

Title	不適解の原因と処理 : 探索的因子分析
Author(s)	狩野, 裕
Citation	大阪大学人間科学部紀要. 1998, 24, p. 303-327
Version Type	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/12544">https://doi.org/10.18910/12544</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

## 不適解の原因と処理：探索的因子分析

狩 野 裕

### 目 次

1. 序
2. 探索的因子分析と不適解
3. 3つのパターン
4. 原因と同定と処置
5. 例
6. おわりに

## 不適解の原因と処理：探索的因子分析

狩野 裕

### 1 序

因子分析や共分散構造分析において不適解の問題は歴史が古い。丘本(1986, 68 頁)によると『(不適解の解決に関して)前途はまだ遠い』とあるが、その後も不適解に関する研究はあまり進んでいない。

探索的因子分析で不適解が得られたとき、一つの解決策は検証的因子分析(確認的因子分析)に移行することである。検証的分析では利用可能な情報が多いこと、それゆえ推定すべき母数が少なく、やや安定した推定が可能になる。構造的に探索的因子分析できないときでも、検証的因子分析が可能な場合がある(狩野 1996)。最近、分析方法の主流が探索的因子分析から検証的因子分析に移ってきているが、その理由の一つがここにある。しかしながら、潜在構造に関して良質な仮説がないと検証的因子分析は実行できない。また、検証的因子分析がうまく実行できたときでも、なぜ探索的因子分析では不適解が出るのかを十分に検討しておく必要がある。

検証的因子分析で不適解が発生しないというのは間違いで、依然としてかなりの割合で発生する(Gerbing-Anderson 1985、1987)。検証的因子分析における不適解の研究は、モデル規定が多様であることから、現在のところ、シミュレーション以外に見当たらない。検証的因子分析の不適解については別の機会に議論する。

ピュアーな探索的分析を実行したいときは、『“主成分分析もしくは主因子法” + 回転』という簡便法があり、この方法では不適解は出ない。

検証的因子分析を使うには仮説の設定に困難がある、また、恣意的な仮説設定を避けたい、という状況は多い。また、主成分分析よりも精緻な議論をしたいということも多い。観測変数に独自因子のような誤差が伴うと考えられる場合は主成分分析は不適切であるし、主因子法では共通性の推定方法が問題になる。主成分分析や主因子法が testable でなくモデルチェックがおろそかになっている(無批判に適用されている)という批判もある。

主成分分析、探索的因子分析、検証的因子分析、これらの手法は複合的に使ったり、あるものが他をカバーする場合もあるが、基本的に棲み分けがある。潜在構造に関する必要な仮説の多寡で順序をつけると次のようになる。

主成分分析<探索的因子分析<検証的因子分析
-----------------------

本論文の3節と4節で、探索的因子分析における不適解発生メカニズムを明らかにし、その原因の同定方法、原因ごとの対処方法を提示する。5節では、不適解が生じる3組のデータを用いて、ここで発展させられた原因の同定方法、対処方法を例証する。

## 2 探索的因子分析と不適解

因子分析モデルは、 $p$  次元観測変数  $x$  が次の構造をもつことを仮定する。

$$x = \Lambda f + u$$

ここで  $\Lambda = (\lambda_{ij})$  は因子負荷(パターン)行列 ( $p \times k$ )、 $f = [F_1, \dots, F_k]'$  は共通因子ベクトル、 $u = [U_1, \dots, U_p]'$  は独自因子ベクトルである。 $\text{Var}(f) = I_k$ 、 $\text{Cov}(f, u) = 0$ 、 $\text{Var}(u) = \Psi = \text{diag}(\Psi_1, \dots, \Psi_p)$  を仮定する。このとき、観測変数  $x$  の分散行列  $\Sigma (= (\sigma_{ij}))$  は次の構造をもつ。

$$\Sigma = \Lambda \Lambda' + \Psi \tag{1}$$

$k$  を共通因子の数、もしくは、単に因子数という。(1)を因子分析における基本方程式という。

(1)のモデルは直交モデルである。探索的因子分析における不適解の問題を議論するときは、斜交モデルを考える必要はない。というのは直交解を得る段階で不適解が生じるからである。

$\Psi = \text{diag}(\Psi_1, \dots, \Psi_p)$  は独自因子の分散行列である。従って、理論的には正定値である。第  $i$  独自因子  $U_i$  の分散である  $\Psi_i$  の推定値が0または負の値になるとき、これを不適解(improper solution) または、Heywood case という。SAS や SPSS などの汎用プログラムでは、不適解が生じると「共通性が1を超えました」などというメッセージが出力される。

心理学者など応用の研究者は、解釈上  $\Psi_i \leq 0$  となることはあり得ないので不適解を問題とした。一方、数理統計学的立場からは、「不適解を問題にすることの」への疑義がとなえられている。彼らの主張をまとめると以下ようになる。

- 推定値は想定した母数空間 (または、それをコンパクト化したもの) 上の値であり、母数空間以外で値をとるものは考える必要がない。
- 母数空間を拡張し  $\Psi_i \leq 0$  を許す方が最適化問題が簡単になる。その際、標本変動によって不適解となる確率は正であるから、不適解は起こるべくして起こっている。
- いずれにしても、最終解は  $\Psi_i \geq 0$  なる母数空間で求めればよく、理論的に確率正で  $\Psi_i = 0$  となる。

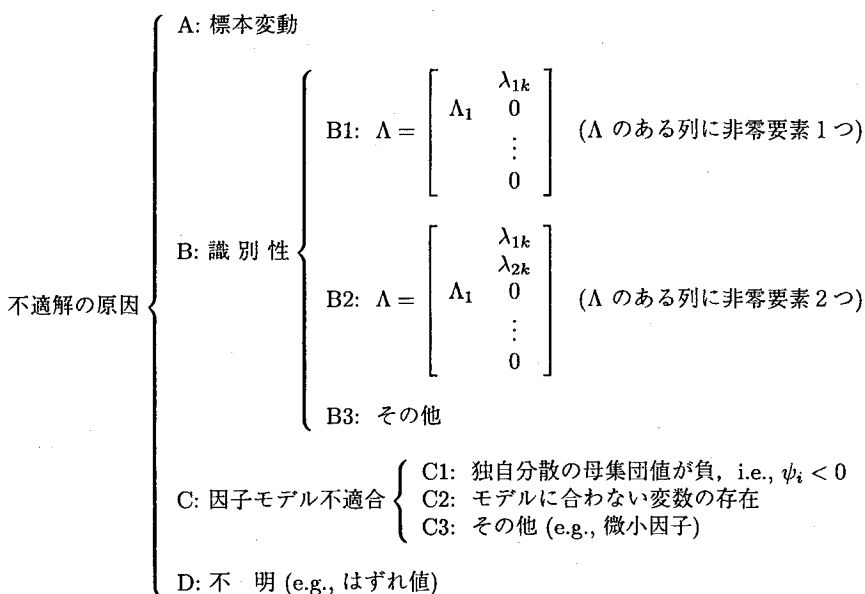
不適解の出現にはいくつかの原因があり、数理統計家の主張は、それらの原因の一つにしかすぎない標本変動による不適解に対するものである。また、不適解の原因が標本変

動であることは少なく、多くの場合、それ以外に重大な原因がある。以下に述べるように、推定値が適解かどうかを観ることは、因子分析が適切に実行されているかどうかのチェック機能になっている。不適解の議論が重要なのは、この点にある。

### 3 3つのパターン

図表 1 にまとめてあるように、不適解の発生原因には大きく分けて3つのパターンがある。

図表 1. 不適解の発生原因のパターン



原因「A：標本変動」は分かり易い。 $\Psi_i$ の母数空間は

$$0 \leq \Psi_i \leq \sigma_{ii}$$

であり、相関行列を考えるとときは $\sigma_{ii} = 1$ である。推定の構造から上記の範囲に推定値が収まるということはないので、ある正の確率で推定量はこの範囲を超えることになる。これが不適解の一つの原因と考えるのは自然である。シミュレーションで不適解が出るという場合がこれに相当する。

真値 $\Psi_i$ が0に非常に近いとき不適解が出易いというのは直感に合う。しかし、 $\Psi_i$ が中よう程度の大きさならば、大きければ大きいほど(共通性が小さいほど)不適解が出易くなる (Ihara-Okamoto 1985)<sup>1)</sup>。この観測もまた直感に合う。因子が“弱く”なるのである。

一方、 $\Psi_i$ が $\sigma_{ii}$ に近いときは、基本的に不適解は出ない (Van Driel 1978, Section 3.2)。

しかし、実際には、共通性が小さく推定された変数に不適解が生じることがある。その理由として、その変数が因子モデルに含めるべきでない変数であることが考えられる(それゆえ共通性が小さい)。もしそうならば、不適解の原因は標本変動ではなく、「C：因子モデルの不適合」である。

「B：識別性」の問題は重要である。Anderson-Rubin (1956) は因子モデルが識別可能であるための必要条件が、因子負荷行列  $\Lambda$  の各列において、非ゼロ要素が少なくとも3つ以上存在することを指摘した。従って、ここで紹介している2つの場合 B1, B2はモデルが識別可能でない。それゆえ、不適解など異常なことが起こるのである。モデルではともかく、実際のデータ解析で、推定値がきっちり0になることはあり得ない。しかし、0でなくとも、かなり0に近いと推定値を求める際、異常なことが起こる。その一つが不適解である。このように、推定値においては識別可能かもしれないが、近くに識別できないモデルが存在するとき、これを *empirically underidentifiable* という (Kenny 1979; Rindskopf 1984)。

B1では、ある列に非ゼロ要素が一つしかない。この因子負荷をもつ共通因子は、実は、共通因子ではなく独自因子である。このように、因子数を過大推定すると、独自因子が共通因子に解釈されるということが起こり、識別性の欠如により不適解が発生する (Sato 1987; Kano 1990)。

原因 B2は、Van Driel(1978) が Bechtoldt (1961) のデータと数値実験によって不適解の原因になると指摘している。Sato(1992) は、不適解に関わる母数についてはともかく、その他の母数については一致推定できることを示した。B2場合、 $k-1$  因子モデルは明らかに棄却される。そして、因子を一つ増やして因子分析すると不適解に遭遇するという典型的な状況を生む。2つの非ゼロ要素のうちの一つが大きくなると他の一つが小さくなるため、B1と区別が付き難くなることがある。実際、筆者は B2をB1と誤解していた時期があった。

不適解が生じたとき、「C：因子モデル不適合」はしばしば口にされる。しかし、現在のところ、その構造は明らかではない。不適合と一口に言っても、どう不適合なのか、そのパターンが完全には整理されていないのである。ここでは、「C1：独自分散の母集団値が負」「C2：モデルに合わない変数の存在」の2つを取り上げている。その他にも色々パターンがあろうが今後の課題としたい。「D：不明」は、A、B、C 以外の状況である。

#### 4 原因の同定と処置

不適解のパターンを同定するために以下のことを検討する。まず、母数空間の制約  $0 \leq \psi_i \leq \sigma_{ij}$  をはずして、制約のない自由な母数として推定する。そうして、図表2のチェック項目を検討する。

図表 2. 不適解の原因を同定するためのチェックリスト. C2に対しては本文を見よ。

チェック項目	不適解の原因			
	A	B1	B2	C1
(i) 反復は収束するか?	○	×	×	○
(ii) 推定値は安定しているか? (推定方法や初期値, 最適化アルゴリズムに大きく依存しない)	○	一つの変数に関わる推定値が不安定	二つの変数に関わる推定値が不安定	○
(iii) $\hat{\psi}_i$ の標準誤差 (SE) がほぼ同じ大きさであるか?	○	一つ大きい SE がある	二つの大きい SE がある	○
(iv) (iii) が○であってかつ, 負の値として推定された $\hat{\psi}_i$ の信頼区間が0を含むか?	○	×	×	×
(v) 基準化残差†がおよそ同じぐらいの大きさか?	○	○	× ( $k-1$ 因子解に対して)	○

† 基準化残差:  $\text{Diag}(S)^{-1/2} [S - (\hat{\Lambda}\hat{\Lambda}' + \hat{\Psi})] \text{Diag}(S)^{-1/2}$  の各要素

(iv) は (iii) が○であることを前提とする。標準誤差が極めて大きくなり、信頼区間が原点を含むことが結構あるのである。この場合は、標準誤差が不当に大きく推定されており信頼区間が信頼できないからである。

不適解の原因が「A: 標本変動」であると判断できるためには、上記の5つの条件(i) - (v) がすべて確認できる必要がある。つまり、反復が収束、推定値が安定、標準誤差の大きさがそろっており、区間推定が原点を含み、基準化残差が同程度の大きさであることが成立していなければならない。不適解の原因が「A: 標本変動」であると判断した場合、 $\hat{\Psi}_i = 0$  とする境界解 (boundary solution) を採用する。

この解析がどの程度価値があるかを検討しておく必要がある。つまり、標本変動によって  $\hat{\Psi}_i < 0$  となるような(あまり質のよくない)標本に基づく解析が、どの程度信用がおけるのであろうか。Bagozzi-Yi (1991) は、たとえ  $\hat{\Psi}_i > 0$  であったとしても、 $H_0: \Psi_i = 0$  のワルド検定が有意にならないとき、つまり、 $\Psi_i$  の信頼区間が原点を含むとき、incongruous solutions とよんで、モデルの不適切さの指標としている。これを必要要件とするならば、不適解が起こるとモデルはいつも採択しないという結論になる。しかし、不適解である  $\hat{\Psi}_i$  はともかく、それ以外の推定値は真値を十分に近似しているかもしれない。Gerbing-Anderson (1987) は大規模なモンテカルロ実験を行い、境界解などの性質を調べた。その結果、不適解となる観測変数に関わるパラメータの推定値にはややバイアスが生じるものの、その他の推定値はかなりよく真値を近似しているという結論を得ている。

一方、次に述べるように不適解の原因がB、Cのときには、不適解が真値（実は真値の定義も難しい）を近似している保証がない。この意味で、「A：標本変動」による不適解は「良性」、その他の原因による不適解は「悪性」とよんでもよいであろう。

不適解の原因が「B：識別性」のときは、一般に、上記(i)、(ii)が×であることが多い。識別性が崩れているときは、パラメータの多くの値に対して適合関数の値が同じになるので、反復が収束しないことが多いのである。B1とB2の違いは、B1では、初期値を変えれば不適解になる変数がいろいろ変わるが、B2では、不適解になる変数が、図1の例で考えれば、ほぼ、変数1と2に限られる。その他の変数が不適解になったとしても $\chi^2$ 一値が大きくなり適合度が悪くなる。 $k-1$ 因子分析結果の基準化残差を比較すると、B2では、(2,1)成分がやや飛びぬけて大きくなるのに対して、B1では、そのような異常性は現れない。もちろん、(iii)、(iv)も×である。再び図1の例で考えれば、B1では $\hat{\psi}_1$ の標準誤差が大きく、B2の場合は、 $\hat{\psi}_1$ と $\hat{\psi}_2$ の標準誤差が大きくなる<sup>2)</sup>。さらに、原因がB2である場合は、 $k-1$ 因子モデルで $H_0: \text{Cov}(U_2, U_1) = 0$ をLM検定すると有意になる。

B1とB2の区別は明確でないこともあるが、標準誤差に比べて、基準化残差とLM検定がより有用な情報を与えることが多い。推定値が不安定なときは標準誤差も不安定になり、それゆえ、標準誤差が正確な情報を与えないことがあるからである。

不適解の原因が「B：識別性」のときの対処方法は次のようになる。B1の場合は、独自因子が共通因子に解釈されないように、因子数を1減らして $k-1$ として再推定すればよい。しかし多くの場合、小さい因子数からモデルの適合度を検討しているはずであり、因子数が $k-1$ であるモデルが棄却されたため $k$ 因子モデルで推定したと考えられる。従って、B1の対処方法は、 $k-1$ 因子モデルが棄却されることへの対応ということになる。基本的に $k-1$ 因子モデルの構造をもっているながら、このモデルが棄却される理由として、次の2つが分かっている。

B11 標本サイズ  $n$  が大きく、検定の検出力が非常に高くなっている；

B12 母集団分布に関する仮定が崩れており、検定統計量の分布がカイ2乗分布で近似できない。

$n$  が大きいときはP-値をややあまくみるか、共分散構造分析で発展した適合度指標(GFI, CFIなど)を参考にすることになる。モデルが現実の近似である以上、モデルで説明しきれない部分(例えば、微小因子(minor factors)の影響)は必ずある。この部分はどんなに小さくても、 $n$ を大きくすると検出できる。検出してモデルを棄却すべきかどうか、この点が問題になる。モデルで説明しきれない部分を検出してモデルを採用しないとき、不適解の原因はCまたはDということになる。

独自因子が共通因子に解釈されないようにするための方法論も提案されている(Ihara-Kano 1986; Kano 1990)。

母集団分布に関する仮定が崩れている(B12)ときには、ADF法やその類型など種々の



オプションが用意されており (Browne 1982 ; Satorra-Bentler 1986)、共分散構造分析ソフトウェアで実行できる。

B2が原因のときは、 $\lambda_{1k} = \lambda_{2k}$  もしくは  $\psi_1 = \psi_2$  などと制約した下で推定する。また、 $k-1$  因子モデルにおいて独自因子間に共分散  $\text{Cov}(U_2, U_1)$  を導入することも考えられる。詳しくは Kano (1997b) を参照。

不適解の原因 C については、本稿では2つの例を考えている。一つ目 C1 は、母分散行列が  $\Sigma = \Lambda \Lambda' + \Psi$  なる構造をもつが、 $\psi_i < 0$  である場合である。この場合は明らかに変数  $X_i$  を因子モデルに含めることが間違っている。この原因を同定するにはまず、(i)–(iii), (v) が成り立っていることを確認する。 $\psi_i < 0$  であるから、(iv) は成立しないと考えられる。 $\psi_i < 0$  である場合の対処方法は、対応する変数  $X_i$  を削除することである。

二つ目 (C2) は、因子モデルに適合しない観測変数が含まれている場合である。そのような変数を統計的に同定し取り除くことによって、因子モデルが適合することがある。ここでは、モデルに適合しない変数の独自分散が不適になるという C1 の状況ではなく、適合しない変数のおかげで適合度が悪くなり、因子をもう一つ増やしたところ不適解が現われたという状況を念頭においている。Kano-Ihara (1994) は、尤度比検定法を用いてモデルに合わない変数を同定する方法を提案している。

以上の原因別対処方法を図表3にまとめてある。

図表3. 原因別対処方法

原因	対処方法
A	$\psi_i \geq 0$ の範囲で解を求める (境界解)
B11	GFI や CFI などの適合度指標を参照する
B12	ADF タイプの推測方法を行なう
B2	$\lambda_{1k} = \lambda_{2k}$ や $\psi_1 = \psi_2$ などの制約において推定する
C1	変数 $X_i$ を削除する
C2	モデルに合わない変数を同定し削除する

## 5 例

### 5.1 Maxwell のデータ

Maxwell (1961)<sup>3)</sup> は、精神病院 (psychiatric clinic) にやってきた148人の子供 (Sample 1) と正常な子供 810人 (Sample 2) に対して、心理テストと欲求・願望 (orectic tendencies) に関するアンケート調査を行った。彼は、両方のデータを当時最新の推測方法であった Lawley による最尤法を用いて (探索的) 因子分析 + 適合度検定を行い、最尤法がうまく働くときもあればそうでないときもあると報告した。Sample 1 はうまく働く例で、最尤

法+適合度検定の結果、3因子が抽出される。Maxwell(1961、55頁)は「一見2因子モデルで説明されるようだが、2因子モデルは oversimplification であり、統計的分析がそれを示した」と述べている。

図表 4 a. 標本相関行列 (Maxwell 1961, 正常児  $n=810$ )

COGNITIVE TESTS										
X1 Verbal Ability	1.000									
X2 Spatial Ability	.345	1.000								
X3 Reasoning	.594	.477	1.000							
X4 Numerical Ability	.404	.338	.498	1.000						
X5 Verbal Fluency	.579	.230	.505	.389	1.000					
ORECTIC TENDENCIES										
X6 Neuroticism Questionnaire	.280	.159	.251	.168	.151	1.000				
X7 Way to be different	.449	.205	.377	.249	.285	.363	1.000			
X8 Worries and Anxiety	.188	.120	.186	.173	.129	.359	.448	1.000		
X9 Interests	.303	.168	.273	.195	.159	.227	.439	.429	1.000	
X10 Annoyances	.200	.145	.154	.055	.079	.260	.511	.316	.301	1.000

一方、Sample 2 に対しては、最尤法+適合度検定はうまく働かない。3因子モデルは棄却され、4因子モデルでは、反復が収束せず、第8変数の独自分散  $\Psi_8$  の推定値が0に近づく。

Maxwell のデータの変数名ならびに Sample 2 の相関行列を 図表 4 a に示す。図表 4 b には3因子分析の結果を報告している。Maxwell (1961, 56頁)は、Sample 2 に対して最尤法+適合度検定がうまく働かない理由として、(i)推定方法の欠点；(ii)( $\hat{\lambda}_{81}$ ,  $\hat{\lambda}_{82}$ が小さいことより) 標本に error がある、という2つの可能性を指摘した。

図表 4 b. 因子負荷量の推定値：

Maxwell のデータ(図表 4a)の探索的因子分析(3因子解, VARIMAX 回転解)  $X_{81}^2$ -値=79.148<sup>4)</sup>( $n=810$ ), P-値<0.001；(推定値×1000)

	Factor 1	Factor 2	Factor 3	Community
COGNITIVE TESTS				
X1 Verbal Ability	653	352	284	631
X2 Spatial Ability	129	591	133	384
X3 Reasoning	469	657	204	694
X4 Numerical Ability	348	470	119	356
X5 Verbal Fluency	726	227	082	586
ORECTIC TENDENCIES				
X6 Neuroticism Questionnaire	122	160	433	228
X7 Way to be different	279	130	754	664
X8 Worries and Anxiety	039	092	591	359
X9 Interests	118	167	532	325
X10 Annoyances	028	028	614	378

ここでは Sample 2 の不適解の問題を考える。Sato (1987) は、(i)不適解になる変数が初期値に依存し、第6、8、9変数に不適解が現れること；(ii)  $\Psi_i < 0$  を許すと反復が収束しないこと、を報告している。独自分散の推定値と標準誤差を図 4 c に示す。

明らかに、Maxwell のデータにおける不適解の原因として、「A：標本変動」では

図表 4 c. Maxwell のデータ (図表 4a  $n=810$ ) の探索的因子分析 (4 因子解) :  
 独自分散  $\psi_i$  の推定値と標準誤差(SE) (推定値, SE $\times 1000$ )

		適合度		$\psi_1$	$\psi_2$	$\psi_3$	$\psi_4$	$\psi_5$	$\psi_6$	$\psi_7$	$\psi_8$	$\psi_9$	$\psi_{10}$
		$\chi^2_{11}$ -値	P-値										
$0 \leq \psi_i < \infty$	MLE	18.447	0.072	384	621	302	638	352	778	287	000	690	599
	SE			037	059	039	037	096	040	052	003	037	050
$-\infty < \psi_i < \infty$	MLE	14.589	0.202	397	629	298	644	324	802	275	-276614	725	609
	SE			037	056	040	037	108	042	046	156	040	044

図表 4 d. 基準化残差トップ 5 (3 因子解)

X 9 - X 8	X 8 - X 6	X 10 - X 8	X 8 - X 4	X 9 - X 6
0.095	0.084	-0.050	0.046	-0.044

なく「B：識別性」が疑われる。図表 4 d には、3 因子解における 45 個の基準化残差の中で、絶対値の大きい順に 5 つを示してある。

飛びぬけて大きいものがあるというわけではない。従って、B 2 が原因であるとは考えにくい。以上のことから、不適解の原因は B1 ではないかと考えられる。B1 と結論するためには、B1 のための原因 B11、B12 を検討しないとイケない。生データがないので B12 は検討できないが、 $n=810$  を勘案すると、「B11：標本サイズ  $n$  が大きく、検定の検出力が非常に高くなっている」と考えられる(ちなみに、 $GFI=0.981$ ,  $CFI=0.973$ )。以上が一つのストーリーである。

4 節で、以下のように述べた。

モデルが現実の近似である以上、モデルで説明しきれない部分は必ずある。

この部分はどんなに小さくても、 $n$  を大きくすると検出できる。検出してモデルを棄却すべきかどうか、この点が問題になる。モデルで説明しきれない部分を検出してモデルを採用しないとき、不適解の原因は C または D ということになる。

この意味を Maxwell のデータに即して考えてみる。Maxwell のデータには 3 因子モデルはかなりよく当てはまり、基準化残差もすべて 0.10 以下で、大きさに関して特異性は見当たらない。従って、このモデルは十分現実を反映しているだろう、というのが上記のストーリーである。しかし、モデルに当てはまらない部分は小さいかもしれないが、その部分をなんとかしてさらに良いモデルが構築できるのならば、話は別である。3 因子モデルはやはり棄却した方がよい、ということになるだろう。そのキーは、図表 4 d の基準化残差にある。残差の大きい方から 4 つまでが第 8 変数に関わっていることが分かる。つまり、この事実は、第 8 変数がこの因子モデルに合っていないという可能性を示唆している。そこで、各変数が 3 因子モデルに合っているかどうかを検討する。その

方法論は Kano-Ihara(1994) に与えられており、結果のみを述べると、予想通り、第8変数がモデル不適合であると判断され、第8変数を除いた、合計9変数に対する3因子モデルの適合度は、

$$\chi^2_{12}\text{-値}=14.58 (n=810) ; P\text{-値}=.2712$$

となり、見事に3因子モデルが受容される。

もちろん、この解析でも、モデルが完全にデータの発生機能になっているというわけではない。しかし、大標本  $n=810$  であっても、検出されないぐらいモデルに合わない部分が小さくなっている。図表4eに因子負荷の推定値をあげておく。

図表4e. 因子負荷量の推定値：

第8変数を取り除き残りの9変数を探索的因子分析（3因子解，VARIMAX回転解）

$$\chi^2_{12}\text{-値}=14.58 (n=810), P\text{-値}=.2712 ; (\text{推定値} \times 1000)$$

	Factor 1	Factor 2	Factor 3	Community
COGNITIVE TESTS				
X1 Verbal Ability	574	412	323	603
X2 Spatial Ability	095	585	139	371
X3 Reasoning	406	697	225	702
X4 Numerical Ability	325	487	117	356
X5 Verbal Fluency	780	243	092	675
ORECTIC TENDENCIES				
X6 Neuroticism Questionnaire	104	175	396	198
X7 Way to be different	228	143	808	725
X8 Worries and Anxiety	--	--	--	--
X9 Interests	103	180	482	275
X10 Annoyances	000	028	625	391

## 5.2 WISC-R データ

次の例は、WISC-R という知能検査データの因子分析である。

図表5a. 6歳児 WISC-R データの標本相関行列 ( $n=100$ )

(児玉ら 1978 ; 渡部 1992)

言語性検査												
X1 知識	1.00											
X2 類似	.39	1.00										
X3 算数	.23	.33	1.00									
X4 単語	.43	.44	.14	1.00								
X5 理解	.43	.43	.17	.56	1.00							
X6 数唱	.25	.24	.45	.24	.22	1.00						
動作性検査												
X7 絵画完成	.15	.28	.35	.17	.17	.13	1.00					
X8 絵画配列	.12	.24	.01	.22	.13	.08	.32	1.00				
X9 積木模様	.14	.25	.32	.14	.10	.30	.33	.28	1.00			
X10 組み合わせ	.20	.34	.16	.27	.28	.18	.16	.07	.40	1.00		
X11 符号	.07	.21	.09	.00	.08	.11	.11	.19	.27	.12	1.00	
X12 迷路	.11	.14	.16	.07	.08	.05	.23	.17	.33	.33	.37	1.00

図表5aに示した相関行列は「日本語版 WISC-R 知能検査法」(児玉ら 1978) に掲載

図表5b. WISC-R データの探索的因子分析結果(3因子解):  
 独自分散の推定値と適合度(推定値×1000)

制約 (収束判定基準)	推定法	適合度		独自分散推定値			
		$\chi^2_{33}$ -値	P-値	$\psi_1$	$\psi_2$	$\psi_3$	$\psi_4$
$0 \leq \psi_i < \infty$ ( $10^{-3}$ , $10^{-5}$ )	MLE	30.758	0.579	654	564	000	415
	LSE	30.716	0.581	653	559	000	409
$-\infty < \psi_i < \infty$ ( $10^{-3}$ )	MLE	47.977	0.045	660	-663718	788	431
	LSE	29.593	0.638	653	560	-492	415
$-\infty < \psi_i < \infty$ ( $10^{-5}$ )	MLE	28.689	0.682	654	575	-95233	431
	LSE	29.522	0.641	653	560	-550	415

図表5b.(続き)

	独自分散推定値							
	$\psi_5$	$\psi_6$	$\psi_7$	$\psi_8$	$\psi_9$	$\psi_{10}$	$\psi_{11}$	$\psi_{12}$
MLE	466	745	754	808	528	709	786	681
LSE	471	747	769	823	534	736	778	642
MLE	450	805	775	872	436	733	846	752
LSE	472	786	774	826	533	734	782	656
MLE	460	849	790	843	496	708	807	713
LSE	472	789	775	826	532	734	782	657

されている標準化データ(6歳児,  $n=100$ )である。WISC-Rの因子構造については1因子から3因子まで諸説あり、渡部(1992)では主因子法による5因子解も報告されている。服部(1992)はWISC-Rと類似の知能検査であるWAIS-Rにおいて検証的因子分析を試みている。ここで問題にするのは不適解となる3因子解である。図表5bに3因子モデルの最尤解(MLE)と最小2乗解(LSE)を報告する。 $-\infty < \psi_i < \infty$ とした場合でかつ収束判定基準があまい( $\epsilon=10^{-3}$ , EQSのデフォルト)とき、MLEは明らかに local maximum にしかすぎないが、このデータに3因子モデルを当てはめるときの異常性を

図表5c. MLEの標準誤差(SE×1000)

	$\psi_1$	$\psi_2$	$\psi_3$	$\psi_4$	$\psi_5$	$\psi_6$	$\psi_7$	$\psi_8$	$\psi_9$	$\psi_{10}$	$\psi_{11}$	$\psi_{12}$
$0 \leq \psi_i < \infty$	107	094	020	103	102	108	115	126	118	115	130	127
$-\infty < \psi_i < \infty$	098	092	90319	118	115	125	084	080	098	092	124	115

図表 5 d. LM 検定と基準化残差)

変数	LM 検定 (P-値)	基準化残差
$U_6, U_3$ ( $\psi_{6,3}$ )	11.353 (0.001)	.249
$U_{12}, U_{11}$ ( $\psi_{12,11}$ )	6.009 (0.014)	.167
$U_8, U_3$ ( $\psi_{8,3}$ )	4.618 (0.032)	-.164
$U_8, U_7$ ( $\psi_{8,7}$ )	3.622 (0.057)	-.144
$U_7, U_3$ ( $\psi_{7,3}$ )	2.956 (0.086)	.120

観るという意味であえて報告してある。収束判定基準を厳しくすると、 $\Psi_3$  が不適解になる(反復回数=100; 未収束)。別の初期値から反復を始めると 第11変数が不適解になった。

推定値の標準誤差(SE)を覗てみると(図表 5 c、 $-\infty < \psi_i < \infty$ の場合)、 $\hat{\Psi}_3 \leq 0$ となる第3変数が異常に大きい。異常とまではいえないが、 $\hat{\Psi}_6$ が2番目である。その他の値は0.1前後と、極めて一様である。0.1前後という標準誤差は小さくないが、これは標本サイズ  $n=100$  が小さいのが原因であろう。

このデータの不適解の原因は、明らかに「A: 標本変動」ではない。B1、B2の可能性を調べるため2因子モデルを当てはめると、適合度検定では P-値=0.106(図表 5 f)となり、2因子モデルが受容される。従って、3因子モデルの不適解の原因は、2因子モデルが当てはまるにもかかわらず、3因子モデルを当てはめようとしたからだと考えられる。つまり、B1をその原因とするのが一つの考えである。図表 5 cの標準誤差が第3変数を除いてほぼ一定であるということもこの結論を支持する。

図表 5 e. 因子負荷量の推定値( $F_1$ と  $F_2$ の因子負荷ベクトルは VARIMAX 回転してある)  
(推定値×1000)

Variable	Factor					
	MLE			LSE		
	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_1$	$F_2$	$F_3$
$X_1$ 知識	574	134	000	583	127	000
$X_2$ 類似	571	334	000	587	334	000
$X_3$ 算数	209	374	538	238	353	546
$X_4$ 単語	749	074	000	744	061	000
$X_5$ 理解	732	068	000	721	065	000
$X_6$ 数唱	290	245	538	305	227	546
$X_7$ 絵画完成	189	449	000	204	446	000
$X_8$ 絵画配列	184	332	000	170	326	000
$X_9$ 積木模様	100	706	000	121	709	000
$X_{10}$ 組み合わせ	306	434	000	303	404	000
$X_{11}$ 符号	017	422	000	014	431	000
$X_{12}$ 迷路	034	526	000	025	545	000

$F_1$ : 言語理解,  $F_2$ : 知覚的体制化,  $F_3$ : 転導性からの解放(短期記憶)。

更なる可能性を探った。基準化残差を検討した。図表 5d に示すように、第 6 変数と第 3 変数との相関に対応する部分の残差がかなり大きい。このようなときには注意が必要である。このように特異で大きな残差があるにもかかわらず 2 因子モデルが棄却されないのは、標本サイズが小さく検定の検出力が十分でなかったからという可能性が考えられる。

一つ大きな残差がある場合は、不適解の原因として B2 が考えられる。そこで、独自因子間に相関を許すべきかどうかを検討するため LM 検定を実行すると、予想通り  $\Psi_{63}$  が有意になった (図表 5d)。つまり、第 3 因子として、第 6 変数と第 3 変数にのみ負荷する因子を導入する価値があるように思われる。図表 5e に 3 因子解で、第 3 因子の第 6 変数と第 3 変数への負荷量を等しいとおき、さらにその他の因子負荷量が 0 であるとして推定した結果を示す。 $F_1$  と  $F_2$  の因子負荷量は VARIMAX 回転してある。また、第 3 因子の因子負荷のワルド検定は  $W=3.894$  であり高度に有意となる。「X3:算数」と「X6:数唱」に負荷する因子は、時として、「転導性からの解放因子」とよばれ、固有技術的観点からも意味のある因子のようである。

2 因子解と図表 5e のモデルとではどちらがよいと考えるべきであろうか。これら 2 つのモデルの適合度と AIC の値を図表 5f に報告してある。2 因子モデルのカイ 2 乗検定はモデルを棄却しないが、ここで考えたモデルの方がよい当てはまりを示し、AIC の意味でもよいであろうと思われる。

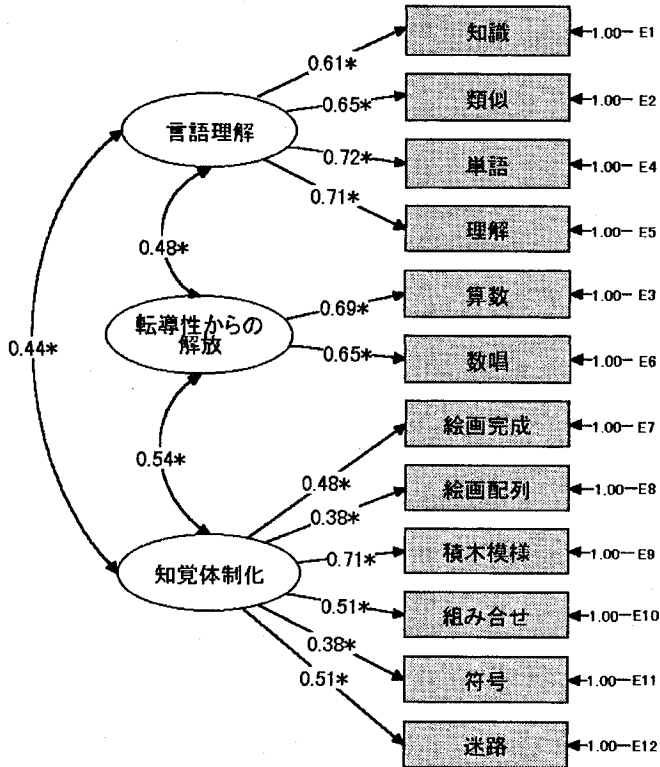
図表 5f. モデルの比較：2 因子モデル versus 表 5e で報告したモデル

モデル	$\chi^2$ -値(df)	P-値	AIC
2 因子モデル	54.873(43)	0.106	-31.127
表 4e のモデル	43.280(42)	0.416	-40.280

ここでは B1 と B2 の原因を考えた。12 変数の探索的因子分析で 3 因子までを同定したいのならば、標本サイズ  $n=100$  は小さすぎるであろう。その意味で標本サイズ数百のデータで再分析する必要がある。

Wechsler 系の知能検査データに対する探索的因子分析的接近はたくさんあるが(e.g., Allen-Thorndike 1995; Kaufman 1975; Leckleter-Matarazzo 1986; Osborne-Suddick 1972; 上野 1982; 藤田ら 1991; 前川ら 1991)、説得力のある解析例があまりないように思われる。特に、主因子解のような探索的因子分析の簡便法の適用が多く、データへの適合度を十分に検討したものは少ないようである。その中で、豊田(1992, 198 頁)、服部(1992)、O'Grady(1983)、清水(1996)、狩野(1997a)等が行なった、2 次因子分析や因子間に相関を認めた検証的因子分析がすっきりしているように思える。もちろん、これらの共分散構造分析が実行できるのは、先行研究において、探索的因子分析などによってこの知能検査データの因子構造に関する知見が積み重ねられてきたからである。参

図表 5 g. 検証的因子分析



考までに、図表 5 a の WISC-R データの検証的因子分析結果を図表 5 g に報告する。

このデータに対しては検証的因子分析などがうまく働いた。しかし、一般に、他の年齢のデータや WAIS-R に対してはうまくいかないこともある。年齢に関する不変性についても定説はない。Wechsler の奥は深い。

### 5.3 Bechtoldt のデータ

Bechtoldt (1961) は因子分析の安定性を調べるため 17 項目の心理テストを 2 組のデータ [Sample I ( $n=212$ ) と Sample II ( $n=213$ )] にランダムに分割し、それぞれの因子分析結果を比較した。当時は最適化アルゴリズムが不適切なものであったため不適解にはならなかったが、2 組に対する分析結果が大きく違ったため、因子分析に対する信頼が失われることとなった (丘本 1987, 22頁)。

このデータに対する 6 因子解は不適解となる。不適解の原因が B2 であることは Van Driel (1978) や Sato (1992) によって指摘されている。



図表 6 a. Bechtoldt のデータに対する探索的因子分析結果 (6 因子解,  $e=10^{-6}$ ; 推定値 $\times 1000$ )

標本	推定方法	収束反復 回数	適合度指標		独自分散の推定値			
			$\chi^2_{49}$ -値	P-値	$\psi_1$	$\psi_2$	$\psi_3$	$\psi_4$
Sample I	MLE	129	51.844	0.364	807	-224009	171	134
	SE				080	372	027	028
	LSE	35	56.604	0.212	680	-049	185	132
	SE				447	3177	802	985
Sample II	MLE	59	54.800	0.264	005	697	178	160
	SE				373	096	029	028
	LSE	34	55.206	0.252	195	660	187	164
	SE				1298	402	761	797

図表 6 a. (続き)

	独自分散の推定値												
	$\psi_5$	$\psi_6$	$\psi_7$	$\psi_8$	$\psi_9$	$\psi_{10}$	$\psi_{11}$	$\psi_{12}$	$\psi_{13}$	$\psi_{14}$	$\psi_{15}$	$\psi_{16}$	$\psi_{17}$
MLE	229	397	321	564	372	231	319	464	133	502	269	359	465
SE	031	064	085	064	085	046	047	063	106	054	055	056	054
LSE	214	370	350	559	369	227	319	440	191	475	257	362	475
SE	758	429	517	250	403	628	506	398	779	274	561	465	293
MLE	256	262	358	499	412	346	279	179	424	491	356	407	458
SE	033	064	056	058	053	054	051	094	064	054	069	058	063
LSE	245	274	352	489	408	356	272	204	406	481	363	387	464
SE	654	538	436	304	375	447	505	761	438	263	446	407	349

図表 6 a に Bechtoldt のデータに対する独自分散の最尤解(MLE)と最小 2 乗解(LSE)、並びにそれぞれの標準誤差を報告してある。6 因子解の適合度は良いが、第 1 変数と第 2 変数の独自分散の推定値が極めて不安定であることが分かる。Sato (1992) は初期値によっても異なった解が得られることを報告している。推定方法、最適化アルゴリズム、初期値によって異なる解が得られる好例である。Sample II の MLE、LSE は共に適解であるが、 $\psi_1$  の推定値がやや異なる。また、MLE の標準誤差は、 $\hat{\psi}_1$  と  $\hat{\psi}_2$  が突出して大きく、LSE では  $\hat{\psi}_1$  の標準誤差が大きい。従って、適解であっても、モデルが適切であるかどうか検討する方がよい。

一方、5 因子解(MLE)の適合度は悪い。図表 6 b に、独自因子間に相関を仮定すべき

かを調べる LM 検定と基準化残差を示す。これらの結果から、両 Sample とも、独自因子  $U_2$ 、 $U_1$  間に相関を仮定する(Model 1) か、この相関を説明する第 6 因子を導入すべき(Model 2) であることが分かる。図表 6c と 図表 6d にこれらのモデルに基づく推定結果を示す。Sample I と Sample II の分析結果は、 $\lambda_{15}$  にやや大きな違いがあるが、十分近いものであるといえるだろう。

図表 6b. LM テストと基準化残差 (5 因子解)

標本	変数	LM 検定 (P-値)	基準化残差
Sample I	$U_2, U_1$ ( $\psi_{2,1}$ )	34.449 (0.000)	.335
	$U_{11}, U_{10}$ ( $\psi_{11,10}$ )	9.869 (0.002)	.013
	$U_9, U_5$ ( $\psi_{9,5}$ )	8.078 (0.004)	.043
	$U_{11}, U_9$ ( $\psi_{11,9}$ )	7.356 (0.007)	-.026
	$U_4, U_1$ ( $\psi_{4,1}$ )	7.331 (0.007)	.043
Sample II	$U_2, U_1$ ( $\psi_{2,1}$ )	31.912 (0.000)	.278
	$U_{17}, U_{15}$ ( $\psi_{17,15}$ )	21.642 (0.000)	.113
	$U_{14}, U_{13}$ ( $\psi_{14,13}$ )	6.915 (0.009)	.042
	$U_{11}, U_5$ ( $\psi_{11,5}$ )	6.798 (0.009)	-.032
	$U_{10}, U_3$ ( $\psi_{10,3}$ )	5.465 (0.019)	-.026

図表 6c. Model 1(6 因子解;  $\lambda_{16} = \lambda_{26}$ ) & Model 2(5 因子解;  $\Psi_{2,1} \neq 0$ ) による分析結果:適合度と独自分散 (推定値  $\times 1000$ )

標本	推定方法	適合度		Model 1			Model 2		
		$\chi^2_{60}$ -値	P-値	$\lambda_{16} = \lambda_{26}$	$\psi_1$	$\psi_2$	$\psi_{2,1}$	$\psi_1$	$\psi_2$
Sample I	MLE	71.947	0.139	589	461	552	346	807	899
	LSE	72.086	0.136	590	460	547	348	808	895
Sample II	MLE	71.393	0.149	559	415	519	313	728	832
	LSE	71.366	0.150	558	429	523	311	740	834

図表 6c. (続き)

独自分散の推定値 (Models 1 and 2)																
$\psi_3$	$\psi_4$	$\psi_5$	$\psi_6$	$\psi_7$	$\psi_8$	$\psi_9$	$\psi_{10}$	$\psi_{11}$	$\psi_{12}$	$\psi_{13}$	$\psi_{14}$	$\psi_{15}$	$\psi_{16}$	$\psi_{17}$		
171	134	229	401	309	568	374	232	317	451	170	495	269	358	466		
193	130	210	404	318	557	378	221	328	434	220	484	247	362	476		
180	160	258	270	353	501	415	346	278	161	432	474	441	336	522		
193	160	250	276	365	485	413	354	275	201	405	473	431	312	524		

図表 6 d. Model 1(6 因子解； $\lambda_{16} = \lambda_{26}$ ) & Model 2(5 因子解； $\Psi_{2,1} \neq 0$ ) による分析結果：

因子負荷量 (推定値×1000)

変数	因子負荷量の推定値											
	Sample I						Sample II					
	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	F <sub>4</sub>	F <sub>5</sub>	F <sub>6</sub>	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	F <sub>4</sub>	F <sub>5</sub>	F <sub>6</sub>
X <sub>1</sub> First Name	255	224	014	198	194	<b>589</b>	150	276	000	103	<b>404</b>	<b>559</b>
X <sub>2</sub> Word-Number	135	238	074	052	136	<b>589</b>	197	176	107	246	163	<b>559</b>
X <sub>3</sub> Sentences	<b>817</b>	194	-025	138	323	000	<b>816</b>	238	027	152	270	000
X <sub>4</sub> Vocabulary	<b>839</b>	299	-001	191	190	000	<b>813</b>	302	027	195	223	000
X <sub>5</sub> Completion	<b>771</b>	215	252	120	230	000	<b>768</b>	258	120	135	230	000
X <sub>6</sub> First Letters	210	<b>691</b>	057	205	180	000	224	<b>783</b>	060	167	190	000
X <sub>7</sub> Four Letter Words	073	<b>799</b>	064	181	098	000	204	<b>702</b>	170	092	274	000
X <sub>8</sub> Suffixes	304	<b>551</b>	-033	149	112	000	305	<b>608</b>	009	112	153	000
X <sub>9</sub> Flags	045	075	<b>748</b>	179	166	000	037	112	<b>740</b>	144	063	000
X <sub>10</sub> Figures	005	074	<b>872</b>	039	029	000	030	002	<b>802</b>	032	093	000
X <sub>11</sub> Cards	094	-006	<b>816</b>	020	088	000	066	074	<b>830</b>	128	089	000
X <sub>12</sub> Addition	149	231	146	<b>649</b>	184	000	122	054	089	<b>898</b>	078	000
X <sub>13</sub> Multiplication	112	191	-009	<b>866</b>	153	000	131	178	089	<b>683</b>	214	000
X <sub>14</sub> Three-Higher	206	196	245	<b>511</b>	321	000	160	137	272	<b>512</b>	382	000
X <sub>15</sub> Letter Series	287	224	126	295	<b>704</b>	000	217	199	173	283	<b>602</b>	000
X <sub>16</sub> Pedigrees	362	195	141	134	<b>660</b>	000	394	131	041	106	<b>692</b>	000
X <sub>17</sub> Letter Grouping	227	210	153	339	<b>549</b>	000	135	306	211	236	<b>516</b>	000

F<sub>1</sub>: Verbal Comprehension, F<sub>2</sub>: Word Fluency, F<sub>3</sub>: Space, F<sub>4</sub>: Number, F<sub>5</sub>: Reasoning or Inductive, F<sub>6</sub>: Memorizing.

以上3つの実際データに対する、チェックリストの結果と不適解の処理方法を図表7にまとめてある。

図表 7. 3つのデータの不適解：原因の同定と処理  
(推定値は MLE, 独自分散に非負の制約はおかない)

項目 (図表 2)	Maxwell (k = 4)	WISC-R (k = 3)	Bechtoldt I (k = 6)	Bechtoldt II (k = 6)
(i) 反復 †	47	186	129	59
(ii) 安定	× (多くの変数に不適解)	× (図表 5b)	× (図表 6a)	△
(iii) S E	×	×	×	×
(iv) 信頼区間	×	×	×	適解
(v) 残差 (k-1 因子) 固有因子間相関の LM 検定 (k-1 因子)	× (第 8 変数に関わるもの) 第 8 変数に関わるもの	× (6,3) 要素 $\psi_{6,3}$	× (2,1) 要素 $\psi_{2,1}$	× (2,1) 要素 $\psi_{2,1}$
原因と処理	(B11: 3 因子) C1: X <sub>8</sub> を取り除く	(B1: 2 因子) B2: $\lambda_{33} = \lambda_{63}$ (3 因子) $\psi_{6,3} \neq 0$ (2 因子)	B2: $\lambda_{16} = \lambda_{26}$ (6 因子) $\psi_{2,1} \neq 0$ (5 因子)	

収束判定基準  $e = 10^{-6}$  としたときの収束するまでの反復回数

## 6 おわりに

Lawley-Maxwell (1971, Section 4.6) に不適解の対処方法が述べられている。そのアイデアは次のようである。 $\Psi_i$ の推定値が不適解だとすると、 $\Psi_i=0$ であると解釈する。つまり、誤差が0というわけである。このとき、適当な因子回転をすれば、共通因子の一つをある観測変数と同一視できる。このことを利用して因子負荷を推定する。Bentler (1976) は、このモデルは mixed factor-components model になることを指摘している。前節までの議論をふまえれば、この方法が盲目的に適用できるというわけではなく、不適解が標本変動によって引き起こされていること、独自分散 $\Psi_i$ が小さいということが妥当であること、以上の2つが満たされていることが必要条件である。Ihara (1987)、猪原 (1991)、Ihara-Kano (1995) は Lawley-Maxwell の解析の矛盾を指摘している。

本稿で議論したような分析を実行するには従来からの探索的因子分析のソフトウェアに加えて、共分散構造分析のソフトウェアの利用が不可欠である。最近の共分散構造分析ソフトウェアについては、狩野(1997b)、Kano(1997a)等を参照されたい。

共分散構造分析ソフトウェアの設計を観ると、不適解に対する製作者のポリシーが窺える。

- (i)  $-\infty < \Psi_i < \infty$ における解のみ出力(AMOS)；
- (ii) デフォルトは $-\infty < \Psi_i < \infty$ であるが、 $\Psi_i \geq 0$ における解(境界解)も出力できる(LISREL； CALIS)；
- (iii) デフォルトは $\Psi_i \geq 0$ であるが、 $-\infty < \Psi_i < \infty$ における解も出力できる(EQS)；
- (iv)  $\Psi_i \geq 0$ における解のみ(RAMONA； SEPATH)。

通常は、データ解析の途中で負の解を許しても、不適解の原因が標本変動であれば、最終解としては境界解 $\hat{\Psi}_i=0$ を報告する。負の解は不適解の原因を突き止めるために計算するのであって、最終解は母数空間内で探すべきだからである。AMOSは、不適解にはまったく意味がないと主張する。境界解を出力しないということから、 $-\infty < \Psi_i < \infty$ の下で適解になる解のみに意味がある、という製作者の主張が読み取れる。AMOSのデフォルトでは最大反復回数の制限もない。従って、未収束の場合反復が自動停止しない。強制停止すると推定値などは出力しない。徹底している。RAMONAの作者であるBrowneは、反復が収束しないことがあるので $\Psi_i \geq 0$ なる制約をおくとやっている。また、適解に対して、 $\Psi_i$ の信頼区間は、いつも0を含まないように構成される。

LISRELの作者であるJöreskogは、 $\hat{\Psi}_i < 0$ となる解はモデルチェックのために重要と言っている。同感である。私の経験では、(ii)か(iii)が使いやすい。

本論文の考察では、 $\hat{\Psi}_i$ の標準誤差が重要な役割を果たしている(Driel 1978, 243頁；Gerbing-Anderson 1987, 109頁)。この標準誤差に関してやや困ったことがある。境界

解で  $\hat{\psi}_i = 0$  と推定されたとき、標準誤差が極めて小さい値として出力されることがあるのである。例えば、図表 4c の  $\hat{\psi}_8 = 0.00$  の標準誤差は、0.003で、他と比べて随分小さい。同様のことが、図表 5c にも観られる。この意味でも、負の不適解を検討することが重要である。境界解しか見ないと、小さい標準誤差のため「A: 標本誤差」と判断してしまう誤りを犯すことがあるからである。

本稿では、探索的因子分析における不適解の原因と処理について議論してきたわけであるが、率直な意見として、かなりテクニカルだと言わざるを得ない。もう少し使い勝手がよく、因子分析の良さを保ちつつ主成分分析の欠点を補う方法論があってもよい。このような方法として、最近注目しているのが次の2つのモデルである。

$$\Sigma = \Lambda \Lambda' + \theta \{\text{diag}(\Sigma^{-1})\}^{-1} \quad (2)$$

$$\Sigma = \Lambda \Lambda' + \theta \text{diag}(\Sigma) \quad (3)$$

ここで  $\theta > 0$  は推定すべきスカラーである。(2)はイメージ分析から示唆を得たイメージ因子分析のモデルである(e.g., 柳井ら 1990, 68頁)。(3)はいわゆるテスト理論における信頼性が一定  $(1 - \theta)$  という仮定の下での因子モデルである。推定値は最尤法(反復法)で求める。正確な最尤推定値を求めるには専用のプログラムが必要であるが、SASやSPSS、共分散構造分析ソフトウェアでも実行可能である<sup>5)</sup>。

純粋に記述統計を行うために主成分分析を実行することは問題ない。因子分析したいが何らかの困難のために実行できず、その代替物を探すときは、主成分分析や主因子法より上記のモデルの方が良いのでないかと考えている。モデル(2)、(3)は因子分析モデルにおいて独自性にある種の条件をおいたものと考えられ、独自性を無視する主成分分析より適用範囲が広い。また、観測変数の尺度変換に対して尺度等変という性質を持つ。さらにモデルが testable である。もちろん、これらのモデルでは独自因子に関する細かい推測は難しい<sup>6)</sup>。

#### 註

- 1) これらの結果などは、丘本(1986, 67-68頁)、Cliff-Pennell(1967)、Pennell(1968)なども参照されたい。検証的因子分析モデルにおける標本変動の影響はBoomsma(1982, 85)、Anderson-Gerbing(1984)、Gerbing-Anderson(1985, 87)などによって調べられている。これらの研究はすべてシミュレーションによる。不適解が標本変動に起因する場合、推定量の漸近分散を求めることにより、どのモデル特性が不適解の発生率に影響するかをある程度理論的に計算できる。残念ながらこのような理論研究はまだないようである。
- 2) B2の場合、 $\hat{\psi}_1$ と $\hat{\psi}_2$ の値によっては、どちらかの標準誤差が小さくなることがある。
- 3) Maxwellは心理学者であり、後ほど出てくるLawleyは統計学者である。
- 4)  $X_{ij}$ で自由度  $df$  のカイ2乗分布を表す。
- 5) 共分散構造分析ソフトウェアであっても、共分散構造  $\Sigma(\theta)$  が陰関数として定義されている場合は、

正確な推定値を求めることができない。この意味では本文6節(2)、(3)のモデルの解を正確には求めることができない。簡便法であるが、右辺のΣを標本分散行列で置き換えれば、共分散構造分析ソフトウェアで解を求めることができる。

- 6) 主成分分析と因子分析の比較や因子分析の代用としての主成分分析については丘本(1986, 16頁)、Bentler-Kano(1990)、Sato(1990, 1992)なども参照されたい。

#### 参考文献

- Anderson, J.C. and Gerbing, D.W. (1984). The effect of sampling error on convergence, improper solutions, and goodness-of-fit indices for maximum likelihood confirmatory factor analysis. *Psychometrika*, 49, 155-173.
- Anderson, T.W. and Rubin, H. (1956). Statistical inference in factor analysis. *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 5, 111-150. Berkeley: University of California Press.
- Allen, S.R. and Thorndike, R.M. (1996). Stability of the WAIS-R and WISC-III factor structure using cross-validation of covariance structures. *Jour. Clinical Psychol.*, 51, 648-657.
- Bagozzi, R. and Yi, Y. (1991). Multitrait-multimethod matrices in consumer research. *Jour. Consumer Res.*, 17, 426-439.
- Bechtoldt, H.P. (1961). An empirical study of the factor analysis stability hypothesis. *Psychometrika*, 26, 405-432.
- Bentler, P.M. (1976). Multistructural statistical models applied to factor analysis. *Multi. Behav. Res.*, 11, 3-25.
- Bentler, P.M. and Kano, Y. (1990). On the equivalence of factors and components. *Multi. Behav. Res.*, 25, 67-74.
- Boomsma, A. (1982). The robustness of LISREL against small sample sizes in factor analysis models. In *Systems under Indirect Observation: Causality, Structure, Prediction (Part 1)* (Jöreskog, K.G. and Wold, H., Eds), pp.149-173.
- Boomsma, A. (1985). Nonconvergence, improper solutions, and starting values in LISREL maximum likelihood estimation. *Psychometrika*, 50, 229-242.
- Browne, M.W. (1982). Covariance structures. In *Topics in Applied Multivariate Analysis*, (D.M. Hawkins, Ed.) pp.72-141. Cambridge University Press, Cambridge, England.
- Cliff, N. and Pennell, R. (1967). The influence of communality, factor strength, and loading size on the sampling characteristics of factor loadings. *Psychometrika*, 32, 309-326.
- Gerbing, D.W. and Anderson, J.C. (1985). The effect of sampling error and model characteristics on parameter estimation for maximum likelihood confirmatory factor analysis. *Multi. Behav. Res.*, 20, 255-271.
- Gerbing, D.W. and Anderson, J.C. (1987). Improper solutions in the analysis of covariance structures: Their interpretability and a comparison of alternative respecifications. *Psychometrika*, 99-111.
- Ihara, M. (1987). The structure of improper solutions in maximum likelihood factor analysis. *Statist. Probab. Lett.*, 5, 35-37.

- Ihara, M. and Kano, Y. (1986). A new estimator of the uniqueness in factor analysis. *Psychometrika*, 51, 563-566.
- Ihara, M. and Kano, Y. (1995). Identifiability of full, marginal, and conditional factor analysis models. *Statist. Probab. Lett.*, 23, 343-350.
- Ihara, M and Okamoto, M. (1985). Experimental comparison of least-squares and maximum likelihood methods in factor analysis. *Statist. Probab. Lett.*, 3, 287-293.
- Kano, Y. (1990). Noniterative estimation and the choice of the number of factors in exploratory factor analysis. *Psychometrika*, 55, 277-291.
- Kano, Y. (1997a). Software. In *Special Issue : Covariance Structure Analysis. Behaviormetrika*, 24, 85-125.
- Kano, Y. (1997b). Exploratory factor analysis with a common factor with two indicators. *Behaviormetrika*, 24
- Kano, Y. and Ihara, M. (1994). Identification of inconsistent variates in factor analysis. *Psychometrika*, 59, 5-20.
- Kaufman, A. S. (1975). Factor analysis of the WISC-R at 11 age levels between  $6\frac{1}{2}$  and  $16\frac{1}{2}$  years. *Jour. Consulting Clinical Psychol.*, 43, 135-147.
- Kenny, D.A. (1979). *Correlation and Causality*. New York : Wiley.
- Lawley, D.N. and Maxwell, A.E. (1971). *Factor Analysis as a Statistical Method*. 2nd ed. Butterworths : London.
- Leckliter, I.N. and Matarazzo, J.D. (1986). A literature review of factor analytic studies of the WAIS-R. *Jour. Clinical Psychol.*, 42, 332-342.
- O'Grady, K.E. (1983). A confirmatory maximum likelihood factor analysis of the WAIS-R. *Jour. Consulting Clinical Psychol.*, 51, 113-119.
- Maxwell (1961). Recent trends in factor analysis. *Jour. Roy. Statist. Soc.*, A124, 49-59.
- Osborne, R.T. and Suddick, D.E. (1972). A longitudinal investigation of the intellectual differentiation hypothesis. *Jour. Genetic Psychol.*, 121, 83-89.
- Pennell, R. (1968). The influence of communality and  $n$  on the sampling distributions of factor loadings. *Psychometrika*, 33, 423-439.
- Rindskopf, D. (1984). Structural equation models : Empirical identification, Heywood cases, and related problems. *Sociolog. Res. Meth.*, 13, 109-119
- Sato, M. (1987). Pragmatic treatment of improper solutions in factor analysis. *Ann. Inst. Math. Statist.*, 39, 443-455.
- Sato, M. (1990). Some remarks on principal component analysis as a substitute for factor analysis in monofactor case. *Jour. Japan. Statist. Soc.*, 20, 23-31.
- Sato, M. (1992). A study of an identification problem and substitute use of principal component analysis in factor analysis. *Hiroshima Math. Jour.*, 22, 479-524.
- Satorra, A. and Bentler, P.M. (1986). Some robustness properties of goodness of fit statistics in covariance structure analysis, In *Proc. Bus. Econ. Statist. Sect.* (American Statistical Association) pp. 549-554.
- Van Driel, O.P. (1978). On various causes of improper solutions in maximum likelihood factor analysis. *Psychometrika*, 43, 225-243.
- 猪原正守 (1991). 因子分析における不適解に対する一つのアプローチ. 大阪電気通信大学研究論集, 26
- 上野一彦 (1982). WISC-R の標準化データの因子分析. 心理測定ジャーナル, 18, 19-21.

- 丘本 正 (1986). 因子分析の基礎. 日科技連.
- 丘本 正 (1987). 因子分析法の最近の発展. 社会科学の計量分析, 鈴木・竹内編. 東京大学出版会.
- 狩野 裕 (1996). 共分散構造分析とソフトウェア - 因子分析(2). BASIC 数学 6月号, 28-34.
- 狩野 裕 (1997a). 共分散構造分析とソフトウェア - 種々の共分散構造モデル(5). BASIC 数学 2月号, 28-35.
- 狩野 裕 (1997b). AMOS, EQS, LISREL によるグラフィカル多変量解析. 現代数学社.
- 児玉-品川-茂木 (1978). 日本版 WISC-R 知能検査法. 日本文化科学社.
- 清水和秋 (1996). 日本版 WAIS-R の 8 尺度の因子的不変性: 標準化 9 標本の多母集団同時分析. 関西大学社会学部紀要 28 97-112.
- 豊田秀樹(1992). SAS による共分散構造分析. 東京大学出版会.
- 服部 環(1992). 日本版 WAIS-R の因子構造. 宇都宮大学教育学部紀要 15, 13-23.
- 藤田-前川-小林-大六(1991). 日本版 WAIS-R の因子構造に関する研究(1). 日本心理学会第55回大会 発表論文集 851.
- 前川-藤田-小林-大六(1991). 日本版 WAIS-R の因子構造に関する研究(2). 日本心理学会第55回大会 発表論文集 852.
- 柳井 - 繁樹 - 前川 - 市川 (1990). 因子分析: その理論と方法. 朝倉出版.
- 渡部 洋(1992). 心理・教育のための多変量解析法入門. 福村出版.



# Causes and Treatment of Improper Solutions : Exploratory Factor Analysis

KANO, Yutaka

There are many causes of occurrence of improper solutions in factor analysis. Identifying potential causes of the improper solutions gives very useful information on suitability of the model considered for a data set.

This paper studies possible causes of improper solutions in exploratory factor analysis, focusing upon (A) sample fluctuations, (B) model underidentifiable and (C) model unfitted, each having several more detailed items. We then give a checklist to identify the cause, and suggest a procedure for how to treat improper solutions or how to re-estimate for each of the causes.

We illustrate the procedure suggested in this article, with several empirical data sets in which improper solutions are reported.