $r_2$  を得る方法を定式化する為、まず次の簡単な例について考える。

壺の中に赤と青のボールが多数はいついて、青いボールの9割には白い点がついているものとする。また赤いボールにも白い点のついているものがあるが、その比率は未知であるとする。するとこれより、上記前提1に相当する以下の命題が得られる。

$P1: 9割のx ((x \in A) \wedge (x \text{ is "青"}) \rightarrow x \text{ is "白い点"})$   
ただし、 $A$  は壺のなかのボールの集合を表す。

また、壺から1個のボールを任意に取り出したとき、それが青いボールである確率  $r_1$  がわかっているとす。すると上記前提2に相当する次の命題が得られる。

$P2: \exists a ((a \in A) \wedge P(a \text{ is "青"}) = r_1)$

従ってこの2つの命題  $P1$ 、 $P2$  より、壺から1個のボールを取り出したときそのボールに白い点のついている確率  $r_2$  は、以下の式により得られることになる。

$$r_2 = 0.9 r_1 + \alpha$$

ここで  $\alpha$  は、取り出したボールが赤でかつ白い点のついている確率を表しており、その値は本前提のもとでは未知である。ところが、 $0 \leq r_2 \leq 1$ 、すなわち、

$$0 \leq 0.9 r_1 + \alpha \leq 1$$

であることより、 $0.9 r_1$  が1に近い場合、 $\alpha$  は無視しても大きな影響はない。すなわちこの場合、

$$r_2 \doteq 0.9 r_1$$

と考えることができる。しかし  $0.9 r_1$  が1に近い値ではない場合、 $\alpha$  は無視できず、従ってこれだけの前提条件からは  $r_2$  を推定することはできない。

以上の議論及び、本タイプの推論形式の前提1がタイプBの前提1と同じ形であることを考えあわせると、 $r_2$  に関して以下の命題が成立することがわかる。

If  $(f(m) \cdot r_1$  が1に近い) then

$$P(y \text{ is } E) = F' \circ (F \times [0, 1] \xrightarrow{*} U \times f(m) \cdot r_1)$$

これより、 $P(y \text{ is } E)$  すなわち  $r_2$  は以下のように得られる。

$$r_2 = (f(m) \cdot r_1) \circ [high \times [0, 1] \xrightarrow{*_1} [0, 1] \times F' \circ (F \times [0, 1] \xrightarrow{*_2} U \times f(m) \cdot r_1)] \quad (4.8)$$

ただし  $U$  は  $F$ 、 $F'$  の全体集合を表す。また、 $high$  は確率が 1 に近いことを表すファジイ集合で、例えば以下のようなものを採用すればよい。

$$high = 0.2 / 0.8 + 0.5 / 0.85 + 0.7 / 0.9 + 0.9 / 0.95 + 1 / 1$$

さらに、 $f(m) \cdot r_1$  の計算は拡張原理を適用して以下のように実行すればよい。

$$f(m) = \int_U \mu_{f(m)}(u) / u$$

$$r_1 = \int_U \mu_{r_1}(u) / u$$

$$\begin{aligned} f(m) \cdot r_1 &= \int_U \mu_{f(m)}(u) / u \cdot \int_U \mu_{r_1}(u') / u' \\ &= \int_U \mu_{f(m)}(u) \wedge \mu_{r_1}(u') / u \cdot u' \end{aligned}$$

#### 4.5 結言

本章では、我々が日常しばしば使用するファジイ限定詞を含む推論形式のいくつかに対し、前章で述べたファジイ条件推論法の手法を応用することにより、具体的推論手続きを定式化した。

## 5. 応用事例

### 5. 1 緒言

本論文で提案したファジイ条件推論法はすでに他の研究者達によって種々の応用がなされている。これらのなかには、R a j uら [RaM86] [RaM88] による関係データベースにおけるファジイ関数従属の定義へのファジイ関係R sの応用、水本 [Miz81] による” If x is A then y is B else y is C.”なるファジイ条件文を前提とする推論への応用、K. S. L e u n gら [LeL87] [LeL88] によるエキスパートシステムへの応用等がある。本章ではこれらのうち、K. S. L e u n gらによるエキスパートシステムについて取りあげ、本論文で提案した推論方法が中心的役割をはたしていることを説明する。

### 5. 2 エキスパートシステムZ-II

K. S. L e u n gとW. L a mが開発したZ-IIは、現在V A X-11/780上で稼働しているいわゆるエキスパートシステムシェルで、本システムに具体的なルール及びファクトを投入することで種々のエキスパートシステムとして使用できる。以下では、本システムにおけるあいまい性の取扱い方、およびこれらデータをもとにした推論方法につき、文献 [LeL88] に従って述べる。

本システムでは、あいまいさをM y c i n [Sho76] 等で使用された確信度 (certainty factor) とファジイ集合によって取扱う。従って本システムでは通常エキスパートシステムで取り扱えるルールおよびファクトに加え、以下の形態のルール、ファクトが取り扱える。

#### (1) 確信度が付加されたルール、ファクト

各ルール、ファクトに区間 [0, 1] 中の数値で表現された確信度が付加されたもので、具体例をあげると以下のようなものが該当する。

- If x is a bird then it can fly. (0.9)
- x is a bird. (0.8)

#### (2) ファジイ概念を含んだルール、ファクト

各ルール、ファクト中にファジイ概念が含まれているもので、これらファジイ概念はファジイ集合に対応付けられている。具体例をあげると以下のようなものが考

えられる。

- If the price is high then the profit should be good.
- John is quite young.

ここで high、good、quite young がファジイ概念である。

(3) ファジイ概念を含みかつ確信度が付加されたルール、ファクト

以下の例に示すルール、ファクトがこれに該当する。

- If the price is high then the profit should be good. (0.9)
- John is quite young. (0.8)

(4) ファジイ数で表現された確信度を持つルール、ファクト

確信度が区間  $[0, 1]$  の数値ではなく、ファジイ集合で与えられているものである。具体例をあげると以下のようなものが考えられる。

- John is very heavy. (around 0.7)

次にこれらルール、ファクトをもとにした推論方法について述べる。

一般にルールおよびファクトが以下のように与えられているとする。

ルール : If A is  $V_1$  then C is  $V_2$ . (FN1)

ファクト : A is  $V_1'$ . (FN2)

結論 : C is  $V_2'$ . (FN3)

Z-IIでは本ルールおよびファクトよりの結論の値  $V_2'$  および結論の確信度 FN3 は以下のようにして求めている。

まず A がファジイオブジェクトでない場合、 $V_1 = V_1'$  の場合のみ本ルールが適用され、 $V_2' = V_2$  となる。このときの結論の確信度 FN3 は、 $FN3 = FN1 \times FN2$  により求められる。なお、FN1、FN2 は一般にはファジイ数であるため、本計算は拡張原理を用いて実行される。

次に、A、Cともにファジイオブジェクトの場合、Z-IIでは本論文で提案したファジイ条件推論法を用いて結論を導く。すなわち、ルールより通常は第3章で述べた  $R_s$  の定義に従ってファジイ関係を構成し、これとファクト中の  $V_1'$  の値に対し  $CR_I$  を適用することにより結論  $V_2'$  の値を得る。また、特に指定がある場合、ファジイ関係  $R_s$  もしくは  $R_g$  を用いて推論を実行させることもできる。なお、この場合の FN3 の求め方は上記と同様である。

一方、AがファジイオブジェクトでCがファジイオブジェクトでない場合、Z-IIでは結論V2'はV2に等しいとするが、確信度FN3は以下のようにV1とV1'の類似度を考慮して決定する。

$$FN3 = FN1 \times FN2 \times M$$

ここでMはV1とV1'の類似度であり、V1の値であるファジイ集合をF1、V1'の値であるファジイ集合をF2としたときMは以下のようにして計算される。

$$M = \begin{cases} P(F1 | F2) & N(F1 | F2) > 0.5 \text{ の場合} \\ (N(F1 | F2) + 0.5) \times P(F1 | F2) & \text{その他の場合} \end{cases}$$

但しここでP(F1 | F2)、N(F1 | F2)は以下のように定義される。

$$P(F1 | F2) = \max(\min(\mu_{F1}(w), \mu_{F2}(w)))$$

$$N(F1 | F2) = 1 - P(\neg F1 | F2)$$

以上がZ-IIで採用されている推論方法である。これらより、Z-IIでは本論文で提案した推論方法が中心的役割をはたしていると言えよう。

### 5. 3 結言

本論文で提案したファジイ条件推論法の応用事例として、Leungらの開発したエキスパートシステムシェルZ-IIについて述べた。本システムは、大学におけるコース選択の為のエキスパートシステム、医療診断支援システム、精神分析システム等として幅広く使用されており、このことから本論文で提案した推論方法の有効性が実証されていると言えよう。

## 6. 結論

コンピュータシステムが対象とする問題領域を *well-defined* な領域から *ill-defined* な領域へと拡大してゆく上で、種々のあいまい性を取り扱う技法を確立することは避けて通れない必須の課題と言える。これらあいまい性のなかには、不確実性、不完全性、不整合性、非決定性、ファジイ性、等多くの種類があるが、なかでもファジイ性は、我々が日常使用する言葉のなかにファジイ性を内在したものが非常に多いことからわかるように、人間にとっては本質的なものであり、コンピュータの能力を人間のそれに近づける上で非常に重要である。

本論文では、このファジイ性の意味でのあいまいさを対象とし、ファジイ概念を含んだ前提からの推論、なかでもエキスパートシステム等への応用上特に重要な *IF ... THEN ...* の形式のファジイ条件命題による推論（ファジイ条件推論）に関する研究結果について述べた。

本研究では、*Zadeh*、*Mamdani*らによってすでに提案されていたファジイ条件推論の方法が、必ずしも我々の直感にあった結論を導かないとの追試結果をもとに、より妥当な結論が得られる推論方法の確立を目的として設定した。

ところで一般に、ファジイ概念を含んだ前提をもとにした推論では、推論方法の妥当性に関して明確な条件を設定することは困難なこともあり、本研究以前には推論方法の妥当性に関する議論は行われていなかった。この点に関して本研究では、この種の推論において前提と結論の間に成立すべきと考えられる具体的関係をいくつか設定し、これら関係が満たされることを妥当な推論のための条件とするアプローチをとった。従って本研究結果の有効性はこの条件の妥当性に依存するといえるが、本研究とは独立に行われた他のいくつかの研究においても、本文中でも述べたように本研究で採用した条件と類似もしくは等価な条件が設定されており [*Ez83*] [*Tsu83*] [*Du88*]、これら条件についてはすでにコンセンサスが得られていると考える。なお、この種の推論では、同一の形式の前提であっても状況により求められる結論が異なる場合もあり、唯一の推論方法ですべてをカバーするのは困難であるとの立場から、いくつかの推論のタイプを想定した条件を設定した。

これら条件に基づき、本研究ではまず、すでに提案されていた方法の妥当性について調べた。その結果、従来方法ではほとんどの条件が満たされないことが明かとなった。

これは、本研究のきっかけとなったこれら方法が妥当な結論を導かないとの直感的判断を裏付けるものと言える。

つぎに、一般化modus ponensの形式の推論に対し、設定した条件のうち最も基本的と考えられる以下の条件、すなわち、“If x is A then y is B.” と “x is A” からは “y is B” が結論として導かれるべきであるとの条件、を満たす推論を実現するための必要条件を明らかにした上で、設定した各条件を満たす推論方法を4種類定式化した。

これに引続き、これら各推論方法が一般化modus tollensの形式の推論に対して設定した条件の大部分を満たすことを明らかにするとともに、これら方法の一部は推移律、対偶律も満たすことを明らかにした。

また、これら推論方法を応用することにより、most、few等いわゆるファジイ限定詞を含む命題を前提とする推論に対しても具体的推論方法を定式化した。

本論文で提案した推論方法は、すでに他の研究者によって様々な形で応用されていると共に、実用エキスパートシステム等でも採用され使用されている。本論文ではこれらの一部を紹介し、これら推論方法の有効性について示した。

以上が本研究の概要であるが、ここで本研究の主要成果をまとめると以下のようになる。

- (1) 従来推論方法の妥当性については何等議論がなされていなかった状況のなかで、妥当性に関する条件を導入し、これにより従来方法の問題点を明らかにすると共に、よりよい推論方法定式化の足がかりを得たこと。
- (2) 導入した基準に基づき、実用性のある新たなファジイ条件推論方法を定式化したこと。
- (3) これら新たな方法を実際に応用するに際して重要となるこれら方法の各種特性を明らかにしたこと。
- (4) ファジイ限定詞を含む命題を前提とする推論に対し、具体的推論方法を定式化したこと。

最後に今後に残されている研究課題について述べる。

本研究の発表以来、本研究を踏まえた研究がすでに数多く発表されており、新たな推論方法の提案もなされているが、以下の課題についてはまだ問題が残されていると言えよう。

- (1) 本論文で取り扱ったのは1段のみの推論であったが、より複雑な応用を考える場合多段の推論が必要となる。一方、一般にファジイ概念を含む前提からの推論では、2値論理に基づく推論とは異なり、推論を重ねるにつれて結論のあいまいさが増し有意な結論が得られないことが有り得る。従って、結論の有意性を保証しつつ多段の推論を実行する方法を明らかにすることは重要な課題と言えよう。
- (2) すでに述べたようにあいまい性といっても種々のものがある。これらあいまい性は、それぞれ個々に取扱手法が研究されているというのが実状である。しかしながら実際の応用の場では異種のあいまい性が共存することが当然有り得る。従って、ファジイ性と他のあいまい性が共存する場合の統一的な取扱手法の開発も重要な課題と言えよう。

## 参 考 文 献

- [Bal79] J.F.Baldwin: "A new approach to approximate reasoning using a fuzzy logic", Fuzzy Sets and Systems, vol.2, pp.309-325(1979).
- [Dri87] D. Driankov: "Inference with a single fuzzy conditional proposition", Fuzzy Sets and Systems, vol.24, pp.51-63(1987).
- [DuP85] D.Dubois and H.Prade: "The generalized modus ponens under sup-min composition", in Approximate Reasoning in Expert Systems, M.M.Gupta (eds.), North-Holland, Amsterdam(1985).
- [DuP88] D.Dubois and H.Prade: "An introduction to possibilistic and fuzzy logic", in Non-Standard Logics for Automated Reasoning, P.Smets, et al.(eds.), Academic Press(1988).
- [EzM83] Y.Ezawa and M.Mizumoto:"Linguistic hedges and reasonable fuzzy inferences", Proc. IFAC Symposium on Fuzzy Information, Knowledge Representation and Decision Analysis, pp.243-248(1983).
- [FMT77a] 深海、水本、田中："ファジイ推論について", 昭和52年度電子通信学会情報部門全国大会, NO.1(1977).
- [FMT77b] 深海、水本、田中："ファジイ推論について", 信学技法, AL77-74(1977).
- [FMT78a] 深海、水本、田中："ファジイ推論について", 電子通信学会論文誌, vol. J61-D, NO.8, pp.533-540(1978).
- [FMT78b] S.Fukami, M.Mizumoto and K.Tanaka:"On fuzzy reasoning", Systems, Computers, Controls, vol.9, NO.4, pp.44-53(1978).
- [FMT78c] 深海、水本、田中："ファジイ限定詞を含む推論", 昭和53年度電子通信学会総合全国大会, NO.1162(1978).
- [FMT80] S.Fukami, M.Mizumoto and K.Tanaka: "Some considerations on fuzzy conditional inference", Fuzzy Sets and Systems, vol.4, pp.243-273(1980).
- [HaM85] J.Y.Halpern and Y.Moses:"A guide to the modal logic of knowledge and belief; preliminary draft", Proc. 9th IJCAI(1985).
- [Hir87] 広田 薫："ファジイ推論エキスパートシステムの現状と動向", 情報処理, vol.28, NO.8, pp.1065-1074(1987).

- [Ho082] L.P.Holmblad and J.J.Ostergaard: "Control of cement kiln by fuzzy logic", in Fuzzy Information and Decision Processes, M.M.Gupta, et.al (eds.), North-Holland(1982).
- [HTY88] Y.Hayashi, E.Tazaki, K.Yoshida and P.Day: "Medical diagnosis using simplified multi-dimensional fuzzy reasoning", Proc. IEEE Conference Systems, Man and Cybernetics, pp.58-62(1988).
- [Ish84] 石塚 満: "不確実な知識の取扱い法", 知識工学(田中 幸吉編), 朝倉書店刊(1984).
- [Ish85] 石塚 満: "曖昧な知識の表現と利用", 情報処理, vol.26, NO.12, pp.1481-1486(1985).
- [II086] 伊藤, 稲岡, 小田, 木下: "医療診断エキスパートシステムにおける知識表現", 情報処理, vol.27, NO.7, pp.702-710(1986).
- [IwK84] 岩井, 片井: "あいまい情報の処理と知識工学", システムと制御, vol.28, NO.10, pp.557-561(1984).
- [Lak73] G.Lakoff:"Hedges:A study in meaning criteria and the logic of fuzzy concepts", Journal of Philosophical Logic, vol.2, pp.458-508(1973).
- [LeL87] K.S Leung and W.Lam:"The implementation of fuzzy knowledge-based system shells", Proc. Tencon87, IEEE Region 10 Conf., pp.650-654(1987).
- [LeL88] K.S Leung and W.Lam:"Fuzzy concepts in expert systems", IEEE Computer Magazine, vol.21, NO.9(1988).
- [MaM88] 前田, 村上: "自己調整ファジイコントローラ", 計測自動制御学会論文集, vol.24, NO.2, pp.85-91(1988).
- [MaS88] P.Magrez and P.Smets:" Fuzzy modus ponens : A new model suitable for application in knowledge-base systems", International Journal of Approximate Reasoning, to appear.
- [Mam77] E.H.Mamdani:"Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic systems", IEEE. Trans. Comput.,C-26, pp.1182-1191 (1977).
- [Mar87] R. Martin-Clouaire: "Semantics and computation of the generalized modus ponens", Proc. Second IFSA Congres, pp.235-238(1987).

- [MiN84] 三嶋、野村：“臨床診断におけるあいまいさ”，システムと制御，vol.28，NO.10，pp.562-566(1984).
- [MFT78a] M.Mizumoto,S.Fukami and K.Tanaka:”Fuzzy reasoning methods by Zadeh and Mamdani, and improved methods”,Proc.3rd Workshop on Fuzzy Reasoning, Queen Mary College, London(1978).
- [MFT78b] M.Mizumoto,S.Fukami and K.Tanaka:”Some methods of fuzzy reasoning”, in Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, M.M.Gupta, et al.(eds.), North-Holland, pp.117-136(1979).
- [MFT79a] M.Mizumoto,S.Fukami and K.Tanaka: ”Several methods for fuzzy conditional inferences”,Proc.IEEE Conf. on Decision and Control, pp.777-782(1979).
- [MFT79b] M.Mizumoto,S.Fukami and K.Tanaka:”Fuzzy conditional inferences and fuzzy inferences with fuzzy quantifiers”, Proc.IJCAI.79(1979).
- [MFT79c] 水本，深海，田中：“Fuzzy推論法の比較”，昭和53年度電子通信学会総合全国大会，NO.1170(1979).
- [Miz81] 水本 雅晴：“種々のファジイ推論法－If…then…の場合－”，電子通信学会論文誌，vol.J64-D,NO.5, pp.379-386(1981).
- [Miz82a] 水本 雅晴：“種々のファジイファジイ推論法 － If … then … else … の場合－”，電子通信学会論文誌，vol.J65-D,NO.5, pp.519-526(1982).
- [Miz82b] 水本 雅晴：“種々のファジイ入力をもつファジイ推論”，電子通信学会論文誌，vol.J65-D,NO.9, pp.1175-1182(1982).
- [Miz82c] 水本 雅晴：“新しい推論の合成規則の下でのファジイ推論”，電子通信学会論文誌，vol.J65-D,NO.11, pp.1319-1325(1982).
- [Miz82d] M.Mizumoto and H.J.Zimmermann:”Comparison of fuzzy reasoning methods”，Fuzzy Sets and Systems,vol.8. pp.253-284(1982).
- [Miz82e] M.Mizumoto:”Fuzzy reasoning with a fuzzy conditional proposition IF-THEN-ELSE”，in Fuzzy Set and Possibility Theory, R.R.Yager(eds.), Pergamon Press(1982).

- [Miz83] M. Mizumoto: "Fuzzy reasoning with various fuzzy inputs", Proc. IFAC Symposium on Fuzzy Information, Knowledge Representation and Decision Analysis, pp.153-158(1983).
- [Miz85] M. Mizumoto: "Fuzzy reasoning under new compositional rule of inference", Kybernetes, vol.12, pp.107-117(1985).
- [Miz87a] M. Mizumoto: "Comparison of various fuzzy reasoning methods", Proc. Second IFSA Congress, pp.2-7(1987).
- [Miz87b] 水本 雅晴: "Fuzzy論理とFuzzy推論", 数理科学, vol.25, NO.2, pp.10-18(1987).
- [Miz88] 水本 雅晴: "最近のファジー理論", 情報処理, vol.29, NO.1, pp.11-22(1988).
- [OoT87] 大津, 田村: "柔らかな論理をめざして", 情報処理, vol.28, NO.5, pp.629-636(1987).
- [Ped84] W. Pedrycz: "Methods of approximate reasoning and fuzzy relation equations", Proc. 23rd conference on Decision and Control, pp.906-907(1984).
- [Pra85] H. Prade: "A computational approach to approximate and plausible reasoning with applications to expert systems", IEEE. Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. PAMI-7, no. 3, pp. 260-283(1985).
- [RaM86] K. V. S. V. N. Raju and A. K. Majumdar: "Fuzzy functional dependencies in fuzzy relations", Proc. IEEE Conference on Data Engineering, pp.312-319(1986).
- [RaM88] K. V. S. V. N. Raju and A. K. Majumdar: "Fuzzy functional dependencies and lossless join decomposition of fuzzy relational database systems", ACM Transactions on Database Systems, vol.13, No.2, pp.129-166(1988).
- [Res69] N. Rescher: "Many Valued Logic", McGraw-Hill, New-York(1969).
- [SaM88] 桜井, 前川: "糖分抽出プロセスのファジィ制御", オートメーション, vol.33, NO.6, pp.37-41(1988).
- [Sho76] E. H. Shortliffe: "Computer based medical consultations : MYCIN, American Elsevier(1976).

- [SFK84] G. Sotirov, D. Filev and K. Konstantinov: "A hierarchical system for control of continuous fermentation processes synthesized on the basis of the linguistic approach", Proc. 1st World Workshop of Large Scale Systems(1984).
- [SMD88] P. Smets, E. H. Mamdani, D. Dubois, H. Prade(eds): "Non-Standard Logics for Automated Reasoning", Academic press(1988).
- [SuT83] M. Sugeno and T. Takagi: "Multi-dimensional fuzzy reasoning", Fuzzy Sets and Systems, vol. 9, pp. 313-325(1983).
- [Sug88] 菅野 道夫: "ファジイ制御", 日刊工業新聞社(1988).
- [TaN84] 田畑, 西田: "あいまいさとファジイ集合", システムと制御, vol. 28, NO. 7, pp. 431-435(1984).
- [ToF82] R. M. Tong and J. Fostathiou: "A critical assessment of truth function modification and its use in approximate reasoning", Fuzzy Sets and Systems, vol. 7, pp. 103-107(1982).
- [Tsu79a] 塚本 弥八郎: "Fuzzy推論について", 数理科学, vol. 17, NO. 5, pp. 28-33(1979).
- [Tsu79b] Y. Tsukamoto: "An approach to fuzzy reasoning method", in Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, M. M. Gupta et al. (eds), North-Holland(1979).
- [Tsu83] 塚本 弥八郎: "あいまい推論", 計測と制御, vol. 22, NO. 1, pp. 139-145(1983).
- [Ueh87] 上原 清彦: "レベル集合によるファジイ推論演算", 電子情報通信学会技術研究報告, A187-24, pp. 1-8(1987).
- [Yag80] R. Yager: "An approach to inference in approximate reasoning", Int. J. Man-Mach. Stud., vol. 13, pp. 323-338(1980).
- [Yam87] 山川 烈: "ファジイ・コンピュータ", 数理科学, vol. 25, No. 2, pp. 36-45(1987).
- [YIS84] 柳下, 伊藤, 菅野: "ファジイ理論の浄水場薬品注入制御への応用", システムと制御, vol. 28, NO. 10, pp. 597-604(1984).

- [YMI84] 安信, 宮本, 井原: "予見 F u z z y 制御方式による列車自動運転", システムと制御, vol. 28, NO. 10, pp. 605-613(1984).
- [WhS83] T. Whalen and B. Schott: "Issues in fuzzy production systems", Int. J. Man-Mach. Stud., vol. 19, pp. 57-71(1983).
- [WSA88] 脇本, 桜井, 青木: "ファジィ集合論の考え方を利用した高炉炉熱制御エキスパートシステム", オートメーション, vol. 33, NO. 6, pp. 37-41(1988).
- [Zad65] L. A. Zadeh: "Fuzzy sets", Inf. Control, vol. 8, pp. 338-353(1965).
- [Zad72] L. A. Zadeh: "A fuzzy-set-theoretic interpretation of linguistic hedges", Journal of Cybernetics, vol. 2, NO. 3, pp. 4-34(1972).
- [Zad73] L. A. Zadeh: "Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes", IEEE. Trans. Systems, Man and Cybernetics, vol. SMC-3, pp. 28-44(1973).
- [Zad75a] L. A. Zadeh: "Calculus of fuzzy restrictions", in L. A. Zadeh and K. Tanaka et. al. (eds), Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Process, pp. 1-39, Academic Press, New-York(1975).
- [Zad75b] L. A. Zadeh: "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning I, II, III, Information Sci., vol. 8, pp. 199-251 (1975), vol. 8, pp. 301-357(1975), vol. 9, pp. 43-80(1975).
- [Zad77] L. A. Zadeh: "Theory of fuzzy sets", in Encyclopedia of Computer Science and Technology, J. Belzer, A. Holzman and A. Kent (eds), Marcel Dekker, New-York(1977).
- [Zad78] L. A. Zadeh: "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility", Fuzzy Sets and Systems, vol. 1, NO. 1, pp. 3-28(1978).
- [Zad83a] L. A. Zadeh: "The role of fuzzy logic in the management of uncertainty in expert systems", Fuzzy Sets and Systems, vol. 11, pp. 197-227(1983).
- [Zad83b] L. A. Zadeh: "A computational approach to fuzzy quantifiers in natural language", Comp. and Maths with Appls., vol. 9, pp. 149-184(1983).
- [Zad88] L. A. Zadeh: "Fuzzy Logic", IEEE Computer Magazine, vol. 21, NO. 4(1988).

## 謝 辞

大阪大学産業科学研究所・豊田順一教授には、本研究をまとめるにあたり、懇切なるご指導ならびにご助言をいただきました。ここに心からの感謝の意を表わします。

また、本研究をまとめるにあたりご助言と励ましをいただきました大阪大学基礎工学部嵩忠雄教授、都倉信樹教授、鳥居宏次教授、谷口健一教授、並びに大阪大学産業科学研究所北橋忠宏教授に厚く感謝いたします。

本研究は主として筆者が大阪大学基礎工学部情報工学科および同大学院に在学中に、故田中幸吉教授のご指導のもとに行なったものであります。ここに故田中幸吉教授に心からの感謝の意を表わすとともに謹んでご冥福をお祈りいたします。また、本研究遂行にあたり直接ご指導くださり、種々のご教示をたまわった現大阪電気通信大学水本雅晴教授に心からの感謝の意を表わします。さらに、本研究遂行にあたり種々のご助言をたまわった大阪大学大型計算機センター馬野元秀助教授にも厚く感謝いたします。

本論文の執筆にあたり、NTTデータ通信株式会社 三角岑生常務取締役、田中義昭取締役開発本部長、開発本部 山下徹企画部長には種々のご配慮をいただきました。また、同第2技術部長 荒川弘熙博士には懇切なるご指導と励ましをいただきました。さらに、同開発本部 中村太一博士、伊沢伸芳博士にも多大なる励ましをいただきました。さらには、大阪大学在学中よりの友人である(株)日立製作所中央研究所岩崎一彦博士にも種々のご教示をいただきました。これらの方々には心より感謝します。

本研究の遂行、本論文の執筆は以上の方々をはじめとする関係各位の多くの方々によりささえられてきました。ここに深く感謝の意を表わします。