Title	ファジイ推論法に関する研究
Author(s)	深海, 悟
Citation	大阪大学, 1989, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/124
rights	
Note	

ファジィ推論法に関する研究

1989年5月

深海　悟

内容梗概

近年ファジィ集合論の各種制御システム、エキスパートシステム等への応用が実用レベルでさかんに行なわれている。これらファジイ集合論の応用に際しその核となる技術がファジイ集合で表現されたあいまいな概念を含んだルール、データをもとにした推論、すなわちファジイ推論である。

本論文はこのファジイ推論に関するものであり、ファジイ集合で表現されたあいまいな概念を含む”ＩＦ　…　ＴＨＥＮ　…　”形式のルール（ファジイ条件命題）をもとにした推論（ファジィ条件推論）について主として論じる。

本論文の概要は以下の通りである。

まず第１章では本研究の一般的背景について述べる。

第２章では、ファジイ推論に関する研究の流れを整理するとともに、このなかにおける本研究の位置づけを明らかにする。

第３章は本論文の中心をなす部分であり、一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓ及び一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓの形式のファジイ条件推論法について述べる。
まず、すでに提案されていたＺａｄｅｈの方法およびＭａｍｄａｎｉの方法では妥当と思われる結論が得られないとの事実から出発し、我々が日常行なっているこの種の推論に対する検討をもとに、これら形式の推論において成立すべきと考えられる前提と結論の関係、言い替えるならばファジイ条件推論における妥当性条件を設定する。なお、この種の推論では、同一の形式の前提であっても状況により求められる結論が異なる場合もあり、唯一の推論方法ですべてをカバーするのは困難であるとの立場から、特性の異なる４種類の推論タイプを想定した条件を設定する。

これら条件に基づき、すでに提案されていたＺａｄｅｈの方法およびＭａｍｄａｎｉの方法の妥当性について調べ、これら方法ではほとんどの条件が満たされず妥当な推論方法とは言えないことを明かにする。

つぎに、一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓの形式の推論に対し、設定した条件のうち最も基本的と考えられる以下の条件、すなわち、"If x is A then y is B." と "x is A" からは "y is B" が結論として導かれるべきであるとの条件、を満たす推論を実現するための必要条件を明らかにした上で、設定した各条件を満たす推論方法を４種類定式化する。

これに引続き、これら各推論方法が一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓの形式の推論に対して設定した条件の大部分を満たすことを明らかにするとともに、これらの方法はＺａｄｅｈの方法では成立しなかった推移律を満たすこと、さらにその一部は対偶律も満たすことを明らかにする。

第４章では、ｍｏｓｔ、ｆｅｗ等いわゆるファジイ限定詞を含んだ命題を前提とする推論を対象とし、まずこれらを４種類の推論形式に整理した上でその各々について第３章で定式化した方法を応用して実現方法を定式化する。

第５章では、本研究により定式化した推論方法の具体的応用事例として、　Ｋ．Ｓ．Ｌｅｕｎｇらの開発したエキスパートシステムについて紹介し、本論文で定式化した推論方法の有効性を示す。

最後に第６章では、本論文についてまとめる。

目　　次

１． 序 論

従来コンピュータによる処理あるいは制御が困難とされていた問題領域に、ｉｌｌ－ｄｅｆｉｎｅｄな問題群がある。これら問題群には、厳密な仕様記述ができないあるいは困難である、厳密なデータが得られないといった特徴がある。すなわち、言い替えるならば、これら問題は、非決定性、不確実性、不完全性、非整合性、ファジイ性等の言葉で表されるあいまい性が含まれていると言える。近年これらあいまい性を含んだ問題の工学的重要性に対する認識の高まりもあり、その取扱い手法に対する研究も盛んになっている［HaM85］［Ish84］［Ish85］［IwK84］［IIO86］［OoT87］［SMD88］。

本論文ではこれらのうちファジイ性について取り扱う。

ファジイ性とは、輪郭、境界のはっきりしない概念の持つあいまい性である。この種のあいまい性は自然言語に非常に多く現われるものであり、例をあげると以下のような概念はすべてファジイ性を内在していると言えよう。

<u>中年</u>、　<u>老年</u>、　頭が<u>良い</u>、　背が<u>高い</u>、　<u>遠い</u>、　<u>近い</u>、

果物が<u>熟している</u>、　温度上昇が<u>急激</u>ならば、　ハンドルを<u>少し</u>右に切れ、

テストの結果が<u>よければ</u>、　ｅｔｃ．

また、これら我々が日常使用する概念以外にも、医療診断の方法、各種プラントの内部制御方法等に、熟練者によるファジイ性を含んだ表現でしか言い表せない場合があることも指摘されている［MiN84］［Hir87］。

このようなファジイ性を工学的に取り扱うための一方法としてＺａｄｅｈ［Zad65］により提案されたのがファジイ集合論である。ファジイ集合とは、各要素がその集合に属する度合を、属する／属さないの２値で割り切るのではなく、区間［０，１］の実数値（これを”メンバシップグレード”と呼ぶ）で表現するもので、あいまい性をこのメンバシップグレードに集約して取り扱う。

ファジイ集合論は提案以来主として理論面から研究がなされていたが、Ｍａｍｄａｎｉ［Mam77］がスチームエンジンの制御に適用して制御への応用可能性を示唆し、Ｈｏｌｍｂｌａｄら［HoO82］が実用のセメントキルンプロセスの制御に応用して以来、ファジイ制御の考え方は広く受け入れられるようになり、数多くの実用システムが開発されてきた。これらのなかには、浄水場への薬品注入制御［YIS84］、発酵プロセス制御［SFK84］、高炉炉熱制御［WSA88］、列車の運転制御［YMI84］、糖分抽出プロセス制御［S aM88]、等があり、いずれも対象がｉｌｌ　ｄｅｆｉｎｅｄなため従来自動化が困難で熟練オペレータに頼らざるを得なかったものが多い。そしてこれらプロセスに対するファジイ制御の方法は、いずれも熟練オペレータの制御ノウハウをファジイ概念を含んだルールとして抽出し、これらルールに基づいて制御するものであり、いわゆるエキスパートシステムによる制御とも言えるものである。また、制御以外の分野においても、例えば医療診断支援の為のエキスパートシステム[HTY88]、精神分析エキスパートシステム[LeL87][LeL88]等に応用されている。

これらファジイ集合論のエキスパートシステムへの応用に際し、その核となる技術がファジイ集合で表現されたあいまいな概念を含んだルール、データをもとにした推論、すなわちファジイ推論（近似的推論と呼ばれることもある）である。

本論文はこのファジイ推論に関するものであり、ファジイ集合で表現されたあいまいな概念を含む”ＩＦ　…　ＴＨＥＮ　…　”形式のルール（ファジイ条件命題）をもとにした推論について論じる。

本論文の概要は以下の通りである。

まず第２章では、ファジイ推論に関する研究の流れを整理するとともに、このなかにおける本研究の位置付けおよび目的を明らかにする。

第３章は本論文の中心をなす部分であり、まずファジイ条件命題を前提とする推論の妥当性に関する基準を整理し、これら基準のもとでの従来方法の問題点を明らかにした後、これら基準を満たす新たな方法を定式化する。また、これら方法の各種特性を明らかにする。

第４章では、第３章で定式化した方法を応用し、ｍｏｓｔ、ｆｅｗ等いわゆるファジイ限定詞を含んだ命題を前提とする推論の方法を定式化する。

第５章では、本研究により定式化した推論方法の具体的応用事例として、Ｋ．Ｓ．Ｌｅｕｎｇら[LeL87][LeL88]の開発したエキスパートシステムについて紹介し、本論文で定式化した推論方法の有効性を示す。

最後に第６章では、本論文についてまとめる。

２． 本研究の背景及び位置づけ

２． １　緒言

本章ではまずファジイ集合に関する基本事項について説明した後、ファジイ推論に関する研究の流れ及びそのなかにおける本研究の位置付けについて述べる。

２． ２　ファジイ集合に関する基本事項

本節ではファジイ集合に関する基本的概念、術語等につき、本論文で必要な範囲にしぼって説明する。

（１）ファジイ集合 [Zad65]

全体集合Ｕ上の**ファジイ集合**Ａとは、

$$\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$$

なるメンバシップ関数μ_Aによって特性付けられる集合で、$\mu_A(u) \in [0, 1]$ はu∈ＵがＡに属する度合（メンバシップグレード）を表す。

ファジイ集合の表記法としては、Ｕが連続値集合の場合、

$$A = \int_U \mu_A(u) / u$$

を採用し、Ｕが有限集合の場合、

$$A = \mu_A(u_1)/u_1 + \mu_A(u_2)/u_2 + \cdots + \mu_A(u_n)/u_n$$

を採用する。ここで＋はｕｎｉｏｎを表し、$\int_U$はＵ全域にわたるｕｎｉｏｎを表す。

（２）ファジイ集合に対する演算 [Zad65] [Zad75] [Zad77]

Ｕ上のファジイ集合ＡとＢが各々以下のように定義されているものとする。

$$A = \int_U \mu_A(u) / u$$

$$B = \int_U \mu_B(u) / u$$

このとき、ＡとＢの**和集合**$A \cup B$、**共通集合**$A \cap B$、**限界和**（ｂｏｕｎｄｅｄ ｓｕｍ）$A \oplus B$、Ａの**補集合**$\neg A$、 Ａのべき乗A^d（ｄは実数）は各々以下のように定義される。

$$A \cup B = \int_U \mu_A(u) \vee \mu_B(u) / u$$

$$A \cap B = \int_U \mu_A(u) \wedge \mu_B(u) / u$$

$$A \oplus B = \int_U 1 \wedge (\mu_A(u) + \mu_B(u)) / u$$

$$\neg A = \int_U (1 - \mu_A(u)) / u$$

$$A^d = \int_U \mu_A{}^d(u) / u$$

ただし$\wedge$、$\vee$はそれぞれｍｉｎ、ｍａｘを意味する。

（３）直積［ZAd75］［Zad77］

A_1、A_2、…　、A_nをそれぞれU_1、U_2、…　、U_n上のファジイ集合とすると、A_1、A_2、…　、A_n の**直積**（Ｃａｒｔｅｓｉａｎ　Ｐｒｏｄｕｃｔ）は以下で定義される $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ 上のファジイ集合である。

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \int_{U_1 \times \cdots \times U_n} (\mu_{A1}(u_1) \wedge \cdots \wedge \mu_{An}(u_n)) / (u_1, \cdots, u_n)$$

（４）ファジイ関係［Zad75］［Zad77］

$U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$（$n \geqq 1$）上の**ｎ項ファジイ関係**Ｒは、

$$\mu_R : U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \longrightarrow [0, 1]$$

なるメンバシップ関数によって特性付けられる関係である。ただしここで×は直積を表す。またｎ＝１のとき通常のファジイ集合となるが、特にこれを**単項ファジイ関係**と呼ぶこともある。

Ｕ×Ｗ、Ｗ×Ｖ上の２項ファジイ関係をそれぞれＲ、Ｓとする。このとき、ＲとＳの**合成**（ｃｏｍｐｏｓｉｔｉｏｎ）は以下のように定義される。

$$R \circ S = \int_{U \times V} \bigvee_{w \in W} (\mu_R(u, w) \wedge \mu_S(w, v)) / (u, v)$$

ここで左辺のｏは合成を表す演算子であり、右辺の $\bigvee_{w \in W}$ はＷ全域における上限を示す。

また、ＲがＷ上での単項ファジイ関係（すなわちファジイ集合）であるとき、ＲとＳの

合成ＲｏＳは以下で定義される。

$$R \circ S = \int_V \bigvee_{w \in W} (\mu_R(w) \wedge \mu_S(w, v)) / v$$

（５）拡張原理［Zad75］［Zad77］

一般にｆをＵからＶへの関数とする。

$$v = f(u) \qquad \text{但し、} v \in V, \quad u \in U$$

また、Ａを以下で定義されたＵ上のファジイ集合とする。

$$A = \int_U \mu_A(u) / u$$

このとき、ｆ（Ａ）を以下のように定義する。

$$f(A) = \int_V \mu_A(u) / f(u)$$

同様にｆがＵ×ＶからＷへの関数であり、ＡとＢをそれぞれＵとＶ上のファジイ集合とするとき、

$$f(A, B) = \int_W \mu_A(u) \wedge \mu_B(v) / f(u, v)$$

と定義する。また、一般にこれらを総称して**拡張原理**と呼ぶ。

（６）言語修飾語［Zad72］［Lak73］

一般に言語で表現されたあいまいな概念（例えば、ｙｏｕｎｇ、ｏｌｄ等）に対し、ｖｅｒｙ、ｓｌｉｇｈｔｌｙ等の修飾語（Ｌｉｎｇｕｓｔｉｃ　Ｈｅｄｇｅ）を付加することにより、新たな概念が定義できる。すなわち、これら修飾語は一種の単項演算子とみなすことができる。

Ｚａｄｅｈ［Zad72］、Ｌａｋｏｆｆ［Lak73］らはこの点に注目し、これら修飾語の意味を分析することにより、これら修飾語に対しファジイ集合で表現された概念に対する演算子としての定義を与えた。本論文中でもこれら定義の一部を使用している為、以下に簡単に説明する。

まず最初にこれら定義中で使用する基本演算子について述べる。

ファジイ集合Ａに対する集中化（Concentration）Ｃｏｎ（Ａ）、拡大化（Dilation）ＤＩＬ（Ａ）、明暗強化（Contrast Intensitication）ＩＮＴ（Ａ）、正規化（Normalization）ＮＯＲＭ（Ａ）、は各々以下のように定義される。

$$\mathrm{CON}(A) = A^2 = \int_U \mu_A^2(u)/u$$

$$\mathrm{DIL}(A) = A^{0.5} = \int_U \mu_A^{0.5}(u)/u$$

$$\mathrm{INT}(A) = \begin{cases} 2A^2 & 0 \leqq \mu_A(u) \leqq 0.5 \\ \neg 2(\neg A)^2 & 0.5 \leqq \mu_A(u) \leqq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int_U 2\mu_A^2(u)/u & 0 \leqq \mu_A(u) \leqq 0.5 \\ \int_U 1-2(1-\mu_A(u))^2/u & 0.5 \leqq \mu_A(u) \leqq 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{NORM}(A) = (1/|\mu_A|)\,A = \int_U (1/|\mu_A|)\,\mu_A(u)/u$$

但し、$|\mu_A| = \bigvee_U \mu_A(u)$

これら演算子を用いることにより、修飾語ｖｅｒｙ、ｍｏｒｅ　ｏｒ　ｌｅｓｓ、ｓｌｉｇｈｔｌｙ、ｓｏｒｔ　ｏｆ、ｒａｔｈｅｒは以下のように定義される。

ｖｅｒｙ　Ａ＝ＣＯＮ（Ａ）

ｍｏｒｅ　ｏｒ　ｌｅｓｓ　Ａ＝ＤＩＬ（Ａ）

ｓｌｉｇｈｔｌｙ　Ａ＝ＮＯＲＭ（Ａ∩¬ｖｅｒｙＡ）

ｓｏｒｔ　ｏｆ　Ａ＝ＮＯＲＭ（¬ＣＯＮ（Ａ）^{2}∩ＤＩＬ（Ａ））

ｒａｔｈｅｒ　Ａ＝ＮＯＲＭ（ＩＮＴ（Ａ））

最後にこれら演算子の使用例を図２．１に示す。

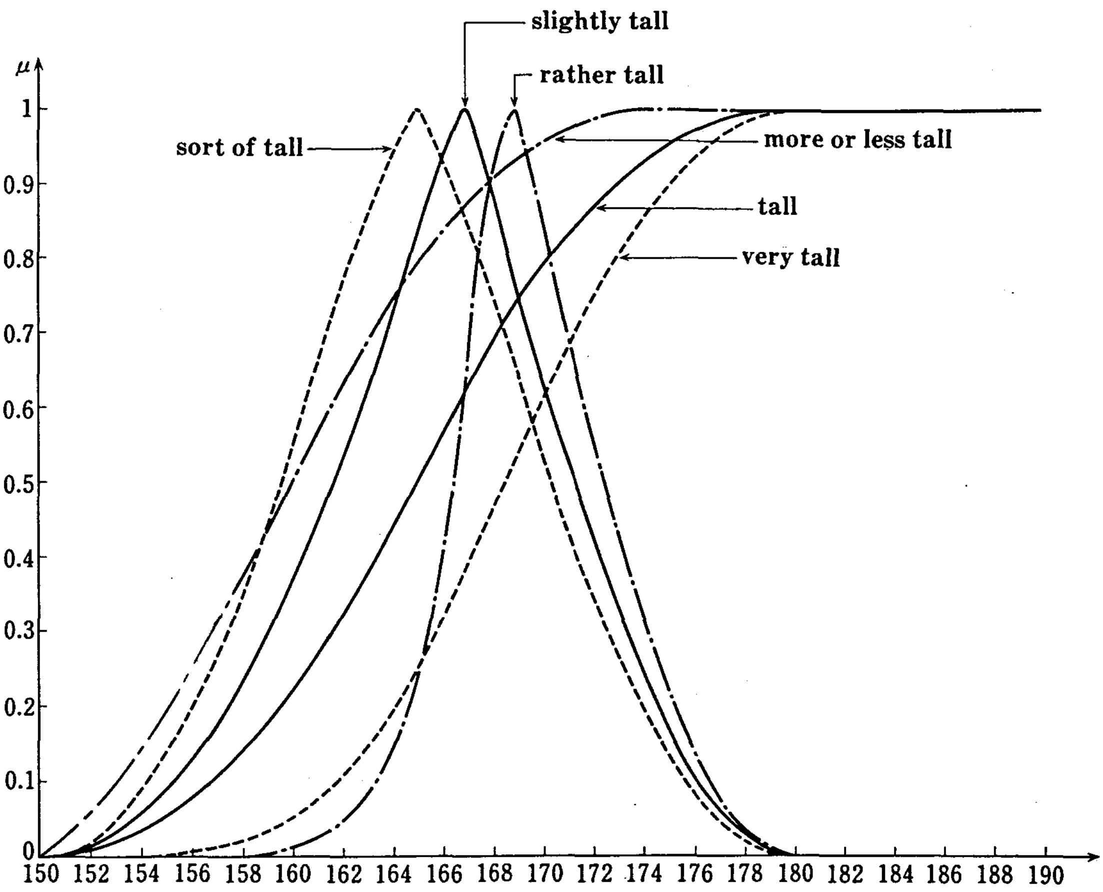

図　2．1　言語修飾語の効果例

２．３　ファジイ推論に関する研究経緯及び本研究の位置づけ

ファジイ推論法は、Ｚａｄｅｈ [Zad73] が**推論の合成規則**（Compositional rule of inference： 以下ＣＲＩと略す）を提案したことに端を発する。

ＣＲＩとは、例えば関数　$y=f(x)$　及びxの値aが与えられたときにyの値を求める手続きの一般化とも考えられるものである。以下ではこのＣＲＩをまずあいまいさを含まない場合について説明した後、ファジイ集合を含む一般の場合について説明する。まず、一般に以下の形式の推論について考える。

前提１：　x　and　y　are　R.

前提２：　x　is　A.

結論　：　y　is　B.

ここでＲはxとyの関係を表している。具体的には、xおよびyの値の全体集合Ｕ、Ｖをそれぞれ、

$$U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

$$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$$

としたとき、$R \subseteq U \times V$であり、Ｒの特性関数$\mu_R(u, v)$は以下のように定義される。

$$\mu_R(u, v) = \begin{cases} 1 & \cdots \ x\text{の値が}u\text{の時、}y\text{の値が}v\text{である可能性がある場合} \\ 0 & \cdots \ \text{その他の場合} \end{cases} \tag{2.1}$$

また、Ａはxの値の可能性分布 [Zad78] を表す集合で、Ａの特性関数を$\mu_A(u)$とする。

このとき、上記推論の結論、すなわちyの値に関する可能性分布を表す集合Ｂは以下に示す通りＡとＲのｍａｘ－ｍｉｎ合成により得られる。

$$B = A \circ R \tag{2.2}$$

ここで$\circ$はｍａｘ－ｍｉｎ合成を表す演算子であり、Ｂの特性関数を$\mu_B(v)$とすると、$\mu_B(v)$はその名の通りｍａｘ（$\vee$）とｍｉｎ（$\wedge$）の演算により得られる。

$$\mu_B(v) = \bigvee_{u \in U} (\mu_A(u) \wedge \mu_R(u, v)) \tag{2.3}$$

このようにして得られた$\mu_B(v)$がyの値に関する可能性分布を示していることは$\mu_A(u)$及び$\mu_R(u, v)$の定義より明かであろう。

以上があいまいさを含まない場合のＣＲＩの概要である。

以下このＣＲＩによる推論例をいくつか示す。

［例１］

ｘとｙの値の全体集合Ｕ、Ｖを以下の通りとする。

Ｕ＝Ｖ＝｛１，２，３，４，５，６｝

ここで以下の推論を考える。

前提１：　ｘとｙは差が１以下である。

前提２：　ｘは１もしくは２である。

結論　：　ｙは１、２もしくは３である。

本推論をＣＲＩを適用して実行するために、前提１より式（２．１）の定義に従いｘとｙの関係Ｒを求めると以下のようになる。

$$R = \begin{array}{c|cccccc|} & \multicolumn{6}{c}{V} \\ U & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

また、前提２より、Ａとして｛１，２｝が得られる。

従って、ＡとＲのｍａｘ－ｍｉｎ合成により結論としてｙの可能性分布Ｂが以下のように得られる。

$$\begin{aligned} B &= A \circ R \\ &= (1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0) \circ R \\ &= (1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0) \\ &= \{1,\ 2,\ 3\} \end{aligned}$$

これが上記２つの前提からの妥当な帰結であることは明かであろう。

［例２］

ｘとｙの値の全体集合 Ｕ、Ｖを以下の通りとする。

$U = V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

ここで以下の推論を考える。

前提１：If x is {2, 3} then y is {4, 5}.

前提２：　　x is A.

結論　：　　y is B.

本推論の場合、式（２．１）で定義されるｘとｙの関係Ｒを以下のように構成すればよい。

$$
R = \begin{array}{c|ccccc|}
U \backslash V & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

この関係Ｒは、前提１中の｛２，３｝の特性関数を$\mu_X(u)$、｛４，５｝の特性関数を$\mu_Y(v)$とすると、これらから以下のようにして得たものであり、これは古典２値論理における含意の定義、すなわち、任意の命題Ｐ、Ｑに対し、$P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$、に基づくものである。

$$\mu_R(u, v) = (1 - \mu_X(u)) \vee \mu_Y(v)$$

ここで前提２のＡとしてＡ１＝｛１｝、Ａ２＝｛２｝、Ａ３＝｛３，４｝、Ａ４＝｛１，４，５｝、Ａ５＝｛２，３｝をとりＲとの間にＣＲＩを適用すると、結論Ｂはそれぞれ以下のようになる。

$$B1 = A1 \circ R$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$B2 = A2 \circ R$$
$$= \{4, 5\}$$
$$B3 = A3 \circ R$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B4 = A4 \circ R = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B5 = A5 \circ R = \{4, 5\}$$

これら結論がいずれも上記前提からの正しい論理的帰結となっていることは容易に確認できるであろう。

以上の説明では、前提中のｘとｙの値の可能性分布はすべて通常の集合で表現される場合に限られていた。次にＺａｄｅｈ［Zad73］［Zad75a］［Zad75b］が提案した可能性分布がファジイ集合で表現される場合も含むＣＲＩについて説明する。

一般にｘとｙの値の全体集合をＵ、Ｖとし、以下の形式の推論について考える。

前提１：　x and y are R.
前提２：　x is A.

結論　：　y is B.

ここでＲは一般に以下のように定義されたｘとｙの値の組（ｕ，ｖ）の可能性分布を表すファジイ関係であり、Ａは一般に以下のように定義されたｘの値の可能性分布を表現するファジイ集合である。

$$R = \int_{U \times V} \mu_R(u, v) / (u, v)$$

$$A = \int_{U} \mu_A(u) / u$$

このとき、結論すなわちｙの値の可能性分布をあらわすファジイ集合Ｂは以下のようにＡとＲのｍａｘ－ｍｉｎ合成により得られるとするのがＣＲＩである。

$$\begin{aligned} B &= A \circ R \\ &= \int_{U} \mu_A(u)/u \circ \int_{U \times V} \mu_R(u, v)/(u, v) \\ &= \int_{V} \bigvee_{u \in U} (\mu_A(u) \wedge \mu_R(u, v)) / v \qquad (2.4) \end{aligned}$$

以上の定義からも明らかなように、ＣＲＩにより妥当な推論結果を得るためには、ファジイ関係Ｒの構成のしかたがポイントとなる。本論文では、前提１として応用上特に重要な以下のファジイ条件命題を対象とし、これに対応するファジイ関係Ｒの構成法について主として論じる。

$$P: IF\ x\ is\ A\ then\ y\ is\ B.$$

ここで、A、Bはそれぞれxとyの値の可能性分布をあらわすファジイ集合に対応づけられているとする。

本条件命題Pに対応するファジイ関係Rの構成法としては、Zadeh [Zad73] [Zad75a] は以下の2種類の方法を提案した。なお以下の式中のVはBの全体集合である。

$$Rm = (A \times B) \cup (\neg A \times V)$$

$$Ra = (\neg A \times V) \oplus (U \times B)$$

一方、Mamdani [Mam77] は以下の構成法を提案した。そしてこれをスチームエンジンの制御に応用し、よい制御結果が得られたと報告した。

$$Rc = A \times B$$

以上が本研究を開始した当時までのファジイ推論に関する研究状況であった。このような状況のなかで、これらZadeh、Mamdaniの提案したファジイ関係に対しCRIを適用し、様々な場合について実際に推論結果を求めてみたところ、得られる結論があまり妥当とは言えないとの印象を持った。また、彼らは推論方法の妥当性については特に議論は行なっていなかった。本研究はこれらのことが出発点となり、より妥当性のある推論方法の定式化を目的として行なった。

本研究ではまず、妥当なファジイ条件推論とはどのようなものであるべきかについての検討からスタートし、その結果としてファジイ条件推論において満たされるべき基準を設定した。次に、これら基準にもとづき、これらを満たす新たなファジイ条件推論法、具体的には、ファジイ条件命題からのファジイ関係Rの構成法をいくつか提案した。また、これらファジイ関係が以下の形式の推論にも適用可能であることを示した。

$$\begin{array}{l} If\ x\ is\ A\ then\ y\ is\ B. \\ \quad y\ is\ B'. \\ \hline \quad x\ is\ A'. \end{array}$$

さらに、新たに提案したファジイ関係は、Zadehの定義したファジイ関係では成立しなかった推移律等の好ましい性質を有することもあわせて明らかにした。そして、このファジイ条件推論法を応用することにより、almost all、most、few 等いわゆるファジイ限定詞によって限定された命題を前提とする推論の方法も新たに定式化した。

以上が本研究の概要であるが、次に本研究以後における本分野の状況について概観する。

本研究で提案した方法の特性はその後水本［Miz81］［Miz82a］［Miz82b］［Miz82d］［Miz82e］［Miz83］によりさらに詳しく調べられるとともに、より複雑な形式の推論、具体的には、”If x is A then y is B else y is C.”なる形の前提を持つ推論に応用された。また、本研究ではＺａｄｅｈの定義したＣＲＩ、すなわちｍａｘ－ｍｉｎ合成による推論の枠内で行なわれたが、水本［Miz82c］［Miz85］は他の合成演算を用いる方法を提案した。そしてこの合成演算を用いた場合でも、本研究で提案したファジイ関係が良好な推論結果をもたらすことが示された。

本研究は主として理論的立場から行なった為、推論の前提中にあらわれるあいまいな概念に対応するファジイ集合は、原則として連続的に定義されたメンバシップ関数をもつことを仮定したが、実際にインプリメントする際に必要となる離散的に定義されたファジイ集合を使用した場合のこれら方法のふるまいについては、Ｄｒｉａｎｋｏｖにより検討された［Dri87］。

一方、ファジイ条件推論の妥当性の基準については、その後江沢・水本［EzM83］、塚本［Tsu83］、Ｄｕｂｏｉｓら［DuP85］［DuP88］によって研究が進められ、本研究で提案した基準を含む形でより一般的、抽象的基準が提案されている。

また、以上述べた方法とは別に、間接法と呼ばれるファジイ推論方法がＢａｌｄｗｉｎ［Bal79］、塚本［Tsu79b］らによって新たに提案された。なお、間接法が提案されたことから、本論文で取り扱う方法が直接法と呼ばれることもある。

間接法では、真理値空間をあらわす区間Ｔ＝［０，１］上のファジイ集合（これを**ファジイ真理値**と呼ぶ）が重要な役割を演じる。ファジイ真理値としては、例えば以下のようなものが使用される。

$$\mathbf{true} = \int_T \mu_{true}(t)/t = \int_T t/t$$

$$\mathbf{false} = \int_T \mu_{false}(t)/t = \int_T 1-t/t$$

これらファジイ真理値を使用する間接法では一般に以下の手順で推論処理が実行される。

<u>Ｓｔｅｐ１</u>：前提の”If x is A then y is B.”および”x is A'.”より、まず（x is A'）のもとでの（x is A）のファジイ真理値τ_Aを以下のようにして求める。

τ_A＝Ｔｒｕｔｈ（x is A／x is A'）

$$=\int_T \mu_{A'}(u)/\mu_A(u)$$

Ｓｔｅｐ２： τ_Aと ”If x is A then y is B. ”より、”y is B. ”のファジイ真理値τ_Bを求める。

Ｓｔｅｐ３： ” (y is B) is τ_B . ”より、以下のようにしてＢ’を求める。

$$B' = \int_V \mu\tau_B(\mu_B(v))/v$$

これにより結論” y is B'. ”が得られたことになる。

間接法では原則として以上のステップによって結論が得られる。この中で、Ｓｔｅｐ２の具体的方法が種々提案されており、例えば、Ｂａｌｄｗｉｎ［Bal79］の方法では以下のようにしてτ_B が求められる。すなわち、ファジイ真理値**ｔｒｕｅ**に対しては、

(x is A) is **true** = x is A.

が成立することから、

If x is A then y is B.

を、

If (x is A) is **true** then (y is B) is **true.**

すなわち、

If a is **true** then b is **true.**

と考え、これに対するＴ×Ｔ上のファジイ関係ＲをＺａｄｅｈの方法により構成する。そしてこのＲとＳｔｅｐ１で得られたτ_Aに対しＣＲＩを適用し、以下のようにτ_Bを求める。

$$\tau_B = \tau_A \circ R$$

本方法により得られる結論Ｂ’は、先に述べたＺａｄｅｈの直接法のそれと等しいことがＴｏｎｇら［ToF82］により示されている。また、本方法で、上記Ｒを本論文で提案する方法により構成した場合、本論文で提案する直接法によるのと同じ結論の得られることが水本［Miz87b］により示されている。

間接法の範疇にはいる方法としては、他に塚本［Tsu79b］、Ｙａｇｅｒ［Yag80］、水本［Miz87a］らによる方法が提案されている。また、塚本の方法の多次元推論への拡張が菅野・高木［SuT83］によりなされている。

直接法と間接法を比較していずれが優れているかの判断を下すことは一般には困難であるが、応用例の上からは、例えば制御分野では主として直接法が使用されている［Sug88］。なお、これら推論法の計算における高速化を図る為、簡略推論法なるものもいくつか提案されている（たとえば［MaM88］）。

２．４　結言

本章では、ファジイ集合に関する基本事項について述べた後、ファジイ推論法の研究の流れおよびその中における本研究の位置づけを明らかにした。

３．ファジイ条件推論法

３．１　緒言

本章では以下の形のファジイ条件推論法について論じる。

$$\frac{\begin{array}{l}\text{If } x \text{ is } A \text{ then } y \text{ is } B.\\ x \text{ is } A'.\end{array}}{y \text{ is } B'.} \qquad (3.1)$$

$$\frac{\begin{array}{l}\text{If } x \text{ is } A \text{ then } y \text{ is } B.\\ y \text{ is } B'.\end{array}}{x \text{ is } A'.} \qquad (3.2)$$

ここで、Ａ、Ｂ、Ａ’、Ｂ’は、一般にあいまいな概念であり、それぞれの概念を表すファジイ集合と対応付けられているものとする。なお、以下ではＡ、Ｂ等を対応するファジイ集合の名前と解釈する。

本形式の推論の具体例としては例えば以下のようなものが考えられる。

If a tomato is red then the tomato is ripe.

This tomato is more or less red.

This tomato is more or less ripe.

上記（３．１）、（３．２）の形式の推論において、Ａ、Ｂ、Ａ’、Ｂ’があいまいさを含まない場合、命題Ｐ、Ｑをそれぞれ、

Ｐ：　x　is　A.

Ｑ：　y　is　B.

とおくと、これらはそれぞれ２値論理においてよく知られた推論規則、すなわち”ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓ”、及び”ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓ”に帰着される。

ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓ

$$\frac{\begin{array}{l}P \rightarrow Q\\ P\end{array}}{Q} \qquad (3.3)$$

modus tollens

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ \neg Q \\ \hline P \end{array} \qquad (3.4)$$

このことより、(３．１)、(３．２)の形式の推論はそれぞれ**一般化ｍｏｄｕｓ ｐｏｎｅｎｓ**、**一般化ｍｏｄｕｓ ｔｏｌｌｅｎｓ**と呼ばれている[Miz81]。また、その形より、前向きファジイ推論、後ろ向きファジイ推論とそれぞれよばれることもある[Yam87]。

これら形式の推論において、一般にＡ’≠Ａ、Ｂ’≠¬ＢかつＡ、Ｂがファジイ概念である場合、Ａ、Ｂの意味内容に立ち入ることなく２値論理的な形式的手法で取り扱うことは困難である。そこで、第２章でも述べた通り、Ｚａｄｅｈ[Zad73][Zad75a][Zad75b]は一般にファジイ概念を含んだ推論を機械的に実行する手法として**推論の合成規則**(Compositional rule of inference ;以下ＣＲＩと略す)を提案し、これを用いて(３．１)、(３．２)の形式の推論を行なう具体的手法を与えた。また、Ｍａｍｄａｎｉ[Mam77]も、ＣＲＩを使用するがＺａｄｅｈのとは異なった手法を与え、これをスチームエンジン制御システムに応用した。

しかし、彼らの方法では、得られる推論結果が必ずしも我々の直感とは合致しない場合があり、さらに彼らは推論方法の妥当性については何等議論を行なっていなかった。

以上の状況を踏まえ、本章ではまず(３．１)、(３．２)の形式の推論において成立すべきと考えられる前提と結論の関係を整理することにより、妥当なファジイ条件推論の満たすべき条件をいくつか設定する。次に、Ｚａｄｅｈ、Ｍａｍｄａｎｉの方法がこれら条件の一部しか満たさないことを示した上で、これら条件を満たす新たな方法を提案する。

本章の構成は以下の通りである。

まず、３．２節ではＺａｄｅｈ、及びＭａｍｄａｎｉの方法について述べる。３．３節では妥当なファジイ条件推論法において満たされるべき条件を設定する。次に３．４節でＺａｄｅｈ、Ｍａｍｄａｎｉの方法がこれら条件の一部しか満たさないことを示した上で、３．５節で一般化ｍｏｄｕｓ ｐｏｎｅｎｓに関する条件を満たす新たな方法を提案する。続いて３．６節ではこれら新しい方法が一般化ｍｏｄｕｓ ｔｏｌｌｅｎｓに関する条件のかなりの部分を満たすことを示す。また、３．７節ではこれら新しい

方法のその他の性質について述べる。一方、塚本［Tsu83］は筆者とは独立にファジイ条件推論法において満たされるべき条件を提案した。３．８節では、本章で提案する方法がこれら条件をも大部分満たしていることを示す。本章で提案する推論方法は既に多くの研究者によって様々な角度から検討が加えられている。３．９節ではこれらの概要について述べる。そして３．１０節では本章の結果をまとめる。

３．２　Ｚａｄｅｈ、Ｍａｍｄａｎｉの方法

本節ではＺａｄｅｈ［Zad73］［Zad75a］［Zad75b］及びＭａｍｄａｎｉ［Mam77］によって提案されたファジイ条件推論法について述べる。

第２章でも述べたように、Ｚａｄｅｈは一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓ、すなわち、

$$\begin{array}{ll} \text{前提1：} & \text{If } x \text{ is } A \text{ then } y \text{ is } B. \\ \text{前提2：} & x \text{ is } A'. \\ \hline \text{結論：} & y \text{ is } B'. \end{array} \tag{3.5}$$

の形式の推論に対し、前提１をｘとｙの適当なファジイ関係Ｒに変換し、これと前提２からただちに得られる単項ファジイ関係Ｒ’＝Ａ’に推論の合成規則（ＣＲＩ）を適用することにより、結論Ｂ’が得られるとした。

$$B' = A' \circ R \tag{3.6}$$

また、一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓの場合も同様に、

$$A' = R \circ B' \tag{3.7}$$

で結論Ａ’が得られる。

従って、本方法によりファジイ条件推論を実現するに際しては、ファジイ関係Ｒの構成法をどのように定義するかがポイントとなる。

ファジイ関係Ｒの構成方法としてＺａｄｅｈは以下の２つの方法を提案した［Zad73］［Zad75a］［Zad75b］。

（１）**Ｍａｘｉｍｉｎ規則**（Maximin rule of conditional proposition）

$$R_m = (A \times B) \cup (\neg A \times V) \tag{3.8}$$

但しここで、ＶはＢの全体集合である。

（２）**算術規則**（Arithmetic rule of conditional proposition）

$$R_a = (\neg A \times V) \oplus (U \times B) \tag{3.9}$$

但しここで、ＵはＡの、ＶはＢの全体集合である。

また、Ｍａｍｄａｎｉ［Mam77］は以下の方法を提案した。

（３）**Ｍｉｎｉ規則**（Mini operation rule of conditional proposition）

$$Rc = A \times B \tag{3.10}$$

これらファジイ関係を使用することにより、一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓの形式のファジイ条件推論に対しては以下により結論Ｂ'が得られることになる。

$$B' = A' \circ Rm$$

$$B' = A' \circ Ra$$

$$B' = A' \circ Rc$$

また同様に、一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓの形式の推論に対しては以下により結論Ａ'が得られる。

$$A' = Rm \circ B'$$

$$A' = Ra \circ B'$$

$$A' = Rc \circ B'$$

しかしながら、これら方法は以下に述べる具体例からもわかるように、必ずしも我々の直観にてらして妥当な結論を導出するとは限らない。

［Ｚａｄｅｈの方法による推論の具体例］

Ｕ、Ｖ上のファジイ集合が以下のように定義されているとする。

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$small = 1/1 + 0.8/2 + 0.3/3 + 0.1/4$

$large = 0.1/4 + 0.3/5 + 0.8/6 + 1/7$

$sort\ of\ small = 0.2/1 + 1/2 + 0.4/3 + 0.1/4$

$more\ or\ less\ small = 1/1 + 0.9/2 + 0.54/3 + 0.3/4$

$sort\ of\ large = 0.1/4 + 0.4/5 + 1/6 + 0.2/7$

$more\ or\ less\ large = 0.3/4 + 0.54/5 + 0.9/6 + 1/7$

ここで、ｓｏｒｔ　ｏｆ、ｍｏｒｅ　ｏｒ　ｌｅｓｓは２．２節でも述べたようにファジイ集合で表現されたｓｍａｌｌ、ｌａｒｇｅに対する一種の単項演算子としての機能を持つものである。

次に、ファジイ条件命題Ｐを、

P：If　x　is　small　then　y　is　large.

とする。このときＺａｄｅｈの定義したＲｍ、Ｒａは各々以下のようになる。

Ｒｍ＝（ｓｍａｌｌ×ｌａｒｇｅ）∪（¬ｓｍａｌｌ×Ｖ）

$$
= \begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.3 & 0.8 & 1 \\
0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.8 & 0.8 \\
0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \\
0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{vmatrix}
$$

Ｒａ＝（¬ｓｍａｌｌ×Ｖ）$\oplus$（Ｕ×ｌａｒｇｅ）

$$
= \begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.3 & 0.8 & 1 \\
0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.5 & 1 & 1 \\
0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.8 & 1 & 1 & 1 \\
0.9 & 0.9 & 0.9 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{vmatrix}
$$

これらＲｍ、Ｒａを使用して以下の推論を実行してみよう。

If　x　is　small　then　y　is　large.

x　is　small.

---

y　is　?.

本推論に対する結論として”ｙ　ｉｓ　ｌａｒｇｅ”を期待することには誰も異存は

ないであろう。しかしながらＺａｄｅｈの方法では以下のように先に述べたｌａｒｇｅの定義とは大きく異なったものが結論として得られる。

$B'm = small \circ Rm$

$= 0.3/1 + 0.3/2 + 0.3/3 + 0.3/4 + 0.3/5 + 0.8/6 + 1/7$

$B'a = small \circ Ra$

$= 0.3/1 + 0.3/2 + 0.3/3 + 0.3/4 + 0.3/5 + 0.8/6 + 1/7$

次に以下の推論について考えてみる。

If x is small then y is large.
x is sort of small.

---

y is ?.

本推論に対する結論としては、

y is sort of large.

もしくは

y is more or less large.

といったところが直観的に考えて妥当と言えよう。しかし、実際にＺａｄｅｈの方法を適用してみると、

$B'm = (sort\ of\ small) \circ Rm$

$= 0.4/1 + 0.4/2 + 0.4/3 + 0.4/4 + 0.4/5 + 0.8/6 + 0.8/7$

$B'a = (sort\ of\ small) \circ Ra$

$= 0.4/1 + 0.4/2 + 0.4/3 + 0.4/4 + 0.5/5 + 1/6 + 1/7$

となり、ｓｏｒｔ ｏｆ ｌａｒｇｅ、ｍｏｒｅ ｏｒ ｌｅｓｓ ｌａｒｇｅの定義のいずれとも大きく異なった結論が得られることがわかる。 ［例終］

以上Ｚａｄｅｈの方法について具体例を示したが、Ｍａｍｄａｎｉの方法でも同様の結果が得られ、いずれをとっても我々の直観に照らして妥当な結論が得られるとは言い難いことがわかる。そこで次節では、より良いファジイ条件推論方式定式化のための足がかりとして、妥当なファジイ条件推論のための条件を設定する。

３．３　妥当なファジイ条件推論のための条件

一般に、あいまいな概念を含む前提条件からの推論においては、妥当な推論であるための条件を厳密に定義することは困難と考えられる。そこで本論文では、ファジイ条件推論において一般に成立すべきと考えられる前提と結論の関係をいくつか設定し、これら関係が満足される推論方法を妥当な推論方法とする。

３．３．１　一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓにおける条件

本節では一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓ、すなわち、

前提１：Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ａ　ｔｈｅｎ　ｙ　ｉｓ　Ｂ．
前提２：　　　ｘ　ｉｓ　Ａ’．
―――――――――――――――
結論　：　　　ｙ　ｉｓ　Ｂ’．

の形式の推論において、前提２のＡ’と結論のＢ’の間に一般に成立すべきであろうと考えられる関係を整理する［FMT78a］［FMT78b］［FMT80］。

［関係Ｉ］

前提１：Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ａ　ｔｈｅｎ　ｙ　ｉｓ　Ｂ．
前提２：　　　ｘ　ｉｓ　Ａ．
―――――――――――――――
結論　：　　　ｙ　ｉｓ　Ｂ．

本関係はｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓそのものであり、当然の要求条件であろう。

［関係Ⅱ－１］

前提１：Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ａ　ｔｈｅｎ　ｙ　ｉｓ　Ｂ．
前提２：　　　ｘ　ｉｓ　ｖｅｒｙ　Ａ．
―――――――――――――――
結論　：　　　ｙ　ｉｓ　ｖｅｒｙ　Ｂ．

ここで、ｖｅｒｙはファジイ集合Ａ、Ｂに対し限定を加える演算子として機能するものであり、本関係は前提に加えられた限定が結論におよぶことを要求している。本関係の成立が要求される場合のあることは、例えば以下の例からも明かであろう。

If an apple is red then the apple is ripe.
This apple is very red.
―――――――――――――――
This apple is very ripe.

なお、”ｘ　ｉｓ　Ａ”と”ｙ　ｉｓ　Ｂ”の間に強い因果関係が存在しない場合も考慮し、前提に加えられた限定が結論におよばない以下の関係もあげておく。

［関係Ⅱ－２］

前提１：Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ａ　ｔｈｅｎ　ｙ　ｉｓ　Ｂ．
前提２：　　　ｘ　ｉｓ　ｖｅｒｙ　Ａ．

結論　：　　　ｙ　ｉｓ　Ｂ．

［関係Ⅲ］

前提１：Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ａ　ｔｈｅｎ　ｙ　ｉｓ　Ｂ．
前提２：　　　ｘ　ｉｓ　ｍｏｒｅ　ｏｒ　ｌｅｓｓ　Ａ．

結論　：　　　ｙ　ｉｓ　ｍｏｒｅ　ｏｒ　ｌｅｓｓ　Ｂ．

ここで”ｍｏｒｅ　ｏｒ　ｌｅｓｓ”は、”ｖｅｒｙ”とは逆に、ファジイ集合Ａ、Ｂに対する限定を弱める働きをする、言い替えるならばよりあいまいさを増す演算子として機能する。一般に前提のあいまいさが増せば当然結論のあいまいさも増すべきであり、本関係も当然の要求と考えられる。

［関係Ⅳ］

前提１：Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ａ　ｔｈｅｎ　ｙ　ｉｓ　Ｂ．
前提２：　　　ｘ　ｉｓ　ｎｏｔ　Ａ．

結論　：　　　ｙ　ｉｓ　Ｂ’．

本関係においては、前提１が”ｘ　ｉｓ　ｎｏｔ　Ａ”の場合に関する情報を陽には全く含んでいないことより、結論Ｂ’はｕｎｋｎｏｗｎ（これはファジイ集合Ｂの全体集合Ｖに対応する）とするのが最も自然である。しかしながら、我々が日常前提１の形の条件文を使用する場合、暗黙のうちに以下の意味で使用する場合も多い。

If x is A then y is B else y is not B.

もしくは

If and only if x is A then y is B.

このような場合、結論Ｂ’は当然”ｎｏｔ　Ｂ”であることが要求される。

以上より、関係Ⅳは以下の２つに分けることとする。

[関係Ⅳ－１]

前提１：Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ａ　ｔｈｅｎ　ｙ　ｉｓ　Ｂ．

前提２：　　　ｘ　ｉｓ　ｎｏｔ　Ａ．

結論　：　　　ｙ　ｉｓ　ｕｎｋｎｏｗｎ．

[関係Ⅳ－２]

前提１：Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ａ　ｔｈｅｎ　ｙ　ｉｓ　Ｂ．

前提２：　　　ｘ　ｉｓ　ｎｏｔ　Ａ．

結論　：　　　ｙ　ｉｓ　ｎｏｔ　Ｂ．

３．３．２　一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓにおける条件

本節では一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓの形式のファジイ条件推論に対し、前節と同様の関係を整理する。[MFT78b]　[MFT79a]

[関係Ｖ]

前提１：Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ａ　ｔｈｅｎ　ｙ　ｉｓ　Ｂ．

前提２：　　　ｙ　ｉｓ　ｎｏｔ　Ｂ．

結論　：　　　ｘ　ｉｓ　ｎｏｔ　Ａ．

これはｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓそのものであり、当然の要求条件であろう。

[関係Ⅵ]

前提１：Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ａ　ｔｈｅｎ　ｙ　ｉｓ　Ｂ．

前提２：　　　ｙ　ｉｓ　ｎｏｔ　ｖｅｒｙ　Ｂ．

結論　：　　　ｘ　ｉｓ　ｎｏｔ　ｖｅｒｙ　Ａ．

本関係は関係Ⅱ－１に対応するものである。

なお、前提２の”ｎｏｔ　ｖｅｒｙ　Ｂ”は”ｎｏｔ　Ｂ”に包含されるものではない為、本推論の結論を”ｘ　ｉｓ　ｎｏｔ　Ａ”とするのは無理があると考える。

［関係Ⅶ］

前提１：If x is A then y is B.

前提２：　y is not more or less B.

結論　：　x is not more or less A.

本関係は関係Ⅲに対応するものである。

［関係Ⅷ－１］

前提１：If x is A then y is B.

前提２：　y is B.

結論　：　x is unknown.

［関係Ⅷ－２］

前提１：If x is A then y is B.

前提２：　y is B.

結論　：　x is A.

ここで関係Ⅷ－１は関係Ⅳ－１に対応するものである。また、関係Ⅷ－２は関係Ⅳ－２の場合と同様前提１が暗黙のうちに、

If x is A then y is B else y is not B.

もしくは

If and only if x is A then y is B.

を意味している場合に対応する。

３．４　従来方法の問題点

本節では、３．２節で述べたＺａｄｅｈ及びＭａｍｄａｎｉの方法では前節で設定した関係Ｉ～関係Ⅷ－２のほとんどが満たされないことを示す［FMT78a］［FMT78b］［FMT80］［MFT78b］［MFT79a］。

なお、本節では一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓ及び一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓの形の推論、すなわち、

$$
\begin{array}{ll}
\text{前提1：} & \text{If } x \text{ is } A \text{ then } y \text{ is } B. \\
\text{前提2：} & x \text{ is } A'. \\
\hline
\text{結論：} & y \text{ is } B'.
\end{array}
\tag{3.11}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{前提1：} & \text{If } x \text{ is } A \text{ then } y \text{ is } B. \\
\text{前提2：} & y \text{ is } B'. \\
\hline
\text{結論：} & x \text{ is } A'.
\end{array}
\tag{3.12}
$$

において、ファジイ集合Ａ、Ｂを一般に、

$$A = \int_U \mu_A(u) / u \tag{3.13}$$

$$B = \int_V \mu_B(v) / v \tag{3.14}$$

とし、$\mu_A(u)$、$\mu_B(v)$は各々以下の条件を満たすものとする。

$$\exists u \in U \quad \mu_A(u) = 0, \qquad \exists u' \in U \quad \mu_A(u') = 1 \tag{3.15}$$

$$\exists v \in U \quad \mu_B(v) = 0, \qquad \exists v' \in U \quad \mu_B(v') = 1 \tag{3.16}$$

また、推論結果のＢ’もしくはＡ’を図によって例示する場合があるが、その場合前提１中のファジイ集合ＡおよびＢは各々図３．１、図３．２の通りであるとする。

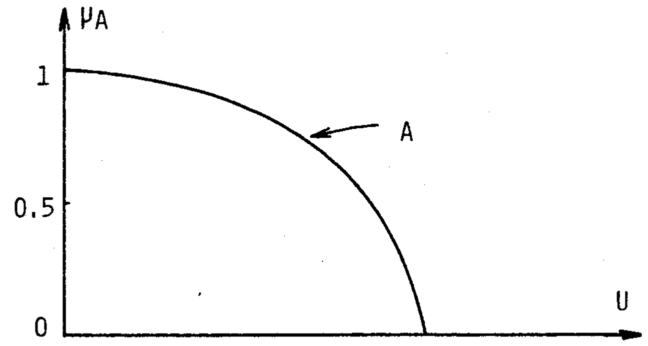

図3．1　ファジイ集合Aのメンバーシップ関数$\mu_A(u)$

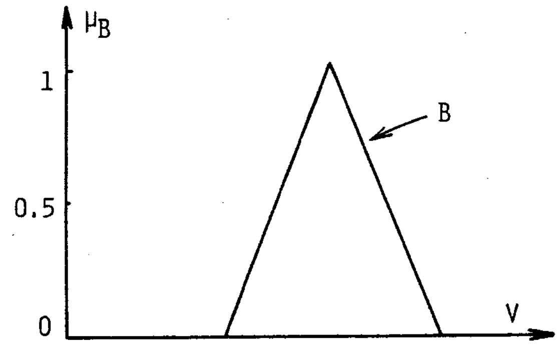

図3．2　ファジイ集合Bのメンバーシップ関数$\mu_B(v)$

３．４．１　Ｚａｄｅｈの方法（ｍａｘｉｍｉｎ規則）の場合

ｍａｘｉｍｉｎ規則を使用した場合、一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓの形式の推論に対しては、結論Ｂｍ’は以下の式により得られる。

$$Bm' = A' \circ [(A \times B) \cup (\neg A \times V)] \tag{3.17}$$

以下では式（３．１７）のＡ’として、Ａ、ｖｅｒｙ　$A=A^2$、ｍｏｒｅ　ｏｒ　ｌｅｓｓ　$A=A^{1/2}$、ｎｏｔ　$A=\neg A$を具体的に与え、関係Ⅰ～Ⅳ－２が成立するか否かを調べる。

（１）Ａ’＝Ａの場合

$$\begin{aligned} Bm' &= A \circ [(A \times B) \cup (\neg A \times V)] \\ &= \int_U \mu_A(u)/u \circ \int_{U\times V} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1-\mu_A(u))/(u,v) \\ &= \int_V \bigvee_{u \in U} [\mu_A(u) \wedge ((\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1-\mu_A(u)))]/v \end{aligned}$$

ここで、$Sm(\mu_A(u))$を以下のように定義する。

$$Sm(\mu_A(u)) = \mu_A(u) \wedge ((\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1-\mu_A(u)))$$

$Sm(\mu_A(u))$の値はパラメータ$\mu_B(v)$の値に応じて図３．３に示す通りに変化する。すなわち、図３．３においてたとえば$\mu_B(v)=0.3$であるとすると$Sm(\mu_A(u))$は－－－－－－－で示される値をとる。一方、式（３．１５）及び式（３．１６）の仮定より、$\mu_A(u)$は$u \in U$の値の変化に応じて区間［０，１］のすべての値をとる。従って図３．３より以下が得られる。

$$\bigvee_{u \in U} Sm(\mu_A(u)) = \begin{cases} \mu_B(v) & \cdots \ \mu_B(v) > 0.5 \\ 0.5 & \cdots \ \mu_B(v) \leq 0.5 \end{cases}$$

以上よりＢｍ’は以下の通りとなる。

$$\begin{aligned} Bm' &= \int_V \bigvee_{u \in U} Sm(\mu_A(u))/v \\ &= \int_V (0.5 \vee \mu_B(v))/v \end{aligned}$$

これは$Bm' \neq B$、すなわち関係Ⅰの不成立を示している。

なお、Ａ、Ｂを各々図３．１、図３．２と仮定したとき、Ｂｍ’は図３．４の通りとなる。これより、Ｂｍ’がＢとは大きく異なっていることが容易に理解できるであろう。

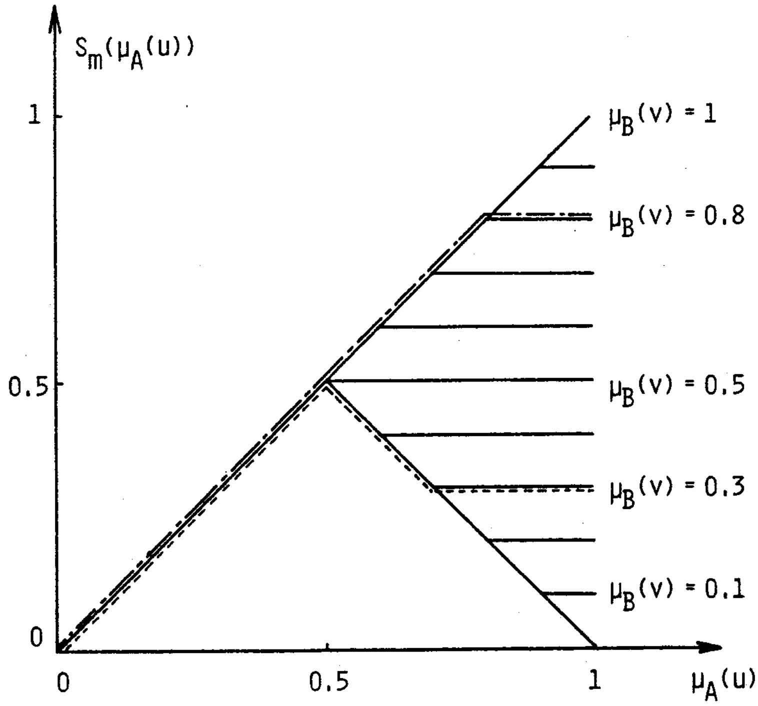

図3．3　　Ｓｍ（μ_A(ｕ))

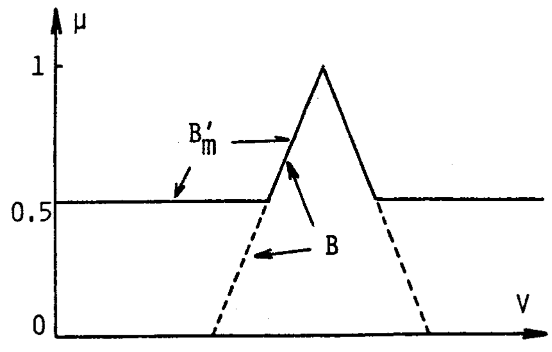

図3．4　Ａ’＝Ａの場合の結論Ｂｍ’

（２）Ａ’＝ｖｅｒｙ Ａの場合

$$Bm' = A^2 \circ [(A\times B)\cup(\neg A\times V)]$$

$$= \int_U \mu_A{}^2(u)/u \circ \int_{U\times V} (\mu_A(u)\wedge\mu_B(v))\vee(1-\mu_A(u))/(u,v)$$

$$= \int_V \bigvee_{u\in U} [\mu_A{}^2(u)\wedge((\mu_A(u)\wedge\mu_B(v))\vee(1-\mu_A(u)))]/v$$

ここで、Ｓｍ'（$\mu_A(u)$）を以下のように定義する。

$$Sm'(\mu_A(u)) = \mu_A{}^2(u)\wedge((\mu_A(u)\wedge\mu_B(v))\vee(1-\mu_A(u)))$$

Ｓｍ'（$\mu_A(u)$）の値はパラメータ$\mu_B(v)$の値に応じて図３．５に示す通りに変化する。

従って、図３．５と式（３．１５）及び式（３．１６）の仮定より以下が得られる。

$$\bigvee_{u\in U} Sm'(\mu_A(u)) = \begin{cases} \mu_B(v) & \cdots \quad \mu_B(v) > (3-\sqrt{5})/2 \\ (3-\sqrt{5})/2 & \cdots \quad \mu_B(v) \leqq (3-\sqrt{5})/2 \end{cases}$$

以上よりＢｍ’は以下の通りとなる。

$$Bm' = \int_V \bigvee_{u\in U} Sm'(\mu_A(u))/v$$

$$= \int_V [((3-\sqrt{5})/2)\vee\mu_B(v)]/v$$

これはＢｍ’≠ｖｅｒｙ Ｂ、Ｂｍ’≠Ｂ、すなわち関係Ⅱ－１、関係Ⅱ－２の不成立を示している。

なお、Ａ、Ｂを各々図３．１、図３．２の通りと仮定したとき、Ｂｍ’は図３．６の通りとなる。

（３）Ａ’＝ｍｏｒｅ ｏｒ ｌｅｓｓ Ａの場合

Ａ’＝ｍｏｒｅ ｏｒ ｌｅｓｓ Ａの場合、結論Ｂｍ’は以下の式により得られる。

$$Bm' = A^{0.5} \circ [(A\times B)\cup(\neg A\times V)]$$

本式の値は、Ａ’＝ｖｅｒｙ Ａの場合と同様の方法で容易に得ることができ、その結果は以下の通りとなる。

$$Bm' = \int_V [((-1+\sqrt{5})/2)\vee\mu_B(v)]/v$$

これはＢｍ’≠ ｍｏｒｅ ｏｒ ｌｅｓｓ Ｂ、すなわち関係Ⅲの不成立を示している。

なお、Ａ、Ｂを各々図３．１、図３．２の通りと仮定したとき、Ｂｍ’は図３．７の通りとなる。

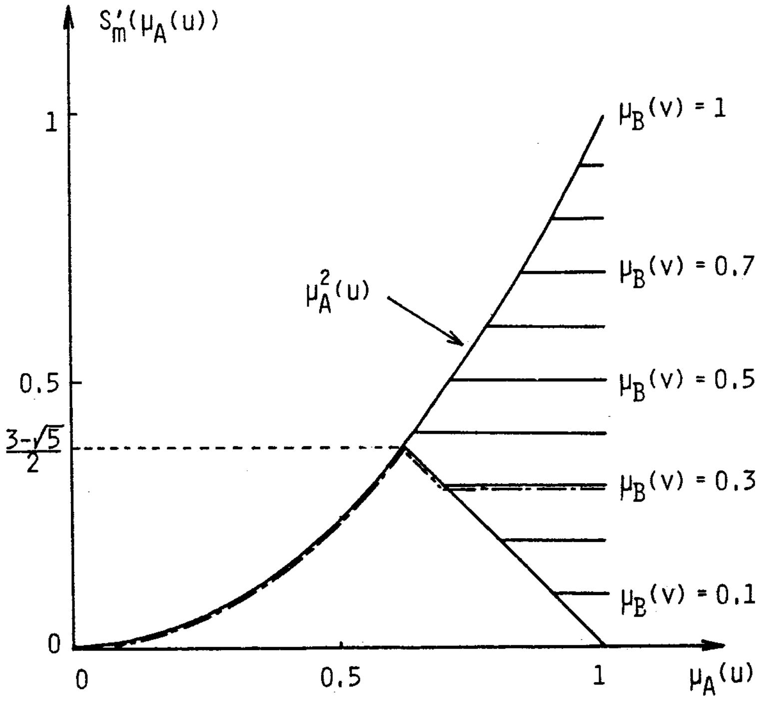

図3．5　Sm'（μ_A(u)）

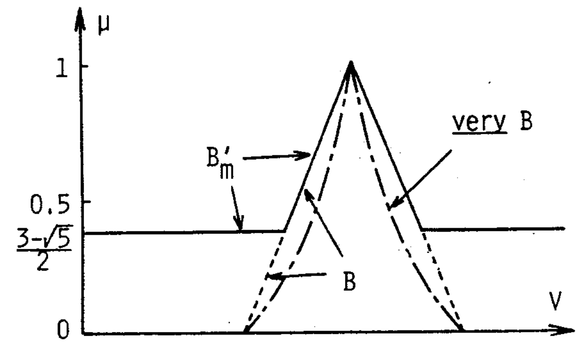

図3．6　A'＝very Aの場合の結論Bm'

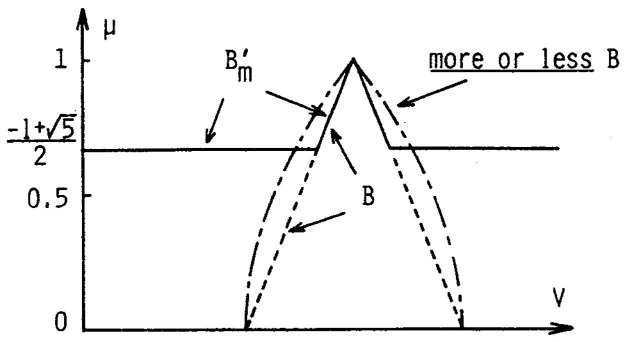

図3．7　A'＝more or less Aの場合の結論Bm'

（4）A’＝ｎｏｔ　Ａの場合

$$Bm' = \neg A \circ [(A\times B)\cup(\neg A\times V)]$$

$$= \int_U (1-\mu_A(u))/u$$

$$\circ \int_{U\times V} (\mu_A(u)\wedge\mu_B(v)) \vee (1-\mu_A(u))/(u,v)$$

$$= \int_V \bigvee_{u\in U} [(1-\mu_A(u))$$

$$\wedge((\mu_A(u)\wedge\mu_B(v))\vee(1-\mu_A(u)))]/v \quad (3.18)$$

ここで式（３．１５）の仮定より、$\mu_A(u)=0$なるｕが存在することから、式（３．１８）は以下のように変形できる。

式（３．１８）

$$= \int_V 1\wedge[(0\wedge\mu_B(v))\vee 1]/v$$

$$= \int_V 1/v$$

$$= V = \mathrm{unknown}$$

これは関係Ⅳ－１の成立を示している。一方関係Ⅳ－２は関係Ⅳ－１と背反するため、これよりただちに関係Ⅳ－２の不成立が言える。

以上より、ｍａｘｉｍｉｎ規則を使用した場合一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓに関する関係は関係Ⅳ－１を除き成立しないことが証明された。

次に一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓの場合について述べる。

一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓの形式の推論に対しては、ｍａｘｉｍｉｎ規則を使用した場合、結論Ａｍ’は以下の式により得られる。

$$Am' = [(A\times B)\cup(\neg A\times V)] \circ B' \quad (3.19)$$

以下では式（３．１９）のＢ’として、ｎｏｔ　Ｂ＝¬Ｂ、　ｎｏｔ　ｖｅｒｙ　Ｂ＝$\neg B^2$、ｎｏｔ　ｍｏｒｅ　ｏｒ　ｌｅｓｓ　Ｂ＝$\neg B^{1/2}$、およびＢを具体的に与え、関係Ⅴ～Ⅷ－２が成立するか否かを調べる。

（1） B’ ＝not Bの場合

$$Am' = [(A\times B)\cup(\neg A\times V)] \circ (\neg B)$$

$$= \int_{U\times V} (\mu_A(u)\wedge\mu_B(v)) \vee (1-\mu_A(u)) / (u, v)$$

$$\circ \int_V (1-\mu_B(v)) / v$$

$$= \int_U \bigvee_{v\in V} [((\mu_A(u)\wedge\mu_B(v)) \vee (1-\mu_A(u))) \wedge (1-\mu_B(v))] / u$$

$$= \int_U (0.5 \vee (1-\mu_A(u))) / u$$

$$\neq \neg A$$

これは関係Ｖの不成立を示している。

（2） B’ ＝not very Bの場合

$$Am' = [(A\times B)\cup(\neg A\times V)] \circ (\neg B^2)$$

$$= \int_{U\times V} (\mu_A(u)\wedge\mu_B(v)) \vee (1-\mu_A(u)) / (u, v)$$

$$\circ \int_V (1-\mu_B^2(v)) / v$$

$$= \int_U \bigvee_{v\in V} [((\mu_A(u)\wedge\mu_B(v)) \vee (1-\mu_A(u))) \wedge (1-\mu_B^2(v))] / u$$

$$= \int_U (1-\mu_A(u)) \vee (((\sqrt{5}-1)/2) \wedge\mu_A(u)) / u$$

$$\neq \neg A^2 = \text{not very } A$$

これは関係VIの不成立を示している。

（3） B’ ＝not more or less Bの場合

$$Am' = [(A\times B)\cup(\neg A\times V)] \circ (\neg B^{1/2})$$

$$= \int_{U\times V} (\mu_A(u)\wedge\mu_B(v)) \vee (1-\mu_A(u)) / (u, v)$$

$$\circ \int_V (1-\mu_B^{1/2}(v)) / v$$

$$= \int_U \bigvee_{v\in V} [((\mu_A(u)\wedge\mu_B(v)) \vee (1-\mu_A(u))) \wedge (1-\mu_B^{1/2}(v))] / u$$

$$= \int_U (1-\mu_A(u)) \vee ((3-\sqrt{5})/2) / u$$

$$\neq \neg A^{1/2} = \text{not more or less } A$$

これは関係Ⅶの不成立を示している。

（4）B’＝Bの場合

$$Am' = [(A \times B) \cup (\neg A \times V)] \circ B$$

$$= \int_{U \times V} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1-\mu_A(u)) / (u, v)$$

$$\circ \int_V \mu_B(v)/v$$

$$= \int_U \bigvee_{v \in V} [((\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1-\mu_A(u))) \wedge \mu_B(v)] / u$$

$$= \int_U \mu_A(u) \vee (1-\mu_A(u)) / u$$

これよりAm’≠A、Am’≠Uとなり、関係Ⅷ－１、関係Ⅷ－２共に成立しないことがわかる。

以上より、ｍａｘｉｍｉｎ規則を使用して一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓを実行した場合、関係Ｖ～関係Ⅷ－２のいずれもが成立しないことが証明された。

３．４．２　Ｚａｄｅｈの方法（算術規則）の場合

本節ではＺａｄｅｈの算術規則を用いた場合においても、ｍａｘｉｍｉｎ規則を使用した場合同様、関係Ｉ～関係Ⅷ－２のほとんどが成立しないことを示す。

算術規則を用いた場合、一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓの形の推論に対しては、結論Ｂａ’は以下の式により得られる。

$$Ba' = A' \circ [(\neg A \times V) \oplus (U \times B)] \tag{3.20}$$

ここで一般に$A' = A^d$（$d > 0$）とおくと、Ｂａ’は以下の通りとなる。

$$Ba' = A^d \circ [(\neg A \times V) \oplus (U \times B)]$$

$$= \int_U \mu_A{}^d(u)/u \circ \int_{U \times V} 1 \wedge (1-\mu_A(u)+\mu_B(v)) / (u, v)$$

$$= \int_V \bigvee_{u \in U} [\mu_A{}^d(u) \wedge (1 \wedge (1-\mu_A(u)+\mu_B(v)))] / v$$

ここで、$Sa(\mu_A(u), d)$を以下のように定義する。

$$Sa(\mu_A(u), d) = \mu_A{}^d(u) \wedge (1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v)))$$

式（3．15）及び式（3．16）の仮定より、$\mu_A(u)$はu∈Uの値の変化に応じて区間［0，1］のすべての値をとる。従って図3．8より、d＝1の場合、以下の式が成立する。

$$\bigvee_{u \in U} Sa(\mu_A(u), 1)$$

$$= \bigvee_{u \in U} \mu_A(u) \wedge (1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v)))$$

$$= (1 + \mu_B(v)) / 2$$

従って、Ｂａ’は以下のようになる。

$$Ba' = \int_V \bigvee_{u \in U} Sa(\mu_A(u), 1) / v$$

$$= \int_V [(1 + \mu_B(v)) / 2] / v$$

$$\neq B$$

また、d＝2の場合、同じく図3．8よりＢａ’は以下のように得られる。

$$Ba' = \int_V \bigvee_{u \in U} Sa(\mu_A(u), 2) / v$$

$$= \int_V [(3 + 2\mu_B(v) - \sqrt{5 + 4\mu_B(v)}) / 2] / v$$

これより、Ｂａ’≠ｖｅｒｙ　Ｂ、Ｂａ’≠Ｂが得られる。

さらに、d＝1／2の場合についても同様にしてＢａ’は以下のように得られる。

$$Ba' = \int_V \bigvee_{u \in U} Sa(\mu_A(u), 0.5) / v$$

$$= \int_V [(-1 + \sqrt{5 + 4\mu_B(v)}) / 2] / v$$

$$\neq B^{1/2} = \text{more or less } B$$

以上により算術規則を使用した場合の関係Ｉ～関係Ⅲの不成立が証明された。

なお、Ａ、Ｂとして図3．1、図3．2を仮定し、Ａ’をＡ、ｖｅｒｙ　Ａ＝A^2、ｍｏｒｅ　ｏｒ　ｌｅｓｓ　Ａ＝$A^{1/2}$とした場合の算術規則による推論結果を図3．9、図3．10、図3．11にそれぞれ示す。

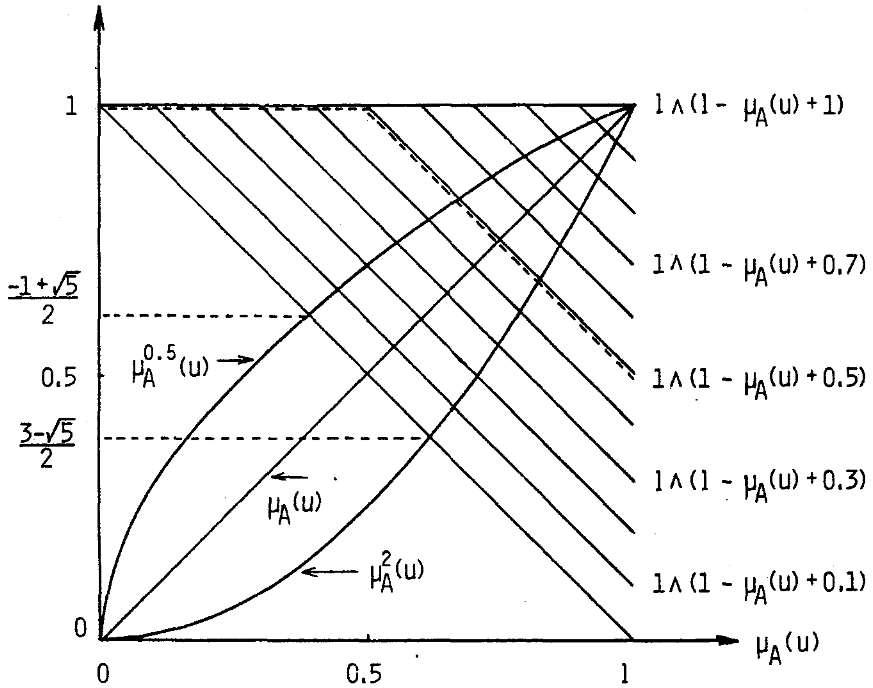

図3．８　Ｓａ（μ_A(u)，ｄ）

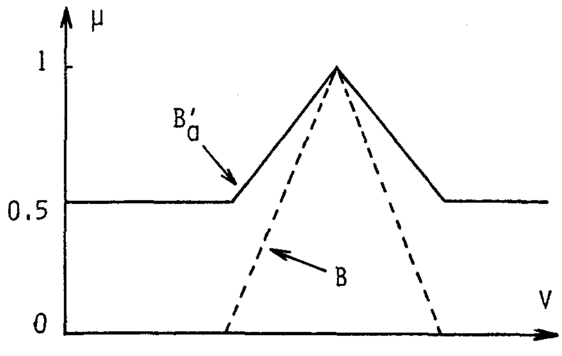

図3．９　Ａ’＝Ａの場合の結論Ｂａ’

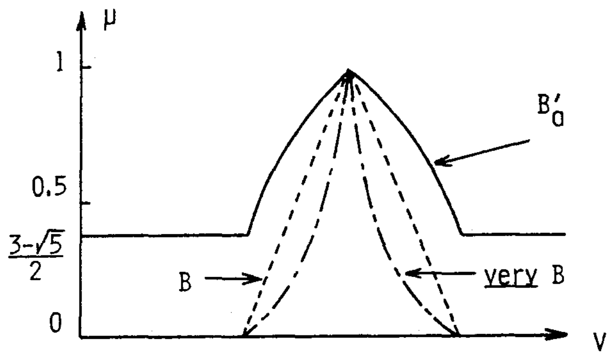

図3．１０　A’＝ｖｅｒｙ Aの場合の結論Ｂａ’

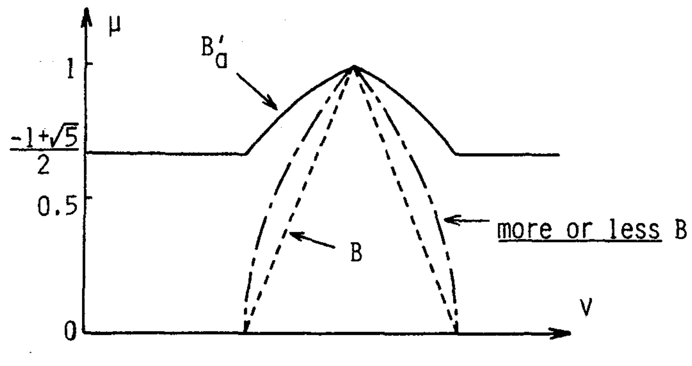

図3．１１　A’＝ｍｏｒｅ　ｏｒ　ｌｅｓｓ　Aの場合の結論Ｂａ’

次にA’＝ｎｏｔ　Ａの場合について示す。

A’＝ｎｏｔ　Ａの場合、算術規則による推論結果は以下の通りとなる。

$$
\begin{aligned}
Ba' &= \neg A \ \mathrm{o}\ [(\neg A \times V) \oplus (U \times B)] \\
&= \int_U (1-\mu_A(u))/u \ \mathrm{o} \int_{U \times V} 1 \wedge (1-\mu_A(u)+\mu_B(v))/(u,\ v) \\
&= \int_V \bigvee_{u \in U} [(1-\mu_A(u)) \wedge (1 \wedge (1-\mu_A(u)+\mu_B(v)))]/v \\
&= \int_V 1 \wedge (1 \wedge (1+\mu_B(v)))/v \\
&= \int_V 1/v \\
&= V = \mathrm{unknown}
\end{aligned}
$$

これは関係Ⅳ－１の成立を示している。また、これよりただちに関係Ⅳ－２の不成立がいえる。

以上により、算術規則を使用した場合一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓの形式の推論に対しては、関係Ⅳ－１を除き他は成立しないことが証明された。

次に一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓの場合について述べる。

算術規則を使用した場合、一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓの形式の推論に対しては、結論Ａａ’は以下の式により得られる。

$$Aa' = [(\neg A \times V) \oplus (U \times B)]\ \mathrm{o}\ B' \tag{3.21}$$

ここで一般にB’として$\neg B^d$（ｄ＞０）を代入すると、Ａａ’は以下の通りとなる。

$$
\begin{aligned}
Aa' &= [(\neg A \times V) \oplus (U \times B)]\ \mathrm{o}\ \neg B^d \\
&= \int_{U \times V} 1 \wedge (1-\mu_A(u)+\mu_B(v))/(u,\ v) \ \mathrm{o} \int_V (1-\mu_{B^d}(v))/v \\
&= \int_U \bigvee_{v \in V} [(1 \wedge (1-\mu_A(u)+\mu_B(v))) \wedge (1-\mu_{B^d}(v))]/v
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

式（３．２２）はｄ＝１の場合以下の通りとなる。

$$Aa' = \int_U 1-(1/2)\mu_A(u)/u$$

また、ｄ＝２の場合は以下のようになる。

$$Aa' = \int_U [(1-2\mu_A(u)+\sqrt{1+4\mu_A(u)})/2]/u$$

さらに、d＝1／2の場合は以下のようになる。

$$A a' = \int_U \left[\left(3-\sqrt{1+4\mu_A(u)}\right) / 2 \right] / u$$

以上より、算術規則を使用した場合、関係Ｖ～関係Ⅶはいずれも成立しないことが示された。

次にＢ’＝Ｂの場合について述べる。

$$\begin{aligned} A a' &= [(\neg A \times V) \oplus (U \times B)] \circ B \\ &= \int_{U\times V} 1 \wedge (1-\mu_A(u)+\mu_B(v)) / (u, v) \circ \int_V \mu_B(v)/v \\ &= \int_U \bigvee_{v\in V} [(1 \wedge (1-\mu_A(u)+\mu_B(v))) \wedge \mu_B(v)] / v \\ &= \int_U (1 \wedge (1-\mu_A(u)+1) \wedge 1) / v \\ &= \int_U 1 / v \\ &= U = \mathrm{unknown} \end{aligned}$$

これより、関係Ⅷ－１の成立及び関係Ⅷ－２の不成立が示された。

以上により、算術規則を一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓ及び一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓの形式の推論に適用した場合、関係Ⅳ－１、関係Ⅷ－１を除いては成立しないことが証明された。

３．４．３　Ｍａｍｄａｎｉの方法の場合

Ｍａｍｄａｎｉの方法では、一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓの形の推論に対する結論Ｂｃ’は以下の式により得られる。

$$B c' = A' \circ (A \times B) \tag{3.23}$$

ここで一般にＡ’＝A^d（ｄ＞０）とすると、Ｂｃ’は以下のようになる。

$$\begin{aligned} B c' &= A^d \circ (A \times B) \\ &= \int_U \mu_A{}^d(u)/u \circ \int_{U\times V} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) / (u, v) \\ &= \int_V \bigvee_{u\in U} [\mu_A{}^d(u) \wedge \mu_A(u) \wedge \mu_B(v)] / v \end{aligned} \tag{3.24}$$

ここで式（３．１５）の仮定より、$\mu_A(u)=1$なる$u\in U$が存在することに注意すれば、式（３．２４）は以下のように変形できる。

$$Bc' = \int_V 1 \wedge 1 \wedge \mu_B(v) / v$$

$$= \int_V \mu_B(v) / v$$

$$= B$$

これは関係Ⅰ、関係Ⅱ－２が成立し、関係Ⅱ－１および関係Ⅲが成立しないことを示している。

また、A’＝ｎｏｔ　Ａ（＝￢A）とおくとＢｃ’は以下の通りとなる。

$$Bc' = \neg A \ o \ (A \times B)$$

$$= \int_U 1 - \mu_A(u) / u \ o \ \int_{U \times V} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) / (u, v)$$

$$= \int_V \bigvee_{u \in U} [(1 - \mu_A(u)) \wedge \mu_A(u) \wedge \mu_B(v)] / v$$

$$= \int_V 0.5 \wedge \mu_B(v) / v$$

これは関係Ⅳ－１、関係Ⅳ－２が共に成立しないことを示している。

なお、本方法では以下に示すようにA’＝ｕｎｋｎｏｗｎ（＝Ｕ）とおくと、結論Ｂｃ’はＢに等しくなる。これは明らかに論理性を欠くものと言わざるをえない。

$$Bc' = U \ o \ (A \times B)$$

$$= \int_U 1 / u \ o \ \int_{U \times V} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) / (u, v)$$

$$= \int_V \bigvee_{u \in U} [1 \wedge \mu_A(u) \wedge \mu_B(v)] / v$$

$$= \int_V \mu_B(v) / v$$

$$= B$$

次に一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓの場合について示す。

Ｍａｍｄａｎｉの方法では、一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓに対する結論Ａｃ’は以下により得られる。

$$Ac' = (A \times B) \ o \ B' \tag{3.25}$$

ここでＢ’として一般に$\neg B^d$（ｄ＞０）を代入すると以下の通りとなる。

$$Ac' = (A \times B) \ o \ (\neg B^d)$$

$$= \int_{U\times V} (\mu_A(u)\wedge\mu_B(v)) / (u, v) \circ \int_V 1-\mu_B{}^d(v) / v$$

$$= \int_U \bigvee_{v\in V} [\mu_A(u)\wedge\mu_B(v)\wedge(1-\mu_B{}^d(v))] / u$$

$$= \int_U \mu_A(u)\wedge [\bigvee_{v\in V} \mu_B(v)\wedge(1-\mu_B{}^d(v))] / u$$

ここでｄ＝１とおくとＡｃ’は以下のようになる。

$$Ac' = \int_U \mu_A(u)\wedge 0.5 / u \tag{3.26}$$

また、ｄ＝２とおくとＡｃ’は以下のようになる。

$$Ac' = \int_U \mu_A(u)\wedge ((\sqrt{5}-1)/2) / u \tag{3.27}$$

さらにｄ＝１／２とおくとＡｃ’は以下のようになる。

$$Ac' = \int_U \mu_A(u)\wedge ((3-\sqrt{5})/2) / u \tag{3.28}$$

以上の式（３．２６）、式（３．２７）、及び式（３．２８）は関係Ｖ～Ⅶの不成立を示している。

さらにＢ’としてＢを式（３．２５）に代入すると、結論Ａｃ’は以下のようになる。

$$Ac' = (A\times B) \circ B$$

$$= \int_{U\times V} (\mu_A(u)\wedge\mu_B(v)) / (u, v) \circ \int_V \mu_B(v) / v$$

$$= \int_U \bigvee_{v\in V} [\mu_A(u)\wedge\mu_B(v)\wedge\mu_B(v)] / u$$

$$= \int_U \mu_A(u) / u$$

$$= A$$

これは関係Ⅷ－１の不成立をそして関係Ⅷ－２の成立を示している。

以上により、Ｍａｍｄａｎｉの方法では関係Ⅰ、関係Ⅱ－２及び関係Ⅷ－２のみが成立し、他は成立しないことが証明された。

ここで、以上で述べた結果をまとめると表３．１の通りとなる。

表3．1　Ｚａｄｅｈ、Ｍａｍｄａｎｉの方法における各関係の成立状況

関　係	Zadehの方法（maximin規則）	Zadehの方法（算術規則）	Mamdaniの方法
Ⅰ	×	×	○
Ⅱ－1	×	×	×
Ⅱ－2	×	×	○
Ⅲ	×	×	×
Ⅳ－1	○	○	×
Ⅳ－2	×	×	×
Ⅴ	×	×	×
Ⅵ	×	×	×
Ⅶ	×	×	×
Ⅷ－1	×	○	×
Ⅷ－2	×	×	○

○：成立　　×：不成立

３．５　新たなファジイ条件推論方法の定式化 [FMT78a] [FMT80]

――――一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓの立場から―――

前節ではＺａｄｅｈ、Ｍａｍｄａｎｉの方法が３．２節で述べた前提と結論の関係のほとんどを満たさないことを示した。そこで本節では、まず一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓの形式の推論に対し、これら関係を満たす新たな方法を定式化する。

３．５．１　ファジイ条件推論法の分類

３．２節で設定した各関係をまとめると表３．２となる。本表において一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓで成立すべき関係は関係Ⅰ～関係Ⅳ－２であり、このなかで関係Ⅱ－１と関係Ⅱ－２、及び関係Ⅳ－１と関係Ⅳ－２は互いに背反する条件となっている。そこでこれら背反する関係のいずれが成立するかにより、ファジイ条件推論法を表３．３の４つのタイプに分類する。

表３．２　ファジイ条件推論において成立すべき関係

関　係	前　提　２	結　　　論
Ⅰ	Ａ	Ｂ
Ⅱ－１	ｖｅｒｙ Ａ	ｖｅｒｙ Ｂ
Ⅱ－２	ｖｅｒｙ Ａ	Ｂ
Ⅲ	more or less Ａ	more or less Ｂ
Ⅳ－１	ｎｏｔ Ａ	ｕｎｋｎｏｗｎ
Ⅳ－２	ｎｏｔ Ａ	ｎｏｔ Ｂ
Ｖ	ｎｏｔ Ｂ	ｎｏｔ Ａ
Ⅵ	ｎｏｔ ｖｅｒｙ Ｂ	ｎｏｔ ｖｅｒｙ Ａ
Ⅶ	not more or less Ｂ	not more or less Ａ
Ⅷ－１	Ｂ	ｕｎｋｎｏｗｎ
Ⅷ－２	Ｂ	Ａ

表３．３　ファジイ条件推論法のタイプ

タイプ	成立が要求される関係
1	関係Ⅰ、　Ⅱ－１、　Ⅲ、　Ⅳ－１
2	関係Ⅰ、　Ⅱ－２、　Ⅲ、　Ⅳ－１
3	関係Ⅰ、　Ⅱ－１、　Ⅲ、　Ⅳ－２
4	関係Ⅰ、　Ⅱ－２、　Ⅲ、　Ⅳ－２

以下においては各タイプ毎に、要求される関係を満たす方法を定式化する。

３．５．２　関係Ⅰを満たすファジイ関係Ｒを構成するための必要条件

条件命題 ” If x is A then y is B.” に対してＺａｄｅｈが定義したファジイ関係Ｒａ、すなわち、

$$Ra = (\neg A \times V) \oplus (U \times B) \tag{3.29}$$
$$= \int_{U \times V} 1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v)) \,/\, (u, v)$$

において、そのメンバシップ関数 $[1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v))]$ はŁｕｋａｓｉｅｗｉｃｚの定義した多値論理体系L_{aleph}における含意の定義［Res69］に依っている。すなわち、L_{aleph} での含意は以下のように定義されている。

$$v(P \to Q) = 1 \wedge (1 - v(P) + v(Q))$$

ここで、Ｐ、Ｑ、は任意の命題であり、ｖ（Ｐ）は命題Ｐの真理値を表す。

以下ではこの点に注目し、一般に多値論理体系の含意の定義式を利用して式（３．２９）と同様のファジイ関係Ｒを構成し、このＲを一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓの形式の推論に適用した場合に関係Ⅰが成立するためには、どの様な性質を持つ含意の定義式であることが必要かについて考察する。

条件命題Ｐ＝” If x is A then y is B.” に対しファジイ集合Ａ、Ｂが以下のように定義されているものとする。

$$A = \int_U \mu_A(u) / u$$

$$B = \int_V \mu_B(v) / v$$

そして条件命題Ｐより、一般に以下のファジイ関係Ｒを構成する。

$R = A \times V \dashrightarrow U \times B$

$= \int_{U \times V} \mu_A(u) / (u, v) \quad \dashrightarrow \quad \int_{U \times V} \mu_B(v) / (u, v)$

$$= \int_{U \times V} \mu_A(u) \dashrightarrow \mu_B(v) / (u, v) \qquad (3.30)$$

ここで、 $[\mu_A(u) \dashrightarrow \mu_B(v)]$ は採用した含意の定義により得られるものである。例えばL_{aleph} の定義を使用すれば以下のように定義される。

$$\mu_A(u) \dashrightarrow \mu_B(v) = 1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v))$$

本ＲとＡに対しＣＲＩを適用すると、結論Ｂ’は一般に以下の通りとなる。

$B' = A \circ R$

$= \int_U \mu_A(u) / u \quad \circ \quad \int_{U \times V} (\mu_A(u) \dashrightarrow \mu_B(v)) / (u, v)$

$= \int_V \bigvee_{u \in U} [\mu_A(u) \wedge (\mu_A(u) \dashrightarrow \mu_B(v))] / v$

従って、関係Ｉが成立する、すなわちＢ’＝Ｂとなるためには任意の$v \in V$に対して以下の式が成立することが必要となる。

$$\bigvee_{u \in U} [\mu_A(u) \wedge (\mu_A(u) \dashrightarrow \mu_B(v))] = \mu_B(v)$$

また、本等式が成立するためには、任意の$v \in V$および任意の$u \in U$に対して少なくとも以下の不等式が成立する必要がある。

$$[\mu_A(u) \wedge (\mu_A(u) \dashrightarrow \mu_B(v))] \leq \mu_B(v)$$

以上の議論より、式（３．３０）で定義されるファジイ関係ＲにＣＲＩを適用して関係Ｉを満たす一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓの形式の推論を実現するためには、少なくとも任意の命題Ｐ、Ｑに対して以下の不等式が成立する含意を採用しなければならないことが結論として得られる。

$$v(P \wedge (P \dashrightarrow Q)) \leq v(Q) \qquad (3.31)$$

ちなみにL_{aleph}における含意では以下の例が示すようにこの関係は成立しない。

$v(P \wedge (P \dashrightarrow Q))$

$= v(P) \wedge (1 \wedge (1 - v(P) + v(Q)))$

ここで$v(P) = 0.5$、$v(Q) = 0$とおくと、

$= 0.5 \wedge (1 \wedge (1 - 0.5 + 0))$

$= 0.5 > v(Q)$

以下では、真理値として区間［０，１］の実数値をとる多値論理体系のなかで、不等式（３．３１）を満たす体系の含意の定義式を使用し、前節で分類した各タイプ毎に各関係を満たす推論を実現するファジイ関係を構成する。

３．５．３　タイプ１の条件を満たす推論方法の定式化

一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓの形式でタイプ１の条件を満たす推論について再度まとめると以下の通りである。すなわち、

前提１：Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ａ　ｔｈｅｎ　ｙ　ｉｓ　Ｂ．
前提２：　　ｘ　ｉｓ　Ａ’．

結論　：　　ｙ　ｉｓ　Ｂ’．

の形式の推論で、前提２のＡ’と結論のＢ’の間に表３．４に示す関係が成立するものである。

表３．４　タイプ１のファジイ条件推論に要求される関係

関　係	前　提　２	結　　論
Ｉ	Ａ	Ｂ
Ⅱ－１	ｖｅｒｙ　Ａ	ｖｅｒｙ　Ｂ
Ⅲ	more or less Ａ	more or less Ｂ
Ⅳ－１	ｎｏｔ　Ａ	ｕｎｋｎｏｗｎ

このタイプの推論に対しては、前提１を以下で定義されるファジイ関係Ｒｓに変換すればＡ’ｏＲｓにより上記の関係を満たす結論Ｂ’が得られる。

［定義３．１］

Ｕ上のファジイ集合Ａ、Ｖ上のファジイ集合Ｂが各々以下のように定義されており、かつこれらは式（３．３４）～式（３．３６）の条件を満たすものとする。

$$A = \int_U \mu_A(u)/u \tag{3.32}$$

$$B = \int_V \mu_B(v)/v \tag{3.33}$$

$$\{\mu_A(u) \mid u \in U\} \supseteq \{\mu_B(v) \mid v \in V\} \tag{3.34}$$

$$\exists u \in U \quad \mu_A(u)=0, \qquad \exists u' \in U \quad \mu_A(u')=1 \tag{3.35}$$

$$\exists v \in V \quad \mu_B(v)=0, \qquad \exists v' \in V \quad \mu_B(v')=1 \tag{3.36}$$

このときファジイ関係Ｒｓを以下のように定義する。

$$Rs = A \times V \xrightarrow{\ s\ } U \times B$$

$$= \int_{U\times V} \mu_A(u)/(u, v) \quad \xrightarrow{\ s\ } \quad \int_{U\times V} \mu_B(v)/(u, v)$$

$$= \int_{U\times V} \mu_A(u) \xrightarrow{\ s\ } \mu_B(v)/(u, v) \tag{3.37}$$

ただし$\mu_A(u) \xrightarrow{\ s\ } \mu_B(v)$は以下のように定義される。

$$\mu_A(u) \xrightarrow{\ s\ } \mu_B(v) = \begin{cases} 1 & \cdots \quad \mu_A(u) \leqq \mu_B(v) \\ \\ 0 & \cdots \quad \mu_A(u) > \mu_B(v) \end{cases}$$

［定義終］

本定義における$\xrightarrow{\ s\ }$はThe Standard Sequence　S_{aleph} [Res69] における含意の定義式による。

また、式（３．３４）～式（３．３６）の条件はメンバシップ関数が連続関数として定義されている限り通常必ず満たされるものであり、特別の制約を与えるものではない。

次にＲｓを使用するとタイプ１に課せられた各関係が成立することを証明する。

［定理３．１］

定義３．１のＲｓを一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓの形式の推論に適用した場合、関係Ｉ、Ⅱ－１、Ⅲ、およびⅣ－１が満たされる。

［定理終］

［証明］

一般に$A' = A^d$（$d>0$）とおいてＲｓとの間でＣＲＩを適用すると、結論Ｂ’は以下の通りとなる。

$$B' = A^d \circ [(A \times V) \xrightarrow{\ s\ } (U \times B)]$$

$$= \int_U \mu_A{}^d(u)/u \circ \int_{U\times V} \mu_A(u) \xrightarrow{\ s\ } \mu_B(v)/(u, v)$$

$$= \int_V \bigvee_{u \in U} [\mu_A{}^d(u) \wedge (\mu_A(u) \xrightarrow{\ s\ } \mu_B(v))] / v \tag{3.38}$$

ここで、任意の$v \in V$に対し、Uを以下の条件を満たす２つの部分集合$U_1(v)$と$U_2(v)$に分割する。

$$U_1(v) \cup U_2(v) = U, \quad U_1(v) \cap U_2(v) = \phi \tag{3.39}$$

$$\forall u \in U_1(v) \qquad \mu_A(u) \leqq \mu_B(v) \tag{3.40}$$

$$\forall u \in U_2(v) \qquad \mu_A(u) > \mu_B(v) \tag{3.41}$$

これら$U_1(v)$、$U_2(v)$を使用すれば式（３．３８）は以下のように変形できる。

式（３．３８）

$$= \int_V \bigvee_{u \in U_1(v)} \mu_A{}^d(u) / v$$

$$= \int_V \mu_B{}^d(v) / v \qquad \because \text{ 式(3.34)および式(3.40)の仮定より}$$

$$= B^d$$

以上により関係Ｉ、Ⅱ－１およびⅢの成立が示された。

次に、Ａ’＝ｎｏｔ Ａ（＝¬Ａ）としてＲｓとの間にＣＲＩを適用すると、結論Ｂ’は以下の通りとなる。

$$B' = \neg A \ \mathrm{o} \ [(A \times V) -_s\!\rightarrow (U \times B)]$$

$$= \int_U 1 - \mu_A(u) / u \ \mathrm{o} \ \int_{U \times V} \mu_A(u) -_s\!\rightarrow \mu_B(v) / (u, v)$$

$$= \int_V \bigvee_{u \in U} [(1 - \mu_A(u)) \wedge (\mu_A(u) -_s\!\rightarrow \mu_B(v))] / v \tag{3.42}$$

式（３．３５）の仮定より、$\mu_A(u) = 0$となる$u \in U$が少なくとも１点は存在することより、以下が成立する。

$$\bigvee_{u \in U} [(1 - \mu_A(u)) \wedge (\mu_A(u) -_s\!\rightarrow \mu_B(v))] = 1$$

$$\therefore \text{ 式（３．４２）} = \int_V 1 / v$$

$$= V = \mathrm{unknown}$$

これは関係Ⅳ－１の成立を示している。

以上ですべての関係の成立が証明された。

［証明終］

３．５．４　タイプ２の条件を満たす推論方法の定式化

一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓの形式でタイプ２の条件を満たす推論について再度まとめると以下の通りである。すなわち、

前提１：Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ａ　ｔｈｅｎ　ｙ　ｉｓ　Ｂ．

前提２：　　ｘ　ｉｓ　Ａ’．

結論　：　　ｙ　ｉｓ　Ｂ’．

の形式の推論で、前提２のＡ’と結論のＢ’の間に表３．５に示す関係が成立するものである。

表３．５　タイプ２のファジイ条件推論に要求される関係

関　係	前　提　２	結　　論
Ｉ	Ａ	Ｂ
Ⅱ－２	ｖｅｒｙ Ａ	Ｂ
Ⅲ	more or less Ａ	more or less Ｂ
Ⅳ－１	ｎｏｔ Ａ	ｕｎｋｎｏｗｎ

このタイプの推論に対しては、前提１を以下で定義されるファジイ関係Ｒｇに変換すればＡ’ｏＲｇにより上記の関係を満たす結論Ｂ’が得られる。

［定義３．２］

Ｕ上のファジイ集合Ａ、Ｖ上のファジイ集合Ｂが各々以下のように定義されており、かつこれらは式（３．４５）～式（３．４７）の条件を満たすものとする。

$$A = \int_U \mu_A(u)/u \tag{3.43}$$

$$B = \int_V \mu_B(v)/v \tag{3.44}$$

$$\{\mu_A(u) \mid u \in U\} \supseteq \{\mu_B(v) \mid v \in V\} \tag{3.45}$$

$$\exists u \in U \quad \mu_A(u) = 0, \qquad \exists u' \in U \quad \mu_A(u') = 1 \tag{3.46}$$

$$\exists v \in V \quad \mu_B(v) = 0, \qquad \exists v' \in V \quad \mu_B(v') = 1 \tag{3.47}$$

このときファジイ関係Ｒｇを以下のように定義する。

$$
\begin{aligned}
Rg &= A \times V \ -g\rightarrow U \times B \\
&= \int_{U \times V} \mu_A(u) / (u, v) \quad -g\rightarrow \int_{U \times V} \mu_B(v) / (u, v) \\
&= \int_{U \times V} \mu_A(u) -g\rightarrow \mu_B(v) / (u, v)
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

ただし$\mu_A(u) -g\rightarrow \mu_B(v)$は以下のように定義される。

$$
\mu_A(u) -g\rightarrow \mu_B(v) = \begin{cases} 1 & \cdots \quad \mu_A(u) \leqq \mu_B(v) \\ \mu_B(v) & \cdots \quad \mu_A(u) > \mu_B(v) \end{cases}
$$

［定義終］

本定義における$-g\rightarrow$はThe Gödelian Sequence G_{aleph} [Res69] における含意の定義式による。

次にＲｇを使用するとタイプ２に課せられた各関係が成立することを証明する。

［定理３．２］

定義３．２のＲｇを一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓの形式の推論に適用した場合、関係Ⅰ、Ⅱ－２、Ⅲ、およびⅣ－１が満たされる。

［定理終］

［証明］

一般に$A' = A^d$ $(d > 0)$とおいてＲｇとの間でＣＲＩを適用すると、結論Ｂ’は以下の通りとなる。

$$
\begin{aligned}
B' &= A^d \circ [(A \times V) -g\rightarrow (U \times B)] \\
&= \int_U \mu_A{}^d(u) / u \circ \int_{U \times V} \mu_A(u) -g\rightarrow \mu_B(v) / (u, v) \\
&= \int_V \bigvee_{u \in U} [\mu_A{}^d(u) \wedge (\mu_A(u) -g\rightarrow \mu_B(v))] / v
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

ここで、任意の$v \in V$に対し、Ｕを以下の条件を満たす２つの部分集合$U_1(v)$と$U_2(v)$に分割する。

$$U_1(v) \cup U_2(v) = U, \quad U_1(v) \cap U_2(v) = \phi \tag{3.50}$$

$$\forall u \in U_1(v) \qquad \mu_A(u) \leqq \mu_B(v) \tag{3.51}$$

$$\forall u \in U_2(v) \qquad \mu_A(u) > \mu_B(v) \tag{3.52}$$

これら$U_1(v)$、$U_2(v)$を使用すれば式（３．４９）は以下のように変形できる。

式（３．４９）

$$= \int_V \left(\bigvee_{u \in U_1(v)} \mu_A{}^d(u) \right) \vee \left(\bigvee_{u \in U_2(v)} \mu_A{}^d(u) \wedge \mu_B(v) \right) / v$$

$$= \int_V \mu_B{}^d(u) \vee \left[\left(\bigvee_{u \in U_2(v)} \mu_A{}^d(u) \right) \wedge \mu_B(v) \right] / v$$

$$= \int_V \mu_B{}^d(u) \vee (1 \wedge \mu_B(v)) / v$$

∵　式(3.45), (3.51)および式(3.52)の仮定より

$$= \begin{cases} \int_V \mu_B{}^d(u) / v = B^d & \cdots\cdots \quad d \leqq 1 \\ \int_V \mu_B(v) / v = B & \cdots\cdots \quad d > 1 \end{cases}$$

これは$d=1$、$d=2$、及び$d=0.5$のとき関係Ｉ、Ⅱ－２およびⅢが成立することを示している。

次に、A’＝ｎｏｔ Ａ（＝￢A）としてＲｓとの間にＣＲＩを適用すると、結論Ｂ’は以下の通りとなる。

$$B' = \neg A \circ [(A \times V) -g\rightarrow (U \times B)]$$

$$= \int_U 1 - \mu_A(u) / u \circ \int_{U \times V} \mu_A(u) -g\rightarrow \mu_B(v) / (u, v)$$

$$= \int_V \bigvee_{u \in U} [(1 - \mu_A(u)) \wedge (\mu_A(u) -g\rightarrow \mu_B(v))] / v \qquad (3.53)$$

式（３．４６）の仮定より、$\mu_A(u)=0$となる$u \in U$が少なくとも１点は存在することより、以下が成立する。

$$\bigvee_{u \in U} [(1 - \mu_A(u)) \wedge (\mu_A(u) -g\rightarrow \mu_B(v))] = 1$$

$$\therefore \text{式（３．５３）} = \int_V 1 / v$$

$$= V = \mathrm{unknown}$$

これは関係Ⅳ－１の成立を示している。

以上ですべての関係の成立が証明された。

［証明終］

3．5．5　タイプ3の条件を満たす推論方法の定式化

一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓの形式でタイプ3の条件を満たす推論について再度まとめると以下の通りである。すなわち、

前提1：Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ａ　ｔｈｅｎ　ｙ　ｉｓ　Ｂ．

前提2：　　ｘ　ｉｓ　Ａ’．

結論　：　　ｙ　ｉｓ　Ｂ’．

の形式の推論で、前提2のＡ’と結論のＢ’の間に表3．6に示す関係が成立するものである。

表3．6　タイプ3のファジイ条件推論に要求される関係

関　係	前　提　2	結　　　論
Ⅰ	Ａ	Ｂ
Ⅱ－1	ｖｅｒｙ Ａ	ｖｅｒｙ Ｂ
Ⅲ	more or less Ａ	more or less Ｂ
Ⅳ－2	ｎｏｔ Ａ	ｎｏｔ Ｂ

このタイプの推論に対しては、前提1を以下で定義されるファジイ関係Ｒｓｇに変換すればＡ’ｏＲｓｇにより上記関係を満たす結論Ｂ’が得られる。

［定義3．3］

Ｕ上のファジイ集合Ａ、Ｖ上のファジイ集合Ｂが各々以下のように定義されており、かつこれらは式（3．56）～式（3．58）の条件を満たすものとする。

$$A = \int_U \mu_A(u)/u \tag{3.54}$$

$$B = \int_V \mu_B(v)/v \tag{3.55}$$

$$\{\mu_A(u) \mid u \in U\} \supseteq \{\mu_B(v) \mid v \in V\} \tag{3.56}$$

$$\exists u \in U \quad \mu_A(u) = 0, \qquad \exists u' \in U \quad \mu_A(u') = 1 \tag{3.57}$$

$$\exists v \in V \quad \mu_B(v) = 0, \qquad \exists v' \in V \quad \mu_B(v') = 1 \tag{3.58}$$

このときファジイ関係Ｒｓｇを以下のように定義する。

$$R_{sg} = (A \times V -sg\rightarrow U \times B)$$

$$= (A \times V -s\rightarrow U \times B) \cap (\neg A \times V -g\rightarrow U \times \neg B) \qquad (3.59)$$

［定義終］

次にＲｓｇを使用するとタイプ３に課せられた各関係が成立することを証明する。

［定理３．３］

定義３．３のＲｓｇを一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓの形式の推論に適用した場合、関係Ｉ、Ⅱ－１、Ⅲ、およびⅣ－２が満たされる。

［定理終］

［証明］

一般に$A' = A^d$（$d > 0$）とおいてＲｓｇとの間でＣＲＩを適用すると、結論Ｂ’は以下の通りとなる。

$$\begin{aligned} B' &= A^d \circ [(A \times V -s\rightarrow U \times B) \cap (\neg A \times V -g\rightarrow U \times \neg B)] \\ &= \int_U \mu_A{}^d(u)/u \circ \int_{U \times V} (\mu_A(u) -s\rightarrow \mu_B(v)) \\ &\qquad \wedge ((1-\mu_A(u)) -g\rightarrow (1-\mu_B(v)))/(u, v) \\ &= \int_V \bigvee_{u \in U} [\mu_A{}^d(u) \wedge \{(\mu_A(u) -s\rightarrow \mu_B(v)) \\ &\qquad \wedge ((1-\mu_A(u)) -g\rightarrow (1-\mu_B(v)))\}]/v \end{aligned} \qquad (3.60)$$

ここで、任意の$v \in V$に対し、Ｕを以下の条件を満たす３つの部分集合$U_1(v)$、$U_2(v)$および$U_3(v)$に分割する。

$$U_1(v) \cup U_2(v) \cup U_3(v) = U \qquad (3.61)$$

$$U_i(v) \cap U_j(v) = \phi \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \ i \neq j \qquad (3.62)$$

$$\forall u \in U_1(v) \quad \mu_A(u) < \mu_B(v) \qquad (3.63)$$

$$\forall u \in U_2(v) \quad \mu_A(u) = \mu_B(v) \qquad (3.64)$$

$$\forall u \in U_3(v) \quad \mu_A(u) > \mu_B(v) \qquad (3.65)$$

これら$U_1(v)$、$U_2(v)$、$U_3(v)$を使用すれば式（３．６０）は以下のように変形できる。

式（3．60）

$$= \int_V \left(\bigvee_{u \in U_1(v)} \mu_A{}^d(u) \wedge (1 - \mu_B(v)) \right) \vee \left(\bigvee_{u \in U_2(v)} \mu_A{}^d(u) \right) / v$$

$$= \int_V \bigvee_{u \in U_2(v)} \mu_A{}^d(u) / v$$

$$= \int_V \mu_B{}^d(v) / v$$

$$= B^d$$

これはｄ＝１、ｄ＝２、及びｄ＝０．５のとき関係Ⅰ、Ⅱ－１およびⅢが成立することを示している。

次に、Ａ’＝ｎｏｔ Ａ（＝￢Ａ）としてＲｓｇとの間にＣＲＩを適用したときに関係Ⅳ－２が成立することを示す。

$$B' = \neg A \text{ o } [(A \times V - s \rightarrow U \times B) \cap (\neg A \times V - g \rightarrow U \times \neg B)]$$

$$= \int_U (1 - \mu_A(u)) / u \text{ o } \int_{U \times V} (\mu_A(u) - s \rightarrow \mu_B(v)) \wedge ((1 - \mu_A(u)) - g \rightarrow (1 - \mu_B(v))) / (u, v)$$

$$= \int_V \bigvee_{u \in U} [(1 - \mu_A(u)) \wedge \{ (\mu_A(u) - s \rightarrow \mu_B(v)) \wedge ((1 - \mu_A(u)) - g \rightarrow (1 - \mu_B(v))) \}] / v$$

$$= \int_V \left(\bigvee_{u \in U_1(v)} (1 - \mu_A(u)) \wedge (1 - \mu_B(v)) \right) \vee \left(\bigvee_{u \in U_2(v)} 1 - \mu_A(u) \right) / v$$

$$= \int_V (1 - \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_B(v)) / v$$

$$= \int_V (1 - \mu_B(v)) / v$$

$$= \neg B = \text{not } B$$

これは関係Ⅳ－２の成立を示している。

以上ですべての関係の成立が証明された。

［証明終］

3．5．6　タイプ4の条件を満たす推論方法の定式化

一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓの形式でタイプ4の条件を満たす推論について再度まとめると以下の通りである。すなわち、

前提1：Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ａ　ｔｈｅｎ　ｙ　ｉｓ　Ｂ．

前提2：　　ｘ　ｉｓ　Ａ’．

結論　：　　ｙ　ｉｓ　Ｂ’．

の形式の推論で、前提2のＡ’と結論のＢ’の間に表3．7に示す関係が成立するものである。

表3．7　タイプ4のファジイ条件推論に要求される関係

関　係	前　提　2	結　　　論
Ⅰ	Ａ	Ｂ
Ⅱ－2	ｖｅｒｙ Ａ	Ｂ
Ⅲ	more or less Ａ	more or less Ｂ
Ⅳ－2	ｎｏｔ Ａ	ｎｏｔ Ｂ

このタイプの推論に対しては、前提1を以下で定義されるファジイ関係Ｒｇｇに変換すればＡ’ｏＲｇｇにより上記関係を満たす結論Ｂ’が得られる。

［定義3．4］

Ｕ上のファジイ集合Ａ、Ｖ上のファジイ集合Ｂが各々以下のように定義されており、かつこれらは式（3．68）～式（3．70）の条件を満たすものとする。

$$A=\int_U \mu_A(u)/u \tag{3.66}$$

$$B=\int_V \mu_B(v)/v \tag{3.67}$$

$$\{\mu_A(u)\mid u\in U\}\supseteq\{\mu_B(v)\mid v\in V\} \tag{3.68}$$

$$\exists u\in U\quad \mu_A(u)=0,\qquad \exists u'\in U\quad \mu_A(u')=1 \tag{3.69}$$

$$\exists v\in V\quad \mu_B(v)=0,\qquad \exists v'\in V\quad \mu_B(v')=1 \tag{3.70}$$

このときファジイ関係Ｒｇｇを以下のように定義する。

$$Rgg = (A \times V -gg\rightarrow U \times B)$$
$$= (A \times V -g\rightarrow U \times B) \cap (\neg A \times V -g\rightarrow U \times \neg B) \qquad (3.71)$$

［定義終］

次にＲｇｇを使用するとタイプ４に課せられた各関係が成立することを証明する。

［定理３．４］

定義３．４のＲｇｇを一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓの形式の推論に適用した場合、関係Ｉ、Ⅱ－２、Ⅲ、およびⅣ－２が満たされる。

［定理終］

［証明］

一般に$A' = A^d$（$d > 0$）とおいてＲｇｇとの間でＣＲＩを適用すると、結論Ｂ’は以下の通りとなる。

$$B' = A^d \circ [(A \times V -g\rightarrow U \times B) \cap (\neg A \times V -g\rightarrow U \times \neg B)]$$
$$= \int_U \mu_A{}^d(u)/u \circ \int_{U \times V} (\mu_A(u) -g\rightarrow \mu_B(v)) \wedge ((1-\mu_A(u)) -g\rightarrow (1-\mu_B(v)))/(u, v)$$
$$= \int_V \bigvee_{u \in U} [\mu_A{}^d(u) \wedge \{(\mu_A(u) -g\rightarrow \mu_B(v)) \wedge ((1-\mu_A(u)) -g\rightarrow (1-\mu_B(v)))\}]/v$$
$$(3.72)$$

ここで、任意の$v \in V$に対し、Ｕを式（３．６１）～式（３．６５）の条件を満たす３つの部分集合$U_1(v)$、$U_2(v)$および$U_3(v)$に分割する。これら$U_1(v)$、$U_2(v)$、$U_3(v)$を使用すれば式（３．７２）は以下のように変形できる。

式（３．７２）

$$= \int_V \left(\bigvee_{u \in U_1(v)} \mu_A{}^d(u) \wedge (1-\mu_B(v)) \right) \vee \left(\bigvee_{u \in U_2(v)} \mu_A{}^d(u) \right) \vee \left(\bigvee_{u \in U_3(v)} (\mu_A{}^d(u) \wedge \mu_B(v)) \right)/v$$

$$= \begin{cases} \int_V \mu_B(v)/v = B & \cdots\cdots \quad d \geq 1 \\ \int_V \mu_B{}^d(v)/v = B^d & \cdots\cdots \quad d < 1 \end{cases}$$

以上で関係Ｉ、Ⅱ－２およびⅢの成立が示された。

また、A’＝not A（＝¬A）の場合は以下のようになる。

$$B' = \neg A \circ [(A \times V - g \to U \times B) \cap (\neg A \times V - g \to U \times \neg B)]$$

$$= \int_U (1-\mu_A(u))/u \circ \int_{U \times V} (\mu_A(u) - g \to \mu_B(v)) \wedge ((1-\mu_A(u)) - g \to (1-\mu_B(v)))/(u, v)$$

$$= \int_V \bigvee_{u \in U} [(1-\mu_A(u)) \wedge \{(\mu_A(u) - g \to \mu_B(v)) \wedge ((1-\mu_A(u)) - g \to (1-\mu_B(v)))\}]/v$$

$$= \int_V (\bigvee_{u \in U_1(v)} (1-\mu_A(u)) \wedge (1-\mu_B(v))) \vee (\bigvee_{u \in U_2(v)} 1-\mu_A(u)) \vee (\bigvee_{u \in U_3(v)} ((1-\mu_A(u)) \wedge \mu_B(v)))/v$$

$$= \int_V (1-\mu_B(v)) \vee (1-\mu_B(v)) \vee \nu(v)/v$$

但しここで $\nu(v) \leqq 1-\mu_B(v)$

$$= \int_V (1-\mu_B(v))/v$$

$$= \neg B = \text{not } B$$

これは関係Ⅳ－２の成立を示している。

以上ですべての関係の成立が証明された。

［証明終］

３．５．７ 推論例

前節までにおいて種々のタイプのファジイ条件推論方法を定式化した。本節では、これら推論の具体例をいくつか示す。

Ｕ上のファジイ集合Ａ、Ｖ上のファジイ集合Ｂおよびファジイ条件命題Ｐを以下の通りとする。

$U = V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A = \text{small} = 1/0 + 0.8/1 + 0.6/2 + 0.4/3 + 0.2/4$

$B = \text{middle} = 0.2/2 + 0.4/3 + 0.8/4 + 1/5 + 0.8/6 + 0.4/7 + 0.2/8$

Ｐ：If x is small then y is middle.

上記Ｐに対してファジイ関係Ｒｓを構成すると次のようになる。

Ｒｓ＝ｓｍａｌｌ×Ｖ－ｓ→Ｕ×ｍｉｄｄｌｅ

$$
= \begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{vmatrix}
$$

本Ｒｓに対し、Ａ’としてｓｍａｌｌ、ｖｅｒｙ　ｓｍａｌｌ、ｎｏｔ　ｓｍａｌｌ、ｍｉｄｄｌｅを選びＣＲＩを適用すると、結論は各々以下のようになる。

（１）　Ｂ’＝ｓｍａｌｌ　ｏ　Ｒｓ

＝（1／０＋0.8／１＋0.6／２＋0.4／３＋0.2／４）　ｏ　Ｒｓ

＝0.2／２＋0.4／３＋0.8／４＋1／５＋0.8／６＋0.4／７＋0.2／８

＝ｍｉｄｄｌｅ

（２）　Ｂ’＝（ｖｅｒｙ　ｓｍａｌｌ）　ｏ　Ｒｓ

＝（ｓｍａｌｌ）^{2}　ｏ　Ｒｓ

＝（1／０＋0.64／１＋0.36／２＋0.16／３＋0.04／４）ｏＲｓ

＝0.04／２＋0.16／３＋0.64／４＋1／５＋0.64／６＋0.16／７＋0.04／８

＝（ｍｉｄｄｌｅ）^{2}

＝ｖｅｒｙ　ｍｉｄｄｌｅ

（３）　Ｂ’＝（ｎｏｔ　ｓｍａｌｌ）　ｏ　Ｒｓ

＝（0.2／１＋0.4／２＋0.6／３＋0.8／４＋1／５＋1／６＋1／７＋1／８

＋1／９＋1／１０）　ｏ　Ｒｓ

＝Ｖ

＝ｕｎｋｎｏｗｎ

(4)　B' = (middle) o Rs

$= (0.2/2 + 0.4/3 + 0.8/4 + 1/5 + 0.8/6 + 0.4/7 + 0.2/8)$ o Rs

$= V$

= unknown

以上の推論を言葉で表現すると、各々以下のようになる。

(1)　If x is small then y is middle.
x is small.

---

y is middle.

(2)　If x is small then y is middle.
x is very small.

---

y is very middle.

(3)　If x is small then y is middle.
x is not small.

---

y is unknown.

(4)　If x is small then y is middle.
x is middle.

---

y is unknown.

3．6　一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓの成立性 [MFT78b] [MFT79a]

本節では、３．５節で定義したファジイ関係Ｒｓ、Ｒｇ、Ｒｓｇ、Ｒｇｇを一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓ　の形式の推論に適用した場合、３．３節で設定した関係Ｖ～関係Ⅷ－２が成立するか否かについて論じる。

なお、本節では一般に、

前提１：Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ａ　ｔｈｅｎ　ｙ　ｉｓ　Ｂ．

前提２：　　　ｙ　ｉｓ　Ｂ’．

結論　：　　　ｘ　ｉｓ　Ａ’．

の形式の推論において、Ｕ上のファジイ集合Ａ、Ｖ上のファジイ集合Ｂが各々以下のように定義されており、かつこれらは前節の場合と同様、式（３．７５）～式（３．７７）の条件を満たすものとする。

$$A = \int_U \mu_A(u)/u \tag{3.73}$$

$$B = \int_V \mu_B(v)/v \tag{3.74}$$

$$\{\mu_A(u) \mid u \in U\} \supseteq \{\mu_B(v) \mid v \in V\} \tag{3.75}$$

$$\exists u \in U \quad \mu_A(u) = 0, \qquad \exists u' \in U \quad \mu_A(u') = 1 \tag{3.76}$$

$$\exists v \in V \quad \mu_B(v) = 0, \qquad \exists v' \in V \quad \mu_B(v') = 1 \tag{3.77}$$

［定理３．５］

ファジイ関係Ｒｓを一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓの形式の推論に適用した場合、関係Ｖ、Ⅵ、Ⅶ、及びⅧ－１が成立する。

［定理終］

［証明］

Ｂ’を一般に$\neg B^d$（ｄ＞０）としてＲｓとの間にＣＲＩを適用すると、結論Ａ’は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
A' &= R_s \circ (\neg B^d) \\
&= \int_{U\times V} \mu_A(u) \underset{s}{\rightarrow} \mu_B(v)/(u,v) \quad \circ \quad \int_V 1-\mu_B{}^d(v)/v \\
&= \int_U \bigvee_{v\in V} [\,(1-\mu_B{}^d(v)) \wedge (\mu_A(u) \underset{s}{\rightarrow} \mu_B(v))\,]/u
\end{aligned} \tag{3.78}
$$

ここで、任意の$u \in U$に対し、Vは以下の条件を満たす２つの部分集合$V_1(u)$と$V_2(u)$に分割できる。

$$V_1(u) \cup V_2(u) = V, \quad V_1(u) \cap V_2(u) = \phi \tag{3.79}$$

$$\forall v \in V_1(u) \qquad \mu_A(u) \leqq \mu_B(v) \tag{3.80}$$

$$\forall v \in V_2(u) \qquad \mu_A(u) > \mu_B(v) \tag{3.81}$$

従ってこれら$V_1(u)$、$V_2(u)$を使用すれば式（３．７８）は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
&\text{式（３．７８）}\\
&= \int_U \bigvee_{v \in V_1(u)} 1 - \mu_B{}^d(v) / u\\
&= \int_U 1 - \mu_A{}^d(u) / u \qquad \because \text{式(3.75)および式(3.80)の仮定より}\\
&= \neg A^d
\end{aligned}$$

以上により関係Ⅴ、Ⅵ、およびⅦの成立が示された。

次に、B’＝BとしてＲｓとの間にＣＲＩを適用すると、結論A’は以下の通りとなる。

$$\begin{aligned}
A' &= [\,(A \times V) \xrightarrow{s} (U \times B)\,] \circ B\\
&= \int_U \bigvee_{v \in V} [\,(\mu_A(u) \xrightarrow{s} \mu_B(v)) \wedge \mu_B(v)\,] / u\\
&= \int_U 1 / u\\
&= U = \text{unknown}
\end{aligned}$$

これは関係Ⅳ－１の成立を示している。

以上ですべての関係の成立が証明された。

［証明終］

［定理３．６］

ファジイ関係Ｒｇを一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓの形式の推論に適用した場合、関係Ⅴ、Ⅵ、Ⅶは成立せず、関係Ⅷ－１のみが成立する。

［定理終］

［証明］

B’を一般に$\neg B^d$（$d > 0$）としてＲｇとの間にＣＲＩを適用すると、結論A’は以下のようになる。

$$A' = Rg \circ (\neg B^d)$$

$$= \int_{U\times V} \mu_A(u) -g\rightarrow \mu_B(v) / (u, v) \circ \int_V 1-\mu_B{}^d(v)/v$$

$$= \int_U \bigvee_{v\in V} [(1-\mu_B{}^d(v)) \wedge (\mu_A(u) -g\rightarrow \mu_B(v))] / u$$

$$= \int_U (\bigvee_{v\in V_1(u)} 1-\mu_B{}^d(v)) \vee (\bigvee_{v\in V_2(u)} (1-\mu_B{}^d(v)) \wedge \mu_B(v)) / u$$

ここで、$V_1(u)$, $V_2(u)$は式（３．７９）～式（３．８１）の条件を満たすものとする。

$$= \int_U (1-\mu_A{}^d(u)) \vee \gamma(d) / u$$

但し、γ（ｄ）は方程式　$x^d + x - 1 = 0$　の解のうち、区間［０，１］の値をとるものである。

$$= \begin{cases} \int_U (1-\mu_A(u)) \vee 0.5 / u & \cdots\cdots \quad d=1 \text{の場合} \\ \int_U (1-\mu_A{}^2(u)) \vee ((\sqrt{5}-1)/2) / u & \cdots\cdots \quad d=2 \text{の場合} \\ \int_U (1-\mu_A{}^{1/2}(u)) \vee ((3-\sqrt{5})/2) / u & \cdots\cdots \quad d=1/2 \text{の場合} \end{cases}$$

以上により関係Ⅴ、Ⅵ、およびⅦの不成立が示された。

次に、Ｂ’＝ＢとしてＲｓとの間にＣＲＩを適用すると、結論Ａ’は以下の通りとなる。

$$A' = [(A\times V) -g\rightarrow (U\times B)] \circ B$$

$$= \int_U \bigvee_{v\in V} [(\mu_A(u) -g\rightarrow \mu_B(v)) \wedge \mu_B(v)] / u$$

$$= \int_U \bigvee_{v\in V} \mu_B(v)/u$$

$$= \int_U 1/u$$

$$= U = \text{unknown}$$

これは関係Ⅳ－１の成立を示している。

［証明終］

［定理３．７］

ファジイ関係Ｒｓｇを一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓ　の形式の推論に適用した

場合、関係Ⅴ、Ⅵ、Ⅶは成立するが、関係Ⅷ－１、Ⅷ－２は共に成立しない。

［定理終］

［証明］

Ｂ’を一般に$\neg B^{d}$（ｄ＞０）としてＲｓｇとの間にＣＲＩを適用すると、結論Ａ’は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
A' &= R_{sg} \circ (\neg B^{d}) \\
&= \int_{U\times V} (\mu_A(u) \xrightarrow{s} \mu_B(v)) \wedge ((1-\mu_A(u)) \xrightarrow{g} (1-\mu_B(v)))/(u,v) \\
&\qquad \circ \int_V 1-\mu_B{}^{d}(v)/v \\
&= \int_U \bigvee_{v\in V} [(\mu_A(u) \xrightarrow{s} \mu_B(v)) \wedge \\
&\qquad ((1-\mu_A(u)) \xrightarrow{g} (1-\mu_B(v))) \wedge (1-\mu_B{}^{d}(v))]/u
\end{aligned}
\tag{3.82}
$$

ここで、任意の$u \in U$に対し、Ｖを以下の条件を満たす２つの部分集合$V_1(u)$、$V_2(u)$および$V_3(u)$に分割する。

$$V_1(u) \cup V_2(u) \cup V_3(u) = V \tag{3.83}$$

$$V_i(u) \cap V_j(u) = \phi \quad i,\ j \in \{1,\ 2,\ 3\},\ i \neq j \tag{3.84}$$

$$\forall v \in V_1(u) \quad \mu_A(u) < \mu_B(v) \tag{3.85}$$

$$\forall v \in V_2(u) \quad \mu_A(u) = \mu_B(v) \tag{3.86}$$

$$\forall v \in V_3(u) \quad \mu_A(u) > \mu_B(v) \tag{3.87}$$

従ってこれら$V_1(u)$、$V_2(u)$および$V_3(u)$を使用すれば式（３．８２）は以下のように変形できる。

式（３．８２）

$$
\begin{aligned}
&= \int_U \Big(\bigvee_{v\in V_1(u)} (1-\mu_B(v)) \wedge (1-\mu_B{}^{d}(v)) \Big) \\
&\qquad \vee \Big(\bigvee_{v\in V_2(u)} (1-\mu_B{}^{d}(v)) \Big)/u \\
&= \int_U 1-\mu_A{}^{d}(u)/u \qquad \because \text{式(3.75), (3.85)および式(3.86)の仮定より} \\
&= \neg A^{d}
\end{aligned}
$$

以上により関係Ⅴ、Ⅵ、およびⅦの成立が示された。

次に、B’＝BとしてＲｓｇとの間にＣＲＩを適用すると、結論A’は以下の通りとなる。

$$
\begin{aligned}
A' &= Rsg \circ B \\
&= \int_U \bigvee_{v \in V} [(\mu_A(u) -s\rightarrow \mu_B(v)) \wedge \\
&\qquad ((1-\mu_A(u)) -g\rightarrow (1-\mu_B(v))) \wedge \mu_B(v)] / u \\
&= \int_U [\bigvee_{v \in V_1(u)} (1-\mu_B(v)) \wedge \mu_B(v)] \vee [\bigvee_{v \in V_2(u)} \mu_B(v)] / u \\
&= \int_U 0.5 \vee \mu_A(u) / u
\end{aligned}
$$

これは関係Ⅳ－１、Ⅳ－２の不成立を示している。

［証明終］

［定理３．８］

ファジイ関係Ｒｇｇを一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓ　の形式の推論に適用した場合、関係Ｖ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ－１及びⅧ－２は共に成立しない。

［定理終］

［証明］

B’を一般に$\neg B^d$（ｄ＞０）としてＲｇｇとの間にＣＲＩを適用すると、結論A’は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
A' &= Rgg \circ (\neg B^d) \\
&= \int_{U \times V} (\mu_A(u) -g\rightarrow \mu_B(v)) \wedge \\
&\qquad ((1-\mu_A(u)) -g\rightarrow (1-\mu_B(v))) / (u, v) \\
&\qquad\qquad \circ \int_V 1-\mu_B{}^d(v) / v \\
&= \int_U \bigvee_{v \in V} [(\mu_A(u) -s\rightarrow \mu_B(v)) \wedge \\
&\qquad ((1-\mu_A(u)) -g\rightarrow (1-\mu_B(v))) \wedge (1-\mu_B{}^d(v))] / u \\
&= \int_U (\bigvee_{v \in V_1(u)} (1-\mu_B(v)) \wedge (1-\mu_B{}^d(v))) \\
&\qquad \vee (\bigvee_{v \in V_2(u)} (1-\mu_B{}^d(v))) \\
&\qquad \vee (\bigvee_{v \in V_3(u)} \mu_B(v) \wedge (1-\mu_B{}^d(v))) / u
\end{aligned}
$$

ここで、$V_1(u)$、$V_2(u)$および$V_3(u)$は式（３．８３）～式（３．８７）の条件を満たすものとする。

$$= \int_U (1-\mu_A{}^d(u)) \vee \gamma(d) / u$$

但し、γ（ｄ）は方程式　$x^d + x - 1 = 0$　の解のうち、区間［０，１］の値をとるものである。

$$= \begin{cases} \int_U (1-\mu_A(u)) \vee 0.5 / u & \cdots\cdots \quad d=1 \text{の場合} \\ \int_U (1-\mu_A{}^2(u)) \vee ((\sqrt{5}-1)/2) / u & \cdots\cdots \quad d=2 \text{の場合} \\ \int_U (1-\mu_A{}^{1/2}(u)) \vee ((3-\sqrt{5})/2) / u & \cdots\cdots \quad d=1/2 \text{の場合} \end{cases}$$

以上により関係Ｖ、Ⅵ、およびⅦの不成立が示された。

次に、Ｂ’＝ＢとしてＲｓｇとの間にＣＲＩを適用すると、結論Ａ’は以下の通りとなる。

$$A' = R_{gg} \circ B$$

$$= \int_U \bigvee_{v \in V} [(\mu_A(u) \underset{g}{\to} \mu_B(v)) \wedge ((1-\mu_A(u)) \underset{g}{\to} (1-\mu_B(v))) \wedge \mu_B(v)] / u$$

$$= \int_U [\bigvee_{v \in V_1(u)} (1-\mu_B(v)) \wedge \mu_B(v)] \vee [\bigvee_{v \in V_2(u)} \mu_B(v)] / u$$

$$= \int_U 0.5 \vee \mu_A(u) / u$$

これは関係Ⅷ－１、Ⅷ－２の不成立を示している。

［証明終］

以上において、ファジイ関係Ｒｓ、Ｒｇ、ＲｓｇおよびＲｇｇを一般化ｍｏｄｕｓ ｔｏｌｌｅｎｓに適用した場合に３．３節で設定した関係Ｖ～Ⅷ－２が満たされるか否かを調べた結果について述べた。　その結果、ＲｓおよびＲｓｇは一般化ｍｏｄｕｓ ｔｏｌｌｅｎｓの形式の推論においても妥当な結論を導くことが示された。

３．７　推移律、対偶律の成立性 [FMT78a] [FMT80]

３．７．１　推移律について

Ｐ、Ｑ、Ｒを古典２値論理に於ける命題としたとき、一般に以下の式が成立する。

$P \to Q,\ Q \to R \ \vdash\ P \to R$

これは命題Ｐ→Ｑ、Ｑ→Ｒを仮定すると、Ｐ→Ｒが証明可能であること、すなわち推移律が成立することを示している。

一方、ファジイ条件文においてもこれと同様の関係が成立することは、意味的にもごく自然であり、さらに、成立が保証されれば以下のようなメリットも生じる。すなわち、たとえば前節で述べたファジイ条件推論法をエキスパートシステム等に適用した場合を考える。ここで推移律が成立しない場合、

Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ａ　ｔｈｅｎ　ｙ　ｉｓ　Ｂ.

Ｉｆ　ｙ　ｉｓ　Ｂ　ｔｈｅｎ　ｚ　ｉｓ　Ｃ.

の２つのルールに対して”ｘ　ｉｓ　Ａ’”が与えられたとき、ｚに関する値Ｃ’を求める為にはｘとｙの関係Ｒ１に対してまずＡ’ｏＲ１を実行し、さらにｙとｚの関係Ｒ２に対して（Ａ’ｏ Ｒ１）ｏ Ｒ２を実行する必要がある。しかし、推移律の成立が保証されていれば、上記２つの条件文中のＡとＣからｘとｚの関係Ｒ３を直接構成し、Ａ’ｏ Ｒ３を実行すればただちに答えが得られる。これは計算量の低減をもたらすものであり、効果的と言えよう。

以上より、本節では前節までに述べてきた各ファジイ関係が推移律を満たすか否かについて議論する。

［定義３．５］

ファジイ条件文から生成されるファジイ関係ＲがＣＲＩのもとで推移律を満たすとは、以下の関係が成り立つことを言う。

Ｐ１：Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ａ　ｔｈｅｎ　ｙ　ｉｓ　Ｂ.　－－→　Ｒ１

Ｐ２：Ｉｆ　ｙ　ｉｓ　Ｂ　ｔｈｅｎ　ｚ　ｉｓ　Ｃ.　－－→　Ｒ２

Ｐ３：Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ａ　ｔｈｅｎ　ｚ　ｉｓ　Ｃ.　－－→　Ｒ３＝Ｒ１ｏＲ２

すなわち、ファジイ条件文Ｐ３から生成されるファジイ関係Ｒ３は、Ｐ１およびＰ２からそれぞれ生成されるファジイ関係にＣＲＩを適用したものに等しい。　［定義終］

以下では、ＺａｄｅｈによるＲｍ、Ｒａ、ＭａｍｄａｎｉによるＲｃおよび本論文で定義したＲｓ、Ｒｇ、Ｒｓｇ、Ｒｇｇが推移律を満たすか否かについて述べる。

なお、以下ではいずれも３つのファジイ条件文、

Ｐ１：Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ａ　ｔｈｅｎ　ｙ　ｉｓ　Ｂ．

Ｐ２：Ｉｆ　ｙ　ｉｓ　Ｂ　ｔｈｅｎ　ｚ　ｉｓ　Ｃ．

Ｐ３：Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ａ　ｔｈｅｎ　ｚ　ｉｓ　Ｃ．

に対し、ファジイ集合Ａ、Ｂ、Ｃが次のように定義されており、かつそのメンバシップ関数は式（３．９１）～式（３．９４）の条件を満たすものとする。

$$A = \int_U \mu_A(u)/u \tag{3.88}$$

$$B = \int_V \mu_B(v)/v \tag{3.89}$$

$$C = \int_W \mu_C(w)/w \tag{3.90}$$

$$\{\mu_A(u) \mid u \in U\} \supseteq \{\mu_B(v) \mid v \in V\} \supseteq \{\mu_C(w) \mid w \in W\} \tag{3.91}$$

$$\exists u \in U \quad \mu_A(u) = 0, \qquad \exists u' \in U \quad \mu_A(u') = 1 \tag{3.92}$$

$$\exists v \in V \quad \mu_B(v) = 0, \qquad \exists v' \in V \quad \mu_B(v') = 1 \tag{3.93}$$

$$\exists w \in W \quad \mu_C(w) = 0, \qquad \exists w' \in W \quad \mu_C(w') = 1 \tag{3.94}$$

［定理３．９］

Ｚａｄｅｈの定義したファジイ関係Ｒｍ、Ｒａはともに推移律を満たさない。

［証明］

（１）Ｒｍの場合

Ｐ１、Ｐ２およびＰ３のファジイ条件文から生成されるファジイ関係をＲｍ１、Ｒｍ２およびＲｍ３とする。

$$
\begin{aligned}
&Rm1 \circ Rm2 \\
&= [\,(A \times B) \cup (\neg A \times V)\,] \circ [\,(B \times C) \cup (\neg B \times W)\,] \\
&= \int_{U \times V} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u)) \,/(u,\ v) \\
&\qquad \circ \int_{V \times W} (\mu_B(v) \wedge \mu_C(w)) \vee (1 - \mu_B(v)) \,/(v,\ w)
\end{aligned}
$$

$$= \int_{U\times W} \bigvee_{v\in V} [(\mu_A(u)\wedge\mu_B(v)) \vee (1-\mu_A(u))] \wedge [(\mu_B(v)\wedge\mu_C(w)) \vee (1-\mu_B(v))] / (u, w)$$

ここでたとえば$\mu_A(u')=0.6$、$\mu_C(w')=0.3$となるu'、w'を選ぶと、これらに対してRm1oRm2は以下のようになる。

$$Rm1 \circ Rm2\ (u', w')$$

$$= \bigvee_{v\in V} [(0.6\wedge\mu_B(v)) \vee 0.4] \wedge [(\mu_B(v)\wedge 0.3) \vee (1-\mu_B(v))]$$

$$= 0.5$$

一方、Rm3に上記u'、w'を代入すると、以下のようになる。

$$Rm3\ (u', w')$$

$$= (\mu_A(u')\wedge\mu_C(w')) \vee (1-\mu_A(u'))$$

$$= (0.6\wedge 0.3) \vee (0.4)$$

$$= 0.4$$

$$\neq 0.5 = Rm1 \circ Rm2\ (u', w')$$

以上でRmの推移律不成立が示された。

(2) Raの場合

Rmの場合と同様P1、P2およびP3のファジイ条件文から生成されるファジイ関係をRa1、Ra2およびRa3とする。

$$Ra1 \circ Ra2$$

$$= [(\neg A\times V) \oplus (U\times B)] \circ [(\neg B\times W) \oplus (V\times C)]$$

$$= \int_{U\times V} 1\wedge(1-\mu_A(u)+\mu_B(v)) / (u, v)$$

$$\circ \int_{V\times W} 1\wedge(1-\mu_B(v)+\mu_C(w)) / (v, w)$$

$$= \int_{U\times W} \bigvee_{v\in V} [1\wedge(1-\mu_A(u)+\mu_B(v)) \wedge (1-\mu_B(v)+\mu_C(w))] / (u, w)$$

ここで$\mu_A(u')=0.6$、$\mu_C(w')=0.4$となるu'、w'を選ぶと、これらに対してRa1oRa2は以下のようになる。

$$Ra1 \circ Ra2\ (u', w')$$

$$= \bigvee_{v\in V} [1\wedge(0.4+\mu_B(v)) \wedge (1.4-\mu_B(v))]$$

$=0.9$

一方、Ｒａ３に上記ｕ’、ｗ’を代入すると、以下のようになる。

$$Ra3(u', w')$$
$$=1\wedge(1-\mu_A(u')+\mu_C(w'))$$
$$=1\wedge(1-0.6+0.4)$$
$$=0.8$$
$$\neq 0.9=Ra1\ o\ Ra2(u', w')$$

以上でＲａの推移律不成立が示された。

［証明終］

［定理３．１０］

Ｍａｍｄａｎｉの定義したファジイ関係Ｒｃは推移律を満たす。

［証明］

Ｒｍの場合と同様Ｐ１、Ｐ２およびＰ３のファジイ条件文から生成されるファジイ関係をＲｃ１、Ｒｃ２およびＲｃ３とする。

$$Rc1\ o\ Rc2$$
$$=(A\times B)\ o\ (B\times C)$$
$$=\int_{U\times V}\mu_A(u)\wedge\mu_B(v)/(u, v)$$
$$\quad o\ \int_{V\times W}\mu_B(v)\wedge\mu_C(w)/(v, w)$$
$$=\int_{U\times W}\bigvee_{v\in V}[\mu_A(u)\wedge\mu_B(v)\wedge\mu_C(w)]/(u, w)$$
$$=\int_{U\times W}\mu_A(u)\wedge\mu_C(w)/(u, w)$$
$$=Rc3$$

以上でＲｃの推移律成立が証明された。

［証明終］

［定理３．１１］

ファジイ関係Ｒｓ、Ｒｇ、Ｒｓｇ、Ｒｇｇは共に推移律を満たす。

［証明］

（１）Ｒｓの場合

Ｒｍの場合と同様Ｐ１、Ｐ２およびＰ３のファジイ条件文から生成されるファジイ関係をＲｓ１、Ｒｓ２およびＲｓ３とする。

$$
\begin{aligned}
&Rs1 \circ Rs2\\
&= (A \times V -s\rightarrow U \times B) \circ (B \times W -s\rightarrow V \times C)\\
&= \int_{U\times V} \mu_A(u) -s\rightarrow \mu_B(v) / (u, v)\\
&\qquad \circ \int_{V\times W} \mu_B(v) -s\rightarrow \mu_C(w) / (v, w)\\
&= \int_{U\times W} \bigvee_{v\in V} [\,(\mu_A(u) -s\rightarrow \mu_B(v)) \wedge (\mu_B(v) -s\rightarrow \mu_C(w))\,] / (u, w)
\end{aligned}
\tag{3.95}
$$

ここで、Ｓ（ｖ）を以下のように定義する。

$$S(v) = (\mu_A(u) -s\rightarrow \mu_B(v)) \wedge (\mu_B(v) -s\rightarrow \mu_C(w))$$

本定義のもとでＳ（ｖ）は以下の値をとる。

$$S(v) = \begin{cases} 1 & \cdots\cdot\ \ \mu_A(u) \leqq \mu_B(v) \leqq \mu_C(w)\text{の場合} \\ 0 & \cdots\cdot\ \ \text{その他の場合} \end{cases}$$

一方、式（３．９１）～式（３．９４）の仮定より、

$$\mu_A(u) \leqq \mu_C(w)$$

が成立するときは常にあるｖ∈Ｖが存在し、

$$\mu_A(u) \leqq \mu_B(v) \leqq \mu_C(w)$$

が成立する。以上の議論より、次の式の成立が言える。

$$\bigvee_{v\in V} S(v) = \begin{cases} 1 & \cdots\cdot\ \ \mu_A(u) \leqq \mu_C(w)\text{の場合} \\ 0 & \cdots\cdot\ \ \mu_A(u) > \mu_C(w)\text{の場合} \end{cases}$$

従ってこのことより式（３．９５）は以下のように変形できる。

$$
\begin{aligned}
&\text{式}(3.95)\\
&= \int_{U\times W} \bigvee_{v\in V} S(v) / (u, w)\\
&= \int_{U\times W} \mu_A(u) -s\rightarrow \mu_C(w) / (u, w)
\end{aligned}
$$

$=Rs3$

以上でＲｓの推移律成立が証明された。

（２）Ｒｇの場合

$Rg1 \circ Rg2$

$$= \int_{U \times V} \mu_A(u) -g\rightarrow \mu_B(v) / (u, v)$$

$$\circ \int_{V \times W} \mu_B(v) -g\rightarrow \mu_C(w) / (v, w)$$

$$= \int_{U \times W} \bigvee_{v \in V} [(\mu_A(u) -g\rightarrow \mu_B(v)) \wedge (\mu_B(v) -g\rightarrow \mu_C(w))] / (u, w) \qquad (3.96)$$

ここで、

$$S(v) = (\mu_A(u) -g\rightarrow \mu_B(v)) \wedge (\mu_B(v) -g\rightarrow \mu_C(w))$$

とおくとＲｓの場合と同様にして以下が示せる。

$$\bigvee_{v \in V} S(v) = \begin{cases} 1 & \cdots\cdots \ \mu_A(u) \leqq \mu_C(w) \text{の場合} \\ \mu_C(w) & \cdots\cdots \ \mu_A(u) > \mu_C(w) \text{の場合} \end{cases}$$

従ってこのことより式（３．９６）は以下のように変形できる。

$$\int_{U \times W} \bigvee_{v \in V} S(v) / (u, w)$$

$$= \int_{U \times W} \mu_A(u) -g\rightarrow \mu_C(w) / (u, w)$$

$=Rg3$

以上でＲｇの推移律成立が証明された。

（３）Ｒｓｇの場合

$Rsg1 \circ Rsg2$

$$= \int_{U \times V} (\mu_A(u) -s\rightarrow \mu_B(v)) \wedge ((1-\mu_A(u)) -g\rightarrow (1-\mu_B(v))) / (u, v)$$

$$\circ \int_{V \times W} (\mu_B(v) -s\rightarrow \mu_C(w)) \wedge ((1-\mu_B(v)) -g\rightarrow (1-\mu_C(w))) / (v, w)$$

$$= \int_{U \times W} \bigvee_{v \in V} [(\mu_A(u) -s\rightarrow \mu_B(v)) \wedge (\mu_B(v) -s\rightarrow \mu_C(w))$$

$$\wedge\ ((1-\mu_A(u)) -g\rightarrow (1-\mu_B(v)))$$

$$\wedge\ ((1-\mu_B(v)) -g\rightarrow (1-\mu_C(w)))\ /\ (u,\ w)$$

$$= \int_{U\times W} (\mu_A(u) -s\rightarrow \mu_C(w))\ \wedge\ ((1-\mu_A(u)) -g\rightarrow (1-\mu_C(w)))\ /\ (u,\ w)$$

$= Rsg3$

以上でＲｓｇの推移律成立が証明された。

また、Ｒｇｇについても同様にして証明できる。

［証明終］

ここで推移律成立の具体例を１つ示す。

ファジイ条件文Ｐ１、Ｐ２およびＰ３を以下の通りとする。

Ｐ１：Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ａ　ｔｈｅｎ　ｙ　ｉｓ　Ｂ.

Ｐ２：Ｉｆ　ｙ　ｉｓ　Ｂ　ｔｈｅｎ　ｚ　ｉｓ　Ｃ.

Ｐ３：Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ａ　ｔｈｅｎ　ｚ　ｉｓ　Ｃ.

また、ファジイ集合Ａ、Ｂ、Ｃを以下のように定める。

$U = V = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$

$A = 1/1 + 0.8/2 + 0.6/3 + 0.4/4 + 0.2/5$

$B = 0.2/4 + 0.4/5 + 0.8/6 + 1/7$

$C = 0.4/2 + 0.8/3 + 1/4 + 0.8/5 + 0.2/6$

ここでＰ１、Ｐ２およびＰ３からＲｇの定義に従って生成されるファジイ関係をＲｇ１、Ｒｇ２、Ｒｇ３とすると、これらは各々以下のようになる。

$Rg1 = A\times V -g\rightarrow U\times B$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & .2 & .4 & .8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .2 & .4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .2 & .4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ｒｇ２＝Ｂ×Ｗ－ｇ→Ｖ×Ｃ

$$
= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & .2 & 0 \\ 0 & .4 & 1 & 1 & 1 & .2 & 0 \\ 0 & .4 & .8 & 1 & .8 & .2 & 0 \end{vmatrix}
$$

Ｒｇ３＝Ａ×Ｗ－ｇ→Ｕ×Ｃ

$$
= \begin{vmatrix} 0 & .4 & .8 & 1 & .8 & .2 & 0 \\ 0 & .4 & 1 & 1 & 1 & .2 & 0 \\ 0 & .4 & 1 & 1 & 1 & .2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & .2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}
$$

ここで具体的にＲｇ１ｏＲｇ２を計算してみると、以下のとおりＲｇ３に一致する。

Ｒｇ１ｏＲｇ２

$$
= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & .2 & .4 & .8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .2 & .4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .2 & .4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \circ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & .2 & 0 \\ 0 & .4 & 1 & 1 & 1 & .2 & 0 \\ 0 & .4 & .8 & 1 & .8 & .2 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
0 & .4 & .8 & 1 & .8 & .2 & 0 \\
0 & .4 & 1 & 1 & 1 & .2 & 0 \\
0 & .4 & 1 & 1 & 1 & .2 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & .2 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{vmatrix}
$$

$= Rg3$

3．7．2　対偶律について

本章で述べた各種ファジイ関係のうち、ＲａおよびＲｓは以下に示す興味ある性質を持つ。

［定理３．１２］

互いに対偶の関係にある２つのファジイ条件文、

Ｐ１：Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ａ　ｔｈｅｎ　ｙ　ｉｓ　Ｂ．

Ｐ２：Ｉｆ　ｙ　ｉｓ　ｎｏｔ　Ｂ　ｔｈｅｎ　ｘ　ｉｓ　ｎｏｔ　Ａ．

に対し、ファジイ集合Ａ、Ｂが以下のように定義されているものとする。

$$A = \int_U \mu_A(u)/u \tag{3.97}$$

$$B = \int_V \mu_B(v)/v \tag{3.98}$$

このとき、Ｐ１、Ｐ２より得られるＲａの定義に従ったファジイ関係をそれぞれＲａ１、Ｒａ２とし、Ｒｓの定義に従ったファジイ関係をそれぞれＲｓ１、Ｒｓ２とすると、以下の関係式が成立する。

$$Ra2 = Ra1^t \tag{3.99}$$

$$Rs2 = Rs1^t \tag{3.100}$$

ここでR^tはＲの逆関係を表す。すなわちＲが行列表現されている場合、R^tはＲの転置

行列となる。

［定理終］

本定理を図式表現すると以下のようになる。

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{P1} & \dashrightarrow & \mathrm{Rs1} \\
\uparrow & & \uparrow \\
\text{対　偶} & & \text{逆関係} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{P2} & \dashrightarrow & \mathrm{Rs2}
\end{array}
$$

［証明］

（１）Ｒａの場合

$$Ra1 = (\neg A \times V) \oplus (U \times B)$$

$$= \int_{U \times V} 1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v)) / (u, v)$$

$$Ra1^t = \int_{V \times U} 1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v)) / (v, u)$$

$$= \int_{V \times U} 1 \wedge (1 - (1 - \mu_B(v)) + (1 - \mu_A(u))) / (v, u)$$

$$= (\neg(\neg B) \times U) \oplus (V \times (\neg A))$$

$$= Ra2$$

（２）Ｒｓの場合

$$Rs1 = (A \times V) -s\rightarrow (U \times B)$$

$$= \int_{U \times V} \mu_A(u) -s\rightarrow \mu_B(v) / (u, v)$$

$$Rs1^t = \int_{V \times U} \mu_A(u) -s\rightarrow \mu_B(v) / (v, u)$$

$$= \int_{V \times U} (1 - \mu_B(v)) -s\rightarrow (1 - \mu_A(u)) / (v, u)$$

$$= (\neg B) \times U -s\rightarrow V \times (\neg A)$$

$$= Rs2$$

［証明終］

以下に対偶律に関する具体例を１つ示す。

ファジイ条件命題Ｐ１、Ｐ２およびファジイ集合Ａ、Ｂを以下のようにおく。

Ｐ１：Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ａ　ｔｈｅｎ　ｙ　ｉｓ　Ｂ．

Ｐ２：Ｉｆ　ｙ　ｉｓ　ｎｏｔ　Ｂ　ｔｈｅｎ　ｘ　ｉｓ　ｎｏｔ　Ａ．

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

$V=\{8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13\}$

$A=1/1+0.8/2+0.5/3+0.3/4$

$B=0.2/10+0.4/11+0.7/12+1/13$

ここでＰ１よりＲｓの定義に従って生成されるファジイ関係をＲｓ１、同様にＰ２より生成されるファジイ関係をＲｓ２とおくと、これらは以下のようになる。

$$Rs1=(A\times V)\ -s\rightarrow\ (U\times B)$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Rs2=(\neg B)\times U-s\rightarrow V\times(\neg A)$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

上記より、$Rs1^{t}=Rs2$、$Rs2^{t}=Rs1$が成立していることは明かであろう。

３．８　塚本の規範的基準について

ファジイ条件推論に対するアプローチのしかたとして、直接法と間接法の２通りがあることは第２章でも述べた通りであるが、塚本 [Tsu83] は間接法の立場から、ファジイ条件推論法において満たされるべき条件（塚本はこれを「規範的基準」と呼んだ）をいくつか定め、これらを満たす推論方法について研究した。

本節では、塚本の規範的基準を直接法の観点から解釈しなおし、本論文で提案した方法とこれら基準との関係を明かにする。

まず塚本の規範的基準を以下に示す。

[塚本の規範的基準] [Tsu83]

（１）推論の結果として得られる結論の真理度（Ｌｉｎｇｕｉｓｔｉｃ　Ｔｒｕｔｈ　Ｖａｌｕｅ：ＬＴＶ）は前提のＬＴＶより制約的でない。

（２）前提と結論のＬＴＶには単調性がある。

（３）条件命題における前件（後件）が肯定（否定）的でないとき、一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓ（一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓ）にもとづく結論は完全に非制約的になる。

（４）一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓと一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓの間には対称性がある。

（５）推論を行なう回数がふえるにつれて、結論はより非制約的となる。

（６）いつでも２値論理に帰還できる。またはそれを特別な場合として含む。

（７）多次元推論への拡張が可能である。

以上の７項目が塚本の規範的基準である。なお、上記における「制約的」という言葉は、以下のように定義される。すなわち、ファジイ集合Ａ、Ｂに対し、ＡがＢより制約的であるとは、Ａ、Ｂのメンバシップ関数$\mu_A(u)$、$\mu_B(v)$の間に以下の関係が成立することを言う。

$$\forall u \in U \quad \mu_A(u) \leqq \mu_B(v)$$

次にこれら７項目の基準を直接法によるファジイ条件推論の観点から表現を見直したものを以下に示す。

まず説明の都合上ファジイ条件推論法の形式を示しておく。

前提１：Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ａ　ｔｈｅｎ　ｙ　ｉｓ　Ｂ．

前提２：　　　ｘ　ｉｓ　Ａ’．（ｙ　ｉｓ　ｎｏｔ　Ｂ”．）

結論　：　　　ｙ　ｉｓ　Ｂ’．（ｘ　ｉｓ　ｎｏｔ　Ａ”．）　　(3.101)

（１）上記推論形式において、Ｂに対するＢ’の制約の強さは、Ａに対するＡ’の制約の強さ以下でなくてはならない。また、Ｂに対するＢ”の制約の強さは、Ａに対するＡ”の制約の強さ以上でなくてはならない。

これはたとえば、Ａ’＝ｖｅｒｙ　Ａのとき、Ｂ’＝Ｂ，Ｂ’＝ｖｅｒｙ　Ｂであるのは許すが、Ｂ’＝ｖｅｒｙ　ｖｅｒｙ　Ｂとなるのは許さないことを意味している。

（２）Ａ’がＡに対しより制約的（非制約的）であれば、Ｂ’もＢに対しより制約的（非制約的）ででなくてはならない。

また、Ｂ”がＢに対しより制約的（非制約的）であれば、Ａ”もＡに対しより制約的（非制約的）ででなくてはならない。

（３）Ａ’がｎｏｔＡ（ｎｏｔＢ”がＢ）の場合、結論は完全に非制約的、すなわちｕｎｋｎｏｗｎでなくてはならない。

（４）一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓと一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓの対称性。

ここで言う対称性とは、たとえば一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓにおいてＡ’＝Ａのとき、Ｂ’＝Ｂ、Ａ’＝ｖｅｒｙ　ＡのときＢ’＝ｖｅｒｙ　Ｂなら、一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓにおいても同様にＢ”＝ＢのときＡ”＝Ａ、Ｂ”＝ｖｅｒｙ　ＢのときＡ”＝ｖｅｒｙ　Ａが成立することを要求している。

（５）推論を重ねるにつれて、結論はより非制約的となる。

（６）いつでも２値論理に帰還できる。またはそれを特別な場合として含む。言い替えるならば、上記Ａ、Ｂ、Ａ’、Ｂ”がファジイ集合ではなく通常の集合である場合も含めて統一的に扱える。

（７）多次元推論への拡張が可能である。ここで多次元推論とは、例えば以下のような条件命題を前提とする推論である。

If x is A and y is B then z is C.

If x is A or y is not B then z is C.　e.t.c.

以上述べた７項目の基準に対し、本章で提案した４つの方法、すなわちＲｓ、Ｒｇ、Ｒｓｇ、Ｒｇｇを使用する方法がどのような関係にあるかについて以下に論じる。

まずＲｓの場合について述べる。

式（３．１０１）の形式の推論においてＲｓを使用してＣＲＩを適用した場合、第３章で示したように任意の正の実数ｄに対し以下の式が成立する。

$$A^{d} \circ Rs = B^{d}$$

$$Rs \circ (\neg B^{d}) = \neg A^{d}$$

これは上記基準（１）、（２）の成立を示していると共に（４）の成立も同時に示している。さらに、（３．１０１）の形式の推論においてＲｓを使用してＣＲＩを適用した場合、以下の式も成立する。

$$(\neg A) \circ Rs = \mathrm{unknown}$$

$$Rs \circ B = \mathrm{unknown}$$

これは上記基準（３）の成立を意味している。

また、前節で示したように、Ｒｓについては推移律が成立する。これは推論を重ねるにつれて結論がより制約的となることはないことを示している。 従ってこの意味で基準（５）も満たされていると言えよう。

基準（６）については、（３．１０１）においてＡ、Ｂが通常の集合であってもＲｓはその定義に変更を加えることなく構成できること、さらにはこのＲｓにＣＲＩを適用可能であることから、成立は明かである。

次に基準（７）についてであるが、Ｋ．Ｓ．Ｌｅｕｎｇら [Le188] の開発したエキスパートシステムＺ－IIでは、Ｒｓを使用しての多次元推論が実現されている。

以上により、Ｒｓを使用した方法は塚本の規範的基準を満たしているといえる。

次にＲｇを使用した場合であるが、基準（４）が成立しない点を除きＲｓの場合と同様である。

また、Ｒｓｇ、Ｒｇｇは、”If x is A then y is B.”の形のファジイ条件命題が暗黙のうちに”If x is A then y is B else y is not B.”を意味している場合を想定しているため、当然のことながら基準（３）は成立しない。 なお、ＲｇｇはＲｇと同様基準（４）も満たさない。

以上本節では塚本 [Tsu83] が提案したファジイ条件推論法が満たすべき基準を、本論文で提案した方法がそのほとんどを満たしていることを示した。このことは、塚本の基準はいずれをとっても比較的妥当と考えられることから、本論文で提案した方法、なかでも特にＲｓ、Ｒｓｇを使用する方法、の妥当性に対し傍証を与えるものと言えよう。

３．９　その他の性質等について

前節までにおいて、ファジイ条件推論法の新しい方法をいくつか提案し、それらの性質等について論じた。一方、これら方法は、発表以来他の研究者達によっても様々な角度から検討が加えられてきた［Dri87］［DuP85］［EzM83］［Mar87］［MaS88］［Miz81］［MiZ82b］［Miz82b］［Miz83］［Ped84］［Pra85］［Tsu83］［Ueh87］［WhS83］［Yag80］［Zad83a］。本節ではこれらのなかからいくつかを選びその概要を述べる。

３．９．１　準同型ヘッジと合理的ファジイ推論

第２章でも述べたように、Ｚａｄｅｈ［Zad72］、Ｌａｋｏｆ［Lak73］らは、ｖｅｒｙ、ｍｏｒｅ　ｏｒ　ｌｅｓｓ等の修飾語句（Ｌｉｎｇｕｉｓｔｉｃ　ｈｅｄｇｅ：以下単にヘッジと呼ぶ）がファジイ集合で表現されたあいまいな概念に付加された場合、これらヘッジをファジイ集合に対する演算子と解釈することを提案した。すなわち、任意のヘッジϕに対し、ϕをファジイ集合のメンバシップ関数$\mu(u)$を他のメンバシップ関数$\mu'(u)$に変換する関数と解釈した。

$$\mu'(u)=\phi(\mu(u))$$

そして、ｖｅｒｙ、ｍｏｒｅ　ｏｒ　ｌｅｓｓ等の個々のヘッジに対しその意味論的考察をもとに具体的な関数ϕを定めた［Zad72］［Lak73］。例えば、本論文中でもしばしば用いている通り、ｖｅｒｙに対しては以下のように定義した。

$$\begin{aligned} \text{very } A &= \text{very}\left(\int_U \mu(u)/u\right) \\ &= \int_U \phi_{\text{very}}(\mu(u))/u \\ &= \int_U \mu^2(u)/u \\ &= A^2 \end{aligned}$$

一方、江沢・水本［EzM83］は、このようなヘッジのうちで、

$$\mu(u)\leqq\mu'(u) \quad \text{ならば} \quad \phi(\mu(u)) \leqq \phi(\mu'(u))$$

なる関係を満たすものを準同型ヘッジと定義し、一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓの形式の推論において、下記の関係が任意の準同型ヘッジϕに対して成立するとき、これを合理的ファジイ推論であると定義した。

前提１：Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ａ　ｔｈｅｎ　ｙ　ｉｓ　Ｂ．

前提２：　　　ｘ　ｉｓ　ϕ（Ａ）．

結論　：　　　ｙ　ｉｓ　ϕ（Ｂ）．

２章で述べた各ヘッジのうち、ｖｅｒｙ、ｍｏｒｅ　ｏｒ　ｌｅｓｓ等は準同型ヘッジであり、ｓｌｉｇｈｔｌｙ、ｓｏｒｔ　ｏｆ等は準同型ヘッジではない。また、合理的ファジイ推論の定義は、例えば前提２のϕ（Ａ）がｖｅｒｙ　Ａであれば結論のϕ（Ｂ）はｖｅｒｙ　Ｂであることを要求するものであり、３．２節で述べた関係Ｉ、関係Ⅱ－１および関係Ⅲを含むより一般的な表現となっている。そして江沢らは、Ｒｍ、Ｒａ、Ｒｃ、Ｒｓ、Ｒｇ、Ｒｓｇ、ＲｇｇらにＣＲＩを適用したとき合理的ファジイ推論となるかを調べ、このなかではＲｓ、Ｒsｇのみが合理的ファジイ推論を実現させることを明らかにした。

３．９．２　離散的に定義されたファジイ集合を使用した場合について

３．５節においてＲｓ、Ｒｇ等のファジイ関係を定義した際、ファジイ条件文”If x is A then y is B”中のファジイ集合Ａ、Ｂのメンバシップ関数$\mu_A(u)$、$\mu_B(v)$が以下の条件を満たすことを仮定した。

$$\{\mu_A(u) \mid u \in U\} = \{\mu_B(v) \mid v \in V\} \tag{3.102}$$

$$\exists u \in U \quad \mu_A(u)=0,\ \exists u' \in U \quad \mu_A(u')=1 \tag{3.103}$$

$$\exists v \in V \quad \mu_B(v)=0,\ \exists v' \in V \quad \mu_B(v')=1 \tag{3.104}$$

そしてこれら仮定のもとで、要求される各関係が成立することを証明した。

これら仮定は、$\mu_A(u)$、$\mu_B(v)$が連続関数である場合には特に問題となることはなく、通常必ず成立すると考えてよい。しかしながら、現実に本手法をディジタルコンピュータ上で走行するプログラムでインプリメントする場合、一般には離散的に定義されたメンバシップ関数を使用することになる。従って、離散的に定義されたメンバシップ関数を持つファジイ集合からＲｓ、Ｒｇ等を構成し、これに対しＣＲＩを適用した場合、要求される各関係を満たすか否かという点が実用上重要となる。

Ｄｒｉａｎｋｏｖ［Dri87］はこの観点より、具体的にＲｇを対象としてこの問題を検討した。その結果、ＲｇにＣＲＩを適用した場合、関係Ｉ、Ⅱ－２及びⅣの成立には式（３．１０２）の仮定は不用であるが、関係Ⅲの成立には必須であることを示した上で、$\mu_A(u)$、$\mu_B(v)$ が離散的に定義された関数の場合、式（３．１０３）、式（３．１０

４）の仮定はともかくとしても、式（３．１０２）の仮定はかなりきびしいものとなる為、Ｒｇを使用した推論において関係Ⅲの成立を要求することは、メンバシップ関数決定に際しての自由度をそこなうことになることも併せて指摘した。

Ｄｒｉａｎｋｏｖのこの指摘は確かに事実であるため、以下では問題点の所在について検討を行なう。

一般に$A' = A^d$（$d>0$）としてA^dとＲｇの間でＣＲＩを適用したとき、結論Ｂ’は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
B' &= A^d \ \circ \ Rg \\
&= \int_U \mu_A{}^d(u)/u \ \circ \ \int_{U\times V} \mu_A(u) - g \rightarrow \mu_B(v)/(u,\ v) \\
&= \int_V \bigvee_{u\in U} (\mu_A{}^d(u) \wedge (\mu_A(u) - g \rightarrow \mu_B(v)))\ /v \qquad (3.105)
\end{aligned}
$$

３．５節における定理３．２の証明においては、ここで各$v\in V$に対しＵを以下の２つの部分集合$U_1(v)$と$U_2(v)$に分割した。

$$U_1(v) \cup U_2(v) = U \qquad U_1(v) \cap U_2(v) = \phi \qquad (3.106)$$

$$\forall u \in U_1(v) \qquad \mu_A(u) \leqq \mu_B(v) \qquad (3.107)$$

$$\forall u \in U_2(v) \qquad \mu_A(u) > \mu_B(v) \qquad (3.108)$$

そしてこれらを使用して式（３．１０５）を以下のように変形した。

式（３．１０５）

$$= \int_V (\bigvee_{u\in U_1(v)} \mu_A{}^d(u)) \vee (\bigvee_{u\in U_2(v)} \mu_A{}^d(u) \wedge \mu_B(v))\ /v \qquad (3.109)$$

ここで式（３．１０２）の仮定が満たされている場合、これと式（３．１０７）より、

$$\bigvee_{u\in U_1(v)} \mu_A{}^d(u) = \mu_B{}^d(v)$$

が成立し、これより式（３．１０９）は以下の通り変形を続けることができる。

式（３．１０９）

$$= \int_V \mu_B{}^d(v) \vee (\bigvee_{u\in U_2(v)} \mu_A{}^d(u) \wedge \mu_B(v))\ /v$$

$$= \int_V \mu_B{}^d(v) \vee (1 \wedge \mu_B(v))\ /v$$

$$= \begin{cases} \int_V \mu_B{}^d(v)/v = B^d & \cdots \quad d \leqq 1 \\ \\ \int_V \mu_B(v)/v = B & \cdots \quad d \geqq 1 \end{cases}$$

以上より、式（３．１０２）の条件が必要となるのは式（３．１０９）の変形時のみであり、従って上記より$d \geqq 1$の場合は式（３．１０２）の条件が不要であることも明かである。　以上の議論よりＤｒｉａｎｋｏｖの指摘に対しては以下のように応えることができよう。すなわち、Ｒｇを使用した推論において式（３．１０２）の条件が満たされない場合、関係Ⅲは一般には成立しない。これは式（３．１０２）の条件が満たされている場合は、

$$\mu_B{}'(v) = \bigvee_{u \in U_1(v)} \mu_A{}^d(u) = \mu_B{}^d(v) \qquad (\text{但し、} 0 < d < 1)$$

となるべき$\mu_B{}'(v)$を、式（３．１０２）の条件が満たされていないが故に

$$\mu_B{}'(v) = \bigvee_{u \in U_1(v)} \mu_A{}^d(u) < \mu_B{}^d(v)$$

で近似することよる。従ってその誤差は以下の通りである。

$$\forall v \in V \quad \bigwedge_{u \in U_1(v)} (\mu_B{}^d(v) - \mu_A{}^d(u)) \tag{3.110}$$

これより、式（３．１０２）の条件が満たされていない場合関係Ⅲは式（３．１１０）の誤差をもって近似的に成立すると言える。

なお、ＤｒｉａｎｋｏｖはＲｇの場合についてのみ調べているが、Ｒｇｇを使用した場合でも同じく関係Ⅲの成立に、Ｒｓ、Ｒｓｇを使用した場合は関係Ⅰ、関係Ⅱ－１、及び関係Ⅲの成立にそれぞれ式（３．１０２）の条件は必須であり、これが満たされない場合は上記と同様のことが言える。

３．１０　結言

本章では一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓ及び一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓの形式のファジイ条件推論法について述べた。まず、すでに提案されていたＺａｄｅｈの方法およびＭａｍｄａｎｉの方法では直観的に妥当と思われる結論が得られないとの事実から出発し、我々が日常行なっているこの種の推論に対する検討をもとに、これら形式の推論において最低限満たすべきであろうと考えられる前提と結論の関係を整理した。そして、Ｚａｄｅｈ、Ｍａｍｄａｎｉの方法ではこれら関係の大部分が満たされないことを示した上で、これら関係を満たす新たな方法を定式化し、これら方法のもつ種々の性質について明らかにした。ここで本章で提案した方法の特性を整理すると、表３．８、表３．９の通りとなる。

本章で新たに提案した方法は、ファジイ関係Ｒｓを使用するもの、Ｒｇを使用するもの、Ｒｓｇを使用するものおよびＲｇｇを使用するものの４種類あるが、これは、我々が日常行なっているこの種の推論も状況に応じて暗黙のうちにいくつかのタイプのものを使いわけているとの考えによるものである。従って、これら４種類の方法は、優劣の判断の対象とすべきではなく、状況に応じて使いわけるべきものと考えている。実際、５章で詳しく述べるが、Ｋ．Ｓ．Ｌｅｕｎｇらの開発したエキスパートシステムＺ－II［LeL87］［LeL88］では本論文で提案した推論方法が採用されているが、Ｚ－IIでは特に指定のない限りＲｓｇを使用して推論を実行するが、指定によりＲｓ、Ｒｇも使用可能な構成となっている。

なお、これら方法をうまく使い分ける為には各方法の特性を詳しく把握しておくことが必要となるが、これについては、水本［Miz82b］［Miz83］による結果が参考になろう。実際これら論文では、Ｒｓ、Ｒｇ等を使用した推論において、種々の前提に対しその結論がどのようになるかが詳しく調べられている。

本章で提案した４つの推論方法のうち、ＲｇおよびＲｇｇを使用する方法は、一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓの形式の推論においては要求される各関係の一部しか成立しなかった。この点については、その後水本［Miz82c］［Miz85］がＲｇ、Ｒｇｇの定義はそのままとした上でＣＲＩにおける合成演算方法に変更を加えることにより、すべての関係を満たす方法を提案している。

表3．8　本章で提案した方法における各関係の成立状況

関　係	Rs	Rg	Rsg	Rgg
Ⅰ	○	○	○	○
Ⅱ－1	○	×	○	×
Ⅱ－2	×	○	×	○
Ⅲ	○	○	○	○
Ⅳ－1	○	○	×	×
Ⅳ－2	×	×	○	○
Ⅴ	○	×	○	×
Ⅵ	○	×	○	×
Ⅶ	○	×	○	×
Ⅷ－1	○	○	×	×
Ⅷ－2	×	×	×	×

表3．9　推移律、対偶律の成立状況

	Rm	Ra	Rc	Rs	Rg	Rsg	Rgg
推移律	×	×	○	○	○	○	○
対偶律	×	○	×	○	×	×	×

４．ファジイ限定詞を含む推論 [FMT78c] [MFT79b]

４．１　緒言

通常の論理の世界において、” ∀”（任意の、すべての）、” ∃”（存在する）の２つの限定詞（quantifire）が広く使われている。

一方、我々は日常これら以外に、almost all、most、few、といったあいまいさを含む限定詞（以下**ファジイ限定詞**と呼ぶ）を使用し、これらによって限定された命題をもとにした推論をよく行なっている。これら推論の具体例をあげると、例えば以下のようなものがある。

Most Swedes are blond.
Karl is a swede.
―――――――――――――――――――
It is likely that Karl is blond.

Most tall men are well built.
Tom is very tall.
―――――――――――――――――――
It is likely that Tom is well built.

本章では、このような形式の推論に対し、第３章で述べたファジイ条件推論法の手法を応用し、機械的に実行する方法を提案する。

４．２　ファジイ限定詞

一般にファジイ限定詞と考えられるものには種々のものが存在する [Zad88] が、本章では以下の２つのクラスのファジイ限定詞を考える。その１つは、ｍｏｓｔ、ｆｅｗ等に代表されるものであり、一般にある集合Ｘの要素のうち特定の性質を持つ要素の比率を表すときに使用されるものである。また、他の一つは、集合Ｘの個々の要素に対し、特定の性質を持つ確率を表す際に使用されるものである。前者のファジイ限定詞の集合をＦＱ１、後者のそれをＦＱ２とすると、これらは各々以下のようになる。

ＦＱ１＝ {all, almost all, most, many, few, a few,
　　about half, about 70%, … }

ＦＱ２＝ {very likely, likely, not likely, … }

本章では、一般にＦＱ１に属するファジイ限定詞については、割合（比率）を表す区間［０，１］上のファジイ集合で、ＦＱ２に属するファジイ限定詞については、確率を表す区間［０，１］上のファジイ集合でそれぞれ表現するものとする。すなわち、言い替えるならば、ＦＱ１、ＦＱ２の各要素をファジイ集合の名前と考える。

４．３　対象とする推論形式

本章で対象とするファジイ限定詞を含む推論の形式について整理する。

（１）タイプＡ

ここでタイプＡと名付ける形式の推論は、具体例を挙げると以下のようなものである。

前提１：Most Americans are tall.

前提２：Tom is an American.

結論　：It is likely that Tom is tall.

これを一般的に記号で表現すれば以下のようになる。

前提１：ｍ　ｘ（ｘ∈Ａ　→　ｘ　ｉｓ　Ｅ）

前提２：∃　ａ（ａ∈Ａ）　　　　(4.1)

結論　：Ｐ（ａ　ｉｓ　Ｅ）＝ｒ

但し　ｍ∈ＦＱ１

Ａ：任意の集合

Ｅ：ｘ、ａのある属性の値

Ｐ（ａ　ｉｓ　Ｅ）：”ａ　ｉｓ　Ｅ”の確率

ｒ∈ＦＱ２

以上よりもわかるように、本タイプはファジイ限定詞を含む推論のなかで、もっとも単純な形式のものと言えよう。

（２）タイプＢ

このタイプの形式の推論の具体例を挙げると以下のようなものである。

前提１：<u>Most</u> <u>tall</u> Americans are well built.

前提２：Tom is a <u>more or less tall</u> American.

結論　：It is <u>likely</u> that Tom is well built.

これを一般的に記号で表現すれば以下のようになる。

$$
\begin{array}{ll}
\text{前提1}: & m\ x\ ((x \in A) \wedge (x\ \ is\ \ F)\ \rightarrow\ x\ \ is\ \ E) \\
\text{前提2}: & \exists\ a\ ((a \in A) \wedge (a\ \ is\ \ F'))\\
\hline
\text{結論}: & P\ (a\ \ is\ \ E) = r
\end{array}
\qquad (4.2)
$$

但し　$m \in FQ1$

A：任意の集合

F，F'：ファジイ集合で表現された x と a のある属性の値

一般にあいまいな概念である

E：x、y のある属性の値

$P\ (a\ \ is\ \ E)$："$a\ \ is\ \ E$"の確率

$r \in FQ2$

このタイプは、前提１の前件部（上記例では Most tall Americans の部分）にファジイ限定詞以外のあいまいな概念が含まれているものである。

（３）タイプＣ

このタイプの形式の推論の具体例を挙げると以下のようなものである。

前提１：<u>Tall</u> Americans are <u>quite likely</u> to be well built.

前提２：Tom is a <u>more or less tall</u> American.

結論　：It is <u>likely</u> that Tom is well built.

これを一般的に記号で表現すれば以下のようになる。

$$
\begin{array}{ll}
\text{前提1}: & \forall x\ ((x \in A) \wedge (x\ \ is\ \ F)\ \rightarrow\ P\ (x\ \ is\ \ E) = r_1) \\
\text{前提2}: & \exists a\ ((a \in A) \wedge (a\ \ is\ \ F'))\\
\hline
\text{結論}: & P\ (a\ \ is\ \ E) = r_2
\end{array}
\qquad (4.3)
$$

但し　$r_1,\ r_2 \in FQ2$

A：任意の集合

F，F'：ファジイ集合で表現された x と a のある属性の値

一般にあいまいな概念である

E：x、aのある属性の値

P（a　is　E）：”a　is　E”の確率

このタイプの推論形式は、タイプBでは前提1をFQ1に属するファジイ限定詞を使用して表現していたものを、FQ2に属するファジイ限定詞を使用した表現に言い替えたものと考えられる。従って形式上はタイプBとは異なるが、意味的には差異は無いと考えられる。

（4）タイプD

このタイプの形式の推論の具体例を挙げると以下のようなものである。

前提1：Most tall Americans are well built.

前提2：It is very likery that Tom is a tall American.

結論　：It is likely that Tom is well built.

これを一般的に記号で表現すれば以下のようになる。

$$\begin{array}{ll} \text{前提1}: & m\ x\ ((x \in A) \wedge (x\ is\ F) \rightarrow x\ is\ E) \\ \text{前提2}: & \exists\ a\ ((a \in A) \wedge P(a\ is\ F') = r_1) \\ \hline \text{結論}: & P(a\ is\ E) = r_2 \end{array} \tag{4.4}$$

但し　$m \in FQ1$

$r_1,\ r_2 \in FQ2$

A：任意の集合

F，F’：ファジイ集合で表現されたxとaのある属性の値

一般にあいまいな概念である

E：x、aのある属性の値

P（a　is　E）：”a　is　E”の確率

このタイプの推論形式は、タイプBの前提2にFQ2に属するファジイ限定詞が追加されたものと考えられる。

以上示した通りここではファジイ限定詞を含んだ推論の形式を4つあげた。我々が日常使用している推論形式としては、これら以外にもさらに複雑なものがあると考えられる。しかし、あまり複雑になると、あいまいさが増し、意味のある結論を得ることが困難になると考えられる。そこで、本章では基本的と考えられる以上の4つのタイプの推

論形式を対象とし、結論を導く方法を定式化する。

4．4　推論方法の定式化

以下では前節で述べたタイプA～タイプDの各推論形式に対し、具体的推論方法を定式化する。

4．4．1　タイプAの場合

本タイプの推論形式は以下の通りであった。

前提1：m　x（x∈A　→　x　is　E）

前提2：∃　a（a∈A）

結論　：P（a　is　E）＝r

ここで、m∈FQ1、r∈FQ2であり、mは比率を表す区間［0，1］上の、rは確率を表す区間［0，1］上のそれぞれファジイ集合に対応付けられているものとする。

本形式の推論においは、求めるべき結論はrであり、また、rは前提中のmのみによって決定されることは明かである。一方、mの値の全体集合（比率を表す区間［0，1］）と、rの値の全体集合（確率を表す区間［0，1］）はそのまま1対1対応をなしていると考えてよい。すなわち、例えばある集合Xの要素のうち特定の性質を有するものの比率が0．7であるとすると、Xから1つの要素を取り出したとき、これが当該の性質を有する確率は当然0．7と考えてよい。従って、比率を表す区間［0，1］から確率を表す区間［0，1］への恒等関数f（f（x）＝x）にmを適用すれば、rを得ることができる。なお、このとき、mはファジイ集合であることを考慮し、関数fへのmの適用にあたっては以下のように拡張原理に基づき計算する。

$$
\begin{aligned}
r &= f(m) \\
&= f\left(\int_U \mu_m(u)/u\right) \\
&= \int_V \mu_m(u)/f(u) \\
&= \int_V \mu_m(v)/v
\end{aligned}
$$

以上の計算により得られたファジイ集合rをlikely等の言葉で再表現（ファジイ集合の言語近似）すれば結論が得られたことになる。

４．４．２　タイプＢの場合

本タイプの推論形式は以下の通りであった。

前提１：ｍ　ｘ（（ｘ∈Ａ）∧（ｘ　ｉｓ　Ｆ）　→　ｘ　ｉｓ　Ｅ）

前提２：∃　ａ（（ａ∈Ａ）∧（ａ　ｉｓ　Ｆ’））

結論　：Ｐ（ａ　ｉｓ　Ｅ）＝ｒ

ここでｍ∈ＦＱ１、ｒ∈ＦＱ２であり、求めるべき結論はｒである点はタイプＡの場合と同様である。しかし、前提にＦ、Ｆ’なるファジイ概念が含まれていることより、結論ｒはｍのみから決定することはできない。そこで、このタイプの推論に対しては、以下のように考える。すなわち、まず前提１を次のように解釈する。

∀ｘ∈Ａ　（Ｉｆ　ｘ　ｉｓ　Ｆ　ｔｈｅｎ　Ｐ（ｘ　ｉｓ　Ｅ）＝ｆ（ｍ））

ここでｆは先に導入した恒等関数である。

この解釈のもとでは、本形式の推論は以下のように表現できる。

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x \in A\ (\mathrm{If}\ x\ \mathrm{is}\ F\ \mathrm{then}\ P(x\ \mathrm{is}\ E) = f(m)) \\ \exists a \in A\ (a\ \mathrm{is}\ F')\end{array}}{P(a\ \mathrm{is}\ E) = r} \qquad (4.5)$$

すなわちこれは前章で取り扱ったファジイ条件推論そのものである。従ってこれより、結論ｒは以下のようにして得られる。

$$r = F' \circ (F \times [0,1] \xrightarrow{*} U \times f(m)) \qquad (4.6)$$

ただしここでＵはＦ、Ｆ’の全体集合である。また、－＊→は前章で定義した－ｓ→、－ｇ→、－ｓｇ→もしくは－ｇｇ→のいずれかであり、いずれを採用するかは状況に応じて判断すべきものである。

ここでタイプＢの推論を具体的に本定式化に従って計算した例を１つ示す。

まず前提として以下の命題を考える。

前提１：Most young employees of this company are low salary.

そして、ｍｏｓｔ、ｙｏｕｎｇは以下のファジイ集合で定義されているものとする。

$$\mathrm{most} = 1/1 + 0.8/0.9 + 0.6/0.8 + 0.4/0.7 + 0.2/0.6$$

$$f(\mathrm{most}) = \mathrm{likely}$$

$$\mathrm{young} = 1/22 + 1/23 + 0.9/24 + 0.8/25 + 0.6/26 + 0.4/27 + 0.2/28$$

ただし、ｙｏｕｎｇの全体集合Ｕは以下の通りとする。

$U=\{22,\ 23,\ \cdots\cdots,\ 28,\ 29,\ 30\}$

以上より、式（4．6）の－＊→として－g→を採用すると、ファジイ関係Ｒｇは以下のように得られる。

$$Rg=(young)\times[0,\ 1]\ -g\rightarrow\ U\times f\ (most)$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & .4 & .6 & .8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & .4 & .6 & .8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & .4 & .6 & .8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & .4 & .6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & .4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

従ってこれより、前提２を以下のように置いた場合の結論は各々次に示す通りとなる。

（１）Tom is a young employee of this company.

$$r_2=young\ \ o\ \ Rg$$

$$=1/1+0.8/0.9+0.6/0.8+0.4/0.7+0.2/0.6$$

$$=f\ (most)$$

$$=likely$$

（２）Tom is a very young employee of this company.

$$r_2=(very\ \ young)\ \ o\ \ Rg$$

$$=(young)^2\ \ o\ \ Rg$$

$$=f\ (most)$$

$$=likely$$

（３）Tom is a more or less young employee of this company.

$$r_2=(more\ \ or\ \ less\ \ young)\ \ o\ \ Rg$$

$$=(young)^{1/2}\ \ o\ \ Rg$$

$= (f(most))^{1/2}$

$=$ more or less likely

(4) Tom is not a young employee of this company.

$r_2 = (\text{not young}) \circ Rg$

$= (0.1/24+0.2/25+0.4/26+0.6/27+0.8/28+1/29+1/30) \circ Rg$

$=$ unknown

(5) Tom is a slightly young employee of this company.

$r_2 = (\text{slightly young}) \circ Rg$

$= (\text{NORM}(\text{young and not very young})) \circ Rg$

$= (0.32/24+0.6/25+1/26+0.67/27+0.33/28) \circ Rg$

$= 0.33/0.6 + 0.67/0.7 + 1/0.8 + 1/0.9 + 1/1$

$\approx$ more or less likely

４．４．３　タイプＣの場合

本タイプの推論形式は以下の通りであった。

前提１：$\forall x ((x \in A) \wedge (x \text{ is } F) \rightarrow P(x \text{ is } E) = r_1)$

前提２：$\exists a ((a \in A) \wedge (a \text{ is } F'))$

結論　：$P(a \text{ is } E) = r_2$

ここでr_1、r_2は共にＦＱ２の要素である。

このタイプは一見してわかる通り、式（４．５）の形式と同じである。従って、タイプＢの場合と同様にして結論r_2を求めることができる。

$$r_2 = F' \circ (F \times [0, 1] \xrightarrow{*} U \times r_1) \tag{4.7}$$

ここでＵはＦ、Ｆ’の全体集合であり、$-*\rightarrow$は前章で定義した$-s\rightarrow$、$-g\rightarrow$、$-sg\rightarrow$もしくは$-gg\rightarrow$のいずれかを状況に応じて選択するものとする。

４．４．４　タイプＤの場合

本タイプの推論形式は以下の通りであった。

前提１：$m\ x ((x \in A) \wedge (x \text{ is } F) \rightarrow x \text{ is } E)$

前提２：$\exists a ((a \in A) \wedge P(a \text{ is } F') = r_1)$

結論　：$P(a \text{ is } E) = r_2$

本タイプの推論形式において、結論r_2を得る方法を定式化する為、まず次の簡単な例について考える。

壺の中に赤と青のボールが多数はいっていて、青いボールの9割には白い点がうっているものとする。また赤いボールにも白い点のうっているものがあるが、その比率は未知であるとする。するとこれより、上記前提1に相当する以下の命題が得られる。

P1：9割のx（（x∈A）∧（x　is　”青”）　→　x　is　”白い点”）

ただし、Aは壺のなかのボールの集合を表す。

また、壺から1個のボールを任意に取り出したとき、それが青いボールである確率r_1がわかっているとする。すると上記前提2に相当する次の命題が得られる。

P2：∃a（（a∈A）∧P（a　is　”青”）＝r_1）

従ってこの2つの命題P1、P2より、壺から1個のボールを取り出したときそのボールに白い点のついている確率r_2は、以下の式により得られることになる。

$$r_2 = 0.9 r_1 + \alpha$$

ここでαは、取り出したボールが赤でかつ白い点のついている確率を表しており、その値は本前提のもとでは未知である。ところが、$0 \leqq r_2 \leqq 1$、すなわち、

$$0 \leqq 0.9 r_1 + \alpha \leqq 1$$

であることより、$0.9 r_1$が1に近い場合、αは無視しても大きな影響はない。すなわちこの場合、

$$r_2 \fallingdotseq 0.9 r_1$$

と考えることができる。しかし$0.9 r_1$が1に近い値ではない場合、αは無視できず、従ってこれだけの前提条件からはr_2を推定することはできない。

以上の議論及び、本タイプの推論形式の前提1がタイプBの前提1と同じ形であることを考えあわせると、r_2に関して以下の命題が成立することがわかる。

If　（f（m）・r_1が1に近い）　then

$$P(y\ \ is\ \ E) = F' \circ (F \times [0,1] \xrightarrow{*} U \times f(m) \cdot r_1)$$

これより、P（y　is　E）すなわちr_2は以下のように得られる。

$$r_2 = (f(m) \cdot r_1) \circ [high \times [0,1] \xrightarrow{*_1} [0,1] \times F' \circ (F \times [0,1] \xrightarrow{*_2} U \times f(m) \cdot r_1)] \tag{4.8}$$

ただしUはF、F’の全体集合を表す。また、highは確率が1に近いことを表すファジイ集合で、例えば以下のようなものを採用すればよい。

$$high=0.2/0.8+0.5/0.85+0.7/0.9+0.9/0.95+1/1$$

さらに、$f(m)\cdot r_1$の計算は拡張原理を適用して以下のように実行すればよい。

$$f(m)=\int_U \mu_{f(m)}(u)/u$$

$$r_1=\int_U \mu_{r1}(u)/u$$

$$f(m)\cdot r_1=\int_U \mu_{f(m)}(u)/u\cdot\int_U \mu_{r1}(u')/u'$$

$$=\int_U \mu_{f(m)}(u)\wedge\mu_{r1}(u')/u\cdot u'$$

4．5　結言

本章では、我々が日常しばしば使用するファジイ限定詞を含む推論形式のいくつかに対し、前章で述べたファジイ条件推論法の手法を応用することにより、具体的推論手続きを定式化した。

５．応用事例

５．１　緒言

本論文で提案したファジイ条件推論法はすでに他の研究者達によって種々の応用がなされている。これらのなかには、Ｒａｊｕら［RaM86］［RaM88］による関係データベースにおけるファジイ関数従属の定義へのファジイ関係Ｒｓの応用、水本［Miz81］による”If x is A then y is B else y is C.”なるファジイ条件文を前提とする推論への応用、Ｋ．Ｓ．Ｌｅｕｎｇら［LeL87］［LeL88］によるエキスパートシステムへの応用等がある。本章ではこれらのうち、Ｋ．Ｓ．Ｌｅｕｎｇらによるエキスパートシステムについて取りあげ、本論文で提案した推論方法が中心的役割をはたしていることを説明する。

５．２　エキスパートシステムＺ－ＩＩ

Ｋ．Ｓ．ＬｅｕｎｇとＷ．Ｌａｍが開発したＺ－IIは、現在ＶＡＸ－１１／７８０上で稼働しているいわゆるエキスパートシステムシェルで、本システムに具体的なルール及びファクトを投入することで種々のエキスパートシステムとして使用できる。以下では、本システムにおけるあいまい性の取扱い方、およびこれらデータをもとにした推論方法につき、文献［LeL88］に従って述べる。

本システムでは、あいまいさをＭｙｃｉｎ［Sho76］等で使用された確信度（certainty factor）とファジイ集合によって取扱う。従って本システムでは通常のエキスパートシステムで取り扱えるルールおよびファクトに加え、以下の形態のルール、ファクトが取り扱える。

（１）確信度が付加されたルール、ファクト

各ルール、ファクトに区間［０，１］中の数値で表現された確信度が付加されたもので、具体例をあげると以下のようなものが該当する。

・If x is a bird then it can fly. (0.9)

・x is a bird. (0.8)

（２）ファジイ概念を含んだルール、ファクト

各ルール、ファクト中にファジイ概念が含まれているもので、これらファジイ概念はファジイ集合に対応付けられている。具体例をあげると以下のようなものが考

えられる。

・If the price is high then the profit should be good.

・John is quite young.

ここでｈｉｇｈ、ｇｏｏｄ、ｑｕｉｔｅ　ｙｏｕｎｇがファジイ概念である。

（３）ファジイ概念を含みかつ確信度が付加されたルール、ファクト

以下の例に示すルール、ファクトがこれに該当する。

・If the price is high then the profit should be good. (0.9)

・John is quite young. (0.8)

（４）ファジイ数で表現された確信度を持つルール、ファクト

確信度が区間［０，１］の数値ではなく、ファジイ集合で与えられているものである。具体例をあげると以下のようなものが考えられる。

・John is very heavy. (around 0.7)

次にこれらルール、ファクトをもとにした推論方法について述べる。

一般にルールおよびファクトが以下のように与えられているとする。

ルール　：Ｉｆ　Ａ　ｉｓ　Ｖ１　ｔｈｅｎ　Ｃ　ｉｓ　Ｖ２．　（ＦＮ１）

ファクト：Ａ　ｉｓ　Ｖ１’．　（ＦＮ２）

結論　　：Ｃ　ｉｓ　Ｖ２’．　（ＦＮ３）

Ｚ－IIでは本ルールおよびファクトよりの結論の値Ｖ２’および結論の確信度ＦＮ３は以下のようにして求めている。

まずＡがファジイオブジェクトでない場合、Ｖ１＝Ｖ１’の場合のみ本ルールが適用され、Ｖ２’＝Ｖ２となる。このときの結論の確信度ＦＮ３は、ＦＮ３＝ＦＮ１×ＦＮ２により求められる。なお、ＦＮ１、ＦＮ２は一般にはファジイ数であるため、本計算は拡張原理を用いて実行される。

次に、Ａ、Ｃともにファジイオブジェクトの場合、Ｚ－IIでは本論文で提案したファジイ条件推論法を用いて結論を導く。すなわち、ルールより通常は第３章で述べたＲｓｇの定義に従ってファジイ関係を構成し、これとファクト中のＶ１’の値に対しＣＲＩを適用することにより結論Ｖ２’の値を得る。また、特に指定がある場合、ファジイ関係ＲｓもしくはＲｇを用いて推論を実行させることもできる。なお、この場合のＦＮ３の求め方は上記と同様である。

一方、ＡがファジイオブジェクトでＣがファジイオブジェクトでない場合、Ｚ－IIでは結論Ｖ２’はＶ２に等しいとするが、確信度ＦＮ３は以下のようにＶ１とＶ１’の類似度を考慮して決定する。

ＦＮ３＝ＦＮ１×ＦＮ２×Ｍ

ここでＭはＶ１とＶ１’の類似度であり、Ｖ１の値であるファジイ集合をＦ１、Ｖ１’の値であるファジイ集合をＦ２としたときＭは以下のようにして計算される。

$$M=\begin{cases} P(F1 \mid F2) & N(F1 \mid F2) > 0.5\text{の場合} \\ (N(F1 \mid F2)+0.5)\times P(F1 \mid F2) & \text{その他の場合} \end{cases}$$

但しここでＰ（Ｆ１｜Ｆ２）、Ｎ（Ｆ１｜Ｆ２）は以下のように定義される。

$$P(F1 \mid F2)=\max(\min(\mu_{F1}(w),\ \mu_{F2}(w)))$$

$$N(F1 \mid F2)=1-P(\neg F1 \mid F2)$$

以上がＺ－IIで採用されている推論方法である。これらより、Ｚ－IIでは本論文で提案した推論方法が中心的役割をはたしていると言えよう。

５．３　結言

本論文で提案したファジイ条件推論法の応用事例として、Ｌｅｕｎｇらの開発したエキスパートシステムシェルＺ－IIについて述べた。本システムは、大学におけるコース選択の為のエキスパートシステム、医療診断支援システム、精神分析システム等として幅広く使用されており、このことからも本論文で提案した推論方法の有効性が実証されていると言えよう。

６． 結論

コンピュータシステムが対象とする問題領域をｗｅｌｌ－ｄｅｆｉｎｅｄな領域からｉｌｌ－ｄｅｆｉｎｅｄな領域へと拡大してゆく上で、種々のあいまい性を取り扱う技法を確立することは避けて通れない必須の課題と言える。これらあいまい性のなかには、不確実性、不完全性、不整合性、非決定性、ファジイ性、等多くの種類があるが、なかでもファジイ性は、我々が日常使用する言葉のなかにファジイ性を内在したものが非常に多いことからもわかるように、人間にとっては本質的なものであり、コンピュータの能力を人間のそれに近づける上で非常に重要である。

本論文では、このファジイ性の意味でのあいまいさを対象とし、ファジイ概念を含んだ前提からの推論、なかでもエキスパートシステム等への応用上特に重要なＩＦ …ＴＨＥＮ … の形式のファジイ条件命題による推論（ファジイ条件推論）に関する研究結果について述べた。

本研究では、Ｚａｄｅｈ、Ｍａｍｄａｎｉらによってすでに提案されていたファジイ条件推論の方法が、必ずしも我々の直感にあった結論を導かないとの追試結果をもとに、より妥当な結論が得られる推論方法の確立を目的として設定した。

ところで一般に、ファジイ概念を含んだ前提をもとにした推論では、推論方法の妥当性に関して明確な条件を設定することは困難なこともあり、本研究以前には推論方法の妥当性に関する議論は行われていなかった。この点に関して本研究では、この種の推論において前提と結論の間に成立すべきと考えられる具体的関係をいくつか設定し、これら関係が満たされることを妥当な推論のための条件とするアプローチをとった。従って本研究結果の有効性はこの条件の妥当性に依存するといえるが、本研究とは独立に行われた他のいくつかの研究においても、本文中でも述べたように本研究で採用した条件と類似もしくは等価な条件が設定されており［EzM83］［Tsu83］［DuP88］、これら条件についてはすでにコンセンサスが得られていると考える。なお、この種の推論では、同一の形式の前提であっても状況により求められる結論が異なる場合もあり、唯一の推論方法ですべてをカバーするのは困難であるとの立場から、いくつかの推論のタイプを想定した条件を設定した。

これら条件に基づき、本研究ではまず、すでに提案されていた方法の妥当性について調べた。その結果、従来方法ではほとんどの条件が満たされないことが明かとなった。

これは、本研究のきっかけとなったこれら方法が妥当な結論を導かないとの直感的判断を裏付けるものと言える。

つぎに、一般化ｍｏｄｕｓ　ｐｏｎｅｎｓの形式の推論に対し、設定した条件のうち最も基本的と考えられる以下の条件、すなわち、"If x is A then y is B." と "x is A" からは "y is B" が結論として導かれるべきであるとの条件、を満たす推論を実現するための必要条件を明らかにした上で、設定した各条件を満たす推論方法を４種類定式化した。

これに引続き、これら各推論方法が一般化ｍｏｄｕｓ　ｔｏｌｌｅｎｓの形式の推論に対して設定した条件の大部分を満たすことを明らかにするとともに、これら方法の一部は推移律、対偶律も満たすことを明らかにした。

また、これら推論方法を応用することにより、ｍｏｓｔ、ｆｅｗ等いわゆるファジイ限定詞を含む命題を前提とする推論に対しても具体的推論方法を定式化した。

本論文で提案した推論方法は、すでに他の研究者によって様々な形で応用されていると共に、実用エキスパートシステム等でも採用され使用されている。本論文ではこれらの一部を紹介し、これら推論方法の有効性について示した。

以上が本研究の概要であるが、ここで本研究の主要成果をまとめると以下のようになろう。

（１）従来推論方法の妥当性については何等議論がなされていなかった状況のなかで、妥当性に関する条件を導入し、これにより従来方法の問題点を明らかにすると共に、よりよい推論方法定式化の足がかりを得たこと。

（２）導入した基準に基づき、実用性のある新たなファジイ条件推論方法を定式化したこと。

（３）これら新たな方法を実際に応用するに際して重要となるこれら方法の各種特性を明らかにしたこと。

（４）ファジイ限定詞を含む命題を前提とする推論に対し、具体的推論方法を定式化したこと。

最後に今後に残されている研究課題について述べる。

本研究の発表以来、本研究を踏まえた研究がすでに数多く発表されており、新たな推論方法の提案もなされているが、以下の課題についてはまだ問題が残されていると言えよう。

（１）本論文で取り扱ったのは１段のみの推論であったが、より複雑な応用を考える場合多段の推論が必要となる。一方、一般にファジイ概念を含む前提からの推論では、２値論理に基づく推論とは異なり、推論を重ねるにつれて結論のあいまいさが増し有意な結論が得られないことが有り得る。従って、結論の有意性を保証しつつ多段の推論を実行する方法を明らかにすることは重要な課題と言えよう。

（２）すでに述べたようにあいまい性といっても種々のものがある。これらあいまい性は、それぞれ個々に取扱手法が研究されているというのが実状である。しかしながら実際的応用の場では異種のあいまい性が共存することが当然有り得る。従って、ファジイ性と他のあいまい性が共存する場合の統一的な取扱手法の開発も重要な課題と言えよう。

参 考 文 献

[Bal79] J.F.Baldwin: "A new approach to approximate reasoning using a fuzzy logic", Fuzzy Sets and Systems, vol.2, pp.309-325(1979).

[Dri87] D. Driankov: "Inference with a single fuzzy conditional proposition ", Fuzzy Sets and Systems, vol.24, pp.51-63(1987).

[DuP85] D.Dubois and H.Prade: "The generalized modus ponens under sup-min composition", in Approximate Reasoning in Expert Systems, M.M.Gupta (eds.), North-Holland, Amsterdam(1985).

[DuP88] D.Dubois and H.Prade: "An introduction to possibilistic and fuzzy logic", in Non-Standard Logics for Automated Reasoning, P.Smets, et. al.(eds.), Academic Press(1988).

[EzM83] Y.Ezawa and M.Mizumoto:"Linguistic hedges and reasonable fuzzy infe-rences", Proc. IFAC Symposium on Fuzzy Information, Knowledge Repre-sentation and Decision Analysys, pp.243-248(1983).

[FMT77a] 深海、水本、田中：”ファジイ推論について”，昭和５２年度電子通信学会情報部門全国大会，NO.1(1977).

[FMT77b] 深海、水本、田中：”ファジイ推論について”，信学技法，AL77-74(1977).

[FMT78a] 深海、水本、田中：”ファジイ推論について”，電子通信学会論文誌，vol. J61-D, NO.8, pp.533-540(1978).

[FMT78b] S.Fukami,M.Mizumoto and K.Tanaka:"On fuzzy reasoning",Systems,Compu-ters, Controls, vol.9, NO.4, pp.44-53(1978).

[FMT78c] 深海、水本、田中：”ファジイ限定詞を含む推論”，昭和５３年度電子通信学会総合全国大会，NO.1162(1978).

[FMT80] S.Fukami,M.Mizumoto and K.Tanaka: "Some considerations on fuzzy con-ditional inference", Fuzzy Sets and Systems, vol.4,pp.243-273(1980).

[HaM85] J.Y.Halpern and Y.Moses:"A guide to the modal logic of knowledge and belief; preliminary draft",Proc. 9th IJCAI(1985).

[Hir87] 広田　薫：”ファジイ推論エキスパートシステムの現状と動向”，情報処理，vol.28,NO.8,pp.1065-1074(1987).

[Ho082] L.P.Holmblad and J.J.Ostergaard: "Control of cement kiln by fuzzy logic", in Fuzzy Information and Decision Processes, M.M.Gupta, et.al (eds.), North-Holland(1982).

[HTY88] Y.Hayashi, E.Tazaki, K.Yoshida and P.Day: "Medical diagnosis using simplified multi-dimensional fuzzy reasoning", Proc. IEEE Conference Systems, Man and Cybernetics, pp.58-62(1988).

[Ish84] 石塚　満：”不確実な知識の取扱い法”，知識工学（田中　幸吉編），朝倉書店刊（１９８４）．

[Ish85] 石塚　満：”曖昧な知識の表現と利用”，情報処理, vol.26,NO.12,pp.1481-1486(1985).

[II086] 伊藤，稲岡，小田，木下：”医療診断エキスパートシステムにおける知識表現”，情報処理, vol.27.NO.7,pp.702-710(1986).

[IwK84] 岩井，片井：”あいまい情報の処理と知識工学”，システムと制御, vol.28,NO.10,pp.557-561(1984).

[Lak73] G.Lakoff:"Hedges:A study in meaning criteria and the logic of fuzzy concepts", Journal of Philosophical Logic, vol.2, pp.458-508(1973).

[LeL87] K.S Leung and W.Lam:"The implementation of fuzzy knowledge-based system shells",Proc.Tencon87,IEEE Region 10 Conf., pp.650-654(1987).

[LeL88] K.S Leung and W.Lam:"Fuzzy concepts in expert systems",IEEE Computer Magazine, vol.21,NO.9(1988).

[MaM88] 前田，村上：”自己調整ファジイコントローラ”，計測自動制御学会論文集, vol.24,NO.2,pp.85-91(1988).

[MaS88] P.Magrez and P.Smets:" Fuzzy modus ponens : A new model suitable for application in knowledge-base systems", International Journal of Approximate Reasoning, to appear.

[Mam77] E.H.Mamdani:"Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic systems", IEEE. Trans. Comput.,C-26, pp.1182-1191 (1977).

[Mar87] R. Martin-Clouaire: "Semantics and computation of the generalized modus ponens", Proc. Second IFSA Congres, pp.235-238(1987).

[MiN84] 三嶋、野村：”臨床診断におけるあいまいさ”，システムと制御，vol.28, NO.10, pp.562-566(1984).

[MFT78a] M.Mizumoto, S.Fukami and K.Tanaka:"Fuzzy reasoning methods by Zadeh and Mamdani, and improved methods", Proc.3rd Workshop on Fuzzy Reasoning, Queen Mary College, London(1978).

[MFT78b] M.Mizumoto, S.Fukami and K.Tanaka:"Some methods of fuzzy reasoning", in Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, M.M.Gupta, et al. (eds.), North-Holland, pp.117-136(1979).

[MFT79a] M.Mizumoto, S.Fukami and K.Tanaka: "Several methods for fuzzy conditional inferences", Proc.IEEE Conf. on Decision and Control, pp.777-782(1979).

[MFT79b] M.Mizumoto, S.Fukami and K.Tanaka:"Fuzzy conditional inferences and fuzzy inferences with fuzzy quantifires", Proc.IJCAI.79(1979).

[MFT79c] 水本，深海，田中：”Ｆｕｚｚｙ推論法の比較”，昭和５３年度電子通信学会総合全国大会，NO.1170(1979).

[Miz81] 水本　雅晴：”種々のファジイ推論法－Ｉｆ…ｔｈｅｎ…の場合－”，電子通信学会論文誌，vol.J64-D, NO.5, pp.379-386(1981).

[Miz82a] 水本　雅晴：”種々のファジイファジイ推論法　－　Ｉｆ　…　ｔｈｅｎ　…　ｅｌｓｅ　…　の場合－”，電子通信学会論文誌，vol.J65-D, NO.5, pp.519-526(1982).

[Miz82b] 水本　雅晴：”種々のファジイ入力をもつファジイ推論”，電子通信学会論文誌，vol.J65-D, NO.9, pp.1175-1182(1982).

[Miz82c] 水本　雅晴：”新しい推論の合成規則の下でのファジイ推論”，電子通信学会論文誌，vol.J65-D, NO.11, pp.1319-1325(1982).

[Miz82d] M.Mizumoto and H.J.Zimmermann:"Comparison of fuzzy reasoning methods", Fuzzy Sets and Systems, vol.8. pp.253-284(1982).

[Miz82e] M.Mizumoto:"Fuzzy reasoning with a fuzzy conditional proposition IF-THEN-ELSE", in Fuzzy Set and Possibility Theory, R.R.Yager(eds.), Pergamon Press(1982).

[Miz83] M.Mizumoto:"Fuzzy reasoning with various fuzzy inputs", Proc. IFAC Symposium on Fuzzy Information,Knowledge Representation and Decision Analysys, pp.153-158(1983).

[Miz85] M.Mizumoto:"Fuzzy reasoning under new compositional rule of inference", Kybernetes, vol.12, pp.107-117(1985).

[Miz87a] M.Mizumoto:"Comparison of various fuzzy reasoning methods", Proc. Second IFSA Congress, pp.2-7(1987).

[Miz87b] 水本　雅晴："Ｆｕｚｚｙ論理とＦｕｚｚｙ推論"，数理科学, vol.25,NO.2,pp.10-18(1987).

[Miz88] 水本　雅晴："最近のファジー理論"，情報処理, vol.29, NO.1, pp.11-22 (1988).

[OoT87] 大津，田村："柔らかな論理をめざして"，情報処理, vol.28, NO.5, pp.629-636(1987).

[Ped84] W.Pedrycz:"Methods of approximate reasoning and fuzzy relation equations", Proc.23rd conference on Decision and Control, pp.906-907 (1984).

[Pra85] H. Prade:"A computational approach to approximate and plausible reasoning with applications to expert systems", IEEE. Trans.Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol.PAMI-7,no.3,pp.260-283(1985).

[RaM86] K.V.S.V.N.Raju and A.K.Majumdar:"Fuzzy functional dependencies in fuzzy relations", Proc.IEEE Conference on Data Engineering, pp.312-319(1986).

[RaM88] K.V.S.V.N.Raju and A.K.Majumdar: "Fuzzy functional dependencies and lossless join decomposition of fuzzy relational database systems", ACM Transactions on Database Systems, vol.13,No.2,pp.129-166(1988).

[Res69] N.Rescher:"Many Valued Logic",McGraw-Hill,New-York(1969).

[SaM88] 桜井，前川："糖分抽出プロセスのファジィ制御"，オートメーション, vol.33,NO.6,pp.37-41(1988).

[Sho76] E.H.Shortlife:"Computer based medical consultations : MYCIN, American Elsevier(1976).

[SFK84] G.Sotirov,D.Filev and K.Konstantinov: "A hierarchical system for control of continuous fermentation processes synthetized on the basis of the linguistic approach", Proc.1st World Workshop of Large Scale Systems(1984).

[SMD88] P.Smets,E.H.Mamdani,D.Dubois,H.Prade(eds):"Non-Standard Logics for Autmated Reasoning",Academic press(1988).

[SuT83] M.Sugeno and T.Takagi:"Multi-dimensional fuzzy reasoning", Fuzzy Sets and Systems,vol.9,pp.313-325(1983).

[Sug88] 菅野　道夫：”ファジイ制御”，日刊工業新聞社(1988).

[TaN84] 田畑，西田：”あいまいさとファジイ集合”，システムと制御，vol.28,NO.7,pp.431-435(1984).

[ToF82] R.M.Tong and J.Festathiou: "A critical assessment of truth function modification and its use in approximate reasoning", Fuzzy Sets and Systems, vol.7, pp.103-107(1982).

[Tsu79a] 塚本　弥八郎：”Ｆｕｚｚｙ推論について”，数理科学，vol.17,NO.5,pp.28-33(1979).

[Tsu79b] Y.Tsukamoto:"An approach to fuzzy reasoning method",in Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, M.M.Gupta et al.(eds), North-Holland(1979).

[Tsu83] 塚本　弥八郎：”あいまい推論”，計測と制御，vol.22,NO.1,pp.139-145(1983).

[Ueh87] 上原　清彦：”レベル集合によるファジイ推論演算”，電子情報通信学会技術研究報告，AI87-24,pp.1-8(1987).

[Yag80] R. Yager:"An approach to inference in approximate reasoning", Int.J.Man-Mach.Stud.,vol.13,pp.323-338(1980).

[Yam87] 山川　烈：”ファジイ・コンピュータ”，数理科学，vol.25,No.2,pp.36-45(1987).

[YIS84] 柳下，伊藤，菅野：”ファジィ理論の浄水場薬品注入制御への応用”，システムと制御，vol.28.NO.10,pp.597-604(1984).

[YMI84] 安信，宮本，井原：”予見Ｆｕｚｚｙ制御方式による列車自動運転”，システムと制御，vol.28,NO.10,pp.605-613(1984).

[WhS83] T.Whalen and B.Schott:"Issues in fuzzy production systems",Int.J.Man-Mach. Stud.,vol.19,pp.57-71(1983).

[WSA88] 脇本，桜井，青木：”ファジィ集合論の考え方を利用した高炉炉熱制御エキスパートシステム”，オートメーション，vol.33,NO.6,pp.37-41(1988).

[Zad65] L.A.Zadeh:"Fuzzy sets",Inf.Control, vol.8, pp.338-353(1965).

[Zad72] L.A.Zadeh:"A fuzzy-set-theoritic interpretation of linguistic hedges", Journal of Cybernetics,vol.2, NO.3, pp.4-34(1972).

[Zad73] L.A.Zadeh: "Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes",IEEE. Trans. Systems,Man and Cybernetics, vol. SMC-3,pp.28-44(1973).

[Zad75a] L.A.Zadeh: "Calculus of fuzzy restrictions", in L.A.Zadeh and K.Tanaka et.al.(eds), Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Process, pp.1-39, Academic Press, New-York(1975).

[Zad75b] L.A.Zadeh: "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning I,II,III,Information Sci.,vol.8,pp.199-251 (1975), vol.8,pp301-357(1975), vol.9,pp.43-80(1975).

[Zad77] L.A.Zadeh:"Theory of fuzzy sets",in Encyclopedia of Computer Science and Technology, J.Belzer, A.Holzman and A.Kent (eds), Marcel Dekker, New-York(1977).

[Zad78] L.A.Zadeh:"Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility", Fuzzy Sets and Systems,vol.1,NO.1,pp.3-28(1978).

[Zad83a] L.A.Zadeh:"The role of fuzzy logic in the management of uncertainty in expert systems",Fuzzy Sets and Systems, vol.11, pp.197-227(1983).

[Zad83b] L.A.Zadeh:"A computational approach to fuzzy quantifires in natural language", Comp.and Maths with Appls.,vol.9,pp.149-184(1983).

[Zad88] L.A.Zadeh:"Fuzzy Logic",IEEE Computer Magazine, vol.21,NO.4(1988).

謝　辞

大阪大学産業科学研究所・豊田順一教授には、本研究をまとめるにあたり、懇切なるご指導ならびにご助言をいただきました。ここに心からの感謝の意を表わします。

また、本研究をまとめるにあたりご助言と励ましをいただきました大阪大学基礎工学部嵩忠雄教授、都倉信樹教授、鳥居宏次教授、谷口健一教授、並びに大阪大学産業科学研究所北橋忠宏教授に厚く感謝いたします。

本研究は主として筆者が大阪大学基礎工学部情報工学科および同大学院に在学中に、故田中幸吉教授のご指導のもとに行なったものであります。ここに故田中幸吉教授に心からの感謝の意を表わすとともに謹んでご冥福をお祈りいたします。また、本研究遂行にあたり直接ご指導くださり、種々のご教示をたまわった現大阪電気通信大学水本雅晴教授に心からの感謝の意を表わします。さらに、本研究遂行にあたり種々のご助言をたまわった大阪大学大型計算機センター馬野元秀助教授にも厚く感謝いたします。

本論文の執筆にあたり、ＮＴＴデータ通信株式会社　三角岑生常務取締役、田中義昭取締役開発本部長、開発本部　山下徹企画部長には種々のご配慮をいただきました。また、同第２技術部長　荒川弘熙博士には懇切なるご指導と励ましをいただきました。さらに、同開発本部　中村太一博士、伊沢伸芳博士にも多大なる励ましをいただきました。さらには、大阪大学在学中よりの友人である（株）日立製作所中央研究所岩崎一彦博士にも種々のご教示をいただきました。これらの方々に心より感謝します。

本研究の遂行、本論文の執筆は以上の方々をはじめとする関係各位の多くの方々によりささえられてきました。ここに深く感謝の意を表わします。