Osaka University Knowledge Archive

Title	Beziehungen zwischen den Strukturen von Normalteiler und Quasinormalteiler
Author(s)	Nakamura, Kirio
Citation	Osaka Journal of Mathematics. 1970, 7(2), p. 321-322
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/12448
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

Nakamura, K.
Osaka J. Math.
7 (1970) 321-322

BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DEN STRUKTUREN VON NORMALTEILER UND QUASINORMALTEILER

Herrn Professor Keizo Asano zum 60. Geburtstag am 20. November 1970 gewidmet

KIRIO NAKAMURA

(Received April 22, 1970)

In dieser Note soll die Struktur der Quasinormalteiler angeführt werden. Ore hat schon gezeigt, daß jeder maximale Quasinormalteiler gleichzeitig ein Normalteiler in der gegebenen Gruppe wird ([3], Theorem 19). Ein minimaler Quasinormalteiler darf aber nicht notwendig Normalteiler sein, wie das folgende Beispiel zeigt. In der Tat hat die p-Gruppe $\mathfrak{G}$ mit den Relationen $A^{p^m}=B^p=1$, $BAB^{-1}=A^{1+p^{m-1}}$ zwar einen Quasinormalteiler $\langle B\rangle$, der aber kein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist. Dies verneint das Dual vom Oreschen Satz. Doch erhalten wir den als Umkehrung dazu geltenden

Satz. *Sei $\mathfrak{N}$ jeder minimaler Normalteiler von der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$. Dann bleibt $\mathfrak{N}$, betrachtet als Quasinormalteiler* von $\mathfrak{G}$, auch minimal. Anders gesagt: $\mathfrak{N}$ umfaßt keinen echten Quasinormalteiler von $\mathfrak{G}$.*

Bezeichnungen, Definitionen.

$\underline{\mathfrak{N}}$=Herz von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}=\bigcap_{x\in\mathfrak{G}}\mathfrak{N}^x$=der maximale in $\mathfrak{N}$ enthaltene Normalteiler von $\mathfrak{G}$,

$\mathfrak{M}$=maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$,

$\Phi(\mathfrak{G})$=Frattinigruppe von $\mathfrak{G}$=Durchschnitt aller maximalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$,

$C_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N})$=Zentralisator von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}$,

$\mathfrak{F}$=Fittinggruppe von $\mathfrak{G}$=das Produkt aller nilpotenten Normalteiler von $\mathfrak{G}$,

Die Untergruppe $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ heißt modular in $\mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{N}$ mit jeder Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ein modulares Paar von Untergruppen von $\mathfrak{G}$ bildet ([5], S. 7), d.h. wenn gilt:

$$(\mathfrak{U}\cup\mathfrak{N})\cap\mathfrak{V}=\mathfrak{U}\cup(\mathfrak{N}\cap\mathfrak{V}) \qquad \text{für alle } \mathfrak{U},\ \mathfrak{V}\leqq\mathfrak{G} \text{ mit } \mathfrak{U}\leqq\mathfrak{V}$$

und

* Daß schon echte modulare Untergruppe ausreicht, kann man aus R. Schmidt ([4], Satz 4, S. 374 und [5], Theorem 3, S. 349) wegen Minimalität von $\mathfrak{N}$ leicht heranziehen. Jedoch kann man daraus leider diesen Satz nicht erhalten.

$$(\mathfrak{U} \cup \mathfrak{N}) \cap \mathfrak{V} = (\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V}) \cup \mathfrak{N} \qquad \text{für alle } \mathfrak{U}, \mathfrak{V} \leqq \mathfrak{G} \text{ mit } \mathfrak{N} \leqq \mathfrak{V}\,.$$

Bemerkenswert ist, daß ein Quasinormalteiler immer modular in $\mathfrak{G}$ ist ([5], Theorem 5, S. 5) und daher $\mathfrak{G}/C_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N})$ für das im Beweis angegebene $\mathfrak{N}$ auflösbar wird ([4], Satz 5).

Beweis vom Satz. Sei $\mathfrak{G}$ ein Gegenbeispiel zu Satz von kleinstmöglicher Ordnung. Aus der Wahl von $\mathfrak{G}$ umfaßt $\mathfrak{N}$ einen echten minimalen Quasinormalteiler $\mathfrak{N}_1$ von $\mathfrak{G}$, dabei $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{E}$ wegen der Minimalität von $\mathfrak{N}$ gilt. Daraus folgt, daß $\mathfrak{N}_1$ also auch $\mathfrak{N}$ eine p-Gruppe ist ([2], Korollar 2, S. 170), da $\mathfrak{N}$ von allen zu $\mathfrak{N}_1$ konjugierten Quasinormalteilern von $\mathfrak{G}$ erzeugt wird. Weiter ist $\mathfrak{N}$ wegen seiner Minimalität wieder sogar eine elementar abelsche p-Gruppe. Nun sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{M}\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$. Dann haben wir sofort $\mathfrak{G} \rhd \mathfrak{N}_2$, da $\mathfrak{M} \rhd \mathfrak{N}_2$ und $\mathfrak{N}$ abelsch daher $\mathfrak{N} \rhd \mathfrak{N}_2$ ist. Wir beachten jetzt $\mathfrak{N} > \mathfrak{N}_2$, da sonst unerträgliches $\mathfrak{G} = \mathfrak{M}$ wäre. Dies ergibt $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{E}$ wegen der Minimalität von $\mathfrak{N}$. Damit bekommen wir $\mathfrak{G} = \mathfrak{M}\mathfrak{N} > \mathfrak{M}\mathfrak{N}_1 > \mathfrak{M}$, entgegen der Maximalität von $\mathfrak{M}$. Dies erzwingt das gewünschte $\Phi(\mathfrak{G}) \geqq \mathfrak{N}$. Es ist $C_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}) \geqq \mathfrak{F} \geqq \Phi(\mathfrak{G})$ ([1], 4. 2 Satz, c), e).). Sei zuerst $\mathfrak{G}$ auflösbar. Dann ist $\mathfrak{F} > \Phi(\mathfrak{G})$ ([1], 4. 2 Satz, c).). Dagegen sei $\mathfrak{G}$ nicht auflösbar. Dann muß $C_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}) > \mathfrak{F}$ sein, da $\mathfrak{N}_1$ eine modulare Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist. In jedem Falle gilt also noch schärferes $C_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}) > \Phi(\mathfrak{G}) \geqq \mathfrak{N}$. Daher erhalten wir ein $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{M}C_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N})$ und $\mathfrak{M} \cap C_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}) \geqq \mathfrak{N}$. Aus der Wahl von $\mathfrak{G}$ kann $\mathfrak{N}$ keineswegs minimaler Normalteiler von $\mathfrak{M}$ mehr bleiben. Dies zeigt schon, daß eine Untergruppe $\mathfrak{N}_3$ mit $\mathfrak{N} > \mathfrak{N}_3 > \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M} \rhd \mathfrak{N}_3$ existieren kann. Offensichtlich gilt $C_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}_3) \geqq C_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}) > \mathfrak{N} > \mathfrak{N}_3$ daher $C_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}) \rhd \mathfrak{N}_3$, was gleich $\mathfrak{G} \rhd \mathfrak{N}_3$ liefert. Aber das widerspricht schließlich der Minimalität von $\mathfrak{N}$. Damit beendet der Beweis.

KOBE HOCHSCHULE DER HANDELSMARINE

Literatur

[1] B. Huppert: Endliche Gruppen, I, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

[2] N. Ito und J. Szép: *Über die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen,* Acta Sci. Math. (Szeged) **23** (1962), 168–170.

[3] O. Ore: *Contributions to the theory of groups of finite order,* Duke Math. J. **5** (1938), 431–460.

[4] R. Schmidt: *Modulare Untergruppen endlicher Gruppen,* Illinois J. Math. **13** (1969), 358–377.

[5] R. Schmidt: *Modular subgroups of finite groups* II, Illinois J. Math. **14** (1970), 344–362.

[6] M. Suzuki: Structure of a Group and the Structure of its Lattice of Subgroups, Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1956.