



Title	軸対称かくの強度および振動問題の数値解法に関する研究
Author(s)	間瀬, 正隆
Citation	大阪大学, 1973, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/1273
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

軸対称かくの強度および振動問題の 数値解法に関する研究

昭和48年 8 月

間 瀬 正 隆

論文目録

大阪大学

報告番号甲第1626号

間瀬正隆

主論文 軸対称かくの強度および振動問題の
数値解法に関する研究

(主論文のうち印刷公表したもの)

1. 一般軸対称かくの自由振動問題に対する摂動解法
日本機械学会論文集 39巻 317号
昭和48年1月
1. 軸力を受けるはりの自由振動問題に対する摂動解法
日本機械学会論文集 38巻 307号
昭和47年3月

(主論文のうち未公表のもの)

1. 一般軸対称かくの曲げ問題に対する三つのかく
理論の適用
日本機械学会論文集 39巻 326号
昭和48年9月 掲載予定
1. 回転円板の自由振動問題に対する摂動解法
日本機械学会論文集 39巻 326号
昭和48年10月 掲載予定
1. 圧力を受ける一般軸対称かくの自由振動問題
日本機械学会論文集
投稿中

1. 一般軸対称かくの曲げ問題に対する三つのかく理論の適用(続報)

日本機械学会論文集
投稿中

1. 圧力を受ける一般軸対称かくの自由振動問題に対する振動解法

日本機械学会論文集
投稿中

軸対称かくの強度および振動問題の 数値解法に関する研究

昭和48年 8 月

間 瀬 正 隆

目

次

緒	論	5
主	要 記 号	10
第 1 章	軸対称かくの曲げおよび自由振動問題に対する種々のかく理 論の比較	13
1.1	緒 言	13
1.2	基 礎 方 程 式	14
1.2.1	基礎関係式	14
1.2.2	Flügge の理論による解法	17
1.2.3	Sanders の理論による解法	20
1.2.4	溝口の理論による解法	22
1.2.5	Donnell の理論による解法	24
1.2.6	修正した Flügge の理論による解法	25
1.3	境 界 条 件	32
1.3.1	Flügge、溝口、Donnell、および修正した Flügge の 各理論による取扱い	32
1.3.2	Sanders の理論による取扱い	33
1.3.3	境界条件の例	33
1.4	接 続 条 件	34
1.5	自由振動問題の取扱い	37
1.6	差分法による数値解法	38
1.6.1	差分近似	38
1.6.2	静的曲げ問題	47

1.6.3	自由振動問題	50
1.7	応用例	52
1.7.1	静的曲げ問題	53
1.7.2	自由振動問題	56
1.7.3	考察	60
1.8	実験	63
1.8.1	実験装置および実験方法	63
1.8.2	結果および考察	66
1.9	結 言	69
第2章	圧力を受ける軸対称かくの曲げ、自由振動、および座屈問題 に対する解法の提案	71
2.1	緒 言	71
2.2	平衡方程式	73
2.2.1	平衡方程式の誘導	73
2.2.2	Donnell型平衡方程式の誘導	77
2.2.3	円筒かくの平衡方程式	79
2.2.4	圧力による平衡方程式	83
2.3	基礎方程式	84
2.3.1	Flüggeの理論に基づく解法	84
2.3.2	修正したFlüggeの理論に基づく解法	88
2.3.3	Donnellの理論に基づく解法	88
2.3.4	圧力のみの場合	93
2.3.5	自由振動問題の場合	94
2.3.6	座屈問題の場合	96

2.4	応用例	96
2.4.1	自由振動問題	96
2.4.2	座屈問題	101
2.4.3	考察	103
2.5	実験	104
2.5.1	実験装置および実験方法	105
2.5.2	結果および考察	105
2.6	結言	106
第3章	軸対称かくの自由振動問題に対する摂動解法	109
3.1	緒言	109
3.2	摂動解法	110
3.2.1	圧力による展開	110
3.2.2	かく厚による展開	116
3.3	直交関係	124
3.4	摂動項	127
3.4.1	第零次摂動	127
3.4.2	第一次摂動	127
3.4.3	第二次摂動	129
3.5	応用例	131
3.5.1	圧力による展開	131
3.5.2	かく厚による展開	134
3.5.3	考察	140
3.6	結言	142

結	論	143
付録	円板およびはりの自由振動問題に対する摂動解法の適用	146
1	緒言	146
2	回転円板	147
2.1	基礎関係式	147
2.2	摂動解法	150
2.3	数値計算例	153
2.4	考察	155
3	軸力を受けるはり	155
3.1	基礎関係式	155
3.2	摂動解法	158
3.3	数値計算例	160
3.4	考察	161
4	結言	162
文	献	164

緒 論

ボイラーや各種の化学装置などに使用されている圧力容器は、軸対称かくをその基本形状としているものが多い。これらの種々の形状の軸対称かくに対して、さまざまな荷重条件、および支持条件のもとにおける応力解析、振動解析、あるいは座屈解析を行なうことは工学上重要な課題である。この問題に対して最近では、電子計算機の発達に伴い任意形状の軸対称かくすなわち一般軸対称かくの諸問題を数値解法によって取扱う研究が多く見られるようになった。これらを解法によって分類すると、つぎのように分けることができる。

(1) 直接積分法によるもの^{(1)~(3)}

(2) 差分法によるもの^{(4)~(9)}

(3) 有限要素法によるもの⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾

直接積分法は、基礎方程式をたとえば Runge - kutta 法などによって直接積分して解を求めるために取扱いがきわめて容易であるが、子午線方向に長い形状のかくを取扱う場合には、解が不安定になる欠点を持つことが知られている。⁽¹²⁾ これを克服するため Kalnins⁽¹³⁾ は、かくを子午線方向にいくつかの領域に分けたうえで、その領域内で直接積分法を用いそれらの結果を接続して全体の解を求める方法を提案したが、これは最近とくに米国において多く用いられている方法である。つぎに差分法であるが、これは軸対称かくのような形状の構造物の解析には非常によく適した方法であり、従来からきわめて多く用いられてきた。また有限要素法は、Turner ら⁽¹⁰⁾ がこれを一般的なかくの問題に対して応用する考え方を示してから、現在ではこの方法は一般軸対称かくを含む種々の形状のかくに対し

て広く用いられるようになった。

これらの解法のうちいずれが優れているかという問題は、はなはだ興味がありそれゆえしばしば議論の対象となるが、とくに差分法と有限要素法の比較がよく問題になる。⁽¹⁴⁾ いずれも長所・短所があり簡単には断じ得ないが、一般軸対称かくのように比較的簡単な形状の構造物の解析には、解の精度が確認できることなど差分法がきわめて適しているということは間違いない事実である。それゆえ、本論文においては一貫してこの差分法を用いている。

さて以上のように現在では、一般軸対称かくの曲げ、振動、および座屈の問題は電子計算機を用いることにより容易に解けるようになってきたが、なお多くの問題点が残っている。とくに、これらのかくの自由振動特性を明らかにすることは、きわめて基礎的かつ重要な問題であり、これについては簡単な形状のかくではいまままでに種々の解析的な方法で解かれてきた。たとえば円板、⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾ 円筒かく、^{(17)~(21)} 球かく、^{(22)~(24)} 円すいかく⁽²⁵⁾などの振動問題については多くの研究がなされているが、一般軸対称かくに対してこれらの研究が発表されたのは最近のことである。⁽²⁶⁾⁽²⁷⁾ また従来の研究においては、その解析にあたって基礎として用いるかく理論はそれぞれ異なっているが、これに対する検討はほとんどなされていないのが実情である。

一般に言えばかく体も3次元物体であるが、これを取扱いやすくするため Love-Kirchhoff の仮定（いわゆる法線法則）をおき、その他種々の近似のもとに2次元的に取扱うのがかく理論であり、この近似のおき方によって種々のかく理論に分かれるのである。わが国においてもっともよく知られている理論に Flügge⁽²⁸⁾のかく理論

があり、米国では Sanders⁽²⁹⁾ のかく理論がしばしば用いられている。また Love⁽³⁰⁾ の式に対して批判を加え、さらに独自の基本的な考え方により、とくに円筒かくの諸問題にきわめて厳密な理論として有効に用いられてきた^{(31)~(35)} 溝口⁽³⁶⁾⁽³⁷⁾ のかく理論があり、さらに実用解を得るための近似的な理論として Donnell⁽³⁸⁾ のかく理論も従来からよく用いられてきたものの一つである。これらのうち Sanders⁽²⁹⁾ のかく理論は Budiansky ら⁽³⁹⁾ によってすでに一般軸対称かくの曲げ問題に適用できるような形で示され、その有効性も多方面において実証されている。⁽¹⁷⁾⁽²⁷⁾⁽⁴⁰⁾ しかし上に述べたその他の各理論では、まだこのような形で用いられた例はない。

そこで本論文の第 1 章において、Flügge、溝口、および Donnell のかく理論に基づいて、一般軸対称かくの静的曲げ、および自由振動の問題に対する解法を提案する。これらの解法、および Sanders のかく理論による解法を用いて、静的曲げ、および自由振動の例題を解きそれらを相互に比較したのち、Flügge のかく理論による結果の精度を向上させることを目的として、これに修正を加えた理論をも提案する。

第 2 章では、圧力が作用することによって緊張状態にある一般軸対称かくの、静的曲げ、自由振動、および線形座屈問題を取扱うための解法について考察する。このような問題に対処できる式としては、円筒かくの座屈問題に対して、1933 年 Donnell⁽³⁸⁾ の示した解法があり、これに続いて円筒かくに対するより一般的な解法として Timoshenko ら⁽⁴¹⁾⁽⁴²⁾ によって提案された式がある。円筒かくについてはこれらの諸問題の取扱いは多くなされてきたが、^{(42)~(45)} 本研究で取扱うような任意形状の軸対称かくの圧力容器の場合におけるこ

これらの問題は、当然基本的かつ重要なものであるにもかかわらず、これに対処できる式が発表されたのは最近のことである。一般軸対称かくに対処できる式としては、1967年 Cooper⁽⁴⁶⁾により、また翌年 Budiansky ら⁽⁴⁷⁾によって提案され、さらに後に Kalnins⁽⁴⁸⁾⁽⁴⁹⁾はこれをより系統的にまとめて、きわめて厳密な式を提案しているが、なおいくつかの疑問点があり、これに対する応用例も多くを示してはいない。⁽⁵⁰⁾

一方自由振動問題において振動数が零となるような外圧は(線形)座屈圧力を与えるが、これを個々の形状のかくに対して求める問題は実用上の重要性のゆえに、従来からかなり多くが扱われている。⁽³⁾
⁽⁵¹⁾しかし、これらは高い精度を期待できない近似理論によるものが大半である。そこですでに第1章でその有効性を確認した Flüggeのかく理論による解法を拡張して、圧力を受ける一般軸対称かくの諸問題に対処できる解法を提案しその有効性をあわせ示す。これとともに、実用上の簡易さを目的として Donnell 型の解法をもあわせ提案する。

第3章では、前章までにおいて取扱った解法を摂動解法と結びつける方法について考察する。もともと以上において述べた各解法はすべて数値解法であるから、与えられた一つの条件(かく形状、材質、支持条件、荷重など)のもとで一つの解を得るということは当然のことである。個々のかくの問題に摂動法を用いる試みは従来からいくつか発表されているが、⁽⁵⁾⁽⁵²⁾一般軸対称かくの自由振動問題に対してかくの形状寸法の一つ、または作用している圧力を摂動パラメータとして、固有振動数をこれらのベキ級数で表わす摂動解法についてこれを取扱った例は見うけられないので、本章において

摂動法を自由振動問題に対して適用する方法を確立する。この解法によれば自由振動特性とかくの形状、または圧力との関係を簡単なべき級数で表わすことができる。とくに固有振動数と圧力の関係式は、圧力の広い変動範囲にわたってその解の有効なことを実例をもって示す。

ここに述べる取扱いは数値解法と解析的解法との折衷的方法を確立しようとする一つの試みである。

以上が本論文の内容であるが、さらに付録において第3章の解法がその他の自由振動問題に対しても有効に適用できることを示すため、軸力を受けるはり、および回転する円板の自由振動問題に対する摂動解法について取扱う。

主 要 記 号

本論文中的おもな記号をつぎに列挙する。

a	代表長さ
b	$=1/(1-\nu^2)$
D	板の曲げ剛性 $= Eh^3/12(1-\nu^2)$
d	$=b/12$
E	縦弾性係数
f	振動数 Hz
h	かく厚
h_0	基準かく厚
j	差分点の番号
$M_\xi, M_\theta, M_{\xi\theta}$	合モーメント
$M_{\theta\xi}, \bar{M}_{\xi\theta}$	
$m_\xi, m_\theta, m_{\xi\theta}$	無次元合モーメント
$m_{\theta\xi}, \bar{m}_{\xi\theta}$	
$M_\xi^*, M_\theta^*, M_{\xi\theta}^*, M_{\theta\xi}^*$	付加外力による合モーメント
$\tilde{M}_\xi, \tilde{M}_\theta$	圧力による合モーメント
$N_\xi, N_\theta, N_{\xi\theta}$	合応力
$N_{\theta\xi}, \bar{N}_{\xi\theta}$	
$n_\xi, n_\theta, n_{\xi\theta}$	無次元合応力
$n_{\theta\xi}, \bar{n}_{\xi\theta}$	
$N_\xi^*, N_\theta^*, N_{\xi\theta}^*, N_{\theta\xi}^*$	付加外力による合応力
$\tilde{N}_\xi, \tilde{N}_\theta$	圧力による合応力
$\tilde{n}_\xi, \tilde{n}_\theta$	$\tilde{N}_\xi, \tilde{N}_\theta$ の無次元量

N	差分分割数
n	フーリエ指数
$\hat{N}_{\xi\theta}$	有効せん断合応力
$\hat{n}_{\xi\theta}$	$\hat{N}_{\xi\theta}$ の無次元量
P	圧力
p	P の無次元量 = Pa/Eh
Q_{ξ}, Q_{θ}	横せん断合応力
q_{ξ}, q_{θ}	無次元横せん断合応力
Q_{ξ}^*, Q_{θ}^*	付加外力による横せん断合応力
$\tilde{Q}_{\xi}$	圧力による横せん断合応力
$\tilde{q}_{\xi}$	$\tilde{Q}_{\xi}$ の無次元量
$\hat{Q}_{\xi}$	有効横せん断合応力
$\hat{q}_{\xi}$	$\hat{Q}_{\xi}$ の無次元量
r	緯円上の半径
r_{ξ}, r_{θ}	主曲率半径
s	子午線方向座標
t	時間
U, V, W	変位
u_{ξ}, u_{θ}, w	無次元変位
$\tilde{U}, \tilde{W}$	圧力による変位
$\tilde{u}_{\xi}, \tilde{w}$	$\tilde{U}, \tilde{W}$ の無次元量 = $\tilde{U}/pa, \tilde{W}/pa$
X^*, Y^*, Z^*	外力
$\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$	無次元外力
x, y, z	かく面の直角座標
Z	解行列 = $[u_{\xi} \quad u_{\theta} \quad w \quad m_{\xi}]^T$

γ	$= \rho' / \rho$
Δ	差分間隔
$\varepsilon_{\xi}, \varepsilon_{\theta}, \gamma_{\xi\theta}$	歪
θ	円周方向の位置を示す角度
θ_1	子午線方向の位置を示す角度
$\kappa_{\xi}, \kappa_{\theta}, \kappa_{\xi\theta}, \overline{\kappa_{\xi\theta}}$	曲率変化率
λ	$= h / a$
ν	ポアソン比
ξ	無次元子午線方向座標 $= s / a$
ρ	無次元半径 $= r / a$
ρ^*	比質量
σ_0	代表応力
$\sigma_{\xi}, \sigma_{\theta}, \tau$	応力
$\overline{\tau}$	無次元時間 $= (t/a) \sqrt{E/\rho^*}$
ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z	かく面要素の辺 A B の回転角
ψ_x, ψ_y, ψ_z	かく面要素の辺 A C の回転角
$\omega_{\xi}, \omega_{\theta}$	無次元曲率 $= a/r_{\xi}, a/r_{\theta}$
Ω	無次元固有振動数 $= 2\pi a f \sqrt{\rho^*/E}$
$(\quad)'$	$= \partial(\quad) / \partial \xi$

第1章 軸対称かくの曲げおよび自由振動問題に対する種々のかく理論の比較

1.1 緒 言

現在かくの問題を処理するために用いられるかく理論としては多くのものが存在する。わが国においては Flugge⁽²⁸⁾ のかく理論が一般に広く用いられているが、円筒かくの問題に限っては 溝口⁽³⁶⁾⁽³⁷⁾ のかく理論がより厳密な理論として認められている。一方取扱い易さの点ですぐれている Donnell⁽³⁸⁾ のかく理論も、その近似度に注意を払いながら多くの円筒かくの問題に適用されている。最近米国においては Sanders⁽²⁹⁾ のかく理論がさかんに用いられているが、これは上記の溝口の理論に匹敵すべき精度を持つものである。また Flugge の理論とともに、これと少し異なる Reissner⁽⁵³⁾⁽⁵⁴⁾ のかく理論が用いられることも多い。⁽⁵⁶⁾ このような種々のかく理論の精度の比較は、個々の問題においては検討された例はあるであろうが、^{(56)~(58)} 一般には研究者や技術者はその好みに応じていずれかのかく理論を用いているのが現状である。

Sanders⁽²⁹⁾ のかく理論を用いて Budiansky ら⁽³⁹⁾ は一般軸対称かくの曲げ問題に対する解法を示したが、浜田ら⁽²⁷⁾ はこれを自由振動問題にも適用できるように拡張した。本章ではこれらの解法にならって、Flugge、溝口、および Donnell の各かく理論を一般軸対称かくの曲げ、および自由振動の問題に適用する解法を確立し、これと Sanders のかく理論を加えて相互間の精度を比較検討したうえで、Flugge の理論による解の精度を向上させることを目的としてこれに修正を加えた解法を示す。以下に各節の内容の概要を述べる。

1.2 節において、Flügge、Sanders、溝口、Donnell、および修正した Flügge の各理論を、一般軸対称かくの曲げ問題に適用できる基礎方程式を導く。

1.3、および 1.4 節では、境界条件と接続条件式を導く。

1.5 節では、自由振動問題に対する解法について述べる。

1.6 節において、上述の各関係式を差分近似する過程について述べ、これを用いて静的曲げ、および自由振動問題を解く手順について詳細に記述する。

1.7 節では、上述の各理論に基づく解法を同時に用いていくつかの例題を解きそれらの結果を比較検討する。

1.8 節では、1.7 節で扱う自由振動問題に対して実験を行ない計算による結果を検証する。

1.2 基礎方程式の誘導

1.2.1 基礎関係式

かく面の座標、合応力、合モーメント、変位、回転、外力、および形状を表わす各寸法の記号を図 1.1、および 1.2 に示す。主曲率半径 r_ξ, r_θ は中心軸からの半径 r と子午線座標 s によりつぎのように表わされる。⁽³⁹⁾

$$\left. \begin{aligned} r_\theta &= r[1-(dr/ds)^2]^{-1/2} \\ r_\xi &= -[1-(dr/ds)^2]^{1/2}/(d^2r/ds^2) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

ここで代表長さ a を導入することにより次式のような無次元量を定義する。

$$\xi = \frac{s}{a}, \quad \rho = \frac{r}{a}, \quad \omega_\xi = \frac{a}{r_\xi}, \quad \omega_\theta = \frac{a}{r_\theta} \quad (1.2)$$

式 (1.2) を用いると式

(1.1) はつぎのよう

なる。

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\theta} &= [1 - (\rho')^2]^{1/2} \\ &\quad / \rho \\ \omega_{\xi} &= -(r + r^2) / \omega_{\theta} \end{aligned} \right\} (1.3)$$

ただし $r = \rho' / \rho$

() ' $\equiv \partial () / \partial \xi$

また、つぎの関係式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \omega'_{\theta} &= r(\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \\ \rho'' / \rho &= -\omega_{\xi} \omega_{\theta} \end{aligned} \right\} (1.4)$$

つぎに、かく面要素 A

B C D の平衡を考慮すれ

ば次式が得られる。

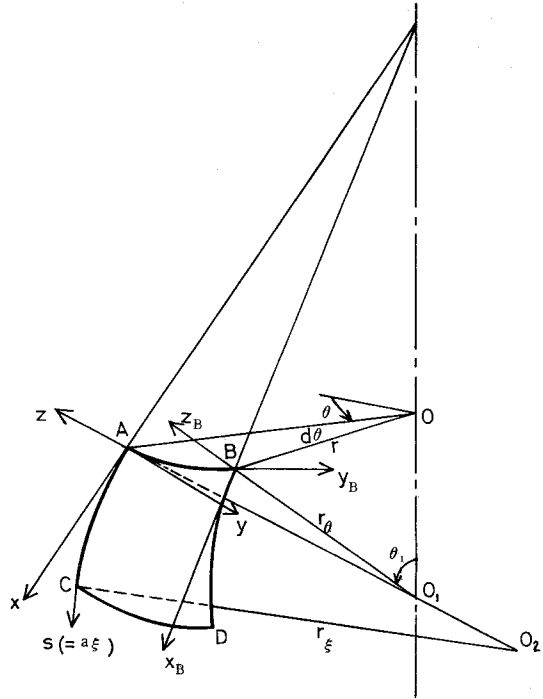


図 1.1 かく面形状と座標

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (rN_{\xi})}{\partial \xi} + \frac{\partial (aN_{\theta\xi})}{\partial \theta} - N_{\theta} \frac{\partial r}{\partial \xi} + Q_{\xi} \frac{ar}{r_{\xi}} + arX^* &= 0 \\ \frac{\partial (aN_{\theta})}{\partial \theta} + \frac{\partial (rN_{\xi\theta})}{\partial \xi} + N_{\theta\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} + Q_{\theta} \frac{ar}{r_{\theta}} + arY^* &= 0 \\ \frac{\partial (rQ_{\xi})}{\partial \xi} + \frac{\partial (aQ_{\theta})}{\partial \theta} - N_{\theta} \frac{ar}{r_{\theta}} - N_{\xi} \frac{ar}{r_{\xi}} + arZ^* &= 0 \\ \frac{\partial (rM_{\xi\theta})}{\partial \xi} + \frac{\partial (aM_{\theta})}{\partial \theta} + M_{\theta\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} - arQ_{\theta} &= 0 \\ \frac{\partial (rM_{\xi})}{\partial \xi} + \frac{\partial (aM_{\theta\xi})}{\partial \theta} - M_{\theta} \frac{\partial r}{\partial \xi} - arQ_{\xi} &= 0 \\ N_{\xi\theta} - N_{\theta\xi} + \frac{M_{\xi\theta}}{r_{\xi}} - \frac{M_{\theta\xi}}{r_{\theta}} &= 0 \end{aligned} \right\} (1.5)$$

ここで、 ξ の従属変数
をつぎのようにフーリ
エ級数に展開する。

$$N_{\xi} = \sigma_0 h \sum_{n=0}^{\infty} n_{\xi}^{(n)} \cos n\theta$$

$$N_{\theta} = \sigma_0 h \sum_{n=0}^{\infty} n_{\theta}^{(n)} \cos n\theta$$

$$N_{\xi\theta} = \sigma_0 h \sum_{n=1}^{\infty} n_{\xi\theta}^{(n)} \sin n\theta$$

$$N_{\theta\xi} = \sigma_0 h \sum_{n=1}^{\infty} n_{\theta\xi}^{(n)} \sin n\theta$$

$$M_{\xi} = \sigma_0 (h^3/a) \sum_{n=0}^{\infty} m_{\xi}^{(n)} \cos n\theta$$

$$M_{\theta} = \sigma_0 (h^3/a) \sum_{n=0}^{\infty} m_{\theta}^{(n)} \cos n\theta$$

$$M_{\xi\theta} = \sigma_0 (h^3/a) \sum_{n=1}^{\infty} m_{\xi\theta}^{(n)} \sin n\theta$$

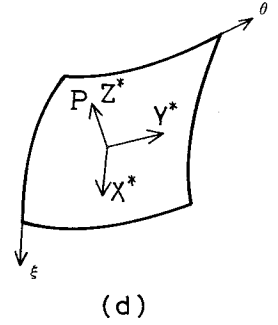
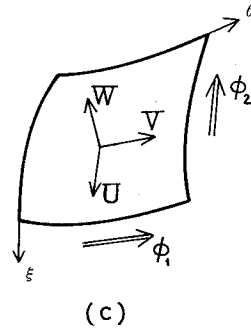
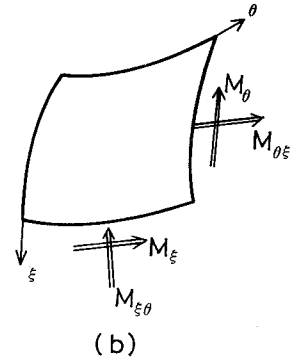
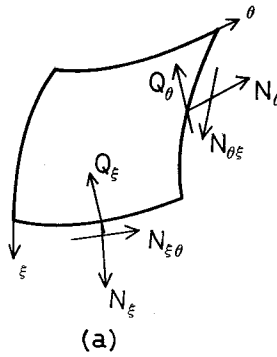


図 1.2 記号 (a)合 応 力 (b)合モーメント

(c)変位と回転 (d)外 力

$$M_{\theta\xi} = \sigma_0 (h^3/a) \sum_{n=1}^{\infty} m_{\theta\xi}^{(n)} \sin n\theta$$

$$Q_{\theta} = \sigma_0 h \sum_{n=1}^{\infty} q_{\theta}^{(n)} \sin n\theta$$

$$V = \sigma_0 (a/E) \sum_{n=1}^{\infty} u_{\theta}^{(n)} \sin n\theta$$

$$X^* = \sigma_0 (h/a) \sum_{n=0}^{\infty} \bar{X}^{(n)} \cos n\theta$$

$$Z^* = \sigma_0 (h/a) \sum_{n=0}^{\infty} \bar{Z}^{(n)} \cos n\theta$$

$$Q_{\xi} = \sigma_0 h \sum_{n=0}^{\infty} q_{\xi}^{(n)} \cos n\theta$$

$$U = \sigma_0 (a/E) \sum_{n=0}^{\infty} u_{\xi}^{(n)} \cos n\theta$$

$$W = \sigma_0 (a/E) \sum_{n=0}^{\infty} w^{(n)} \cos n\theta$$

$$Y^* = \sigma_0 (h/a) \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Y}^{(n)} \sin n\theta$$

(1.6)

ここに h 、 σ_0 、および E はそれぞれかく厚、代表応力、および縦弾性係数である。

1.2.2 Flügge の理論による解法

平衡方程式 (1.5) の第 6 式を無視し、かつつぎの仮定をおく。

$$N_{\xi\theta} = N_{\theta\xi} \quad M_{\xi\theta} = M_{\theta\xi} \quad (1.7)$$

式 (1.5) の第 1 ~ 5 式から Q_ξ, Q_θ を消去し、これに式 (1.7) を用いると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} & a \left[\frac{\partial(\rho N_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\xi\theta}}{\partial \theta} - \rho, N_\theta \right] \\ & \quad + \omega_\xi \left[\frac{\partial(\rho M_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\xi\theta}}{\partial \theta} - \rho, M_\theta \right] + a r X^* = 0 \\ & a \left[\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho N_{\xi\theta})}{\partial \xi} + \rho, N_{\xi\theta} \right] \\ & \quad + \omega_\theta \left[\frac{\partial(\rho M_{\xi\theta})}{\partial \xi} + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \rho, M_{\xi\theta} \right] + a r Y^* = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial(\rho M_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\xi\theta}}{\partial \theta} - \rho, M_\theta \right] \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial(\rho M_{\xi\theta})}{\partial \xi} + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \rho, M_{\xi\theta} \right] \\ & \quad - a \rho \omega_\theta N_\theta - a \rho \omega_\xi N_\xi + a r Z^* = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

式 (1.8) に式 (1.4) および式 (1.6) を用いて無次元化を行なうと次式となる。

$$\left. \begin{aligned} & n_\xi^{(n)'} + \frac{n}{\rho} n_{\xi\theta}^{(n)} + r(n_\xi^{(n)} - n_\theta^{(n)}) \\ & \quad + \lambda^2 \omega_\xi [m_\xi^{(n)'} + r(m_\xi^{(n)} - m_\theta^{(n)}) + \frac{n}{\rho} m_{\xi\theta}^{(n)}] + \bar{X}^{(n)} = 0 \\ & n_{\xi\theta}^{(n)'} + 2r n_{\xi\theta}^{(n)} - \frac{n}{\rho} n_\theta^{(n)} \\ & \quad + \lambda^2 \omega_\theta [m_{\xi\theta}^{(n)'} + 2r m_{\xi\theta}^{(n)} - \frac{n}{\rho} m_\theta^{(n)}] + \bar{Y}^{(n)} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & -\omega_{\xi} n_{\xi}^{(n)} - \omega_{\theta} n_{\theta}^{(n)} + \lambda^2 \left[m_{\xi}^{(n)''} + 2 r m_{\xi}^{(n)'} \right. \\
 & \quad - \omega_{\xi} \omega_{\theta} m_{\xi}^{(n)} + \left(\omega_{\xi} \omega_{\theta} - \frac{r^2}{\rho^2} \right) m_{\theta}^{(n)} - r m_{\theta}^{(n)'} \\
 & \quad \left. + 2 \frac{n}{\rho} m_{\xi\theta}^{(n)'} + 2 \frac{n}{\rho} r m_{\xi\theta}^{(n)} \right] + \bar{Z}^{(n)} = 0
 \end{aligned} \right\} (1.9)$$

ただし、 $\lambda = h/a$ である。Flügge⁽²⁸⁾によれば合応力・合モーメントと変位の関係式はつぎのようにして導かれる。

$$\left. \begin{aligned}
 N_{\xi} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\xi} \frac{r_{\theta} + z}{r_{\theta}} dz & N_{\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta} \frac{r_{\xi} + z}{r_{\xi}} dz \\
 N_{\xi\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau \frac{r_{\theta} + z}{r_{\theta}} dz & N_{\theta\xi} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau \frac{r_{\xi} + z}{r_{\xi}} dz \\
 M_{\xi} &= -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\xi} \frac{r_{\theta} + z}{r_{\theta}} z dz & M_{\theta} &= -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta} \frac{r_{\xi} + z}{r_{\xi}} z dz \\
 M_{\xi\theta} &= -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau \frac{r_{\theta} + z}{r_{\theta}} z dz & M_{\theta\xi} &= -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau \frac{r_{\xi} + z}{r_{\xi}} z dz
 \end{aligned} \right\} (1.10)$$

応力と歪は次式で関係づけられる。

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{\xi} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{\xi} + \nu \epsilon_{\theta}) & \sigma_{\theta} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{\theta} + \nu \epsilon_{\xi}) \\
 \tau &= \frac{E}{2(1+\nu)} \tau_{\xi\theta}
 \end{aligned} \right\} (1.11)$$

ここに、 ν はポアソン比である。また歪はつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned}
 \epsilon_{\xi} &= \frac{\partial U}{a \partial \xi} - \frac{U}{r_{\xi}} \frac{\partial r_{\xi}}{a \partial \xi} \frac{z}{r_{\xi} + z} - \frac{r_{\xi}}{a} \frac{\partial W}{a \partial \xi} \frac{z}{r_{\xi} + z} \\
 &\quad + \frac{\partial W}{a \partial \xi} \frac{\partial r_{\xi}}{a \partial \xi} \frac{z}{r_{\xi} + z} + \frac{W}{r_{\xi} + z} \\
 \epsilon_{\theta} &= \frac{\partial V}{r \partial \theta} + \frac{U}{r_{\xi}} \cot \theta_1 \frac{r_{\xi} + z}{r_{\theta} + z} - \frac{1}{r \sin \theta_1} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \frac{z}{r_{\theta} + z} \\
 &\quad - \frac{\partial W}{a \partial \xi} \cot \theta_1 \frac{z}{r_{\theta} + z} + \frac{W}{r_{\theta} + z}
 \end{aligned} \right\} (1.12)$$

$$r_{\xi\theta} = \frac{r_{\xi}}{r_{\theta}} \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{r_{\theta}+z}{r_{\xi}+z} - \frac{r_{\xi}}{r_{\theta}^2} V \cot \theta_1 \frac{r_{\theta}+z}{r_{\xi}+z} + \frac{1}{r_{\xi} \sin \theta_1} \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{r_{\xi}+z}{r_{\theta}+z} - \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \theta \sin \theta_1} \left(\frac{z}{r_{\theta}+z} + \frac{r_{\xi}}{r_{\theta}} \frac{z}{r_{\xi}+z} \right) + \frac{\partial W}{\partial \theta} \frac{\cot \theta_1}{\sin \theta_1} \left(\frac{z}{r_{\theta}+z} + \frac{r_{\xi}}{r_{\theta}} \frac{z}{r_{\xi}+z} \right) \quad (1.12)$$

簡単のため $r_{\xi}+z \cong r_{\xi}$, $r_{\theta}+z \cong r_{\theta}$ のようにおいて式 (1.11)、
(1.12) を式 (1.10) に用いると、つぎの関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} N_{\xi} &= \frac{12D}{h^2} \left[\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{W}{r_{\xi}} + \nu \frac{\partial V}{r \partial \theta} + \nu \frac{\partial r}{\partial \xi} U + \nu \frac{W}{r_{\theta}} \right] \\ N_{\theta} &= \frac{12D}{h^2} \left[\frac{\partial V}{r \partial \theta} + \frac{\partial r}{\partial \xi} U + \frac{W}{r_{\theta}} + \nu \frac{\partial U}{\partial \xi} + \nu \frac{W}{r_{\xi}} \right] \\ N_{\xi\theta} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{r \partial \theta} - \frac{\partial r}{\partial \xi} V \right] \\ M_{\xi} &= D \left[-\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - \nu \frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \theta^2} - \nu \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial W}{\partial \xi} \right] \\ M_{\theta} &= \nu M_{\xi} + D(1-\nu^2) \left[-\frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial W}{\partial \xi} \right] \\ M_{\xi\theta} &= D(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \theta} - \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial W}{r \partial \theta} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

ただし、 $D = Eh^3 / 12(1-\nu^2)$

式 (1.13) に式 (1.6) を用いれば、表 1.1 の無次元合応力・合モーメントと変位の関係を得る。これを式 (1.9) に用いると ξ の従属変数 u_{ξ} , u_{θ} , w , m_{ξ} に関する基礎方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} a_1^{(n)} u_{\xi}^{(n)} + a_2^{(n)} u_{\xi}^{(n)'} + a_3^{(n)} u_{\xi}^{(n)} + a_4^{(n)} u_{\theta}^{(n)'} + a_5^{(n)} u_{\theta}^{(n)} + a_6^{(n)} w^{(n)'} + a_7^{(n)} w^{(n)} + a_8^{(n)} m_{\xi}^{(n)'} + a_9^{(n)} m_{\xi}^{(n)} + \bar{X}^{(n)} &= 0 \\ a_{10}^{(n)} u_{\xi}^{(n)'} + a_{11}^{(n)} u_{\xi}^{(n)} + a_{12}^{(n)} u_{\theta}^{(n)''} + a_{13}^{(n)} u_{\theta}^{(n)'} + a_{14}^{(n)} u_{\theta}^{(n)} + a_{15}^{(n)} w^{(n)''} + a_{16}^{(n)} w^{(n)'} + a_{17}^{(n)} w^{(n)} + a_{18}^{(n)} m_{\xi}^{(n)} + \bar{Y}^{(n)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned}
& a_{19}^{(n)} u_{\xi}^{(n)'} + a_{20}^{(n)} u_{\xi}^{(n)} + a_{21}^{(n)} u_{\theta}^{(n)''} + a_{22}^{(n)} u_{\theta}^{(n)'} + a_{23}^{(n)} u_{\theta}^{(n)} \\
& + a_{24}^{(n)} w^{(n)''} + a_{25}^{(n)} w^{(n)'} + a_{26}^{(n)} w^{(n)} + a_{27}^{(n)} m_{\xi}^{(n)''} \\
& + a_{28}^{(n)} m_{\xi}^{(n)'} + a_{29}^{(n)} m_{\xi}^{(n)} + \bar{Z}^{(n)} = 0 \\
& a_{30}^{(n)} u_{\xi}^{(n)'} + a_{31}^{(n)} u_{\xi}^{(n)} + a_{32}^{(n)} u_{\theta}^{(n)} + a_{33}^{(n)} w^{(n)''} + a_{34}^{(n)} w^{(n)'} \\
& + a_{35}^{(n)} w^{(n)} + a_{36}^{(n)} m_{\xi}^{(n)} = 0
\end{aligned} \tag{1.14}$$

係数 $a_i^{(n)} \sim a_{36}^{(n)}$ は表 1.2 に示す。

1.2.3 Sanders の理論による解法

Sanders⁽²⁹⁾ は仮想仕事を考えることにより一般のかくに対して修正した平衡方程式を導いている。これを軸対称かくについて示すと次式のごとくになる。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(rN_{\xi})}{\partial\xi} + a \frac{\partial\bar{N}_{\xi\theta}}{\partial\theta} - \frac{\partial r}{\partial\xi} N_{\theta} + \frac{ar}{r_{\xi}} Q_{\xi} \\
& + \frac{a}{2} \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\left(\frac{1}{r_{\xi}} - \frac{1}{r_{\theta}} \right) \bar{M}_{\xi\theta} \right] + arX^* = 0 \\
& \frac{\partial(r\bar{N}_{\xi\theta})}{\partial\xi} + a \frac{\partial N_{\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial r}{\partial\xi} \bar{N}_{\xi\theta} + \frac{ar}{r_{\theta}} Q_{\theta} \\
& + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial\xi} \left[\left(\frac{1}{r_{\theta}} - \frac{1}{r_{\xi}} \right) \bar{M}_{\xi\theta} \right] + arY^* = 0 \\
& \frac{\partial(rQ_{\xi})}{\partial\xi} + a \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial\theta} - \frac{ar}{r_{\xi}} N_{\xi} - \frac{ar}{r_{\theta}} N_{\theta} + arZ^* = 0 \\
& \frac{\partial(rM_{\xi})}{\partial\xi} + a \frac{\partial\bar{M}_{\xi\theta}}{\partial\theta} - \frac{\partial r}{\partial\xi} M_{\theta} - arQ_{\xi} = 0 \\
& \frac{\partial(r\bar{M}_{\xi\theta})}{\partial\xi} + a \frac{\partial M_{\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial r}{\partial\xi} \bar{M}_{\xi\theta} - arQ_{\theta} = 0
\end{aligned} \tag{1.15}$$

$\bar{N}_{\xi\theta}$, $\bar{M}_{\xi\theta}$ は次式で定義されている。

$$\bar{N}_{\xi\theta} = (N_{\xi\theta} + N_{\theta\xi})/2 \quad \bar{M}_{\xi\theta} = (M_{\xi\theta} + M_{\theta\xi})/2 \tag{1.16}$$

これらをつぎのようにおく。

$$\bar{N}_{\xi\theta} = \sigma_0 h \sum_{n=1}^{\infty} \bar{n}_{\xi\theta}^{(n)} \sin n\theta \quad \bar{M}_{\xi\theta} = \sigma_0 (h^3/a) \sum_{n=1}^{\infty} \bar{m}_{\xi\theta}^{(n)} \sin n\theta \quad (1.17)$$

式 (1.15) から Q_{ξ} , Q_{θ} を消去し、式 (1.4)、(1.6) を用いて無次元化を行なうと次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} n_{\xi}^{(n)'} + r(n_{\xi}^{(n)} - n_{\theta}^{(n)}) + \frac{n}{\rho} \bar{n}_{\xi\theta}^{(n)} + \lambda^2 [\omega_{\xi} m_{\xi}^{(n)'} \\ + r \omega_{\xi} (m_{\xi}^{(n)} - m_{\theta}^{(n)}) + \frac{n}{2\rho} (3\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \bar{m}_{\xi\theta}^{(n)}] + \bar{X}^{(n)} &= 0 \\ \bar{n}_{\xi\theta}^{(n)'} + 2r \bar{n}_{\xi\theta}^{(n)} - \frac{n}{\rho} n_{\theta}^{(n)} + \lambda^2 [-\frac{n}{\rho} \omega_{\theta} m_{\theta}^{(n)} \\ + \frac{1}{2} (3\omega_{\theta} - \omega_{\xi}) \bar{m}_{\xi\theta}^{(n)'} + \frac{1}{2} (3r\omega_{\theta} + r\omega_{\xi} \\ - \omega_{\xi}') \bar{m}_{\xi\theta}^{(n)}] + \bar{Y}^{(n)} &= 0 \\ -\omega_{\xi} n_{\xi}^{(n)} - \omega_{\theta} n_{\theta}^{(n)} + \lambda^2 [m_{\xi}^{(n)''} + 2r m_{\xi}^{(n)'} \\ - \omega_{\xi} \omega_{\theta} m_{\xi}^{(n)} + (\omega_{\xi} \omega_{\theta} - \frac{n^2}{\rho^2}) m_{\theta}^{(n)} - r m_{\theta}^{(n)'} \\ + 2\frac{n}{\rho} \bar{m}_{\xi\theta}^{(n)'} + 2r \frac{n}{\rho} \bar{m}_{\xi\theta}^{(n)}] + \bar{Z}^{(n)} &= 0 \end{aligned} \right\} (1.18)$$

Sanders によれば合応力と歪、および歪と変位の関係はつぎのように示されている。

$$\left. \begin{aligned} Eh \epsilon_{\xi} &= N_{\xi} - \nu N_{\theta} & Eh \epsilon_{\theta} &= N_{\theta} - \nu N_{\xi} \\ Eh r_{\xi\theta} &= (1+\nu) \bar{N}_{\xi\theta} & \frac{Eh^3}{12} \kappa_{\xi} &= M_{\xi} - \nu M_{\theta} \\ \frac{Eh^3}{12} \kappa_{\theta} &= M_{\theta} - \nu M_{\xi} & \frac{Eh^3}{12} \bar{\kappa}_{\xi\theta} &= (1+\nu) \bar{M}_{\xi\theta} \end{aligned} \right\} (1.19)$$

$$\left. \begin{aligned} e_{\xi} &= \frac{\partial U}{a \partial \xi} + \frac{W}{r_{\xi}} & e_{\theta} &= \frac{\partial V}{r \partial \theta} + \frac{1}{ar} \frac{\partial r}{\partial \xi} U + \frac{W}{r_{\theta}} \\ r_{\xi\theta} &= \frac{1}{2ar} (r \frac{\partial V}{\partial \xi} + a \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{\partial r}{\partial \xi} V) \\ \kappa_{\xi} &= \frac{\partial \phi_1}{a \partial \xi} & \kappa_{\theta} &= \frac{\partial \phi_2}{r \partial \theta} + \frac{1}{ar} \frac{\partial r}{\partial \xi} \phi_1 \\ \bar{\kappa}_{\xi\theta} &= \frac{1}{2ar} [r \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} + a \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} - \frac{\partial r}{\partial \xi} \phi_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} (\frac{1}{r_{\theta}} - \frac{1}{r_{\xi}}) \{ \frac{\partial (rV)}{\partial \xi} - \frac{\partial (aU)}{\partial \theta} \}] \end{aligned} \right\} (1.20)$$

$$\phi_1 = \frac{U}{r_\xi} - \frac{\partial W}{a \partial \xi} \quad \phi_2 = \frac{V}{r_\theta} - \frac{\partial W}{r \partial \theta} \quad (1.21)$$

式 (1.20)、(1.21)を式 (1.19)に用い、さらに式 (1.6)を用いると表 1.1 の無次元合応力・合モーメントと変位の関係が得られる。これを式 (1.18)に用いると、この場合も式 (1.14)で表わされる基礎方程式が得られる。その係数 $a_1^{(n)} \sim a_6^{(n)}$ は表 1.2 に示す通りである。

1.2.4 溝口の理論による解法

溝口⁽³⁶⁾⁽³⁷⁾のかく理論では平衡方程式 (1.5) の第 6 式をつぎのように取扱っている。

$$N_{\xi\theta} - \frac{M_{\theta\xi}}{r_\theta} = N_{\theta\xi} - \frac{M_{\xi\theta}}{r_\xi} = \bar{N} \quad (1.22)$$

また、つぎの仮定をおいている。

$$M_{\xi\theta} = M_{\theta\xi} \quad (1.23)$$

式 (1.22)、(1.23)よりせん断合応力はつぎのようになる。

$$N_{\xi\theta} = \bar{N} + \frac{M_{\xi\theta}}{r_\theta} \quad N_{\theta\xi} = \bar{N} + \frac{M_{\xi\theta}}{r_\xi} \quad (1.24)$$

式 (1.24)を式 (1.5) の第 1 ~ 5 式に代入して Q_ξ 、 Q_θ を消去し、これに式 (1.2)を用いると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} & a \rho \frac{\partial N_\xi}{\partial \xi} + a \rho (N_\xi - N_\theta) + a \frac{\partial \bar{N}}{\partial \theta} + \omega_\xi \frac{\partial M_{\xi\theta}}{\partial \theta} \\ & + \omega_\xi \left(\rho \frac{\partial M_\xi}{\partial \xi} + \rho M_\xi + \frac{\partial M_{\xi\theta}}{\partial \theta} - \rho M_\theta \right) + a^2 \rho X^* = 0 \\ & a \rho \frac{\partial \bar{N}}{\partial \xi} + 2a \rho \bar{N} + (\rho \omega'_\theta + \rho \omega_\theta + \rho' \omega_\xi) M_{\xi\theta} \\ & + \omega_\theta \rho \frac{\partial M_{\xi\theta}}{\partial \xi} + a \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \omega_\theta \left(\rho \frac{\partial M_{\xi\theta}}{\partial \xi} \right. \\ & \quad \left. + 2\rho M_{\xi\theta} + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} \right) + a^2 \rho Y^* = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned}
 & \rho \left(\frac{\partial^2 M_\xi}{\partial \xi^2} + r \frac{\partial M_\xi}{\partial \xi} + r' M_\xi + \frac{\partial^2 M_{\xi\theta}}{\rho \partial \xi \partial \theta} - \frac{r}{\rho} \frac{\partial M_{\xi\theta}}{\partial \theta} \right. \\
 & \quad \left. - r \frac{\partial M_\theta}{\partial \xi} - r' M_\theta \right) + \rho' \left(-\frac{\partial M_\xi}{\partial \xi} + r M_\xi + \frac{\partial M_{\xi\theta}}{\rho \partial \theta} \right. \\
 & \quad \left. - r M_\theta \right) + \left(\frac{\partial^2 M_{\xi\theta}}{\partial \xi \partial \theta} + 2r \frac{\partial M_{\xi\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 M_\theta}{\rho \partial \theta^2} \right) \\
 & \quad - a \rho (\omega_\xi N_\xi + \omega_\theta N_\theta) + a^2 \rho Z^* = 0
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

また、つぎのようにおく。

$$\bar{N} = \rho_0 h \sum_{n=1}^{\infty} \bar{n}^{(n)} \sin n\theta \tag{1.26}$$

式 (1.4), (1.6), および (1.26) を式 (1.25) に用いると式 (1.9) に対して次式のごとくになる。

$$\begin{aligned}
 & n_\xi^{(n)'} + r(n_\xi^{(n)} - n_\theta^{(n)}) + \frac{n}{\rho} \bar{n}^{(n)} \\
 & \quad + \lambda^2 \omega_\xi (m_\xi^{(n)'} + r m_\xi^{(n)} + 2 \frac{n}{\rho} m_{\xi\theta}^{(n)} - r m_\theta^{(n)}) + \bar{X}^{(n)} = 0 \\
 & \bar{n}^{(n)'} + 2r \bar{n}^{(n)} - \frac{n}{\rho} n_\theta^{(n)} + \lambda^2 [2r(\omega_\xi + \omega_\theta) m_{\xi\theta}^{(n)} \\
 & \quad + 2\omega_\theta m_{\xi\theta}^{(n)'} - \omega_\theta \frac{n}{\rho} m_\theta^{(n)}] + \bar{Y}^{(n)} = 0 \\
 & -\omega_\xi n_\xi^{(n)} - \omega_\theta n_\theta^{(n)} + \lambda^2 [m_\xi^{(n)'} + 2r m_\xi^{(n)} \\
 & \quad - \omega_\xi \omega_\theta m_\xi^{(n)} - r m_\theta^{(n)'} + (\omega_\xi \omega_\theta - \frac{n^2}{\rho^2}) m_\theta^{(n)} \\
 & \quad + 2 \frac{n}{\rho} m_{\xi\theta}^{(n)} + 2r \frac{n}{\rho} m_{\xi\theta}^{(n)}] + \bar{Z}^{(n)} = 0
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

溝口の理論では合応力・合モーメントと歪の関係はつぎのように与えられている。

$$\begin{aligned}
 N_\xi &= \frac{1}{h^2} 2D (\epsilon_\xi + \nu \epsilon_\theta) & N_\theta &= \frac{1}{h^2} 2D (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_\xi) \\
 \bar{N} &= 6(1-\nu) \frac{D}{h^2} r_{\xi\theta} & M_\xi &= D(\kappa_\xi + \nu \kappa_\theta) \\
 M_\theta &= D(\kappa_\theta + \nu \kappa_\xi) & M_{\xi\theta} &= (1-\nu) D \kappa_{\xi\theta}
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

さらに、歪はつぎのように表わされている。(注1) 脚注次頁

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_{\xi} &= \frac{\partial U}{a \partial \xi} + \frac{W}{r_{\xi}} & \varepsilon_{\theta} &= \frac{\partial V}{r \partial \theta} + \frac{r}{a} U + \frac{W}{r_{\theta}} \\
 r_{\xi\theta} &= \frac{\partial U}{r \partial \theta} - \frac{r}{a} V + \frac{\partial V}{a \partial \xi} & \kappa_{\xi} &= \frac{\partial}{a \partial \xi} \left(\frac{U}{r_{\xi}} \right) - \frac{\partial^2 W}{a^2 \partial \xi^2} \\
 \kappa_{\theta} &= -\frac{r}{a r_{\xi}} U + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\frac{V}{r_{\theta}} \right) - \frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{r}{a^2} \frac{\partial W}{\partial \xi} \\
 \kappa_{\xi\theta} &= \frac{\partial U}{r r_{\xi} \partial \theta} - \frac{r}{a r_{\xi}} V + \frac{\partial}{a \partial \xi} \left(\frac{V}{r_{\theta}} \right) - \frac{\partial^2 W}{a r \partial \xi \partial \theta} + \frac{r}{a r} \frac{\partial W}{\partial \theta}
 \end{aligned} \right\} (1.29)$$

式 (1.28) , (1.29) に式 (1.6) , (1.26) を用いると表 1.1 の無次元合応力・合モーメントと変位の関係式が得られる。これを式 (1.27) に用いると式 (1.14) で表わされる基礎方程式が得られる。その係数 $a_1^{(n)} \sim a_{36}^{(n)}$ は表 1.2 に示す通りである。

1.2.5 Donnell の理論による解法

平衡方程式 (1.5) の第 6 式を無視し、またつぎのようにおく。

$$N_{\xi\theta} = N_{\theta\xi} \quad M_{\xi\theta} = M_{\theta\xi} \quad (1.30)$$

式 (1.5) の第 1 ～ 5 式から Q_{ξ} , Q_{θ} を消去すると式 (1.8) が得られる。これより無次元方程式 (1.9) を得る過程については 1.2.2 節での取扱いと同じである。また、Donnell⁽³⁸⁾ に従いつぎの関係を用いる。

$$\left. \begin{aligned}
 N_{\xi} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\xi} + \nu \varepsilon_{\theta}) & N_{\theta} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\theta} + \nu \varepsilon_{\xi}) \\
 N_{\xi\theta} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} r_{\xi\theta} & M_{\xi} &= D (\kappa_{\xi} + \nu \kappa_{\theta}) \\
 M_{\theta} &= D (\kappa_{\theta} + \nu \kappa_{\xi}) & M_{\xi\theta} &= (1-\nu) D \kappa_{\xi\theta}
 \end{aligned} \right\} (1.31)$$

一般軸対称かくに対しては式 (1.29) などから Donnell のかく理論

(注1) 溝口の論文⁽³⁶⁾⁽³⁷⁾においては、曲率半径とモーメントの方向が図 1.1、および 1.2 と逆になっているため、式 (1.29) の符号の一部はそれと異なっている。

に従って主要項を残すことにより歪をつぎのように表わす。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\xi} &= \frac{\partial U}{a \partial \xi} + \frac{W}{r_{\xi}} & \epsilon_{\theta} &= \frac{\partial V}{r \partial \theta} + \frac{W}{r_{\theta}} + \frac{U}{ar} \frac{\partial r}{\partial \xi} \\ r_{\xi\theta} &= \frac{\partial U}{r \partial \theta} + \frac{\partial V}{a \partial \xi} - \frac{V}{ar} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \kappa_{\xi} &= -\frac{\partial^2 W}{a^2 \partial \xi^2} \\ \kappa_{\theta} &= -\frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \theta^2} & \kappa_{\xi\theta} &= -\frac{\partial^2 W}{ar \partial \xi \partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

式 (1.31) , (1.32) より次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} N_{\xi} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial U}{a \partial \xi} + \frac{W}{r_{\xi}} + \nu \left(\frac{\partial V}{r \partial \theta} + \frac{W}{r_{\theta}} + \frac{U}{ar} \frac{\partial r}{\partial \xi} \right) \right] \\ N_{\theta} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial V}{r \partial \theta} + \frac{W}{r_{\theta}} + \frac{U}{ar} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \nu \left(\frac{\partial U}{a \partial \xi} + \frac{W}{r_{\xi}} \right) \right] \\ N_{\xi\theta} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial U}{r \partial \theta} + \frac{\partial V}{a \partial \xi} - \frac{V}{ar} \frac{\partial r}{\partial \xi} \right) \\ M_{\xi} &= D \left(-\frac{\partial^2 W}{a^2 \partial \xi^2} - \nu \frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \theta^2} \right) \\ M_{\theta} &= D \left(-\frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \theta^2} - \nu \frac{\partial^2 W}{a^2 \partial \xi^2} \right) \\ M_{\xi\theta} &= D(1-\nu) \frac{-\partial^2 W}{ar \partial \xi \partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

これに式 (1.6) を用いると表 1.1 のごとく、無次元合応力・合モーメントと変位の関係式が得られる。それを式 (1.9) に用いると式 (1.14) で表わされる基礎方程式が得られる。その係数を表 1.2 に併記する。

1.2.6 修正した Flügge の理論による解法

Flügge^[28] の理論の取扱いにおける合応力・合モーメントと変位の関係式は、Donnell を除く他の理論と比較するとかなり簡略化されたものであることがわかる。それゆえ、ここでは平衡方程式は前述の Flügge による取扱いとするが、合応力・合モーメントと歪の関係のみをつぎのように扱うことにする。

$$\left. \begin{aligned}
 N_{\xi} &= \frac{12}{h^2} D (\epsilon_{\xi} + \nu \epsilon_{\theta}) & N_{\theta} &= \frac{12}{h^2} D (\epsilon_{\theta} + \nu \epsilon_{\xi}) \\
 N_{\xi\theta} &= N_{\theta\xi} = 6 (1 - \nu) \frac{D}{h^2} r_{\xi\theta} \\
 M_{\xi} &= D (\kappa_{\xi} + \nu \kappa_{\theta}) & M_{\theta} &= D (\kappa_{\theta} + \nu \kappa_{\xi}) \\
 M_{\xi\theta} &= M_{\theta\xi} = (1 - \nu) D \kappa_{\xi\theta}
 \end{aligned} \right\} (1.34)$$

歪と変位の関係式は溝口による式 (1.29) が合理的と考えられるのでこれを用いる。これと式 (1.34) から次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
 N_{\xi} &= \frac{Eh}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial U}{a \partial \xi} + \frac{W}{r_{\xi}} + \nu \left(\frac{\partial V}{r \partial \theta} + \frac{W}{r_{\theta}} + \frac{U}{ar} \frac{\partial r}{\partial \xi} \right) \right] \\
 N_{\theta} &= \frac{Eh}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial V}{r \partial \theta} + \frac{W}{r_{\theta}} + \frac{U}{ar} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \nu \left(\frac{\partial U}{a \partial \xi} + \frac{W}{r_{\xi}} \right) \right] \\
 N_{\xi\theta} &= \frac{Eh}{2(1 + \nu)} \left(\frac{\partial U}{r \partial \theta} + \frac{\partial V}{a \partial \xi} - \frac{V}{ar} \frac{\partial r}{\partial \xi} \right) \\
 M_{\xi} &= D \left[\frac{\partial}{a \partial \xi} \left(\frac{U}{r_{\xi}} \right) - \frac{\partial^2 W}{a^2 \partial \xi^2} + \nu \left(\frac{r}{ar_{\xi}} U + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\frac{V}{r_{\theta}} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{r}{a^2} \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) \right] \\
 M_{\theta} &= D \left[\frac{r}{ar_{\xi}} U + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\frac{V}{r_{\theta}} \right) - \frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{r}{a^2} \frac{\partial W}{\partial \xi} \right. \\
 &\quad \left. + \nu \left(\frac{\partial}{a \partial \xi} \left(\frac{U}{r_{\xi}} \right) - \frac{\partial^2 W}{a^2 \partial \xi^2} \right) \right] \\
 M_{\xi\theta} &= (1 - \nu) D \left[\frac{\partial U}{rr_{\xi} \partial \theta} - \frac{r}{ar_{\xi}} V + \frac{\partial}{a \partial \xi} \left(\frac{V}{r_{\theta}} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial^2 W}{ar \partial \xi \partial \theta} + \frac{r}{ar} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right]
 \end{aligned} \right\} (1.35)$$

これに式 (1.6) を用いて無次元化すると表 1.1 のごとくになる。これを式 (1.9) に用いると式 (1.14) の基礎方程式が得られる。その係数は表 1.2 に併記している。

表 1.1 合応力・合モーメントと変位の関係式

(F : Flügge , M : 溝口 , S : Sanders , D : Donnell ,

MF : 修正 Flügge)

$$b = 1/(1-\nu^2) \quad d = b/12$$

$n_{\xi}^{(n)}$	F . M . S . D . MF	$b \left\{ u_{\xi}^{(n)'} + \nu \tau u_{\xi}^{(n)} + \nu \frac{n}{\rho} u_{\theta}^{(n)} + (\omega_{\xi} + \nu \omega_{\theta}) w^{(n)} \right\}$
$n_{\theta}^{(n)}$	F . M . S . D . MF	$b \left\{ \nu u_{\xi}^{(n)'} + \tau u_{\xi}^{(n)} + \frac{n}{\rho} u_{\theta}^{(n)} + (\omega_{\theta} + \nu \omega_{\xi}) w^{(n)} \right\}$
$n_{\xi\theta}^{(n)}$	F . D . MF	$b \frac{(1-\nu)}{2} \left(u_{\theta}^{(n)'} - \tau u_{\theta}^{(n)} - \frac{n}{\rho} u_{\xi}^{(n)} \right)$
	M	$b \frac{(1-\nu)}{2} \left(u_{\theta}^{(n)'} - \tau u_{\theta}^{(n)} - \frac{n}{\rho} u_{\xi}^{(n)} \right) + \lambda^2 \omega_{\theta} m_{\xi\theta}^{(n)}$
$\bar{n}_{\xi\theta}^{(n)}$	S	$b \frac{(1-\nu)}{2} \left(u_{\theta}^{(n)'} - \tau u_{\theta}^{(n)} - \frac{n}{\rho} u_{\xi}^{(n)} \right)$
$n_{\theta\xi}^{(n)}$	F . D . MF	$n_{\xi\theta}^{(n)}$
	M	$b \frac{(1-\nu)}{2} \left(u_{\theta}^{(n)'} - \tau u_{\theta}^{(n)} - \frac{n}{\rho} u_{\xi}^{(n)} \right) + \lambda^2 \omega_{\xi} m_{\xi\theta}^{(n)}$
$m_{\xi}^{(n)}$	F	$d \left(-w^{(n)''} - \nu \tau w^{(n)'} + \nu \frac{n^2}{\rho^2} w^{(n)} \right)$
	D	$d \left(-w^{(n)''} + \nu \frac{n^2}{\rho^2} w^{(n)} \right)$
	M . S . MF	$d \left\{ \omega_{\xi} u_{\xi}^{(n)'} + (\omega_{\xi}' + \nu \tau \omega_{\xi}) u_{\xi}^{(n)} + \nu \omega_{\theta} \frac{n}{\rho} u_{\theta}^{(n)} - w^{(n)''} - \nu \tau w^{(n)'} + \nu \frac{n^2}{\rho^2} w^{(n)} \right\}$
$m_{\theta}^{(n)}$	F	$\nu m_{\xi}^{(n)} + d(1-\nu^2) \left(\frac{n^2}{\rho^2} w^{(n)} - \tau w^{(n)'} \right)$
	D	$\nu m_{\xi}^{(n)} + d(1-\nu^2) \frac{n^2}{\rho^2} w^{(n)}$
	M . S . MF	$\nu m_{\xi}^{(n)} + d(1-\nu^2) \left(\tau \omega_{\xi} u_{\xi}^{(n)} + \omega_{\theta} \frac{n}{\rho} u_{\theta}^{(n)} - \tau w^{(n)'} + \frac{n^2}{\rho^2} w^{(n)} \right)$
$m_{\xi\theta}^{(n)}$	F	$d(1-\nu) \left(\frac{n}{\rho} w^{(n)'} - \frac{n}{\rho} \tau w^{(n)} \right)$
	D	$d(1-\nu) \frac{n}{\rho} w^{(n)'}$
	M . MF	$d(1-\nu) \left(-\omega_{\xi} \frac{n}{\rho} u_{\xi}^{(n)} + \omega_{\theta} u_{\theta}^{(n)'} - \tau \omega_{\theta} u_{\theta}^{(n)} + \frac{n}{\rho} w^{(n)'} - \tau \frac{n}{\rho} w^{(n)} \right)$
$\bar{m}_{\xi\theta}^{(n)}$	S	$d \frac{(1-\nu)}{2} \left\{ (\omega_{\theta} - 3\omega_{\xi}) \frac{n}{2\rho} u_{\xi}^{(n)} + \frac{(3\omega_{\theta} - \omega_{\xi})}{2} u_{\theta}^{(n)'} + \frac{(\omega_{\xi} - 3\omega_{\theta})}{2} \tau u_{\theta}^{(n)} + 2 \frac{n}{\rho} w^{(n)'} - 2 \frac{n}{\rho} \tau w^{(n)} \right\}$
$m_{\theta\xi}^{(n)}$	F . M . D . MF	$m_{\xi\theta}^{(n)}$
$q_{\xi}^{(n)}$	F . M . D . MF	$\lambda^2 \left\{ m_{\xi}^{(n)'} + \tau (m_{\xi}^{(n)} - m_{\theta}^{(n)}) + \frac{n}{\rho} m_{\xi\theta}^{(n)} \right\}$
	S	$\lambda^2 \left\{ m_{\xi}^{(n)'} + \tau (m_{\xi}^{(n)} - m_{\theta}^{(n)}) + \frac{n}{\rho} \bar{m}_{\xi\theta}^{(n)} \right\}$
$q_{\theta}^{(n)}$	F . M . D . MF	$\lambda^2 \left\{ m_{\xi\theta}^{(n)'} + 2 \tau m_{\xi\theta}^{(n)} - \frac{n}{\rho} m_{\theta}^{(n)} \right\}$
	S	$\lambda^2 \left\{ \bar{m}_{\xi\theta}^{(n)'} + 2 \tau \bar{m}_{\xi\theta}^{(n)} - \frac{n}{\rho} m_{\theta}^{(n)} \right\}$

表 1.2 基礎方程式の係数

(F : Flügge , M : 溝口 , S : Sanders , D : Donnell ,

MF : 修正 Flügge)

$$b = 1/(1 - \nu^2) \quad d = b/12$$

$a_1^{(n)}$	F . M . S . D . MF	b
$a_2^{(n)}$	F . M . S . D . MF	$b r$
$a_3^{(n)}$	F . D	$-\nu b \omega_\xi \omega_\theta - b r^2 - b \frac{(1-\nu)}{2} \frac{n^2}{\rho^2}$
	M	$-\nu b \omega_\xi \omega_\theta - b r^2 - b \frac{(1-\nu)}{2} \frac{n^2}{\rho^2} - \lambda^2 d(1-\nu) \left\{ 2 \frac{n^2}{\rho^2} + (1+\nu) r^2 \right\} \omega_\xi^2$
	S	$-\nu b \omega_\xi \omega_\theta - b r^2 - b \frac{(1-\nu)}{2} \frac{n^2}{\rho^2} - \lambda^2 d(1-\nu) \left\{ (1+\nu) r^2 \omega_\xi^2 + (3\omega_\xi - \omega_\theta)^2 \frac{n^2}{8\rho^2} \right\}$
	MF	$-\nu b \omega_\xi \omega_\theta - b r^2 - b \frac{(1-\nu)}{2} \frac{n^2}{\rho^2} - \lambda^2 d(1-\nu) \left\{ \frac{n^2}{\rho^2} + (1+\nu) r^2 \right\} \omega_\xi^2$
$a_4^{(n)}$	F . D	$b(1+\nu) \frac{n}{2\rho}$
	M	$b(1+\nu) \frac{n}{2\rho} + 2 \lambda^2 d(1-\nu) \omega_\xi \omega_\theta \frac{n}{\rho}$
	S	$b(1+\nu) \frac{n}{2\rho} + \lambda^2 d(1-\nu) (3\omega_\xi - \omega_\theta)(3\omega_\theta - \omega_\xi) \frac{n}{8\rho}$
	MF	$b(1+\nu) \frac{n}{2\rho} + \lambda^2 d(1-\nu) \omega_\xi \omega_\theta \frac{n}{\rho}$
$a_5^{(n)}$	F . D	$-b(3-\nu) r \frac{n}{2\rho}$
	M	$-b(3-\nu) r \frac{n}{2\rho} - \lambda^2 d(1-\nu) (3+\nu) r \omega_\xi \omega_\theta \frac{n}{\rho}$
	S	$-b(3-\nu) r \frac{n}{2\rho} - \lambda^2 d(1-\nu) r \frac{n}{\rho} \times \left[\frac{1}{8} (3\omega_\xi - \omega_\theta)(3\omega_\theta - \omega_\xi) + (1+\nu) \omega_\xi \omega_\theta \right]$
	MF	$-b(3-\nu) r \frac{n}{2\rho} - \lambda^2 d(1-\nu) r \omega_\xi \omega_\theta \frac{n}{\rho}$
$a_6^{(n)}$	F . MF	$b(\omega_\xi + \nu \omega_\theta) + \lambda^2 d(1-\nu) \left[\frac{n^2}{\rho^2} + (1+\nu) r^2 \right] \omega_\xi$
	M	$b(\omega_\xi + \nu \omega_\theta) + \lambda^2 d(1-\nu) \left[2 \frac{n^2}{\rho^2} + (1+\nu) r^2 \right] \omega_\xi$
	S	$b(\omega_\xi + \nu \omega_\theta) + \lambda^2 d(1-\nu) \left\{ (1+\nu) r^2 \omega_\xi + (3\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{n^2}{2\rho^2} \right\}$
	D	$b(\omega_\xi + \nu \omega_\theta) + \lambda^2 d(1-\nu) \omega_\xi \frac{n^2}{\rho^2}$
$a_7^{(n)}$	F . MF	$b(\omega_\xi' + r \omega_\xi - r \omega_\theta) - \lambda^2 d(1-\nu) (2+\nu) r \omega_\xi \frac{n^2}{\rho^2}$
	M	$b(\omega_\xi' + r \omega_\xi - r \omega_\theta) - \lambda^2 d(1-\nu) (3+\nu) r \omega_\xi \frac{n^2}{\rho^2}$
	S	$b(\omega_\xi' + r \omega_\xi - r \omega_\theta) - \lambda^2 d(1-\nu) r \frac{n^2}{\rho^2} \times \left[\frac{1}{2} (3\omega_\xi - \omega_\theta) + (1+\nu) \omega_\xi \right]$

$a_7^{(n)}$	D	$b(\omega_\xi' + r\omega_\xi - r\omega_\theta) - \lambda^2 d(1-\nu) r\omega_\xi - \frac{n^2}{\rho^2}$
$a_8^{(n)}$	F . M . S . D . MF	$\lambda^2 \omega_\xi$
$a_9^{(n)}$	F . M . S . D . MF	$\lambda^2(1-\nu) r\omega_\xi$
$a_{10}^{(n)}$	F . D	$-b(1+\nu) \frac{n}{2\rho}$
	M	$-b(1+\nu) \frac{n}{2\rho} - 2\lambda^2 d(1-\nu) \omega_\xi \omega_\theta \frac{n}{\rho}$
	S	$-b(1+\nu) \frac{n}{2\rho} - \lambda^2 d(1-\nu)(3\omega_\xi - \omega_\theta)(3\omega_\theta - \omega_\xi) \frac{n}{8\rho}$
	MF	$-b(1+\nu) \frac{n}{2\rho} - \lambda^2 d(1-\nu) \omega_\xi \omega_\theta \frac{n}{\rho}$
$a_{11}^{(n)}$	F . D	$-b(3-\nu) r \frac{n}{2\rho}$
	M	$-b(3-\nu) r \frac{n}{2\rho} - \lambda^2 d(1-\nu) \frac{n}{\rho} (2r\omega_\xi^2 + 2\omega_\xi' \omega_\theta + r\omega_\xi \omega_\theta + \nu r\omega_\xi \omega_\theta)$
	S	$-b(3-\nu) r \frac{n}{2\rho} - \lambda^2 d(1-\nu) \frac{n}{\rho} [(1+\nu) r\omega_\xi \omega_\theta - \frac{r}{8}(6\omega_\xi \omega_\theta - 7\omega_\xi^2 - 3\omega_\theta^2) + \frac{\omega_\xi'}{4}(5\omega_\theta - 3\omega_\xi)]$
	MF	$-b(3-\nu) r \frac{n}{2\rho} - \lambda^2 d(1-\nu) \frac{n}{\rho} \omega_\theta [\omega_\xi' + (2+\nu) r\omega_\xi]$
$a_{12}^{(n)}$	F . D	$b \frac{(1-\nu)}{2}$
	M	$b \frac{(1-\nu)}{2} + 2\lambda^2 d(1-\nu) \omega_\theta^2$
	S	$b \frac{(1-\nu)}{2} + \lambda^2 d \frac{(1-\nu)}{8} (3\omega_\theta - \omega_\xi)^2$
	MF	$b \frac{(1-\nu)}{2} + \lambda^2 d(1-\nu) \omega_\theta^2$
$a_{13}^{(n)}$	F . D	$b \frac{(1-\nu)}{2} r$
	M	$b \frac{(1-\nu)}{2} r + 2\lambda^2 d(1-\nu) r\omega_\theta (2\omega_\xi - \omega_\theta)$
	S	$b \frac{(1-\nu)}{2} r + \lambda^2 d \frac{(1-\nu)}{8} (3\omega_\theta - \omega_\xi) \times [r(5\omega_\xi - 3\omega_\theta) - 2\omega_\xi']$
	MF	$b \frac{(1-\nu)}{2} r + \lambda^2 d(1-\nu) r\omega_\theta (\omega_\xi + 2\omega_\theta)$
$a_{14}^{(n)}$	F . D	$b \frac{(1-\nu)}{2} (\omega_\xi \omega_\theta - r^2) - b \frac{n^2}{\rho^2}$
	M	$b \frac{(1-\nu)}{2} (\omega_\xi \omega_\theta - r^2) - b \frac{n^2}{\rho^2} + \lambda^2 d(1-\nu) \times (2r^2\omega_\theta^2 + 2\omega_\xi \omega_\theta^2 - 4r^2\omega_\xi \omega_\theta - \omega_\theta^2 \frac{n^2}{\rho^2})$
	S	$b \frac{(1-\nu)}{2} (\omega_\xi \omega_\theta - r^2) - b \frac{n^2}{\rho^2} + \lambda^2 d(1-\nu) \times [\frac{1}{8}\omega_\xi \omega_\theta (3\omega_\theta - \omega_\xi)^2 - (1+\nu)\omega_\theta^2 \frac{n^2}{\rho^2} + \frac{r}{8}(3\omega_\theta - \omega_\xi)(2\omega_\xi' - 5r\omega_\xi + 3r\omega_\theta)]$
	MF	$b \frac{(1-\nu)}{2} (\omega_\xi \omega_\theta - r^2) - b \frac{n^2}{\rho^2} + \lambda^2 d(1-\nu) \omega_\theta^2 (\omega_\xi \omega_\theta - 3r^2 - \frac{n^2}{\rho^2})$
$a_{15}^{(n)}$	F . D . MF	$\lambda^2 d(1-\nu) \omega_\theta \frac{n}{\rho}$

$a_{15}^{(n)}$	M	$2 \lambda^2 d(1-\nu) \omega_\theta \frac{n}{\rho}$
	S	$\lambda^2 d(1-\nu)(3\omega_\theta - \omega_\xi) \frac{n}{2\rho}$
$a_{16}^{(n)}$	F . MF	$\lambda^2 d(1-\nu^2) r \omega_\theta \frac{n}{\rho}$
	M	$\lambda^2 d(1-\nu) r (2\omega_\xi - \omega_\theta + \nu \omega_\theta) \frac{n}{\rho}$
	S	$\lambda^2 d(1-\nu) [2(1+\nu) r \omega_\theta - \omega'_\xi + 3r(\omega_\xi - \omega_\theta)] \frac{n}{2\rho}$
	D	$\lambda^2 d(1-\nu) r \omega_\theta \frac{n}{\rho}$
$a_{17}^{(n)}$	F . MF	$-b(\omega_\theta + \nu \omega_\xi) \frac{n}{\rho} + \lambda^2 d(1-\nu) \omega_\theta \frac{n}{\rho} \left[\omega_\xi \omega_\theta - (1+\nu) \frac{n^2}{\rho^2} \right]$
	M	$-b(\omega_\theta + \nu \omega_\xi) \frac{n}{\rho} + \lambda^2 d(1-\nu) \frac{n}{\rho} \left[-2r^2 \omega_\xi + 2r^2 \omega_\theta + 2\omega_\xi \omega_\theta^2 - (1+\nu) \omega_\theta \frac{n^2}{\rho^2} \right]$
	S	$-b(\omega_\theta + \nu \omega_\xi) \frac{n}{\rho} + \lambda^2 d(1-\nu) \frac{n}{2\rho} \left[r \omega'_\xi - 2r^2 \omega_\xi - 2(1+\nu) \omega_\theta \frac{n^2}{\rho^2} + (3\omega_\theta - \omega_\xi)(r^2 + \omega_\xi \omega_\theta) \right]$
	D	$-b(\omega_\theta + \nu \omega_\xi) \frac{n}{\rho} - \lambda^2 d(1-\nu^2) \omega_\theta \frac{n^3}{\rho^3}$
$a_{18}^{(n)}$	F . M . S . D . MF	$-\lambda^2 \nu \omega_\theta \frac{n}{\rho}$
$a_{19}^{(n)}$	F . D	$-b(\omega_\xi + \nu \omega_\theta)$
	M . MF	$-b(\omega_\xi + \nu \omega_\theta) - \lambda^2 d(1-\nu) \omega_\xi \left[(1+\nu) r^2 + 2 \frac{n^2}{\rho^2} \right]$
	S	$-b(\omega_\xi + \nu \omega_\theta) - \lambda^2 d(1-\nu) \left[(1+\nu) r^2 \omega_\xi + (3\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{n^2}{2\rho^2} \right]$
$a_{20}^{(n)}$	F . D	$-b r (\omega_\theta + \nu \omega_\xi)$
	M . MF	$-b r (\omega_\theta + \nu \omega_\xi) + \lambda^2 d(1-\nu) \left[(1+\nu) r (2\omega_\xi^2 \omega_\theta + r^2 \omega_\xi - r \omega'_\xi - \omega_\xi \frac{n^2}{\rho^2}) - 2\omega'_\xi \frac{n^2}{\rho^2} \right]$
	S	$-b r (\omega_\theta + \nu \omega_\xi) + \lambda^2 d(1-\nu) \left[(1+\nu) r (2\omega_\xi^2 \omega_\theta + r^2 \omega_\xi - r \omega'_\xi - \omega_\xi \frac{n^2}{\rho^2}) + (r \omega_\xi - r \omega_\theta - 3\omega'_\xi) \frac{n^2}{2\rho^2} \right]$
$a_{21}^{(n)}$	F . D	0
	M . MF	$2 \lambda^2 d(1-\nu) \omega_\theta \frac{n}{\rho}$
	S	$\lambda^2 d(1-\nu)(3\omega_\theta - \omega_\xi) \frac{n}{2\rho}$
$a_{22}^{(n)}$	F . D	0
	M	$\lambda^2 d(1-\nu) r [2\omega_\xi - (3+\nu) \omega_\theta] \frac{n}{\rho}$
	S	$\lambda^2 d(1-\nu) [3 r \omega_\xi - r \omega_\theta (5+2\nu) - \omega'_\xi] \frac{n}{2\rho}$
	MF	$\lambda^2 d(1-\nu) r [2\omega_\xi + (1-\nu) \omega_\theta] \frac{n}{\rho}$
$a_{23}^{(n)}$	F . D	$-b(\omega_\theta + \nu \omega_\xi) \frac{n}{\rho}$

$a_{23}^{(n)}$	M	$-b(\omega_\theta + \nu \omega_\xi) \frac{n}{\rho} + \lambda^2 d(1-\nu) \left\{ (3+\nu) \omega_\xi \omega_\theta^2 + (4+2\nu) r^2 \omega_\theta - (3+\nu) r^2 \omega_\xi - (1+\nu) \omega_\theta \frac{n^2}{\rho^2} \right\} \frac{n}{\rho}$
	S	$-b(\omega_\theta + \nu \omega_\xi) \frac{n}{\rho} + \lambda^2 d(1-\nu) \left\{ 2(1+\nu) (\omega_\xi \omega_\theta^2 - r^2 \omega_\xi + 2r^2 \omega_\theta - \omega_\theta \frac{n^2}{\rho^2}) + r \omega_\xi' + 3r^2 (\omega_\theta - \omega_\xi) + \omega_\theta \omega_\xi (3\omega_\theta - \omega_\xi) \right\} \frac{n}{2\rho}$
	MF	$-b(\omega_\theta + \nu \omega_\xi) \frac{n}{\rho} + \lambda^2 d(1-\nu) \left\{ (3+\nu) \omega_\xi \omega_\theta^2 - (3+\nu) r^2 \omega_\xi - (1+\nu) \omega_\theta \frac{n^2}{\rho^2} - 2r^2 \omega_\theta \right\} \frac{n}{\rho}$
$a_{24}^{(n)}$	F . M . S . MF	$\lambda^2 d(1-\nu) \left\{ (1+\nu) r^2 + 2 \frac{n^2}{\rho^2} \right\}$
	D	$2 \lambda^2 d(1-\nu) \frac{n^2}{\rho^2}$
$a_{25}^{(n)}$	F . M . S . MF	$-\lambda^2 d(1-\nu) r \left\{ (1+\nu) (2 \omega_\xi \omega_\theta + r^2) + 2 \frac{n^2}{\rho^2} \right\}$
	D	$-\lambda^2 d(1-\nu^2) r \frac{n^2}{\rho^2}$
$a_{26}^{(n)}$	F . M . S . MF	$-b(\omega_\xi^2 + 2\nu \omega_\xi \omega_\theta + \omega_\theta^2) + \lambda^2 d(1-\nu) \left\{ (3+\nu) \omega_\xi \omega_\theta + 2(2+\nu) r^2 - (1+\nu) \frac{n^2}{\rho^2} \right\} \frac{n^2}{\rho^2}$
	D	$-b(\omega_\xi^2 + 2\nu \omega_\xi \omega_\theta + \omega_\theta^2) + \lambda^2 d(1-\nu^2) (\omega_\xi \omega_\theta + 2r^2 - \frac{n^2}{\rho^2}) \frac{n^2}{\rho^2}$
$a_{27}^{(n)}$	F . M . S . D . M	λ^2
$a_{28}^{(n)}$	F . M . S . D . MF	$\lambda^2 (2-\nu) r$
$a_{29}^{(n)}$	F . M . S . D . MF	$-\lambda^2 \left\{ (1-\nu) \omega_\xi \omega_\theta + \nu \frac{n^2}{\rho^2} \right\}$
$a_{30}^{(n)}$	F . D	0
	M . S . MF	$d \omega_\xi$
$a_{31}^{(n)}$	F . D	0
	M . S . MF	$d(\omega_\xi' + \nu r \omega_\xi)$
$a_{32}^{(n)}$	F . D	0
	M . S . MF	$d \nu \omega_\theta \frac{n}{\rho}$
$a_{33}^{(n)}$	F . M . S . D . MF	$-d$
$a_{34}^{(n)}$	F . M . S . MF	$-d \nu r$
	D	0
$a_{35}^{(n)}$	F . M . S . D . MF	$d \nu \frac{n^2}{\rho^2}$
$a_{36}^{(n)}$	F . M . S . D . MF	-1

1.3 境界条件

1.3.1 Flügge, 溝口, Donnell,

および修正した Flügge

の各理論による取扱い

本研究で取扱う諸問題の境界において考慮すべき合応力・合モーメントは N_ξ , $\hat{N}_{\xi\theta}$, $\hat{Q}_\xi$, M_ξ である (図 1.3)。 $\hat{N}_{\xi\theta}$, $\hat{Q}_\xi$ はそれぞれ有効せん断合応力、有効横せん断合応力であり次式で与えられる。⁽²⁸⁾⁽³⁷⁾⁽⁵⁶⁾⁽⁵⁹⁾

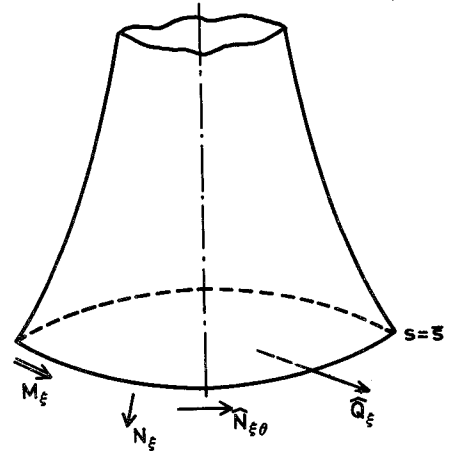


図 1.3 境界における
合応力・合モーメント

$$\hat{N}_{\xi\theta} = N_{\xi\theta} + \frac{M_{\xi\theta}}{r_\theta} \quad \hat{Q}_\xi = Q_\xi + \frac{\partial M_{\xi\theta}}{r \partial \theta} \quad (1.36)$$

これをつぎのようにおく。

$$\hat{N}_{\xi\theta} = a_0 h \sum_{n=1}^{\infty} \hat{n}_{\xi\theta}^{(n)} \sin n\theta \quad \hat{Q}_\xi = a_0 h \sum_{n=0}^{\infty} \hat{q}_\xi^{(n)} \cos n\theta \quad (1.37)$$

式 (1.2), (1.6), (1.37)、および (1.5) の第 5 式を式 (1.36) に用いると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{n}_{\xi\theta}^{(n)} &= n_{\xi\theta}^{(n)} + \lambda^2 \omega_\theta m_{\xi\theta}^{(n)} \\ \hat{q}_\xi^{(n)} &= \lambda^2 \left[m_\xi^{(n)'} + r (m_\xi^{(n)} - m_\theta^{(n)}) + 2 \frac{n}{\rho} m_{\xi\theta}^{(n)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

これに表 1.1 の Flügge による無次元合応力・合モーメントと変位の関係を用い、さらに $n_\xi^{(n)}$ と変位の関係式をあわせ示すとつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} n_\xi^{(n)} &= b_1^{(n)} u_\xi^{(n)'} + b_2^{(n)} u_\xi^{(n)} + b_3^{(n)} u_\theta^{(n)} + b_4^{(n)} w^{(n)} \\ \hat{n}_{\xi\theta}^{(n)} &= b_5^{(n)} u_\xi^{(n)} + b_6^{(n)} u_\theta^{(n)'} + b_7^{(n)} u_\theta^{(n)} + b_8^{(n)} w^{(n)'} + b_9^{(n)} w^{(n)} \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

$$\begin{aligned} \hat{q}_{\xi}^{(n)} = & b_{10}^{(n)} u_{\xi}^{(n)} + b_{11}^{(n)} u_{\theta}^{(n)} + b_{12}^{(n)} u_{\theta}' + b_{13}^{(n)} w^{(n)} \\ & + b_{14}^{(n)} w^{(n)} + b_{15}^{(n)} m_{\xi}^{(n)} + b_{16}^{(n)} m_{\xi}' \end{aligned} \quad (1.39)$$

係数 $b_1^{(n)} \sim b_{16}^{(n)}$ を表 1.3 に示す。同様にして表 1.1 の溝口、Donnell、および修正した Flugge による関係式を式 (1.38) に用いると、いずれの場合も式 (1.39) で表わされる関係式が得られる。このときの係数を表 1.3 に併記しておく。

1.3.2 Sanders の理論による取扱い

Sanders⁽²⁹⁾ の理論によれば、境界における仮想仕事を次式のように表わしている。

$$N_{\xi} U + \hat{N}_{\xi\theta} V + \hat{Q}_{\xi} W + M_{\xi} \phi_1 \quad (1.40)$$

ただし、 $\hat{N}_{\xi\theta}$ 、 $\hat{Q}_{\xi}$ はつぎのように与えられている。

$$\hat{N}_{\xi\theta} = \bar{N}_{\xi\theta} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{r_{\theta}} - \frac{1}{r_{\xi}} \right) \bar{M}_{\xi\theta} \quad \hat{Q}_{\xi} = Q_{\xi} + \frac{\partial \bar{M}_{\xi\theta}}{r \partial \theta} \quad (1.41)$$

式 (1.2)、(1.6)、(1.17)、(1.37)、および式 (1.15) の第 4 式を式 (1.41) に用いると式 (1.38) に対して次式が得られる。

$$\begin{aligned} \hat{n}_{\xi\theta}^{(n)} = & \bar{n}_{\xi\theta}^{(n)} - \frac{\lambda^2}{2} (\omega_{\xi} - 3\omega_{\theta}) \bar{m}_{\xi\theta}^{(n)} \\ \hat{q}_{\xi}^{(n)} = & \lambda^2 \left[m_{\xi}^{(n)} + r (m_{\xi}' - m_{\theta}') + 2 \frac{n}{\rho} \bar{m}_{\xi\theta}^{(n)} \right] \end{aligned} \quad (1.42)$$

式 (1.42) に表 1.1 の Sanders による関係式を用いると、この場合も式 (1.39) で示される関係式が得られる。このときの係数を表 1.3 に併記しておく。

1.3.3 境界条件の例

境界において作用する合応力・合モーメントと変位を組合せることにより種々の境界条件が得られるが、実際に多く用いられる境界

条件を示すとつぎのようなものである。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{自由端;} & n_{\xi}^{(n)} = \hat{n}_{\xi\theta}^{(n)} = \hat{q}_{\xi}^{(n)} = m_{\xi}^{(n)} = 0 \\ \text{自由支持端;} & n_{\xi}^{(n)} = u_{\theta}^{(n)} = w^{(n)} = m_{\xi}^{(n)} = 0 \\ \text{回転支持端;} & u_{\xi}^{(n)} = u_{\theta}^{(n)} = w^{(n)} = m_{\xi}^{(n)} = 0 \\ \text{固定端;} & u_{\xi}^{(n)} = u_{\theta}^{(n)} = w^{(n)} = w^{(n)'} = 0 \end{array} \right\} (1.43)$$

また、球かくの頂点のように極となっている場合にはつぎの条件式が用いられる。⁶⁰⁾

$$\left. \begin{array}{ll} n = 0 & : u_{\xi} = u_{\theta} = w' = m'_{\xi} = 0 \\ n = 1 & : u_{\xi} + u_{\theta} = u'_{\theta} = w = m_{\xi} = 0 \\ n \geq 2 & : u_{\xi}^{(n)} = u_{\theta}^{(n)} = w^{(n)} = w^{(n)'} = 0 \end{array} \right\} (1.44)$$

1.4 接続条件

かくに幾向学的な不連続が存在する箇所における接続条件について考える。図 1.4 のごとく、かく I , II の部分の境界において傾斜角 ϕ の不連続量が存在するものとすれば、幾向学的、および力学的接続条件はつぎのようになる。

$$\left. \begin{array}{l} u_{\xi}^{(n)II} = u_{\xi}^{(n)I} \cos \phi \\ \quad - w^{(n)I} \sin \phi \\ u_{\theta}^{(n)II} = u_{\theta}^{(n)I} \\ w^{(n)II} = u_{\xi}^{(n)I} \sin \phi \\ \quad + w^{(n)I} \cos \phi \\ \phi_1^{II} = \phi_1^I \end{array} \right\} (1.45)$$

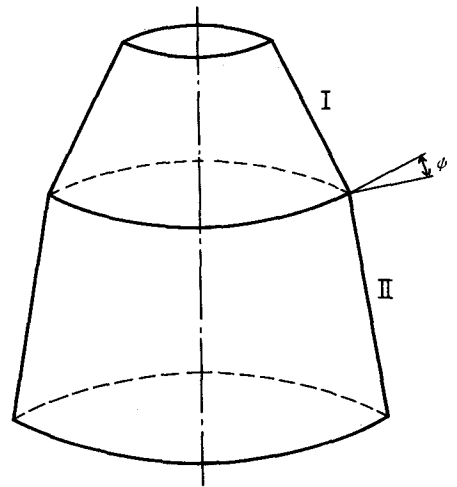


図 1.4 不連続箇所を持つかく

表 1.3 境界条件式の係数

(F : Flüge , M : 溝口 , S : Sanders , D : Donnell ,
MF : 修正 Flüge)

$b_1^{(n)}$	F . M . S . D . MF	b
$b_2^{(n)}$	F . M . S . D . MF	$b \nu \tau$
$b_3^{(n)}$	F . M . S . D . MF	$b \nu \frac{n}{\rho}$
$b_4^{(n)}$	F . M . S . D . MF	$b(\omega_\xi + \nu \omega_\theta)$
$b_5^{(n)}$	F . D	$-b(1-\nu) \frac{n}{2\rho}$
	M	$-b(1-\nu) \frac{n}{2\rho} - 2 \lambda^2 d(1-\nu) \omega_\xi \omega_\theta \frac{n}{\rho}$
	S	$-b(1-\nu) \frac{n}{2\rho} - \lambda^2 d(1-\nu)(3\omega_\xi - \omega_\theta)(3\omega_\theta - \omega_\xi) \frac{n}{8\rho}$
	MF	$-b(1-\nu) \frac{n}{2\rho} - \lambda^2 d(1-\nu) \omega_\xi \omega_\theta \frac{n}{\rho}$
$b_6^{(n)}$	F . D	$b \frac{(1-\nu)}{2}$
	M	$b \frac{(1-\nu)}{2} + 2 \lambda^2 d(1-\nu) \omega_\theta^2$
	S	$b \frac{(1-\nu)}{2} + \lambda^2 d \frac{(1-\nu)}{8} (3\omega_\theta - \omega_\xi)^2$
	MF	$b \frac{(1-\nu)}{2} + \lambda^2 d(1-\nu) \omega_\theta^2$
$b_7^{(n)}$	F . M . S . D . MF	$-\tau b_6^{(n)}$
$b_8^{(n)}$	F . D . MF	$\lambda^2 d(1-\nu) \omega_\theta \frac{n}{\rho}$
	M	$2 \lambda^2 d(1-\nu) \omega_\theta \frac{n}{\rho}$
	S	$\lambda^2 d(1-\nu)(3\omega_\theta - \omega_\xi) \frac{n}{2\rho}$
$b_9^{(n)}$	F . M . S . MF	$-\tau b_8^{(n)}$
	D	0
$b_{10}^{(n)}$	F . D	0
	M . MF	$-\lambda^2 d(1-\nu) \left[(1+\nu) \tau^2 \omega_\xi + 2\omega_\xi \frac{n^2}{\rho^2} \right]$
	S	$-\lambda^2 d(1-\nu) \left[(1+\nu) \tau^2 \omega_\xi + (3\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{n^2}{2\rho^2} \right]$
$b_{11}^{(n)}$	F . D	0
	M . MF	$2 \lambda^2 d(1-\nu) \omega_\theta \frac{n}{\rho}$
	S	$\lambda^2 d(1-\nu)(3\omega_\theta - \omega_\xi) \frac{n}{2\rho}$
$b_{12}^{(n)}$	F . D	0
	M . MF	$-\lambda^2 d(1-\nu)(3+\nu) \tau \omega_\theta \frac{n}{\rho}$
	S	$-\lambda^2 d(1-\nu) \tau \left[3\omega_\theta - \omega_\xi + 2(1+\nu) \omega_\theta \right] \frac{n}{2\rho}$
$b_{13}^{(n)}$	F . M . S . MF	$\lambda^2 d(1-\nu) \left[(1+\nu) \tau^2 + 2 \frac{n^2}{\rho^2} \right]$
	D	$\lambda^2 d(1-\nu) \frac{2n^2}{\rho^2}$
$b_{14}^{(n)}$	F . M . S . MF	$-\lambda^2 d(1-\nu)(3+\nu) \tau \frac{n^3}{\rho^2}$
	D	$-\lambda^2 d(1-\nu^2) \tau \frac{n^3}{\rho^2}$
$b_{15}^{(n)}$	F . M . S . D . MF	λ^2
$b_{16}^{(n)}$	F . M . S . D . MF	$\lambda^2 (1-\nu) \tau$

$$\left. \begin{aligned} n_{\xi}^{(n)II} &= n_{\xi}^{(n)I} \cos \phi - \hat{q}_{\xi}^{(n)I} \sin \phi & \hat{n}_{\xi\theta}^{(n)II} &= \hat{n}_{\xi\theta}^{(n)I} \\ \hat{q}_{\xi}^{(n)II} &= n_{\xi}^{(n)I} \sin \phi + \hat{q}_{\xi}^{(n)I} \cos \phi & m_{\xi}^{(n)II} &= m_{\xi}^{(n)I} \end{aligned} \right\} (1.46)$$

この条件式は、ⅠとⅡの各部分のかく厚や曲率が不連続である場合、また材質が異なる場合の接統条件としても用いることができる。上述の式は二種類のかくが剛接統するとしているが、他の場合についても同様に条件式を作ることができる。

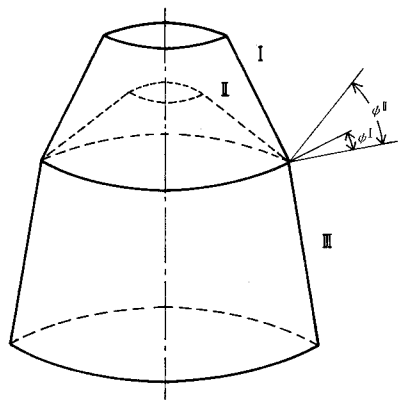


図 1.5 不連続箇所を持つかく

つぎに図 1.5 のようにⅠ，Ⅱ，およびⅢの各部分が集まる場合の接合条件についても、同じようにしてつぎのような関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} u_{\xi}^{(n)III} &= u_{\xi}^{(n)I} \cos \phi^I - w^{(n)I} \sin \phi^I = u_{\xi}^{(n)II} \cos \phi^{II} - w^{(n)II} \sin \phi^{II} \\ u_{\theta}^{(n)III} &= u_{\theta}^{(n)I} = u_{\theta}^{(n)II} \\ w^{(n)III} &= u_{\xi}^{(n)I} \sin \phi^I + w^{(n)I} \cos \phi^I = u_{\xi}^{(n)II} \sin \phi^{II} + w^{(n)II} \cos \phi^{II} \\ \phi_1^{III} &= \phi_1^I = \phi_1^{II} \end{aligned} \right\} (1.47)$$

$$\left. \begin{aligned} n_{\xi}^{(n)III} &= n_{\xi}^{(n)I} \cos \phi^I - \hat{q}_{\xi}^{(n)I} \sin \phi^I + n_{\xi}^{(n)II} \cos \phi^{II} - \hat{q}_{\xi}^{(n)II} \sin \phi^{II} \\ \hat{n}_{\xi\theta}^{(n)III} &= \hat{n}_{\xi\theta}^{(n)I} + \hat{n}_{\xi\theta}^{(n)II} \\ \hat{q}_{\xi}^{(n)III} &= n_{\xi}^{(n)I} \sin \phi^I + \hat{q}_{\xi}^{(n)I} \cos \phi^I + n_{\xi}^{(n)II} \sin \phi^{II} + \hat{q}_{\xi}^{(n)II} \cos \phi^{II} \\ m_{\xi}^{(n)III} &= m_{\xi}^{(n)I} + m_{\xi}^{(n)II} \end{aligned} \right\} (1.48)$$

1.5 自由振動問題の取扱い

前節までにおいては静的曲げの問題を対象としたが、ここでは自由振動問題に対する解法について考える。自由振動問題に対しては、外力としてつぎのような振動慣性項を考える。(注1)

$$X^* = -\rho^* h \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad Y^* = -\rho^* h \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad Z^* = -\rho^* h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (1.49)$$

ここに ρ^* , t はそれぞれ比質量および時間である。自由振動の問題では、各フーリエ指数 n は振動形における節線数の $1/2$ を表わすから、式 (1.6), (1.17), (1.26), および (1.37) に対してつぎのようにおく。

$$\left. \begin{aligned} N_\xi &= \sigma_0 h n_\xi^{(n)} \cos n\theta \cos \varrho \bar{\tau} & N_\theta &= \sigma_0 h n_\theta^{(n)} \cos n\theta \cos \varrho \bar{\tau} \\ N_{\xi\theta} &= \sigma_0 h \bar{n}_{\xi\theta}^{(n)} \sin n\theta \cos \varrho \bar{\tau} & \bar{N}_{\xi\theta} &= \sigma_0 h \bar{n}_{\xi\theta}^{(n)} \sin n\theta \cos \varrho \bar{\tau} \\ \bar{N} &= \sigma_0 h \bar{n}^{(n)} \sin n\theta \cos \varrho \bar{\tau} & \hat{N}_{\xi\theta} &= \sigma_0 h \hat{n}_{\xi\theta}^{(n)} \sin n\theta \cos \varrho \bar{\tau} \\ Q_\xi &= \sigma_0 h q_\xi^{(n)} \cos n\theta \cos \varrho \bar{\tau} & Q_\theta &= \sigma_0 h q_\theta^{(n)} \sin n\theta \cos \varrho \bar{\tau} \\ \hat{Q}_\xi &= \sigma_0 h \hat{q}_\xi^{(n)} \cos n\theta \cos \varrho \bar{\tau} \\ M_\xi &= \sigma_0 (h^3/a) m_\xi^{(n)} \cos n\theta \cos \varrho \bar{\tau} \\ M_\theta &= \sigma_0 (h^3/a) m_\theta^{(n)} \cos n\theta \cos \varrho \bar{\tau} \\ M_{\xi\theta} &= \sigma_0 (h^3/a) m_{\xi\theta}^{(n)} \sin n\theta \cos \varrho \bar{\tau} \\ \bar{M}_{\xi\theta} &= \sigma_0 (h^3/a) \bar{m}_{\xi\theta}^{(n)} \sin n\theta \cos \varrho \bar{\tau} \\ U &= \sigma_0 (a/E) u_\xi^{(n)} \cos n\theta \cos \varrho \bar{\tau} \\ V &= \sigma_0 (a/E) u_\theta^{(n)} \sin n\theta \cos \varrho \bar{\tau} \\ W &= \sigma_0 (a/E) w^{(n)} \cos n\theta \cos \varrho \bar{\tau} \end{aligned} \right\} \quad (1.50)$$

ϱ , $\bar{\tau}$ は次式で定義される無次元振動数、および無次元時間である。

$$\varrho = 2\pi a f \sqrt{\rho^*/E} \quad \bar{\tau} = (t/a) \sqrt{E/\rho^*} \quad f: \text{振動数 Hz} \quad (1.51)$$

(注1) 本研究では、回転慣性項⁶⁾については取扱わないことにする。

式 (1.49) , (1.50) を用いて、式 (1.5) , (1.15) を前と同様に变形すれば、静的曲げ問題に対する基礎方程式 (1.14) と同じ形の基礎方程式が得られる。この場合、係数 $a_1^{(n)} \sim a_{36}^{(n)}$ は表 1.2 の通りであるが、外力の項 $\bar{X}^{(n)}$, $\bar{Y}^{(n)}$, $\bar{Z}^{(n)}$ はそれぞれ次式のごとくなる。

$$\bar{X}^{(n)} = \varrho^2 u_{\xi}^{(n)} \quad \bar{Y}^{(n)} = \varrho^2 u_{\theta}^{(n)} \quad \bar{Z}^{(n)} = \varrho^2 w^{(n)} \quad (1.52)$$

また、Donnell による解法を用いる場合には、簡単につきのようにおけばよい。

$$\bar{X}^{(n)} = \bar{Y}^{(n)} = 0 \quad \bar{Z}^{(n)} = \varrho^2 w^{(n)} \quad (1.53)$$

境界条件については 1.3 節と同様に扱えば式 (1.39) の関係が得られる。このときの係数 $b_1^{(n)} \sim b_{18}^{(n)}$ は表 1.3 のとおりである。

接続条件についても 1.4 節の関係をそのまま用いることができる。

1.6 差分法による数値解法

1.6.1 差分近似

子午線方向の座標 s に関する領域 (0 , $\bar{s}$) において l 個の不連

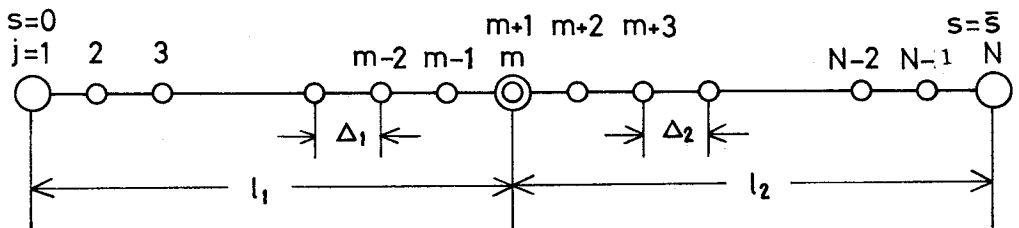


図 1.6 差分点の番号 (接続点 1 のとき)

続点が $s = s_1, s_2, \dots, s_l$ にあるものとする。各部分領域 $(0, s_1)$ $(s_1, s_2) \dots (s_l, \bar{s})$ をそれぞれ $N_1 - 1, N_2 - 1, \dots, N_{l+1} - 1$ 個に等分割し、これらの分割点（差分点）に図 1.6 のような通し番号 j をつける。すなわち、 $s = 0$ を $j = 1$, $s = \bar{s}$ を $j = N_1 + N_2 + \dots + N_{l+1} \equiv N$ とし、各不連続点に対しては $j = m$ と $j = m + 1$ のように二重の番号をつける。各部分の領域における座標 ξ の差分点間の増分量はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{s_1}{a(N_1 - 1)} & \Delta_2 &= \frac{s_2 - s_1}{a(N_2 - 1)} \\ \dots\dots\dots & & \Delta_{l+1} &= \frac{\bar{s} - s_l}{a(N_{l+1} - 1)} \end{aligned} \right\} \quad (1.54)$$

さて、ここで基礎方程式 (1.14) の解行列をつぎのようにおく。

$$Z = [u_\xi \ u_\theta \ w \ m_\xi]^T \quad (1.55)$$

T は転置行列を表わす。差分点 j における Z を Z_j とし、つぎの関係式を用いる。

$$Z_j' = \frac{Z_{j+1} - Z_{j-1}}{2\Delta} \quad Z_j'' = \frac{Z_{j+1} - 2Z_j + Z_{j-1}}{\Delta^2} \quad (1.56)$$

これを基礎方程式 (1.14) に用いると、つぎの差分近似関係式が得られる。

$$A_j Z_{j-1} + B_j Z_j + C_j Z_{j+1} = D_j \quad (1.57)$$

ただし、 A_j, B_j, C_j , および D_j はつぎのような行列である。

$$A_j = \left[\begin{array}{cccc} 2a_1 - a_2 \Delta & -a_4 \Delta & -a_6 \Delta & -a_8 \Delta \\ -a_{10} \Delta & 2a_{12} - a_{13} \Delta & 2a_{15} - a_{16} \Delta & 0 \\ -a_{19} \Delta & 2a_{21} - a_{22} \Delta & 2a_{24} - a_{25} \Delta & 2a_{27} - a_{28} \Delta \\ -a_{30} \Delta & 0 & 2a_{33} - a_{34} \Delta & 0 \end{array} \right] \quad (1.58)$$

$$\begin{aligned}
 B_j &= \begin{bmatrix} 2a_3 \Delta^2 - 4a_1 & 2a_5 \Delta^2 & 2a_7 \Delta^2 & 2a_9 \Delta^2 \\ 2a_{11} \Delta^2 & 2a_{14} \Delta^2 - 4a_{12} & 2a_{17} \Delta^2 - 4a_{15} & 2a_{18} \Delta^2 \\ 2a_{20} \Delta^2 & 2a_{23} \Delta^2 - 4a_{21} & 2a_{26} \Delta^2 - 4a_{24} & 2a_{29} \Delta^2 - 4a_{27} \\ 2a_{31} \Delta^2 & 2a_{32} \Delta^2 & 2a_{35} \Delta^2 - 4a_{33} & 2a_{36} \Delta^2 \end{bmatrix} \\
 C_j &= \begin{bmatrix} 2a_1 + a_2 \Delta & a_4 \Delta & a_6 \Delta & a_8 \Delta \\ a_{10} \Delta & 2a_{12} + a_{13} \Delta & 2a_{15} + a_{16} \Delta & 0 \\ a_{19} \Delta & 2a_{21} + a_{22} \Delta & 2a_{24} + a_{25} \Delta & 2a_{27} + a_{28} \Delta \\ a_{30} \Delta & 0 & 2a_{33} + a_{34} \Delta & 0 \end{bmatrix} \\
 D_j &= \begin{bmatrix} -2 \Delta^2 \bar{X} \\ -2 \Delta^2 \bar{Y} \\ -2 \Delta^2 \bar{Z} \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.58}$$

つぎに境界 ($j = 1, N$) および不連続点 ($j = m, m+1$) に対してはつぎの関係式を用いる。

$$Z'_1 = \frac{-3Z_1 + 4Z_2 - Z_3}{2\Delta_1^-} \quad Z'_N = \frac{3Z_N - 4Z_{N-1} + Z_{N-2}}{2\Delta_{N+1}^+} \tag{1.59}$$

$$\left. \begin{aligned}
 Z'_m &= \frac{3Z_m - 4Z_{m-1} + Z_{m-2}}{2\Delta^-} \\
 Z'_{m+1} &= \frac{-3Z_{m+1} + 4Z_{m+2} - Z_{m+3}}{2\Delta^+}
 \end{aligned} \right\} \tag{1.60}$$

ここに、 Δ^- , Δ^+ は接続点の前後の領域における差分間隔を示している。

さて、式 (1.59) を式 (1.43), (1.44) に用いると、境界条件は次式のように表わされる。

$$(A_1) Z_1 + (B_1) Z_2 + (C_1) Z_3 = 0 \tag{1.61}$$

$$(A_N)Z_{N-2} + (B_N)Z_{N-1} + (C_N)Z_N = 0 \quad (1.62)$$

式(1.61)は始端、式(1.62)は終端に対する式である。(A₁)

～(C_N)は4×4行列であり境界条件の種類によって定まる。

1.3節で示した境界条件に対するものをつぎに示す。

i) 自由端

$$(A_1) = \begin{bmatrix} -\frac{3b_1}{2A} + b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ b_5 & -\frac{3}{2A}b_6 + b_7 & -\frac{3}{2A}b_8 + b_9 & 0 \\ b_{10} & -\frac{3}{2A}b_{11} + b_{12} & -\frac{3}{2A}b_{13} + b_{14} & -\frac{3b_{15}}{2A} + b_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(B_1) = \begin{bmatrix} \frac{2b_1}{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2b_6}{A} & \frac{2b_8}{A} & 0 \\ 0 & \frac{2b_{11}}{A} & \frac{2b_{13}}{A} & \frac{2b_{15}}{A} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(C_1) = \begin{bmatrix} -\frac{b_1}{2A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_6}{2A} & -\frac{b_8}{2A} & 0 \\ 0 & -\frac{b_{11}}{2A} & -\frac{b_{13}}{2A} & -\frac{b_{15}}{2A} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A_N) = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{2A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_6}{2A} & \frac{b_8}{2A} & 0 \\ 0 & \frac{b_{11}}{2A} & \frac{b_{13}}{2A} & \frac{b_{15}}{2A} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(B_N) = \begin{bmatrix} -\frac{2b_1}{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2b_6}{A} & -\frac{2b_8}{A} & 0 \\ 0 & -\frac{2b_{11}}{A} & -\frac{2b_{13}}{A} & -\frac{2b_{15}}{A} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(C_N) = \begin{bmatrix} \frac{3b_1}{2A} + b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ b_5 & \frac{3b_6}{2A} + b_7 & \frac{3b_8}{2A} + b_9 & 0 \\ b_{10} & \frac{3b_{11}}{2A} + b_{12} & \frac{3b_{13}}{2A} + b_{14} & \frac{3b_{15}}{2A} + b_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ii) 自由支持端

$$(A_1) = \begin{bmatrix} -\frac{3b_1}{2A} + b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(B_1) = \begin{bmatrix} \frac{2b_1}{A} & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$(C_1) = \begin{bmatrix} -\frac{b_1}{2A} & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A_N) = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{2A} & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$(B_N) = \begin{bmatrix} -\frac{2b_1}{A} & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$(C_N) = \begin{bmatrix} \frac{3b_1}{2A} + b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ⅲ) 回転支持端

$$(A_1) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (B_1) = (C_1) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A_N) = (B_N) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (C_N) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Ⅳ) 固定端

$$(A_1) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad (B_1) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(C_1) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (A_N) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(B_N) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(C_N) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

v) 極

n = 0 :

$$(A_1) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{bmatrix}$$

$$(B_1) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & -4 & \\ & & & -4 \end{bmatrix}$$

$$(C_1) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A_N) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$(B_N) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & -4 & \\ & & & -4 \end{bmatrix}$$

$$(C_N) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{bmatrix}$$

n = 1 :

$$(A_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & 3 & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$(B_1) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & -4 & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$(C_1) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A_N) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$(B_N) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & -4 & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (C_N) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & 3 & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$n \geq 2$: 固定条件と同じ

つぎに式(1.60)を式(1.45), (1.46)に用いると、接続条件式はつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} & (A_M)_m Z_{m-2} + (B_M)_m Z_{m-1} + (C_M)_m Z_m \\ & + (D_M)_{m+1} Z_{m+1} + (E_M)_{m+1} Z_{m+2} \\ & \quad + (F_M)_{m+1} Z_{m+3} = 0 \\ & (G_M)_m Z_{m-2} + (H_M)_m Z_{m-1} + (I_M)_m Z_m \\ & + (J_M)_{m+1} Z_{m+1} + (K_M)_{m+1} Z_{m+2} \\ & \quad + (L_M)_{m+1} Z_{m+3} = 0 \end{aligned} \right\} (1.63)$$

$(A_M)_m \sim (L_M)_{m+1}$ はつぎの 4×4 行列である。

$$(A_M)_m = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & \frac{1}{2J} & 0 \end{bmatrix} \quad (B_M)_m = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & -\frac{2}{J} & 0 \end{bmatrix}$$

$$(C_M)_m = \begin{bmatrix} -\cos \phi & 0 & \sin \phi & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & -\cos \phi & 0 \\ -\omega_{\xi, m} & 0 & \frac{3}{2J} & 0 \end{bmatrix}$$

$$(D_M)_{m+1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \omega_{\xi, m+1} 0 & \frac{3}{2A^+} & 0 & \end{bmatrix} \quad (E_M)_{m+1} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & -\frac{2}{A^+} 0 \end{bmatrix}$$

$$(F_M)_{m+1} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & \frac{1}{2A^+} & 0 \end{bmatrix}$$

$$(G_M)_m = \begin{bmatrix} -\frac{b_1}{2A^-} \cos \phi & \frac{b_{11}}{2A^-} \sin \phi & \frac{b_{13}}{2A^-} \sin \phi & \frac{b_{15}}{2A^-} \sin \phi \\ 0 & -\frac{b_6}{2A^-} & -\frac{b_8}{2A^-} & 0 \\ -\frac{b_1}{2A^-} \sin \phi & -\frac{b_{11}}{2A^-} \cos \phi & -\frac{b_{13}}{2A^-} \cos \phi & -\frac{b_{15}}{2A^-} \cos \phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(H_M)_m = \begin{bmatrix} \frac{2b_1}{A^-} \cos \phi & -\frac{2b_{11}}{A^-} \sin \phi & -\frac{2b_{13}}{A^-} \sin \phi & -\frac{2b_{15}}{A^-} \sin \phi \\ 0 & \frac{2b_6}{A^-} & \frac{2b_8}{A^-} & 0 \\ \frac{2b_1}{A^-} \sin \phi & \frac{2b_{11}}{A^-} \cos \phi & \frac{2b_{13}}{A^-} \cos \phi & \frac{2b_{15}}{A^-} \cos \phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(I_M)_m = \begin{bmatrix} -(-\frac{3b_1}{2A^-} + b_2) \cos \phi + b_{10} \sin \phi & -b_3 \cos \phi + (\frac{3b_{11}}{2A^-} + b_{12}) \times \sin \phi \\ -b_5 & -(\frac{3b_6}{2A^-} + b_7) \\ -(\frac{3b_1}{2A^-} + b_2) \sin \phi - b_{10} \cos \phi & -b_3 \sin \phi - (\frac{3b_{11}}{2A^-} + b_{12}) \times \cos \phi \\ 0 & 0 \\ -b_4 \cos \phi + (\frac{3b_{13}}{2A^-} + b_{14}) \sin \phi & (\frac{3b_{15}}{2A^-} + b_{16}) \sin \phi \\ -(\frac{3b_8}{2A^-} + b_9) & 0 \\ -b_4 \sin \phi - (\frac{3b_{13}}{2A^-} + b_{14}) \cos \phi & -(\frac{3b_{15}}{2A^-} + b_{16}) \cos \phi \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(J_M)_{m+1} = \begin{bmatrix} -\frac{3b_1}{2\Delta^+} + b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ b_5 & -\frac{3b_6}{2\Delta^+} + b_7 & -\frac{3b_8}{2\Delta^+} + b_9 & 0 \\ b_{10} & -\frac{3b_{11}}{2\Delta^+} + b_{12} & -\frac{3b_{13}}{2\Delta^+} + b_{14} & -\frac{3b_{15}}{2\Delta^+} + b_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(K_M)_{m+1} = \begin{bmatrix} \frac{2b_1}{\Delta^+} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2b_6}{\Delta^+} & \frac{2b_8}{\Delta^+} & 0 \\ 0 & \frac{2b_{11}}{\Delta^+} & \frac{2b_{13}}{\Delta^+} & \frac{2b_{15}}{\Delta^+} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(L_M)_{m+1} = \begin{bmatrix} -\frac{b_1}{2\Delta^+} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_6}{2\Delta^+} & -\frac{b_8}{2\Delta^+} & 0 \\ 0 & -\frac{b_{11}}{2\Delta^+} & -\frac{b_{13}}{2\Delta^+} & -\frac{b_{15}}{2\Delta^+} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.6.2 静的曲げ問題

基礎方程式 (1.57), 境界条件式 (1.61), (1.62), および接続条件式 (1.63) は、解行列 Z_j ($j = 1 \sim N$) に関する連立方程式を構成している。簡単のため不連続点を 1 個として、この連立方程式を行列表示するとつぎのごとくになる。

$$\left[\begin{array}{ccccccc}
 (A_1) & (B_1) & (C_1) & & & & \\
 A_2 & B_2 & C_2 & & & & \\
 & A_3 & B_3 & C_3 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & A_{m-2} & B_{m-2} & C_{m-1} & \\
 & & & A_{m-1} & B_{m-1} & C_{m-1} & \\
 & & & (A_M)_m & (B_M)_m & (C_M)_m & (D_M)_{m+1} & (E_M)_{m+1} & (F_M)_{m+1} \\
 & & & (G_M)_m & (H_M)_m & (I_M)_m & (J_M)_{m+1} & (K_M)_{m+1} & (L_M)_{m+1} \\
 & & & & & & A_{m+2} & B_{m+2} & C_{m+2} \\
 & & & & & & & A_{m+3} & B_{m+3} & C_{m+3} \\
 & & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & & & & & & & & & A_{N-1} & B_{N-1} & C_{N-1} \\
 & & & & & & & & & (A_N) & (B_N) & (C_N)
 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ Z_{m-2} \\ Z_{m-1} \\ Z_m \\ Z_{m+1} \\ Z_{m+2} \\ Z_{m+3} \\ \vdots \\ \vdots \\ Z_{N-2} \\ Z_{N-1} \\ Z_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \\ D_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ D_{m-2} \\ D_{m-1} \\ 0 \\ 0 \\ D_{m+2} \\ D_{m+3} \\ \vdots \\ \vdots \\ D_{N-2} \\ D_{N-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.64)$$

この連立方程式は $4N$ 元であり、通常の問題では $N = 100 \sim 500$ 程度とするため、式 (1.64) を直接解くことは困難である。ここでは漸化式を用いて解くことにする。^{(12) (40)}

まずはじめにつぎの漸化式を設定する。

$$Z_j = X_j Z_{j+1} + Y_j \quad (1.65)$$

ここに、 X_j は 4×4 行列、 Y_j は 4×1 行列である。式 (1.61)

と $j = 2$ に対する式 (1.57) を連立させて、これから Z_1 と Z_2 ^(注1)

の関係を求めると X_1 , Y_1 が定まる。

つぎに、式 (1.57) と式 (1.65) を連立させる。

$$\left. \begin{aligned} Z_{j-1} - X_{j-1} Z_j &= Y_{j-1} \\ A_j Z_{j-1} + B_j Z_j + C_j Z_{j+1} &= D_j \end{aligned} \right\} (1.66)$$

これより Z_{j-1} と Z_j の関係を求めれば X_j, Y_j を定めることができる。

このようにして順次 X_j, Y_j を求める。ただし接続点においては

$j = m-2, j = m-1$ に対する漸化式 (1.65)、接続条件式 (1.63)、および $j = m+2$ に対する基礎方程式 (1.57) を連立させる。すなわち、次式のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} Z_{m-2} - X_{m-2} Z_{m-1} &= Y_{m-2} \\ Z_{m-1} - X_{m-1} Z_m &= Y_{m-1} \\ (A_M)_m Z_{m-2} + (B_M)_m Z_{m-1} + (C_M)_m Z_m + (D_M)_{m+1} Z_{m+1} \\ &+ (E_M)_{m+1} Z_{m+2} + (F_M)_{m+1} Z_{m+3} = 0 \\ (G_M)_m Z_{m-2} + (H_M)_m Z_{m-1} + (I_M)_m Z_m + (J_M)_{m+1} Z_{m+1} \\ &+ (K_M)_{m+1} Z_{m+2} + (L_M)_{m+1} Z_{m+3} = 0 \\ A_{m+2} Z_{m+1} + B_{m+2} Z_{m+2} + C_{m+2} Z_{m+3} &= D_{m+2} \end{aligned} \right\} (1.67)$$

(注1) 回転支持のときには Z_1 と Z_3 の関係を求める。

これより $X_m, Y_m, X_{m+1}, Y_{m+1}$ を決定する。このようにして結局つぎの連立方程式を得るにいたる。

$$\left. \begin{aligned} Z_{N-2} - X_{N-2} Z_{N-1} &= Y_{N-2} \\ A_{N-1} Z_{N-2} + B_{N-1} Z_{N-1} + C_{N-1} Z_N &= D_{N-1} \\ (A_N) Z_{N-2} + (B_N) Z_{N-1} + (C_N) Z_N &= 0 \end{aligned} \right\} (1.68)$$

これを解けば Z_{N-2}, Z_{N-1}, Z_N が求まる。 X_j, Y_j はすべて求まっているから式 (1.65) によりすべての Z_j が定まる。解行列 Z_j は要素として $u_\xi, u_\theta, w, m_\xi$ を持っているから、応力は表 1.1 を用いることにより容易に求めることができる。

1.6.3 自由振動問題

自由振動問題では、式 (1.52) または式 (1.53) を式 (1.57), (1.61), (1.62), および (1.63) とあわせ用いることにより式 (1.64) に対応する関係式としてつぎの連立方程式を得る。

$$\left[\begin{array}{ccccccc} (A_1) & (B_1) & (C_1) & & & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & & & & \\ & A_3 & B_3 & C_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & A_{m-2} & B_{m-2} & C_{m-2} & \\ & & & & A_{m-1} & B_{m-1} & C_{m-1} \\ & & & & (A_M) & (B_M) & (C_M) & (D_M)_{m+1} & (E_M)_{m+1} & (F_M)_{m+1} \\ & & & & (G_M) & (H_M) & (I_M) & (J_M)_{m+1} & (K_M)_{m+1} & (L_M)_{m+1} \\ & & & & & A_{m+2} & B_{m+2} & C_{m+2} & & \\ & & & & & & A_{m+3} & B_{m+3} & C_{m+3} & \\ & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & & A_{N-2} & B_{N-2} & C_{N-2} \\ & & & & & & & & & A_{N-1} & B_{N-1} & C_{N-1} \\ & & & & & & & & & & (A_N) & (B_N) & (C_N) \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \vdots \\ Z_{m-2} \\ Z_{m-1} \\ Z_m \\ Z_{m+1} \\ Z_{m+2} \\ Z_{m+3} \\ \vdots \\ Z_{N-1} \\ Z_N \end{bmatrix} = \mathcal{Q}^2 \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & \\ & \bar{D}_2 & & & & & & & & \\ & & \bar{D}_3 & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & \bar{D}_{m-2} & & & & & \\ & & & & & \bar{D}_{m-1} & & & & \\ & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \bar{D}_{m+2} & \\ & & & & & & & & & \bar{D}_{m+3} \\ & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & \bar{D}_{N-1} \\ & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \vdots \\ Z_{m-2} \\ Z_{m-1} \\ Z_m \\ Z_{m+1} \\ Z_{m+2} \\ Z_{m+3} \\ \vdots \\ Z_{N-1} \\ Z_N \end{bmatrix} \quad (1.69)$$

これをつぎのように表わす。 $\mathbf{HZ} = \mathcal{Q}^2 \mathbf{DZ}$ (1.70)

式 (1.69) における A_j , B_j , C_j は式 (1.58) と同じであるが、 $\bar{D}_j$ はつぎの 4×4 行列である。ただし式 (1.53) によるときは式 (1.72) となる。

$$\bar{D}_j = \begin{bmatrix} -2\mathcal{A}^2 & & & \\ & -2\mathcal{A}^2 & & \\ & & -2\mathcal{A}^2 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (1.71) \quad \bar{D}_j = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & -2\mathcal{A}^2 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (1.72)$$

また、式 (1.70) はつぎのように書ける。

$$(\mathbf{H} - \mathcal{Q}^2 \mathbf{D}) \mathbf{Z} = 0 \quad (1.73)$$

固有振動数を求めるために、まずかくの円周方向の波数を定める。すなわち、フーリエ指数 n (正整数) の値を指定する。つぎに式 (1.73) から次式を満足する固有振動数 $\mathcal{Q}$ の値を試算法により求めればよい。

$$\text{DET} = |\mathbf{H} - \mathcal{Q}^2 \mathbf{D}| = 0 \quad (1.74)$$

このような $\mathcal{Q}$ の値を求めるために、この場合もつぎの漸化式を設定

する。⁽²⁷⁾

$$Z_j = X_j \cdot Z_{j+1} \quad (1.75)$$

これを用いて前節と同様に取り扱えば、式(1.68)に対してつぎの連立方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} Z_{N-2} - X_{N-2} Z_{N-1} &= 0 \\ A_{N-1} Z_{N-2} + (B_{N-1} - \varrho^2 \bar{D}_{N-1}) Z_{N-1} + C_{N-1} Z_N &= 0 \\ (A_N) Z_{N-2} + (B_N) Z_{N-1} + (C_N) Z_N &= 0 \end{aligned} \right\} (1.76)$$

これよりつぎの条件式を得ることができる。

$$\text{DET} = \begin{vmatrix} I & -X_{N-2} & 0 \\ A_{N-1} & B_{N-1} - \varrho^2 \bar{D}_{N-1} & C_{N-1} \\ (A_N) & (B_N) & (C_N) \end{vmatrix} = 0 \quad (1.77)$$

ここに、 I および 0 はそれぞれ 4×4 の単位行列および零行列である。式(1.77)を満足する ϱ の値に対して自由振動のモードを求めるには、式(1.76)の Z_N の要素のうち零でないものの一つを 1 とし、残りの各要素をこれで表わす。つぎに式(1.75)を用いるとすべての Z_j が求まり、これより振動形式が定まる。

1.7 応 用 例

応用例として静的曲げ、および自由振動の問題を例題に取上げ、1.2節で示した各解法により同時にこれらの問題を解いてその結果を比較する。

なお、計算においてはかくの材料はすべて鋼としている。すなわち、つぎの値を用いる。

$$\rho^* = 7.9 \times 10^{-10} \text{ kg sec}^2/\text{mm}^2$$

$$E = 2.1 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$$

$$\nu = 0.3$$

1.7.1 静的曲げ問題

図 1.7 の上端自由で下端固定の円すい
 にかくに圧力の分布する場合を例題に
 取り上げる。このとき簡単のため式
 (1.6)における外力の項をつぎのよ
 うにおく。

$$X^* = Y^* = 0$$

$$Z^* = \sigma_0 \frac{h}{a} p_0 \cos n\theta$$

ここに p_0 は無次元外力であり、圧力 P を代表応力 σ_0 として計算を行
 なう。

円すいかく中央部の半径 R_0 を代表長さ a に選ぶと数値計算に必要な
 諸量はつぎのようになる。

$$a = R_0 \quad \Delta = \frac{L}{R_0 (N-1)}$$

$$\rho = \frac{1}{R_0} \left[R_1 + (R_2 - R_1) \frac{j-1}{N-1} \right]$$

$$\rho' = \frac{R_2 - R_1}{L}$$

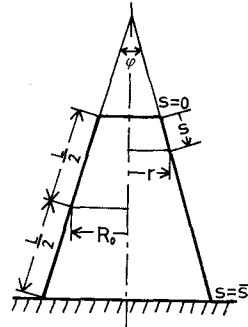
$$r = \frac{\rho'}{\rho}$$

$$\omega_\xi = 0 \quad \omega_\xi' = 0 \quad \omega_\theta = \frac{\cos \varphi / 2}{\rho}$$

計算に必要な円すいかくの寸法をつぎのように与える。

$$L = 500 \text{ mm} \quad , \quad R_0 = 150 \text{ mm} \quad , \quad \varphi = 30^\circ$$

圧力の分布として、フーリエ指数 n を 1 および 2 (図 1.8) とし、
 各場合について計算を行なう。 $n = 1$ のとき a/h を 30 、および
 150 として求めた合応力・合モーメントを図 1.9 , 1.10 に示す。
 なお、差分分割数は 150 とした。



$$L = 500 \text{ mm} , R_0 = 150 \text{ mm} \\ \varphi = 30^\circ$$

図 1.7 下端固定の円すいかく

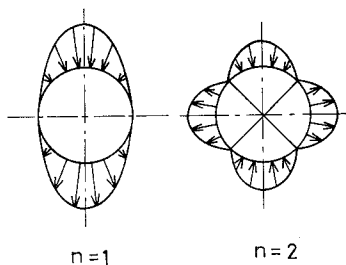
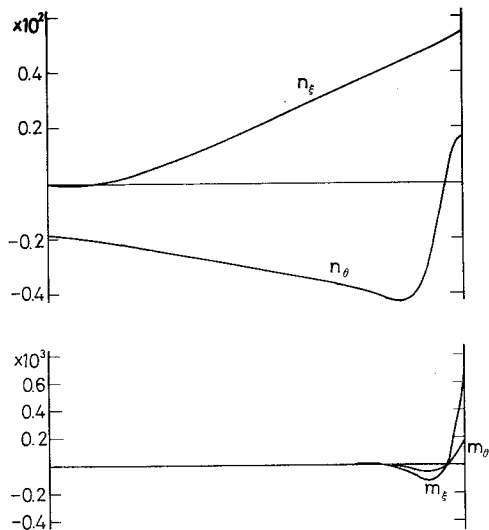


図1.8 圧力の分布

また、表面応力は次式により求められる。

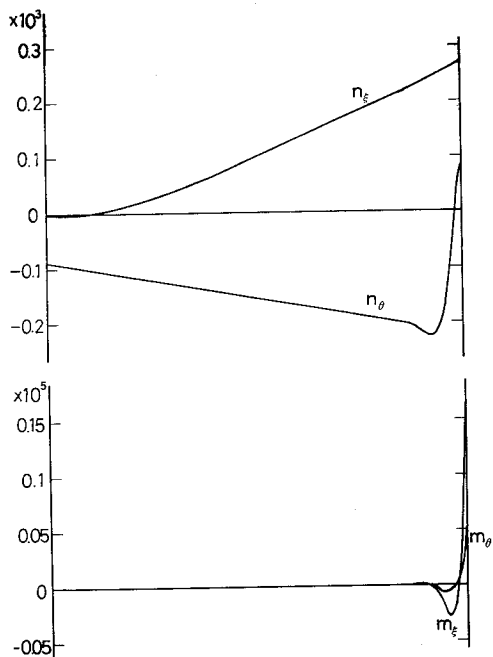
$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{\xi}/\sigma_0)_{\text{out}} &= n_{\xi} + 6\lambda m_{\xi} \\ (\sigma_{\xi}/\sigma_0)_{\text{in}} &= n_{\xi} - 6\lambda m_{\xi} \\ (\sigma_{\theta}/\sigma_0)_{\text{out}} &= n_{\theta} + 6\lambda m_{\theta} \\ (\sigma_{\theta}/\sigma_0)_{\text{in}} &= n_{\theta} - 6\lambda m_{\theta} \end{aligned} \right\} (1.78)$$

ただし、 $(\)_{\text{in}}$ は内面、 $(\)_{\text{out}}$ は外面の応力である。各解法により得られた応力の値の差を示すため、 $n = 1$ 、および 2 のときの円すいかく下端部における表面応力の値を表 1.4 に示す。また、 $n = 2$ のときのかく中央部における応力の値を表 1.5 に示している。



$n=1 \quad a/h=150$

図1.9 円すいかくの圧力による合応力・合モーメント



$n=1 \quad a/h=30$

図1.10 円すいかくの圧力による合応力・合モーメント

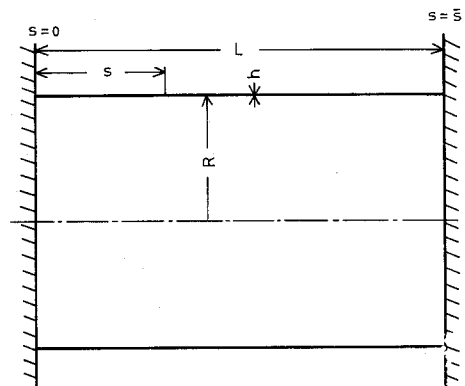
表 1.4 円すいかく下端部の応力

n		1		2	
a/h		30	150	30	150
$(\frac{\sigma_{\xi}}{\sigma_0})_{out}$	Flügge	0.18586×10^3	0.92348×10^3	0.47447×10^3	0.27860×10^4
	溝 □	0.18591×10^3	0.92343×10^3	0.49516×10^3	0.27934×10^4
	Sanders	0.18586×10^3	0.92342×10^3	0.49385×10^3	0.27929×10^4
	Donnell	0.18613×10^3	0.92412×10^3	0.47678×10^3	0.27809×10^4
	修正Flügge	0.18596×10^3	0.92344×10^3	0.49763×10^3	0.27942×10^4
$(\frac{\sigma_{\xi}}{\sigma_0})_{in}$	Flügge	-0.76261×10^2	-0.38658×10^3	-0.70181×10^2	-0.12557×10^3
	溝 □	-0.76232×10^2	-0.38659×10^3	-0.65530×10^2	-0.12391×10^3
	Sanders	-0.76242×10^2	-0.38660×10^3	-0.65774×10^2	-0.12401×10^3
	Donnell	-0.76563×10^2	-0.38723×10^3	-0.70109×10^2	-0.11907×10^3
	修正Flügge	-0.76233×10^2	-0.38656×10^3	-0.65262×10^2	-0.12377×10^3
$(\frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_0})_{out}$	Flügge	0.55758×10^2	0.27704×10^3	0.14234×10^3	0.83581×10^3
	溝 □	0.55774×10^2	0.27703×10^3	0.14855×10^3	0.83802×10^3
	Sanders	0.55757×10^2	0.27704×10^3	0.14815×10^3	0.83788×10^3
	Donnell	0.55840×10^2	0.27723×10^3	0.14303×10^3	0.83656×10^3
	修正Flügge	0.55788×10^2	0.27704×10^3	0.14929×10^3	0.83827×10^3
$(\frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_0})_{in}$	Flügge	-0.22878×10^2	-0.11598×10^3	-0.21054×10^2	-0.37674×10^2
	溝 □	-0.22870×10^2	-0.11598×10^3	-0.19659×10^2	-0.37174×10^2
	Sanders	-0.22871×10^2	-0.11598×10^3	-0.19732×10^2	-0.37204×10^2
	Donnell	-0.22969×10^2	-0.11617×10^3	-0.21033×10^2	-0.38001×10^2
	修正Flügge	-0.22870×10^2	-0.11598×10^3	-0.19579×10^2	-0.37130×10^2

表 1.5 円すいかく中央部の応力

n = 2

a/h		30	150
$(\frac{\sigma_{\xi}}{\sigma_0})_{out}$	Flügge	0.28015×10^2	0.50536×10^3
	溝 □	0.44521×10^2	0.51752×10^3
	Sanders	0.43968×10^2	0.51732×10^3
	Donnell	0.31065×10^2	0.50802×10^3
	修正Flügge	0.44954×10^2	0.51775×10^3
$(\frac{\sigma_{\xi}}{\sigma_0})_{in}$	Flügge	0.83201×10^2	0.57043×10^3
	溝 □	0.87695×10^2	0.56557×10^3
	Sanders	0.87067×10^2	0.56532×10^3
	Donnell	0.83801×10^2	0.56963×10^3
	修正Flügge	0.88360×10^2	0.56581×10^3
$(\frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_0})_{out}$	Flügge	-0.12429×10^3	-0.27847×10^3
	溝 □	-0.10721×10^3	-0.25039×10^3
	Sanders	-0.10694×10^3	-0.25037×10^3
	Donnell	-0.12072×10^3	-0.27273×10^3
	修正Flügge	-0.10781×10^3	-0.25043×10^3
$(\frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_0})_{in}$	Flügge	0.66043×10^2	-0.29493×10^2
	溝 □	0.48260×10^2	-0.57762×10^2
	Sanders	0.47989×10^2	-0.57780×10^2
	Donnell	0.62650×10^2	-0.35182×10^2
	修正Flügge	0.48648×10^2	-0.57756×10^2



R = 144mm , L = 500mm , h = 0.8mm

図 1.11 両端固定の円筒かく

1.7.2 自由振動問題

自由振動問題の例題として、円筒かく、球かく、および4種類のかくの組合せから成る圧力容器の模型の三つの場合に対して計算および実験を行なう。

i) 円筒かく

数値計算および実験に用いた円筒かくを図1.11に示す。境界条件は両端固定である。円筒かくの半径Rを代表長さaに選ぶと数値計算に必要な諸量はつぎのようになる。

$$a = R, \quad \Delta = \frac{L}{R(N-1)}, \quad \rho = \frac{R}{a} = 1, \quad r = \frac{\rho'}{\rho} = 0$$

$$\omega_\theta = \frac{\sqrt{1-(\rho')^2}}{\rho} = 1, \quad \omega_\xi = -\frac{\rho''}{\rho \omega_\theta} = 0, \quad \omega_\zeta = 0$$

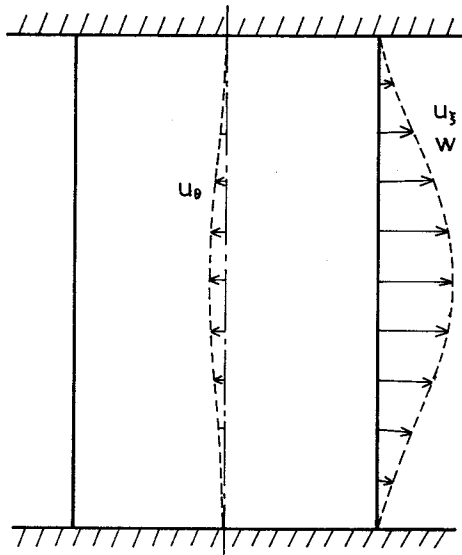
この円筒かくの形状寸法はつぎの値である。

$$R = 144mm, \quad L = 500mm, \quad h = 0.8mm$$

差分点の数を101として計算を行ない、得られた固有振動数をフーリエ指数n(節線数の1/2)と節円数cによって整理した結果を、実験結果とともに表1.6に示す。それによれば、 $n = 2$, $c = 0$

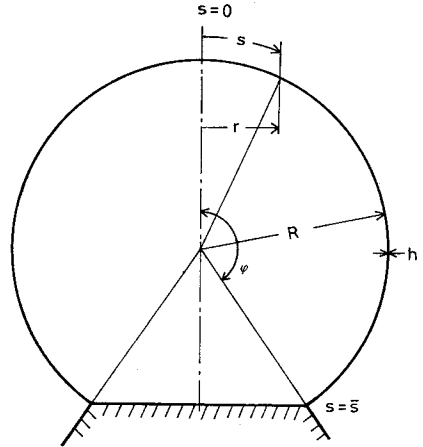
表1.6 円筒かくの固有振動数 Ω

c \ n		2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	Flügge	0.21695	0.13430	0.092221	0.074712	0.075560	0.089258	0.11088	0.13784	0.16898
	溝 □	0.21502	0.13394	0.091972	0.074230	0.074885	0.088470	0.11006	0.13701	0.16829
	Sanders	0.21505	0.13390	0.091978	0.074237	0.074885	0.088473	0.11009	0.13710	0.16814
	Donnell	0.23931	0.14139	0.095139	0.076233	0.076636	0.090183	0.11177	0.13870	0.16985
	修正Flügge	0.21503	0.13396	0.091981	0.074239	0.074892	0.088479	0.11007	0.13701	0.16816
1	実験	—	—	0.104	0.0432	0.0790	0.0930	0.115	0.146	0.1772
	Flügge	0.42945	0.2855	0.20290	0.15422	0.12905	0.12288	0.13178	0.15156	0.17882
	溝 □	0.42634	0.28538	0.20275	0.15392	0.12857	0.12221	0.13103	0.15073	0.17797
	Sanders	0.42637	0.2853	0.20275	0.15390	0.12859	0.12223	0.13105	0.15074	0.17796
	Donnell	0.46610	0.30047	0.20937	0.15744	0.13093	0.12418	0.13287	0.15254	0.17973
2	修正Flügge	0.42635	0.28539	0.20276	0.15395	0.12865	0.12224	0.13106	0.15077	0.17798
	実験	—	—	—	0.133	0.122	0.117	0.153	0.158	0.1843
	Flügge	—	0.44445	0.32970	0.25450	0.20697	0.18095	0.17311	0.18055	0.19964
	溝 □	—	0.44441	0.32955	0.25429	0.20661	0.18042	0.17248	0.17977	0.19882
	Sanders	—	0.44443	0.32955	0.25431	0.20665	0.18044	0.17249	0.17975	0.19881
2	Donnell	—	0.46318	0.33925	0.25967	0.20999	0.18290	0.17459	0.18173	0.20071
	修正Flügge	—	0.44445	0.32957	0.25432	0.20665	0.18047	0.17254	0.17983	0.19884
	実験	—	—	—	—	—	—	—	—	0.2018



$$n=5, c=0$$

図 1.12 円筒かくの振動形



$$R=188 \text{ mm}, h=0.8 \text{ mm}, \varphi=142.5^\circ$$

図 1.13 下端固定の球かく

のとき各理論による計算結果にはとくに大きな差異が認められる。また計算結果と実験結果は、 $n=5$ ， $c=0$ の値を除いてほぼ一致していることがわかる。振動形を示すため $n=5$ ， $c=0$ のときの変位を図 1.12 に示す。

ii) 球かく

図 1.13 の球かくを取扱う。境界条件は下端固定であり、また球かくの半径 R を代表長さ a に選ぶとつぎの諸量が得られる。

$$a = R \quad \Delta = \frac{\varphi}{N-1} \quad \alpha = \frac{j-1}{N-1} \varphi \quad \rho = \frac{r}{a} = \frac{R \sin \alpha}{a}$$

$$s = a\xi = a\alpha \quad \rho' = \cos \alpha \quad \gamma = \frac{\rho'}{\rho} = \cot \alpha \quad \omega_\theta = 1$$

$$\omega_\xi = -\frac{\rho''}{\rho \omega_\theta} = 1 \quad \omega'_\xi = 0$$

この球かくの寸法はつぎの値である。

$$R = 188 \text{ mm} , h = 0.8 \text{ mm} , \varphi = 142.5^\circ$$

差分点の数を 151 として計算

を行ない、このとき得られた

固有振動数を整理した結果を

実験結果とともに表 1.7 に示

している。実験値は $n = 1$,

$c = 0$ のみであるが、これは

他の固有振動数がきわめて高

くなり、実験により振動形式

の確認が困難であったため

ある。なお、図 1.14 に

$n = 1$, $c = 0$ の振動形を示す。

iii) 圧力容器の模型

複雑な形状のかくの例として図 1.15 のような 5 個のかくを組合せた圧力容器の模型に対して実験、および計算を行なう。境界条件は下端固定であり、円筒部の半径 R_3 を代表長さ a に選ぶ。このとき数値計算に必要な諸量は、各領域においてつぎのように与えられる。

I : 球かく部

$$A_1 = \frac{R_1}{R_3(N_1 - 1)} \varphi_1 , \alpha_1 = \frac{j-1}{N_1-1} \varphi_1 , \rho = \frac{R_1}{R_3} \sin \alpha_1$$

$$r = \frac{\cos \alpha_1}{\rho} , \omega_\xi = \omega_\theta = \frac{R_3}{R_1} , \omega'_\xi = 0$$

II : 円環かく部

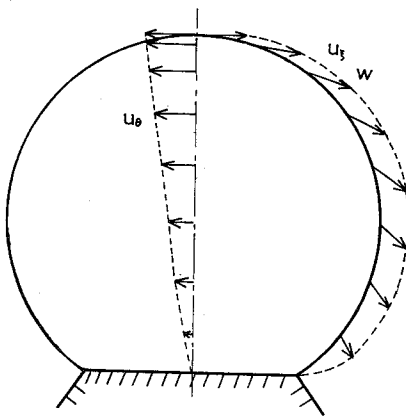
$$A_2 = \frac{R_2}{R_3(N_2 - 1)} \varphi_2 , \alpha_2 = \frac{j - (N_1 + 1)}{N_2 - 1} \varphi_2$$

$$\rho = \frac{1}{R_3} [R_1 \sin \varphi_1 + R_2 \cos(\varphi_2 - \alpha) - R_2 \cos \varphi_2] , \rho' = \sin(\varphi_2 - \alpha_2)$$

$$r = \frac{\rho'}{\rho} , \omega_\theta = \frac{\cos(\varphi_2 - \alpha_2)}{\rho} , \omega_\xi = \frac{R_3}{R_2} , \omega'_\xi = 0$$

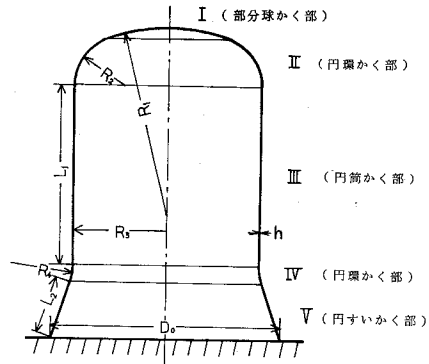
表 1.7 球かくの固有振動数 Ω

c \ n		0	1	2
0	Flügge	-	0.13495	-
	溝 □	-	0.13494	-
	Sanders	-	0.13495	-
	Donnell	-	0.13510	-
	修正Flügge	-	0.13490	-
	実 験	-	0.0985	-
1	Flügge	0.37661	0.69607	0.77779
	溝 □	0.37660	0.69606	0.77775
	Sanders	0.37660	0.69606	0.77778
	Donnell	0.37662	0.69710	0.77781
	修正Flügge	0.37660	0.69606	0.77778
	実 験	-	-	-
2	Flügge	0.81673	-	0.90125
	溝 □	0.81672	-	0.90125
	Sanders	0.81672	-	0.90125
	Donnell	0.81675	-	0.90135
	修正Flügge	0.81672	-	0.90125
	実 験	-	-	-



$$n=1, c=0$$

図 1.14 球かくの振動形



$$\begin{aligned} R_1 &= 300 \text{ mm} & R_4 &= 100 \text{ mm} & L_1 &= 290 \text{ mm} \\ R_2 &= 80 \text{ mm} & D_0 &= 370 \text{ mm} & L_2 &= 95 \text{ mm} \\ R_3 &= 150 \text{ mm} & h &= 0.8 \text{ mm} \end{aligned}$$

下端固定

図 1.15 圧力容器の模型

Ⅲ：円筒かく部

$$\begin{aligned} R_3 &= a, \quad \Delta_3 = \frac{L_1}{R_3 (N_3 - 1)}, \quad \rho = \frac{R_3}{R_3} = 1, \quad \tau = 0 \\ \omega_\theta &= 1, \quad \omega_\xi = \omega'_\xi = 0 \end{aligned}$$

Ⅳ：円環かく部

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= \frac{R_4}{R_3 (N_4 - 1)} \varphi_4, \quad \alpha = \frac{j - (N_1 + N_2 + N_3 + 1)}{N_4 - 1} \varphi_4 \\ \rho &= 1 + \frac{R_4}{R_3} (1 - \cos \alpha), \quad \tau = \frac{\sin \alpha_4}{\rho}, \quad \omega_\theta = \frac{\cos \alpha_4}{\rho} \\ \omega_\xi &= -\frac{R_3}{R_4}, \quad \omega'_\xi = 0 \end{aligned}$$

Ⅴ：円すいかく部

$$\begin{aligned} \Delta_5 &= \frac{L_2}{R_3 (N_5 - 1)}, \quad \rho = \frac{1}{R_3} \left[r_1 + (r_2 - r_1) \cdot \frac{j - (N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + 1)}{N_5 - 1} \right] \\ \rho' &= \frac{r_2 - r_1}{L_2}, \quad \tau = \frac{\rho'}{\rho}, \quad \omega_\theta = \frac{L_2^2 - (r_2 - r_1)^2}{\rho L_2}, \quad \omega_\xi = \omega'_\xi = 0 \end{aligned}$$

この容器の形状寸法はつぎの通りである。

$$R_1 = 300 \text{ mm}, \quad R_2 = 80 \text{ mm}, \quad R_3 = 150 \text{ mm}, \quad R_4 = 100 \text{ mm}$$

$$D_0 = 2r_2 = 370 \text{ mm}, \quad r_1 = 156 \text{ mm}, \quad L_1 = 290 \text{ mm}, \quad L_2 = 95 \text{ mm}, \quad h = 0.8 \text{ mm}$$

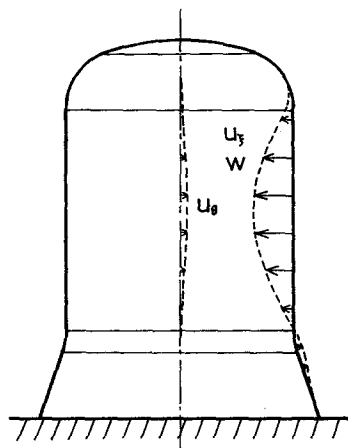
$$\varphi_1 = \frac{19}{180} \pi, \quad \varphi_2 = \frac{69.5}{180} \pi, \quad \varphi_4 = \frac{15}{100}, \quad \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = 0$$

差分点の数は各領域でその差分間隔がほぼ等しくなるようにつぎのように取る。

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 = 51 + 51 + 151 + 15 + 51 = 319$$

このとき得られた固有振動数の計算結果、および実験結果を表 1.8 に示す。このときもまた、最低振動数 $n = 6$, $c = 1$ の値を除いていずれも計算結果は実験結果とほぼ一致していることがわかる。

この場合も各解法による計算の結果には、フーリエ指数 n が小さいほど相互間の差異が大きいことが確認される。なお $n = 6$, $c = 1$ の振動形を図 1.16 に示している。



$$n=6, \quad c=1$$

図 1.16 圧力容器模形の振動形

1.7.3 考 察

本解法の解の精度は差分点の数と数値計算における有効けた数に影響されるため、個々の問題に対

表 1.8 圧力容器模型の固有振動数 Ω

c	n	2	3	4	5	6	7	8
1	Flügge	0.2312	0.1635	0.1253	0.09694	0.08656	0.09333	0.1114
	溝 口	0.2310	0.1634	0.1251	0.09695	0.08596	0.09258	0.1104
	Sanders	0.2299	0.1634	0.1250	0.09694	0.08595	0.09245	0.1093
	Donnell	0.2580	0.1726	0.1294	0.09901	0.08784	0.09433	0.1120
	修正Flügge	0.2311	0.1634	0.1251	0.09690	0.08598	0.09261	0.1103
	実 験	—	—	—	0.127	0.0435	0.0950	0.119

してつねにこのことに考慮を払わなければならない。ここで用いた差分点の数は、いずれの場合においてもそれ以上分割数を増しても解の精度にほとんど影響のないことを確認してこれを用いている。また自由振動問題の場合、有効けた数が少ないと固有値を決定する式(1.74)の $DET-\varrho$ 曲線がなめらかに変化せず、 $DET=0$ の値を与える ϱ が定まらなくなる。各フーリエ指数 n について、節円数 c がはじめの固有値から1~2までのものを求めるのであれば有効けた数は7程度で十分であるが、3~5までのものを求めるときには、14けた程度取らないと不十分となる。それゆえ、ここでは有効けた数を14として計算を行なった。また静的曲げ問題では7けた程度で十分であることを確認して、これにより計算を行なった。

各理論により得られた基礎方程式の係数(表1.2)を比較すればわかるように、それらの差異の多くは $(h/a)^2$ のかかる項によるものである。そこで静的曲げの問題では a/h を30、および150として応力を求め、各解法の結果を比較した。表1.4、および1.5からわかるように相互間の差異はきわめてわずかであるが、 $n=2$ の変形の場合にはFlüggeの理論、およびDonnellの理論による結果は、他のものに比較してかなり異なる値を示している。この理由としてつぎのように考えられる。 $n=2$ の変形(楕円形的変形)では他の変形に比較して変位 U 、 V の影響が無視できなくなると考えられるが、この項はFlüggeおよびDonnellの理論では十分に考慮されていないことによる。しかし通常のかくの問題では、変位 U 、 V に比較して W が大きいため実用上はいずれの理論を用いてもさほどさしつかえない場合が多いと考えられる。

つぎに自由振動問題では、各解法により得られた固有振動数の計算結果の差異は静的曲げ問題のときと同じく $n = 2$ に対して大きくなったが、これも前述の理由によるものと考えられる。また複雑な形状のかくでは相互間の差異はやや大きくなったが、それでも実用上それらの差は問題ない程度である。

なお Sanders の理論における境界条件の取扱いは Kirchhoff の条件を満足しないが、それでもここで取扱った例題ではその影響はほとんど見られなかった。

実験値との比較では、まず円筒かくの場合実験結果は計算結果とほぼ一致したが、 $n = 5$, $c = 0$ の結果のみは大きく異なった。この振動数は本実験に用いた円筒かくの最低振動数であり、その振幅も他のものと比較してきわめて大きいため、本解析ではその振動状態を十分に表わせないものと考えられる。^{62)~65)} これについては次節でふれる。また球かくでは、 $n = 1$, $c = 0$ の振動数を除いていずれもきわめて高い振動数となったため、実験によりこれらの振動形を判断することは困難であったので、ここでは $n = 2$ までの結果との比較とした。圧力容器の模型では、 $n = 6$, $c = 1$ のときのみ計算結果と実験結果は一致しないが、これも円筒かくのときと同様な理由によるものと考えられる。

以上の例題からわかるように、ここで取扱った各解法にはそれぞれ理論としての特長があるが、本研究で確立したこれらの解法によれば、これを一般軸対称かくの諸問題に適用するときには、そのいずれによっても使用上の難易さはほぼ同程度であると言える。また変位 W が支配的であるような通常の問題では、一般にそれらによる計算結果には相互間にそれほど差異のないことがわかった。

1.8 実 験

実験は自由振動問題に対して行ない、かくの固有振動数、および振動形を測定することを目的とした。

1.8.1 実験装置および実験方法

図 1.11 , 図 1.13 , および 1.15 の三種類のかくを加振器により強制振動させ、発振周波数を変えて共振点を探索することにより固有振動数を求め、このときかく表面に現われる振幅が零の位置、すなわち節線と節円を確認して振動形を決定する。

実験装置一式を図 1.17 に示す。この装置の略図を図 1.18 に示す。ここで用いた発振器（菊水電子製 ORC-27A , 図 1.19 ）は、20Hz から 200KHz まで発振が可能であり、この出力を加振器用増幅器（PHILIPS 製 129-043 , 図 1.20 ）により増幅したのち、電流計（横河電気製アンメータ 2016 , 図 1.21 ）で電流を確認して、動電型加振器（PHILIPS 製 9270 , 図 1.22 ）によりかく体を加振する。電流計は実験中の計器の異常を知るために使用している。

つぎに振動形を確認するため、Pick-up をかく表面にあて、これから得られる信号を振動測定用微積分器（PHILIPS 製 PR9250 , 図 1.23 ）に通し、これをブラウン管オツシロスコープ（松下通信製 , CT-510A , 図 1.24 ）に波形を描かせることにより、その位置における変位 W を測定する。

この Pick-up をかくの全表面にわ

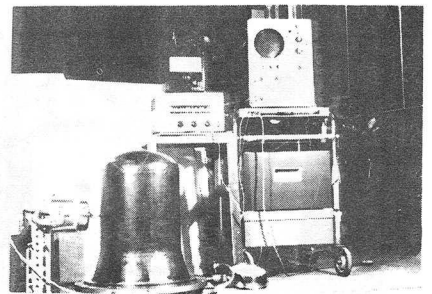


図 1.17 実 験 装 置

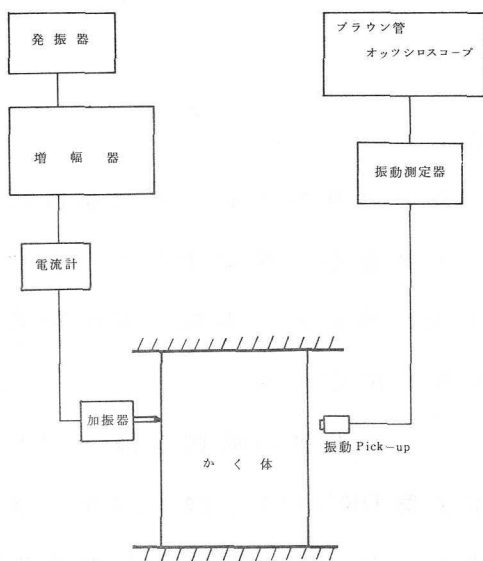


図 1.18 実験装置の略図

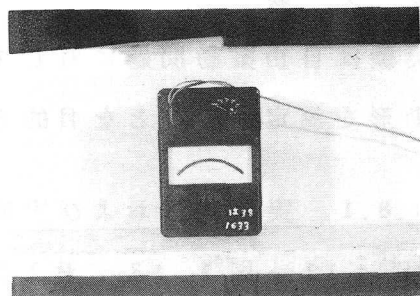


図 1.21 電 流 計

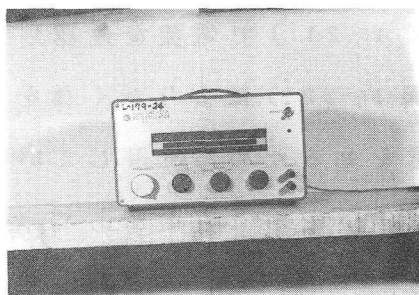


図 1.19 発 振 器

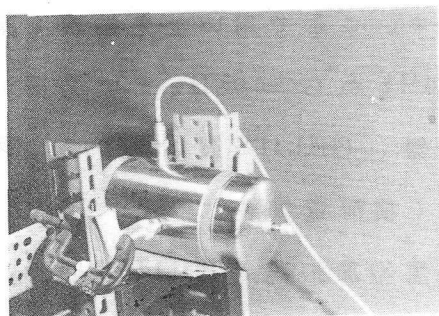


図 1.22 加 振 器

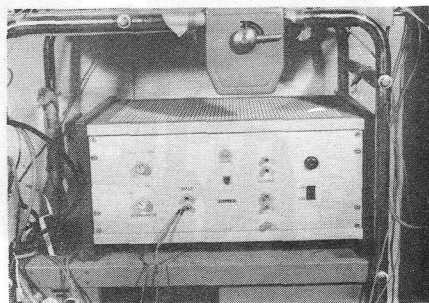


図 1.20 増 幅 器

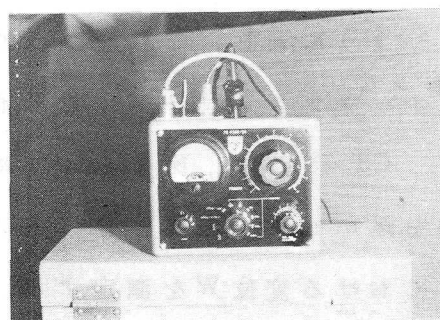


図 1.23 振 動 測 定 器

たって移動させれば振幅零の位置、すなわち節線と節円の位置がわかる。

また、この Pick-up には接触型 (PHILIPS 製 PR9260 , 図 1.25 a) と非接触型 (PHILIPS 製 PR9262 , 図 1.25b) がある。接触型は感度の点で非接触型より優れているが、振動数が高くなると (約 300Hz 以上) 測定が困難になることや、ここで用いた供試かくなどのように被測定物体が比較的小型のものでは、Pick-up を押しつけたときにその振幅が変化するなどの欠点がある。これらの

理由から、本実験ではおもに非接触型を使用する。これを用いて測定するためには、Pick-up とかく体との間隔を一定に保たなければならない。それゆえ、この支持を図 1.26 のようにして測定を行なう。

なお、供試かくを図 1.27 に示す。この固定部の詳細を図 1.28 に示している。実験のさいには供試かくの端板を約 50 kg 程度の鋳鉄製ブロックに固定するので、かく体の振動によって実験装置全体がゆれ動くようなことはない。

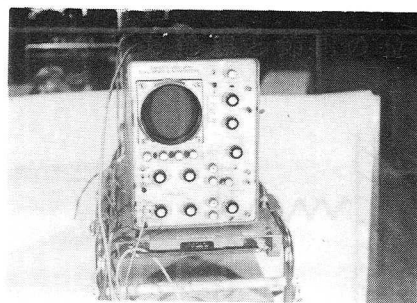
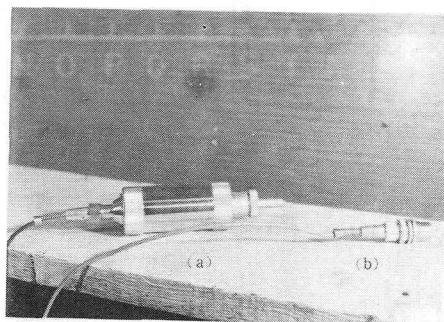


図 1.24 ブラウン管オウツシロスコブ



a) 接 触 型 b) 非 接 触 型

図 1.25 振 動 Pick-up

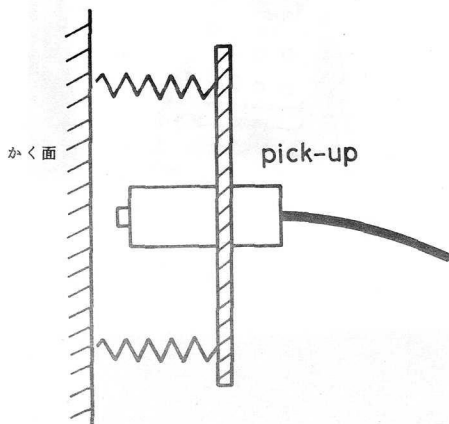
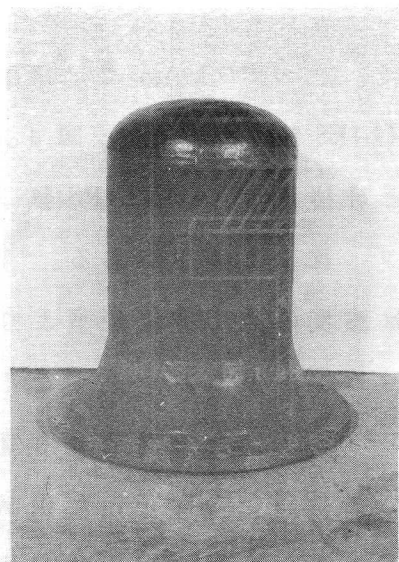


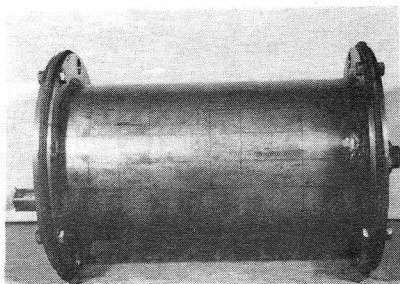
図 1.26 Pick-up の固定法



(c)

図 1.27 供 試 か く

(a)円筒かく (b)球かく (c)圧力容器の模型



(a)



(b)

1.8.2 結果および考察

実験により得られた各形状の軸対称かくに対する固有振動数を式 (1.51) を用いて無次元化し、これに対する計算結果とともに表 1.6 ~ 1.8 に示す。実験においては、1000Hz を超える高振動数の場合、および節線数や節円数が多い振動の場合には、一般に振幅が小さくなるためその振動形を確

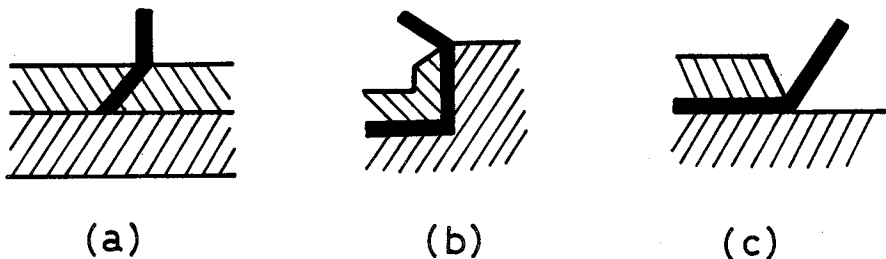


図 1.28 かくの固定部 (a)円筒かく (b)球かく (c)圧力容器の模型

認することはきわめて困難となる。それゆえここで示した実験結果は、振動数が比較的 low また節線と節円の数少なく振動形を確認することができたもののみである。振動形の例として、実験により得られた節線と節円を各供試かくについて図 1.29 ~ 1.31 に示す。円筒かくに対する結果(図 1.29)は一母線に沿って切断して展開した図であり、球かくに対するもの(図 1.30)は上方より見た展開図である。また圧力容器模型に対する結果(図 1.31)は円筒の場合に準じて示した図である。

なお実験に用いた供試かくは、たたき出して溶接することにより作製しているため、実際には溶接部などで多少の凹凸(図 1.32)や肉厚の変化などがあるため完全な軸対称かくではないが、実験結果はほぼ妥当な値を示している。ただし、最低固有振動数である円筒かくの $n = 5$, $c = 0$ 、および圧力容器模型の $n = 6$, $c = 1$ の振動数では実験値は計算値の約半分程度になっている。このときは発振器による正弦波形の加振にもかかわらず Pick-up から得られるかく体の振動状態は、全くこれとは異なったランダムな波形を

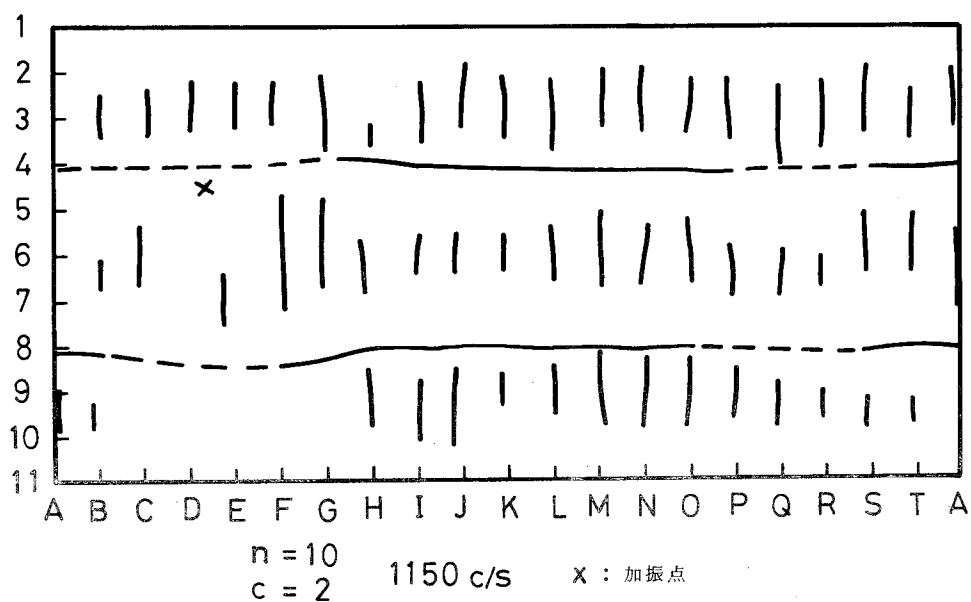


図1.29 円筒かくの節線と節円

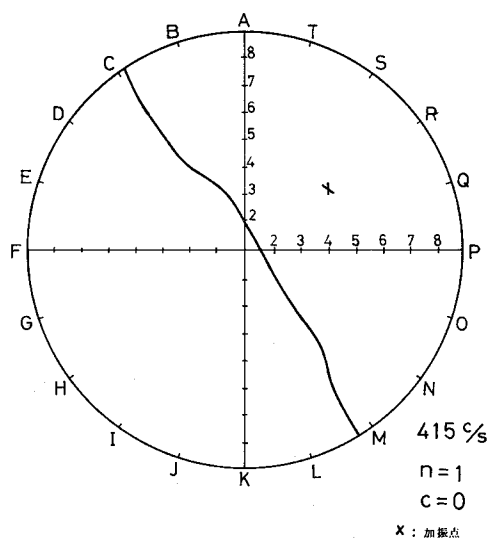


図1.30 球かくの節線

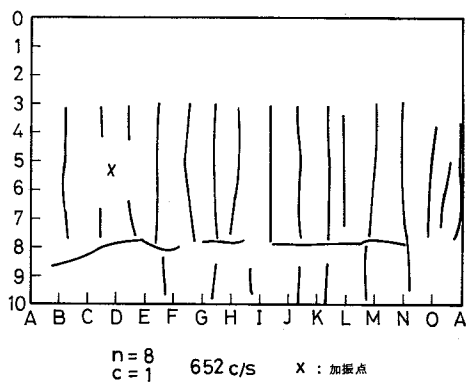


図1.31 压力容器模型の節線と節円

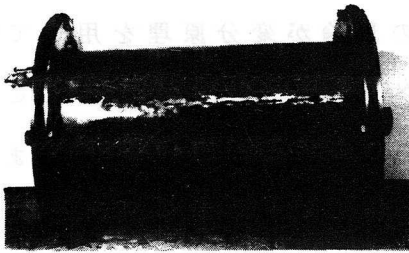


図 1.32 円筒かくの溶接部

示すことからわかるように、線形振動の解析により取扱うことはできないと考えられる。^{(62)~(64)} また容器内部の気体の気柱振動の影響も考慮するため容器の内部、および内・外部ともにフロン 12 (分子量 120.9) で満たしたが、ほとんど振動数は変わらないことから

この影響はさほど大きくないと思われる。

1.9 結 言

本章では、Flügge、溝口、および Donnell の各かく理論を一般軸対称かくの問題に適用する方法を確立して、これらの各解法と Sanders の理論による解法により静的曲げと自由振動の問題を解きそれらの結果を比較した。それによれば、 h/a が小さいかくの問題や変位 W が支配的である通常の問題では、いずれの理論によってもそれらの差異は小さいことがわかったが、変位 U 、 V がその変形に大きく関与すると考えられる問題、たとえば $n = 2$ の変形などでは Flügge の理論によるもの、とくに Donnell の理論によるものは精度がかなり落ちることが確認された。そこで Flügge の理論の取扱いの簡易さを残して、これに修正を加えた理論 (修正 Flügge) を提案して、この解法による解の精度が十分に良いことを実例により示した。

ここで示した五つの解法を用いるときには、計算機の使用時間が異なるが、これを含めて各解法の特長を簡単に述べるとつぎのようになる。

(i) Flügge の理論による解法は計算が簡単であり、かつ精度の点で

も通常のかくの問題では実用上他の理論による結果と比較してほとんどそんな色がない。

(ii) 溝口の理論による解法は、元来この理論が変分原理を用いて解の唯一性を確認していることなど合理的に構成されており、ここで用いたかく理論の中ではもっとも厳密な解法と考えられる。また計算もそれほど複雑ではない。

(iii) Sanders の理論による解法は厳密性の点では前二者の中間にあると考えられるが、Kirchhoff の境界条件を満足しない欠点がある。計算はここで取扱った解法の中では最も複雑であり、計算機の使用時間は最も長くなる。

(iv) Donnell の理論による解法は、ここで取扱った各解法の中では最も簡単でありかつ計算も容易であるが、一般に精度は落ちるので扱う問題によっては十分に注意を要する。

(v) 修正した Flügge の理論による解法は、Flügge の理論による結果の精度が悪くなるような問題にも十分に対処できるように Flügge の理論を修正した解法であり、精度の点では溝口の理論による結果と比較してそれほどそんな色はない。また計算も Flügge の理論による解法と比較して、それほど複雑にはならない。

また自由振動問題に対して実験をすることにより確認されたことであるが、最低固有振動数に対しては実験により得られた値は計算結果の約半分になることである。これは非線形振動によるものと考えられるので、これについては今後の研究に待ちたい。

第2章 圧力を受ける軸対称かくの曲げ、自由振動、および座屈問題に対する解法の提案

2.1 緒言

一般軸対称かくが圧力などの作用により予歪を受ける問題に対する解法は多くは提案されておらず、またそれらは予歪による影響として膜力のみを考慮するか、⁽⁴⁶⁾⁽⁴⁷⁾ すべての項を考慮しているがなおいくつかの疑問点を含むなど、⁽⁴⁸⁾ その予歪による影響を十分に表わしていない。そこで本章では、これらの諸問題に対処できる解法について考察する。

Timoshenko ら⁽⁴¹⁾⁽⁴²⁾は圧力などの作用により緊張状態にある円筒かくに付加外力が作用する問題を取扱ったが、本章ではこれにならってあらかじめ圧力によって予歪を受ける一般軸対称かくのかく面要素の付加外力による各辺の回転を考慮することにより、これらの問題に対する平衡方程式を確立する。このことは図 2.1 のような軸力を受けるはりの平衡条件において、軸力の横方向の成分 $P\bar{\theta}$ の影響を考えることに相当する。このようにして得られた平衡方程式を円筒かくの場合に適用すると Timoshenko らの式と異なる式となるため、その相違点について考察を加えここに提案する式の妥当性を示す。

前章においては、Flügge または修正した Flügge の理論がその取扱いの簡易さにもかかわらず十分な精度を持つことを示したので、本章においては上記の平衡方程式を用いてこれら二つの理論を基礎として予歪を受ける一般軸対称かくの曲げ、自由振動、および線形座屈の諸問題に対する解法を提案する。さらにより簡単な解法と

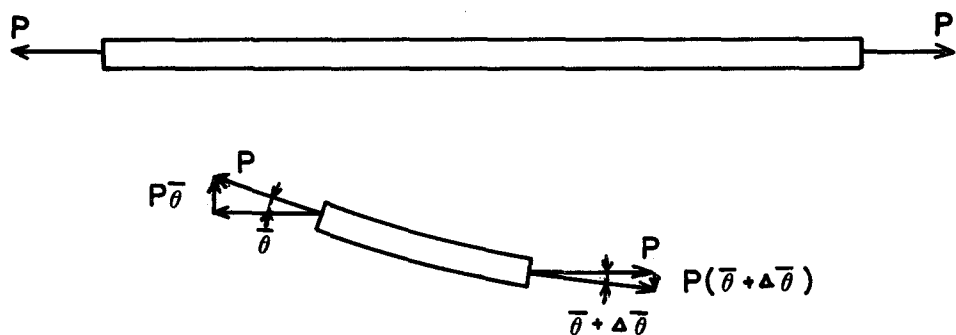


図 2.1 軸力を受けるはり

して Donnell の理論に基づく方法についても考察する。

上記の諸解法の基礎方程式を差分近似したうえで、与えられた境界条件と接続条件のもとに前章の方法と全く同様に取扱えば、本問題が解けることになる。

2.2 節においては、圧力により予歪を受ける一般軸対称かくの平衡方程式を確立したうえで、これを円筒かくの場合に適用し、これを Timoshenko らによる平衡方程式と比較し、その相違点について考察する。また Donnell 型の簡単な平衡方程式を導く過程についても述べる。

2.3 節では、上記の平衡方程式を用いて Flügge ,および修正した Flügge の理論に基づく解法について述べる。また Donnell の理論に基づく解法についても合わせ提案する。

2.4 節においては、2.3 節で提案した解法により自由振動と座屈の問題を取扱いそれらの結果を比較する。ここで例題として用いる自由振動問題は、圧力の変化に対するかくの自由振動特性の変化を求めることを目的としている。これは基本的な問題であるが、

これに対する研究は多くは発表されていない。 (66) (67) (68)

2.5 節では、2.4 節で扱う自由振動問題に対して行なう実験について述べている。

2.2 平衡方程式

2.2.1 平衡方程式の誘導

図 1.1 のかく面要素 A B C D の A 点における x, y, z 軸にならい、B 点において x_B, y_B, z_B 軸，C 点において x_C, y_C, z_C 軸を取り変位成分 U, V, W によりかく面要素の各辺が、これらの軸のまわりに回転する量を考えるとつぎのようになる。

A B の回転

$$\left. \begin{aligned} x \text{ 成分: } & - (V/r_\theta) + (\partial W/r \partial \theta) \equiv \phi_x \\ y \text{ 成分: } & (U/r_\xi) - (\partial W/a \partial \xi) \equiv \phi_y \\ z \text{ 成分: } & - (\partial U/r \partial \theta) + (V \partial r/a r \partial \xi) \equiv \phi_z \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

A C の回転

$$\left. \begin{aligned} x \text{ 成分: } & - (V/r_\theta) + (\partial W/r \partial \theta) \equiv \phi_x \\ y \text{ 成分: } & (U/r_\xi) - (\partial W/a \partial \xi) \equiv \phi_y \\ z \text{ 成分: } & \partial V/a \partial \xi \equiv \phi_z \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

C D の回転

$$\left. \begin{aligned} x_C \text{ 成分: } & \phi_x + (\partial \phi_x / \partial \xi) d\xi \equiv \phi_x + \phi_{x,\xi} d\xi \\ y_C \text{ 成分: } & \phi_y + (\partial \phi_y / \partial \xi) d\xi \equiv \phi_y + \phi_{y,\xi} d\xi \\ z_C \text{ 成分: } & \phi_z + (\partial \phi_z / \partial \xi) d\xi \equiv \phi_z + \phi_{z,\xi} d\xi \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

B D の回転

$$\left. \begin{aligned} x_B \text{ 成分: } & \phi_x + (\partial \phi_x / \partial \theta) d\theta \equiv \phi_x + \phi_{x,\theta} d\theta \\ y_B \text{ 成分: } & \phi_y + (\partial \phi_y / \partial \theta) d\theta \equiv \phi_y + \phi_{y,\theta} d\theta \\ z_B \text{ 成分: } & \phi_z + (\partial \phi_z / \partial \theta) d\theta \equiv \phi_z + \phi_{z,\theta} d\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

つぎに要素 A B C D の平衡を考える。 まずはじめに、x 軸方向の平衡に寄与する項を考慮するとつぎのようになる。

$$N_{\xi} \text{ による項 : } \frac{\partial (N_{\xi} r d\theta)}{\partial \xi} d\xi$$

$$N_{\theta\xi} \text{ による項 : } \frac{\partial (N_{\theta\xi} ad\xi)}{\partial \theta} d\theta$$

$$N_{\theta} \text{ による項 : } -N_{\theta} ad\xi \frac{\partial r}{a \partial \xi} d\theta$$

$$Q_{\xi} \text{ による項 : } Q_{\xi} r d\theta \frac{ad\xi}{r_{\xi}}$$

N_{θ} の回転による項 :

$$\begin{aligned} N_{\theta} ad\xi \phi_z - (N_{\theta} + \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} d\theta) ad\xi (\phi_z + \phi_{z,\theta} d\theta) &\cong -N_{\theta} ad\xi d\theta \phi_{z,\theta} \\ &\quad - \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} ad\xi d\theta \phi_z \end{aligned}$$

$N_{\xi\theta}$ の回転による項 :

$$\begin{aligned} N_{\xi\theta} r d\theta \phi_z - (N_{\xi\theta} + \frac{\partial N_{\xi\theta}}{\partial \xi} d\xi) (r d\theta + \frac{\partial r d\theta}{\partial \xi} d\xi) (\phi_z + \phi_{z,\xi} d\xi) \\ \cong -N_{\xi\theta} d\xi r d\theta \phi_{z,\xi} - (N_{\xi\theta} \frac{\partial r}{\partial \xi} + r \frac{\partial N_{\xi\theta}}{\partial \xi}) \phi_z \end{aligned}$$

Q_{ξ} の回転による項 :

$$Q_{\xi} d\xi r d\theta \phi_{y,\xi} + (Q_{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} + r \frac{\partial Q_{\xi}}{\partial \xi}) \phi_y d\xi d\theta$$

Q_{θ} の回転による項 :

P の回転による項 :

$$Q_{\theta} ad\xi d\theta \phi_{y,\theta} + \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial \theta} ad\xi d\theta \phi_y \quad P ad\xi r d\theta \phi_y$$

これらすべての項に付加外力の項 $X^* ad\xi r d\theta$ を加え合わせ、さらに $d\xi d\theta$ で割れば次式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(rN_{\xi})}{\partial \xi} + \frac{\partial(aN_{\theta\xi})}{\partial \theta} - N_{\theta} \frac{\partial r}{\partial \xi} + Q_{\xi} \frac{ar}{r_{\xi}} - N_{\theta} a\phi_{z,\theta} - \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} a\phi_z \\
& - N_{\xi\theta} r\phi_{z,\xi} - (N_{\xi\theta} \frac{\partial r}{\partial \xi} + r \frac{\partial N_{\xi\theta}}{\partial \xi}) \phi_z + Q_{\xi} r\phi_{y,\xi} \\
& + (Q_{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} + r \frac{\partial Q_{\xi}}{\partial \xi}) \phi_y + Q_{\theta} a\phi_{y,\theta} + \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial \theta} a\phi_y + \text{Par}\phi_y + arX^* = 0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

同様にして y, z 軸方向の平衡を考えるとつぎの各式を得る。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(aN_{\theta})}{\partial \theta} + \frac{\partial(rN_{\xi\theta})}{\partial \xi} + N_{\theta\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} + Q_{\theta} \frac{ar}{r_{\theta}} + N_{\xi} r\phi_{z,\xi} \\
& + (N_{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} + r \frac{\partial N_{\xi}}{\partial \xi}) \phi_z + N_{\theta\xi} a\phi_{z,\theta} + \frac{\partial N_{\theta\xi}}{\partial \theta} a\phi_z \\
& - Q_{\xi} r\phi_{x,\xi} - (Q_{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} + r \frac{\partial Q_{\xi}}{\partial \xi}) \phi_x - Q_{\theta} a\phi_{x,\theta} \\
& - \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial \theta} a\phi_x - \text{Par}\phi_x + arY^* = 0
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(rQ_{\xi})}{\partial \xi} + \frac{\partial(aQ_{\theta})}{\partial \theta} - N_{\theta} \frac{ar}{r_{\theta}} - N_{\xi} \frac{ar}{r_{\xi}} \\
& - N_{\xi} r\phi_{y,\xi} - (N_{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} + r \frac{\partial N_{\xi}}{\partial \xi}) \phi_y \\
& + N_{\xi\theta} r\phi_{x,\xi} + (N_{\xi\theta} \frac{\partial r}{\partial \xi} + r \frac{\partial N_{\xi\theta}}{\partial \xi}) \phi_x \\
& + N_{\theta} a\phi_{x,\theta} + \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} a\phi_x - N_{\theta\xi} a\phi_{y,\theta} \\
& - \frac{\partial N_{\theta\xi}}{\partial \theta} a\phi_y + \text{Par} + arZ^* = 0
\end{aligned} \tag{2.7}$$

つぎに X 軸回りのモーメントの平衡に関与する項はつぎのものである。

$$M_{\xi\theta} \text{ による項: } \frac{\partial(M_{\xi\theta} r d\theta)}{\partial \xi} d\xi \quad M_{\theta} \text{ による項: } \frac{\partial(M_{\theta} a d\xi)}{\partial \theta} d\theta$$

$$M_{\theta\xi} \text{ による項: } M_{\theta\xi} \frac{\partial r d\theta}{\partial \xi} d\xi \quad Q_{\theta} \text{ による項: } -Q_{\theta} a d\xi r d\theta$$

M_ξ の回転による項：

$$M_\xi r d\theta d\xi \phi_{z,\xi} + \left(M_\xi \frac{\partial r}{\partial \xi} + r \frac{\partial M_\xi}{\partial \xi} \right) \phi_z d\xi d\theta$$

$M_{\theta\xi}$ の回転による項：

$$M_{\theta\xi} a d\xi d\theta \phi_{z,\theta} + \frac{\partial M_{\theta\xi}}{\partial \theta} a d\xi d\theta \phi_z$$

これらの項を加え合わせ $d\xi d\theta$ で割ればつぎのごとくになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(rM_{\xi\theta})}{\partial \xi} + \frac{\partial(aM_\theta)}{\partial \theta} + M_{\theta\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} - arQ_\theta \\ & + M_\xi r \phi_{z,\xi} + \left(M_\xi \frac{\partial r}{\partial \xi} + r \frac{\partial M_\xi}{\partial \xi} \right) \phi_z \\ & + M_{\theta\xi} a \phi_{z,\theta} + \frac{\partial M_{\theta\xi}}{\partial \theta} a \phi_z = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

同様にして y, z 軸回りのモーメントの平衡から次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(rM_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(aM_{\theta\xi})}{\partial \theta} - M_\theta \frac{\partial r}{\partial \xi} - arQ_\xi \\ & - M_{\xi\theta} r \phi_{z,\xi} - \left(M_{\xi\theta} \frac{\partial r}{\partial \xi} + r \frac{\partial M_{\xi\theta}}{\partial \xi} \right) \phi_z \\ & - M_\theta a \phi_{z,\theta} - \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} a \phi_z = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} & N_{\xi\theta} ar - N_{\theta\xi} ar + M_{\xi\theta} \frac{ar}{r_\xi} - M_{\theta\xi} \frac{ar}{r_\theta} \\ & + M_\xi r \phi_{x,\xi} + \left(M_\xi \frac{\partial r}{\partial \xi} + r \frac{\partial M_\xi}{\partial \xi} \right) \phi_x + M_\theta a \phi_{y,\theta} + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} a \phi_y \\ & + M_{\xi\theta} r \phi_{y,\xi} + \left(M_{\xi\theta} \frac{\partial r}{\partial \xi} + r \frac{\partial M_{\xi\theta}}{\partial \xi} \right) \phi_y + M_{\theta\xi} a \phi_{x,\theta} \\ & + \frac{\partial M_{\theta\xi}}{\partial \theta} a \phi_x = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.2.2 Donnell 型平衡方程式の誘導

Donnell⁽³⁸⁾ の理論では z 軸方向の変位 W を重要視することにより必要な諸量を表わす方法を用いている。この方法に従えば式 (2.1) ~ (2.4) はつぎのように書き直される。

A B の回転

$$x \text{ 成分: } \partial W / r \partial \theta = \phi_x \quad y \text{ 成分: } -\partial W / a \partial \xi = \phi_y$$

A C の回転

$$x \text{ 成分: } \partial W / r \partial \theta = \phi_x \quad y \text{ 成分: } -\partial W / a \partial \xi = \phi_y$$

C D の回転

$$x \text{ 成分: } \phi_x + (\partial \phi_x / \partial \xi) d\xi = \phi_x + \phi_{x,\xi} d\xi$$

$$y \text{ 成分: } \phi_y + (\partial \phi_y / \partial \xi) d\xi = \phi_y + \phi_{y,\xi} d\xi$$

B D の回転

$$x \text{ 成分: } \phi_x + (\partial \phi_x / \partial \theta) d\theta = \phi_x + \phi_{x,\theta} d\theta$$

$$y \text{ 成分: } \phi_y + (\partial \phi_y / \partial \theta) d\theta = \phi_y + \phi_{y,\theta} d\theta$$

(2.11)

まず、 z 軸方向の平衡を考慮するとつぎのようになる。

$$N_\xi \text{ による項: } -N_\xi \frac{ar}{r\xi} d\xi d\theta \quad N_\theta \text{ による項: } -N_\theta \frac{ar}{r\theta} d\xi d\theta$$

$$Q_\xi \text{ による項: } \frac{\partial(rQ_\xi)}{\partial \xi} d\xi d\theta \quad Q_\theta \text{ による項: } \frac{\partial(aQ_\theta)}{\partial \theta} d\xi d\theta$$

$$P \text{ による項: } P a r d\xi d\theta$$

N_θ の回転による項:

$$N_\theta (\phi_x + \phi_{x,\theta} d\theta) a d\xi - N_\theta a d\xi \phi_x = N_\theta \frac{\partial^2 W}{r \partial \theta^2} a d\xi d\theta$$

N_ξ の回転による項:

$$-(N_\xi + \frac{\partial N_\xi}{a \partial \xi} a d\xi) (r d\theta + \frac{\partial(r d\theta)}{a \partial \xi} a d\xi) (\phi_y + \phi_{y,\xi} d\xi)$$

$$+ N_\xi r d\theta \phi_y \cong N_\xi \frac{r}{a} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} d\xi d\theta$$

$N_{\xi\theta}$ の回転による項：

$$\begin{aligned} & \left(N_{\xi\theta} + \frac{\partial N_{\xi\theta}}{a \partial \xi} ad\xi \right) (rd\theta + \frac{\partial rd\theta}{a \partial \xi} ad\xi) \\ & \quad \times (\phi_x + \phi_{x,\xi} d\xi) - N_{\xi\theta} rd\theta \phi_x \cong N_{\xi\theta} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \theta} d\xi d\theta \end{aligned}$$

$N_{\theta\xi}$ の回転による項：

$$\begin{aligned} & - \left(N_{\theta\xi} + \frac{\partial N_{\theta\xi}}{r \partial \theta} rd\theta \right) ad\xi (\phi_y + \phi_{y,\theta} d\theta) \\ & \quad + N_{\theta\xi} ad\xi \phi_y \cong N_{\theta\xi} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \theta} d\xi d\theta \end{aligned}$$

すなわち、Donnell の理論では内力およびかく面要素の辺の長さの増分量を無視することにより簡単に表わしている。これらすべての項と付加外力の項 $Z^* ad\xi rd\theta$ を加え合わせ、これを $d\xi d\theta$ で割ると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(rQ_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(aQ_\theta)}{\partial \theta} - N_\xi \frac{ar}{r_\xi} - N_\theta \frac{ar}{r_\theta} + N_\theta \frac{r}{a} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + N_\xi \frac{r}{a} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \\ & \quad + N_{\xi\theta} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \theta} + N_{\theta\xi} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \theta} + arP + arZ^* = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

x , y 軸方向のつり合に対しては付加外力およびこれによる影響を考慮せずに次式を導く。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial(rN_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(aN_{\theta\xi})}{\partial \theta} - N_\theta \frac{\partial r}{\partial \xi} + Q_\xi \frac{ar}{r_\xi} = 0 \\ & \frac{\partial(aN_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(rN_{\xi\theta})}{\partial \xi} + N_{\theta\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} + Q_\theta \frac{ar}{r_\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

また、モーメントの平衡から次式を得る。ただし、このときも付加外力による影響は考慮しない。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial(rM_{\xi\theta})}{\partial \xi} + \frac{\partial(aM_\theta)}{\partial \theta} + M_{\theta\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} - arQ_\theta = 0 \\ & \frac{\partial(rM_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(aM_{\theta\xi})}{\partial \theta} - M_\theta \frac{\partial r}{\partial \xi} - arQ_\xi = 0 \\ & N_{\xi\theta} - N_{\theta\xi} + \frac{M_{\xi\theta}}{r_\xi} - \frac{M_{\theta\xi}}{r_\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

2.2.3 円筒かくの平衡方程式

一般軸対称かくの中で、とくに重要な例として円筒かくの平衡方程式について考える。

この場合、慣例にならって図2.2に示す記号を用いる。

すなわち $ad\xi$ を dx ， r_θ を r とし添字の ξ を x とする。

なお r_ξ は ∞ である。このようにおくと平衡方程式(2.5)～(2.10)は次式のごとくになる。

$$r \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} - N_\theta \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta}$$

$$- \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial V}{\partial x} + N_{x\theta} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta}$$

$$+ \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial \theta} - r Q_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

$$- r \frac{\partial Q_x}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} - Q_\theta \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$+ Pr \frac{\partial W}{\partial x} + r X^* = 0$$

(2.15)

$$\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + Q_\theta - N_x \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

$$+ N_{\theta x} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} \frac{\partial V}{\partial x} - Q_x \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

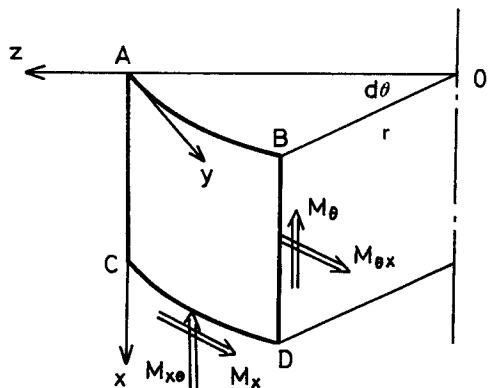
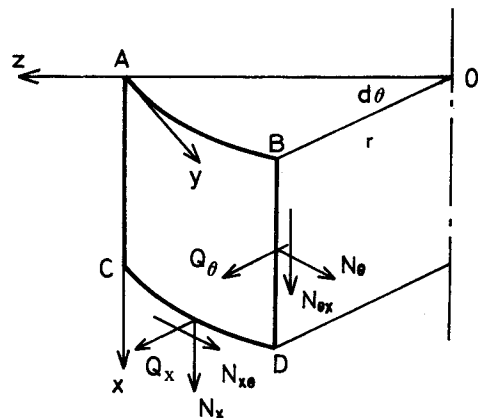


図2.2 円筒かくの記号

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial Q_x}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} - V \right) - Q_\theta \left(\frac{\partial^2 W}{r \partial \theta^2} - \frac{\partial V}{r \partial \theta} \right) \\
& - \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} \left(\frac{\partial W}{r \partial \theta} - \frac{V}{r} \right) - P \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} - V \right) + rY^* = 0
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
& r \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - N_\theta + N_x r \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + r \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} \\
& + N_{x\theta} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} - V \right) \\
& + N_\theta \left(\frac{\partial^2 W}{r \partial \theta^2} - \frac{\partial V}{r \partial \theta} \right) + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} \left(\frac{\partial W}{r \partial \theta} - \frac{V}{r} \right) \\
& + N_{\theta x} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} \frac{\partial W}{\partial x} + rP + rZ^* = 0
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
& r \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - rQ_\theta - M_x \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\
& + M_{\theta x} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} \frac{\partial V}{\partial x} = 0
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
& r \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - rQ_x + M_{x\theta} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\
& - M_\theta \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial V}{\partial x} = 0
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
& rN_{x\theta} - rN_{\theta x} - M_{\theta x} + M_x \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) \\
& + \frac{\partial M_x}{\partial \theta} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} - V \right) - M_\theta \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial W}{\partial x} \\
& - M_{x\theta} r \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} r \frac{\partial W}{\partial x} \\
& + M_{\theta x} \left(\frac{\partial^2 W}{r \partial \theta^2} - \frac{\partial V}{r \partial \theta} \right) + \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} \left(\frac{\partial W}{r \partial \theta} - \frac{V}{r} \right) = 0
\end{aligned} \tag{2.20}$$

これに対して Timoshenko ら⁽⁴¹⁾⁽⁴²⁾ による平衡方程式は次式のように
 になっている。(注1) 脚注次頁

$$r \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} - r Q_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - r N_{x\theta} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - Q_{\theta} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) - N_{\theta} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + r \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial x} + Q_{\theta} + r N_x \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - Q_x \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) + N_{\theta x} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - Q_{\theta} \left(\frac{\partial^2 W}{r \partial \theta^2} - \frac{\partial V}{r \partial \theta} \right) = 0 \quad (2.22)$$

$$r \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial \theta} - N_{\theta} + N_{x\theta} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) + N_x r \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_{\theta} \left(\frac{\partial^2 W}{r \partial \theta^2} - \frac{\partial V}{r \partial \theta} \right) + N_{\theta x} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.23)$$

$$r \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} - r Q_{\theta} + r M_x \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - M_{\theta x} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} + r \frac{\partial M_x}{\partial x} - r Q_x - r M_{x\theta} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - M_{\theta} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.25)$$

$$r N_{x\theta} - r N_{\theta x} - M_{\theta x} + M_x \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) - r M_{x\theta} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + M_{\theta x} \left(\frac{\partial^2 W}{r \partial \theta^2} - \frac{\partial V}{r \partial \theta} \right) - M_{\theta} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.26)$$

(注 1) Timoshenko ら⁽⁴¹⁾⁽⁴²⁾ では、かく面の曲率およびモーメントベクトル $M_{x\theta}$ の方向が本研究と逆であるため式 (2.21)~(2.26) の符号の一部は文献(41)の式 (298), (299) と異なる。

式 (2.15) ~ (2.20) と式 (2.21) ~ (2.26) の相違は合応力・合モーメントの増分の考慮の有無と、これと回転のベクトルの分解・合成についての解釈の違いによるものである。たとえば、式 (2.15) と式 (2.21) を例にとりこの両者を比較する。この式に含まれる項の中から N_θ を取出して、これについて考察を加えることにする。図 2.3 のように A 点における N_θ は B 点では $N_\theta + (\partial N_\theta / \partial \theta) d\theta$ となるべきであるが、

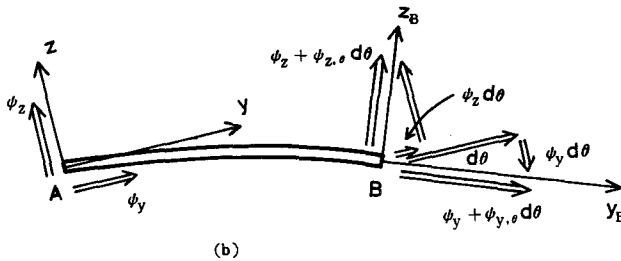
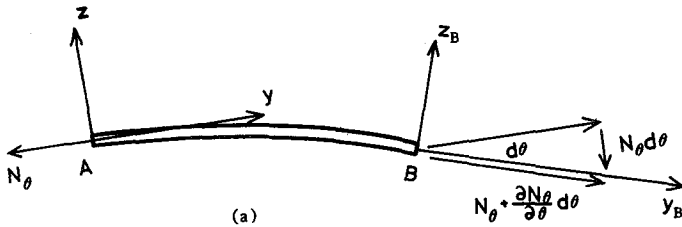


図 2.3 合応力ベクトルと回転ベクトルの分解
(a) 合応力ベクトル (b) 回転ベクトル

$$\begin{aligned}
 & N_\theta dx \phi_z - (N_\theta + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} d\theta) dx (\phi_z + \phi_{z,\theta} d\theta \\
 & - \phi_y d\theta) - N_\theta dx d\theta (\phi_y + \phi_{y,\theta} d\theta + \phi_z d\theta) \\
 & \cong - N_\theta \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) dx d\theta \\
 & - \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial V}{\partial x} dx d\theta - N_\theta \left(- \frac{\partial W}{\partial x} \right) dx d\theta
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

式 (2.21) ではこの増分量を考慮していない。また B 点においては合応力ベクトル $N_\theta + (\partial N_\theta / \partial \theta) d\theta$ は y, z 軸方向の成分に分解され、さらに回転のベクトル $\phi_z + \phi_{z,\theta} \times d\theta$ と $\phi_y + \phi_{y,\theta} d\theta$ もまた分解されるから N_θ が x 軸方向の平衡に対して寄与する量は次式で表わされるべきである。

しかし本研究ではこのように分解せずに取り扱い、B点における合応力成分と回転ベクトルの積としてつぎのようにする。

$$\begin{aligned} N_{\theta} dx \phi_z - \left(N_{\theta} + \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dx (\phi_z + \phi_{z,\theta} d\theta) \\ \cong - N_{\theta} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} dx d\theta - \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} \frac{\partial V}{\partial x} dx d\theta \end{aligned} \quad (2.28)$$

式(2.27)と(2.28)の結果は一致することがわかる。これに対して Timoshenko らの取扱いはつぎのようにしている。

$$\begin{aligned} N_{\theta} dx \phi_z - N_{\theta} dx (\phi_z + \phi_{z,\theta} d\theta - \phi_y d\theta) \\ \cong - N_{\theta} dx d\theta \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.29)$$

式(2.29)では式(2.28)における $(\partial N_{\theta} / \partial \theta) d\theta$ と $N_{\theta} dx d\theta (\phi_y + \phi_{y,\theta} + \phi_z d\theta)$ の項を無視している。式(2.15)と式(2.21)のその他の違いは外力のベクトルの方向が変化するために生じる項を式(2.21)では省略していることである。なお、Timoshenkoによる式(2.21)の左辺第4項 $r N_{x\theta} (\partial^2 V / \partial x^2)$ は $-N_{x\theta} (\partial^2 U / \partial x \partial \theta)$ でおき直されねばならない。なぜならCDのABに対するz軸回りの回転は $(\partial^2 V / \partial x^2) \times dx$ ではなく $-(\partial^2 U / r \partial x \partial \theta) dx$ でなければならないからである。

以上のような相違点は他の平衡方程式についても同様に認められる。

2.2.4 圧力による平衡方程式

圧力Pにより予歪を与えられた問題を解くためには、まず圧力により生じる合応力・合モーメントを求めなければならない。これらを記号(〜)により表わすことにすると内圧(注1)による平衡方程

(注1) 外圧の場合も同様に取扱うことができる。

式は式 (2.5) ~ (2.10) からつぎのようになることがわかる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (r\tilde{N}_\xi)}{\partial \xi} - \tilde{N}_\theta \frac{\partial r}{\partial \xi} + \tilde{Q}_\xi \frac{ar}{r_\xi} &= 0 \\ \frac{\partial (r\tilde{Q}_\xi)}{\partial \xi} - \tilde{N}_\theta \frac{ar}{r_\theta} - \tilde{N}_\xi \frac{ar}{r_\xi} + \text{Par} &= 0 \\ \frac{\partial (r\tilde{M}_\xi)}{\partial \xi} - \tilde{M}_\theta \frac{\partial r}{\partial \xi} - \tilde{Q}_\xi ar &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

2.3 基礎方程式

2.3.1 Flügge の理論に基づく解法

式 (2.5) ~ (2.10) に含まれる合応力・合モーメントをつぎのよ
うに表わす。

$$\left. \begin{aligned} N_\xi &= \tilde{N}_\xi + N_\xi^* & N_\theta &= \tilde{N}_\theta + N_\theta^* \\ N_{\xi\theta} &= N_{\xi\theta}^* & N_{\theta\xi} &= N_{\theta\xi}^* \\ Q_\xi &= \tilde{Q}_\xi + Q_\xi^* & Q_\theta &= Q_\theta^* \\ M_\xi &= \tilde{M}_\xi + M_\xi^* & M_\theta &= \tilde{M}_\theta + M_\theta^* \\ M_{\xi\theta} &= M_{\xi\theta}^* & M_{\theta\xi} &= M_{\theta\xi}^* \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

すなわち、記号 (＊) は付加外力による項を表わしている。

式 (1.2) , (1.4) , (2.30) , および (2.31) を用いて平衡方程式 (2.5) ~ (2.10) を変形し、さらに Flügge ⁽²⁸⁾ の理論に従って $N_{\xi\theta}^* = N_{\theta\xi}^*$, $M_{\xi\theta}^* = M_{\theta\xi}^*$ と仮定し、これから式 (2.10) を無視して Q_ξ^* , Q_θ^* を消去するとつぎの 3 式が得られる。

$$\begin{aligned}
& a \left[\frac{\partial(\rho N_{\xi}^*)}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\xi \theta}^*}{\partial \theta} - \rho' N_{\theta}^* \right] + \omega_{\xi} \left[\frac{\partial(\rho M_{\xi}^*)}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\xi \theta}^*}{\partial \theta} \right. \\
& \quad \left. - \rho' M_{\theta}^* \right] - \omega_{\xi} \widetilde{M}_{\theta} \phi_{z, \theta} - \widetilde{N}_{\theta} a \phi_{z, \theta} + \widetilde{Q}_{\xi} r \phi_{y, \xi} \\
& \quad + (a \rho' \widetilde{Q}_{\xi} + a \rho \widetilde{Q}_{\xi}') \phi_y + \text{Par} \phi_y + a r X^* = 0 \\
& a \left[\frac{\partial N_{\theta}^*}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho N_{\xi \theta}^*)}{\partial \xi} + \rho' N_{\xi \theta}^* \right] + \omega_{\theta} \left[\frac{\partial(\rho M_{\xi \theta}^*)}{\partial \xi} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial M_{\theta}^*}{\partial \theta} + \rho' M_{\xi \theta}^* \right] + \omega_{\theta} \rho \widetilde{M}_{\xi} \phi_{z, \xi} \\
& \quad + \omega_{\theta} (\rho' \widetilde{M}_{\xi} + \rho \widetilde{M}_{\xi}') \phi_z + \widetilde{N}_{\xi} r \phi_{z, \xi} \\
& \quad + (a \rho' \widetilde{N}_{\xi} + a \rho \widetilde{N}_{\xi}') \phi_z - \widetilde{Q}_{\xi} r \phi_{x, \xi} \\
& \quad - (a \rho' \widetilde{Q}_{\xi} + a \rho \widetilde{Q}_{\xi}') \phi_x - \text{Par} \phi_x + a r Y^* = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial(\rho M_{\xi}^*)}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\xi \theta}^*}{\partial \theta} - \rho' M_{\theta}^* \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial(\rho M_{\xi \theta}^*)}{\partial \xi} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial M_{\theta}^*}{\partial \theta} + \rho' M_{\xi \theta}^* \right] - a \rho \omega_{\theta} N_{\theta}^* - a \rho \omega_{\xi} N_{\xi}^* \\
& \quad - \frac{\partial}{\partial \xi} (\widetilde{M}_{\theta} \phi_{z, \theta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \widetilde{M}_{\xi} \phi_{z, \xi}) \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial \theta} [(\rho' \widetilde{M}_{\xi} + \rho \widetilde{M}_{\xi}') \phi_z] - \widetilde{N}_{\xi} r \phi_{y, \xi} \\
& \quad - (a \rho' \widetilde{N}_{\xi} + a \rho \widetilde{N}_{\xi}') \phi_y + \widetilde{N}_{\theta} a \phi_{x, \theta} + a r Z^* = 0
\end{aligned} \tag{2.32}$$

ここに含まれる変数を式(1.6)と同様に無次元化する。すなわちつぎのようにおく。

$$N_{\xi}^* = \sigma_0 h \sum_{n=0}^{\infty} n_{\xi}^{(n)} \cos n\theta \tag{2.33}$$

他の変数も同様であるが、簡単のためここでは記述を省略する。

さらに式(2.30)および式(2.32)における内圧により生じる合応力

・合モーメントをつぎのように置くことにより無次元量を定義する。

$$\begin{aligned}
\widetilde{N}_{\xi} &= p E h \widetilde{n}_{\xi} & \widetilde{N}_{\theta} &= p E h \widetilde{n}_{\theta} \\
\widetilde{Q}_{\xi} &= p E h \widetilde{q}_{\xi} & \widetilde{M}_{\xi} &= p E (h^3/a) \widetilde{m}_{\xi} \\
\widetilde{M}_{\theta} &= p E (h^3/a) \widetilde{m}_{\theta}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

ただし、 p は無次元圧力であり圧力値 P と次式により関係づけてい
る。

$$p = Pa/Eh \quad (2.35)$$

式 (2.34) における $\tilde{n}_\xi \sim \tilde{m}_\theta$ は ξ のみの関数である。

式 (2.33) , (2.34) を式 (2.32) に用いると次式となる。

$$\begin{aligned} & n_\xi^{(n)'} + \frac{n}{\rho} n_{\xi\theta}^{(n)} + r(n_\xi^{(n)} - n_\theta^{(n)}) + \lambda^2 \omega_\xi [m_\xi^{(n)'} \\ & + r(m_\xi^{(n)} - m_\theta^{(n)}) + \frac{n}{\rho} m_{\xi\theta}^{(n)}] + p \tilde{q}_\xi \omega_\xi u_\xi^{(n)'} \\ & + p [\tilde{q}_\xi \omega_\xi' + (\tilde{q}_\xi r + \tilde{q}_\xi' + 1) \omega_\xi] u_\xi^{(n)} \\ & - p (\tilde{n}_\theta + \tilde{m}_\theta \lambda^2 \omega_\xi) \frac{n}{\rho} u_\theta^{(n)'} - p \tilde{q}_\xi w^{(n)''} \\ & - p (\tilde{q}_\xi r + \tilde{q}_\xi' - 1) w^{(n)'} + \bar{X}^{(n)} = 0 \\ & n_{\xi\theta}^{(n)} + 2 r n_{\xi\theta}^{(n)} - \frac{n}{\rho} n_\theta^{(n)} + \lambda^2 \omega_\theta [m_{\xi\theta}^{(n)'} + 2 r m_{\xi\theta}^{(n)} \\ & - \frac{n}{\rho} m_\theta^{(n)}] + p (\tilde{n}_\xi + \tilde{m}_\xi \lambda^2 \omega_\theta) \frac{n}{\rho} u_\xi^{(n)'} \\ & + p (\tilde{n}_\xi' + \tilde{m}_\xi' \lambda^2 \omega_\theta) \frac{n}{\rho} u_\xi^{(n)} + p (\tilde{n}_\xi r \\ & + \tilde{m}_\xi \lambda^2 r \omega_\theta + \tilde{q}_\xi \omega_\theta) u_\theta^{(n)'} + p (\tilde{n}_\xi' r \\ & - \tilde{n}_\xi \omega_\xi \omega_\theta + \tilde{m}_\xi' \lambda^2 r \omega_\theta + \tilde{q}_\xi' \omega_\theta \\ & - \tilde{m}_\xi \lambda^2 \omega_\xi \omega_\theta^2 + \tilde{q}_\xi r \omega_\xi + \omega_\theta) u_\theta^{(n)} \\ & + p \tilde{q}_\xi \frac{n}{\rho} w^{(n)'} + p (\tilde{q}_\xi' + 1) \frac{n}{\rho} w^{(n)} + \bar{Y}^{(n)} = 0 \\ & - \omega_\xi n_\xi^{(n)} - \omega_\theta n_\theta^{(n)} + \lambda^2 [m_\xi^{(n)''} + 2 r m_\xi^{(n)'} \\ & - \omega_\xi \omega_\theta m_\xi^{(n)} + (\omega_\xi \omega_\theta - \frac{n^2}{\rho^2}) m_\theta^{(n)} - r m_\theta^{(n)'} \\ & + 2 \frac{n}{\rho} m_{\xi\theta}^{(n)'} + 2 \frac{n}{\rho} r m_{\xi\theta}^{(n)}] + p (\tilde{m}_\xi \lambda^2 \frac{n^2}{\rho^2} \\ & - \tilde{n}_\xi \omega_\xi) u_\xi^{(n)'} + p [\tilde{m}_\xi' \lambda^2 \frac{n^2}{\rho^2} - \tilde{n}_\xi' \omega_\xi \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned}
& -\widetilde{n}_\xi (r \omega_\xi + \omega'_\xi) \Big] u_\xi^{(n)} - p \widetilde{m}_\theta \lambda^2 \frac{n}{\rho} u_\theta^{(n)}, \\
& + p (\widetilde{m}_\xi \lambda^2 r - \widetilde{m}'_\theta \lambda^2) \frac{n}{\rho} u_\theta^{(n)} + p (\widetilde{m}'_\xi \lambda^2 r \\
& - \widetilde{m}_\xi \lambda^2 \omega_\xi \omega_\theta - \widetilde{n}_\theta \omega_\theta) \frac{n}{\rho} u_\theta^{(n)} + p \widetilde{n}_\xi w^{(n)} \\
& + p (\widetilde{n}_\xi r + \widetilde{n}'_\xi) w^{(n)} - p \widetilde{n}_\theta \frac{n^2}{\rho^2} w^{(n)} + \overline{Z}^{(n)} = 0
\end{aligned} \tag{2.36}$$

これに表 1.1 の Flügge による合応力・合モーメントと変位の関係を用いて変数を $u_\xi, u_\theta, w, m_\xi$ のみとし、さらにこれと m_ξ と変位の関係式を併記すると式 (1.14) に対してつぎの基礎方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
& a_1^{(n)} u_\xi^{(n)} + a_2^{(n)} u_\xi^{(n)} + a_3^{(n)} u_\xi^{(n)} + a_4^{(n)} u_\theta^{(n)} + a_5^{(n)} u_\theta^{(n)} \\
& + a_6^{(n)} w^{(n)} + a_7^{(n)} w^{(n)} + a_8^{(n)} w^{(n)} + a_9^{(n)} m_\xi^{(n)} \\
& + a_{10}^{(n)} m_\xi^{(n)} + \overline{X}^{(n)} = 0 \\
& a_{11}^{(n)} u_\xi^{(n)} + a_{12}^{(n)} u_\xi^{(n)} + a_{13}^{(n)} u_\xi^{(n)} + a_{14}^{(n)} u_\theta^{(n)} \\
& + a_{15}^{(n)} u_\theta^{(n)} + a_{16}^{(n)} w^{(n)} + a_{17}^{(n)} w^{(n)} + a_{18}^{(n)} w^{(n)} \\
& + a_{19}^{(n)} m_\xi^{(n)} + \overline{Y}^{(n)} = 0 \\
& a_{20}^{(n)} u_\xi^{(n)} + a_{21}^{(n)} u_\xi^{(n)} + a_{22}^{(n)} u_\theta^{(n)} + a_{23}^{(n)} u_\theta^{(n)} \\
& + a_{24}^{(n)} u_\theta^{(n)} + a_{25}^{(n)} w^{(n)} + a_{26}^{(n)} w^{(n)} + a_{27}^{(n)} w^{(n)} \\
& + a_{28}^{(n)} m_\xi^{(n)} + a_{29}^{(n)} m_\xi^{(n)} + a_{30}^{(n)} m_\xi^{(n)} + \overline{Z}^{(n)} = 0 \\
& a_{31}^{(n)} u_\xi^{(n)} + a_{32}^{(n)} u_\xi^{(n)} + a_{33}^{(n)} u_\theta^{(n)} + a_{34}^{(n)} w^{(n)} \\
& + a_{35}^{(n)} w^{(n)} + a_{36}^{(n)} w^{(n)} + a_{37}^{(n)} m_\xi^{(n)} = 0
\end{aligned} \tag{2.37}$$

係数 $a_1^{(n)} \sim a_{37}^{(n)}$ を表 2.1 に示す。

2.3.2 修正した Flügge の理論に基づく解法

この解法による平衡方程式の扱い方は Flügge に従うので式 (2.36) までは全く同一となる。これに表 1.1 の修正した Flügge による合応力・合モーメントと変位の関係を用いて変数を $u_\xi, u_\theta, w, m_\xi$ の 4 個とし、これと m_ξ と変位の関係式を併記すると、式 (2.37) で表わされる基礎方程式が得られる。このときの係数 $a_1^{(n)} \sim a_{37}^{(n)}$ を表 2.1 に併記している。

2.3.3 Donnell の理論に基づく解法

式 (1.2), (1.4), (2.30), および (2.31) を用いて平衡方程式 (2.12) ~ (2.14) を変形し、また $N_{\xi\theta}^* = N_\theta^*$, $M_{\xi\theta}^* = M_\theta^*$ と仮定して式 (2.14) の第 3 式を無視したうえで Q_ξ^*, Q_θ^* を消去すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} & a \left[\frac{\partial(\rho N_\xi^*)}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\xi\theta}^*}{\partial \theta} - N_\theta^* \rho' \right] \\ & \quad + \omega_\xi \left[\frac{\partial(\rho M_\xi^*)}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\xi\theta}^*}{\partial \theta} - \rho' M_\theta^* \right] = 0 \\ & a \left[\frac{\partial N_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho N_{\xi\theta}^*)}{\partial \xi} + \rho' N_{\xi\theta}^* \right] \\ & \quad + \omega_\theta \left[\frac{\partial(\rho M_{\xi\theta}^*)}{\partial \xi} + \frac{\partial M_\theta^*}{\partial \theta} + \rho' M_{\xi\theta}^* \right] = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial(\rho M_\xi^*)}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\xi\theta}^*}{\partial \theta} - \rho' M_\theta^* \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial(\rho M_{\xi\theta}^*)}{\partial \xi} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial M_\theta^*}{\partial \theta} + \rho' M_{\xi\theta}^* \right] - a \rho \omega_\theta N_\theta^* - a \rho \omega_\xi N_\xi^* \\ & \quad + \rho \tilde{N}_\xi \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\tilde{N}_\theta}{\rho} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + a r Z^* = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

式 (2.33), (2.34) を式 (2.38) に用いると次式となる。

$$\left. \begin{aligned} & n_\xi^{(n)} + \frac{n}{\rho} n_{\xi\theta}^{(n)} + r (n_\xi^{(n)} - n_\theta^{(n)}) \\ & \quad + \lambda^2 \omega_\xi \left[m_\xi^{(n)} + r (m_\xi^{(n)} - m_\theta^{(n)}) + \frac{n}{\rho} m_{\xi\theta}^{(n)} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & n_{\xi\theta}^{(n)} + 2r n_{\xi\theta}^{(n)} - \frac{n}{\rho} n_{\theta}^{(n)} \\
 & \quad + \lambda^2 \omega_{\theta} \left[m_{\xi\theta}^{(n)} + 2r m_{\xi\theta}^{(n)} - \frac{n}{\rho} m_{\theta}^{(n)} \right] = 0 \\
 & - \omega_{\xi} n_{\xi}^{(n)} - \omega_{\theta} n_{\theta}^{(n)} + \lambda^2 \left[m_{\xi}^{(n)} + 2r m_{\xi}^{(n)} \right. \\
 & \quad - \omega_{\xi} \omega_{\theta} m_{\xi}^{(n)} + \left(\omega_{\xi} \omega_{\theta} - \frac{n^2}{\rho^2} \right) m_{\theta}^{(n)} - r m_{\theta}^{(n)} \\
 & \quad \left. + 2 \frac{n}{\rho} m_{\xi\theta}^{(n)} + 2 \frac{n}{\rho} r m_{\xi\theta}^{(n)} \right] + p \widetilde{n}_{\xi} w^{(n)} \\
 & \quad - p \widetilde{n}_{\theta} \frac{n^2}{\rho^2} w^{(n)} + \bar{Z}^{(n)} = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

これに表 1.1 の Donnell による関係式を用い、さらにこれと m_{ξ} と変位の関係式を併記すれば式 (2.37) で示される基礎方程式が得られる。このときの係数 $a_1^{(n)} \sim a_{37}^{(n)}$ もまた表 2.1 に示している。ただし、この場合式 (2.37) の付加外力の項はつぎのようになる。

$$\bar{X}^{(n)} = 0 \qquad \bar{Y}^{(n)} = 0 \qquad (2.40)$$

表 2.1 基礎方程式の係数

(F : Flügge , MF : 修正 Flügge , D : Donnell)

$a_1^{(n)}$	F . MF . D	b
$a_2^{(n)}$	F . MF	$b r + p \tilde{q}_\xi \omega_\xi$
	D	$b r$
$a_3^{(n)}$	F	$-\nu b \omega_\xi \omega_\theta - b r^2 - b \frac{(1-\nu)}{2} \frac{n^2}{\rho^2} + p \{ \omega_\xi + \tilde{q}_\xi \omega_\xi' + (\tilde{q}_\xi r + \tilde{q}_\xi') \omega_\xi \}$
	MF	$-\nu b \omega_\xi \omega_\theta - b r^2 - b \frac{(1-\nu)}{2} \frac{n^2}{\rho^2} - \lambda^2 d (1-\nu) \left\{ \frac{n^2}{\rho^2} + (1+\nu) r^2 \right\} \omega_\xi^2 + p \{ \omega_\xi + \tilde{q}_\xi \omega_\xi' + (\tilde{q}_\xi r + \tilde{q}_\xi') \omega_\xi \}$
	D	$-b \nu \omega_\xi \omega_\theta - b r^2 - b \frac{(1-\nu)}{2} \frac{n^2}{\rho^2}$
$a_4^{(n)}$	F	$b(1+\nu) \frac{n}{2\rho} - p(\tilde{n}_\theta + \tilde{m}_\theta \lambda^2 \omega_\xi) \frac{n}{\rho}$
	MF	$b(1+\nu) \frac{n}{2\rho} + \lambda^2 d (1-\nu) \omega_\xi \omega_\theta \frac{n}{\rho} - p(\tilde{n}_\theta + \tilde{m}_\theta \lambda^2 \omega_\xi) \frac{n}{\rho}$
	D	$b(1+\nu) \frac{n}{2\rho}$
$a_5^{(n)}$	F . D	$-b(3-\nu) r \frac{n}{2\rho}$
	MF	$-b(3-\nu) r \frac{n}{2\rho} - \lambda^2 d (1-\nu^2) r \omega_\xi \omega_\theta \frac{n}{\rho}$
$a_6^{(n)}$	F . MF	$-p \tilde{q}_\xi$
	D	0
$a_7^{(n)}$	F . MF	$b(\omega_\xi + \nu \omega_\theta) + \lambda^2 d (1-\nu) \omega_\xi \left[\frac{n^2}{\rho^2} + (1+\nu) r^2 \right] - p(\tilde{q}_\xi r + \tilde{q}_\xi' + 1)$
	D	$b(\omega_\xi + \nu \omega_\theta) + \lambda^2 d (1-\nu) \omega_\xi \frac{n^2}{\rho^2}$
$a_8^{(n)}$	F . MF	$b(\omega_\xi' + r \omega_\xi - r \omega_\theta) - \lambda^2 d (1-\nu) (2+\nu) r \omega_\xi \frac{n^2}{\rho^2}$
	D	$b(\omega_\xi' + r \omega_\xi - r \omega_\theta) - \lambda^2 d (1-\nu^2) r \omega_\xi \frac{n^2}{\rho^2}$
$a_9^{(n)}$	F . MF . D	$\lambda^2 \omega_\xi$
$a_{10}^{(n)}$	F . MF . D	$\lambda^2 (1-\nu) r \omega_\xi$
$a_{11}^{(n)}$	F	$-b(1+\nu) \frac{n}{2\rho} + p(\tilde{n}_\xi + \tilde{m}_\xi \lambda^2 \omega_\theta) \frac{n}{\rho}$
	MF	$-b(1+\nu) \frac{n}{2\rho} - \lambda^2 d (1-\nu) \omega_\xi \omega_\theta \frac{n}{\rho} + p(\tilde{n}_\xi + \tilde{m}_\xi \lambda^2 \omega_\theta) \frac{n}{\rho}$
	D	$-b(1+\nu) \frac{n}{2\rho}$
$a_{12}^{(n)}$	F	$-b(3-\nu) r \frac{n}{2\rho} + p(\tilde{n}_\xi' + \tilde{m}_\xi' \lambda^2 \omega_\theta) \frac{n}{\rho}$
	MF	$-b(3-\nu) r \frac{n}{2\rho} - \lambda^2 d (1-\nu) \frac{n}{\rho} \omega_\theta \left[\omega_\xi' + (2+\nu) r \omega_\xi \right] + p(\tilde{n}_\xi' + \tilde{m}_\xi' \lambda^2 \omega_\theta) \frac{n}{\rho}$

$a_{12}^{(n)}$	D	$-b(3-\nu) \tau \frac{n}{2\rho}$
$a_{13}^{(n)}$	F . D	$b \frac{(1-\nu)}{2}$
	MF	$b \frac{(1-\nu)}{2} + \lambda^2 d(1-\nu) \omega_\theta^2$
$a_{14}^{(n)}$	F	$b \frac{(1-\nu)}{2} \tau + p(\tilde{n}_\xi \tau + \tilde{m}_\xi \lambda^2 \tau \omega_\theta + \tilde{q}_\xi \omega_\theta)$
	MF	$b \frac{(1-\nu)}{2} \tau + \lambda^2 d(1-\nu) \tau \omega_\theta (\omega_\xi + 2 \omega_\theta) + p(\tilde{n}_\xi \tau + \tilde{m}_\xi \lambda^2 \tau \omega_\theta + \tilde{q}_\xi \omega_\theta)$
	D	$b \frac{(1-\nu)}{2} \tau$
$a_{15}^{(n)}$	F	$b \frac{(1-\nu)}{2} (\omega_\xi \omega_\theta - \tau^2) - b \frac{n^2}{\rho^2} + p(\tilde{n}_\xi' \tau + \tilde{m}_\xi' \lambda^2 \tau \omega_\theta + \tilde{q}_\xi' \omega_\theta - \tilde{n}_\xi \omega_\xi \omega_\theta - \tilde{m}_\xi \lambda^2 \omega_\xi \omega_\theta^2 + \tilde{q}_\xi \tau \omega_\xi + \omega_\theta)$
	MF	$b \frac{(1-\nu)}{2} (\omega_\xi \omega_\theta - \tau^2) - b \frac{n^2}{\rho^2} + \lambda^2 d(1-\nu) \omega_\theta^2 (\omega_\xi \omega_\theta - 3 \tau^2 - \frac{n^2}{\rho^2}) + p(\tilde{n}_\xi' \tau + \tilde{m}_\xi' \lambda^2 \tau \omega_\theta + \tilde{q}_\xi' \omega_\theta - \tilde{n}_\xi \omega_\xi \omega_\theta - \tilde{m}_\xi \lambda^2 \omega_\xi \omega_\theta^2 + \tilde{q}_\xi \tau \omega_\xi + \omega_\theta)$
	D	$b \frac{(1-\nu)}{2} (\omega_\xi \omega_\theta - \tau^2) - b \frac{n^2}{\rho^2}$
$a_{16}^{(n)}$	F . MF . D	$\lambda^2 d(1-\nu) \omega_\theta \frac{n}{\rho}$
$a_{17}^{(n)}$	F . MF	$\lambda^2 d(1-\nu^2) \tau \omega_\theta \frac{n}{\rho} + p \tilde{q}_\xi \frac{n}{\rho}$
	D	$\lambda^2 d(1-\nu) \tau \omega_\theta \frac{n}{\rho}$
$a_{18}^{(n)}$	F . MF	$-b(\omega_\theta + \nu \omega_\xi) \frac{n}{\rho} + \lambda^2 d(1-\nu) \omega_\theta \frac{n}{\rho} [\omega_\xi \omega_\theta - (1+\nu) \frac{n^2}{\rho^2}] + p(\tilde{q}_\xi' \frac{n}{\rho} + \frac{n}{\rho})$
	D	$-b(\omega_\theta + \nu \omega_\xi) \frac{n}{\rho} - \lambda^2 d(1-\nu^2) \omega_\theta \frac{n^3}{\rho^3}$
$a_{19}^{(n)}$	F . MF . D	$-\lambda^2 \nu \omega_\theta \frac{n}{\rho}$
$a_{20}^{(n)}$	F	$-b(\omega_\xi + \nu \omega_\theta) + p(\tilde{m}_\xi \lambda^2 \frac{n^2}{\rho^2} - \tilde{n}_\xi \omega_\xi)$
	MF	$-b(\omega_\xi + \nu \omega_\theta) - \lambda^2 d(1-\nu) \omega_\xi [(1+\nu) \tau^2 + 2 \frac{n^2}{\rho^2}] + p(\tilde{m}_\xi \lambda^2 \frac{n^2}{\rho^2} - \tilde{n}_\xi \omega_\xi)$
	D	$-b(\omega_\xi + \nu \omega_\theta)$
$a_{21}^{(n)}$	F	$-b \tau (\omega_\theta + \nu \omega_\xi) + p[\tilde{m}_\xi' \lambda^2 \frac{n^2}{\rho^2} - \tilde{n}_\xi (\tau \omega_\xi + \omega_\xi') - \tilde{n}_\xi' \omega_\xi]$
	MF	$-b \tau (\omega_\theta + \nu \omega_\xi) + \lambda^2 d(1-\nu) [(1+\nu) \tau (2 \omega_\xi^2 \omega_\theta + \tau^2 \omega_\xi - \tau \omega_\xi' - \omega_\xi \frac{n^2}{\rho^2}) - 2 \omega_\xi' \frac{n^2}{\rho^2}] + p[\tilde{m}_\xi' \lambda^2 \frac{n^2}{\rho^2} - \tilde{n}_\xi (\tau \omega_\xi + \omega_\xi') - \tilde{n}_\xi' \omega_\xi]$
	D	$-b \tau (\omega_\theta + \nu \omega_\xi)$
$a_{22}^{(n)}$	F	$-p \tilde{m}_\theta \lambda^2 \frac{n}{\rho}$
	MF	$2 \lambda^2 d(1-\nu) \omega_\theta \frac{n}{\rho} - p \tilde{m}_\theta \lambda^2 \frac{n}{\rho}$
	D	0

$a_{23}^{(n)}$	F	$p(\tilde{m}_\epsilon \lambda^2 \tau - \tilde{m}_\theta' \lambda^2) \frac{n}{\rho}$
	MF	$\lambda^2 d(1-\nu) \tau [2\omega_\epsilon + (1-\nu)\omega_\theta] \frac{n}{\rho} + p(\tilde{m}_\epsilon \lambda^2 \tau - \tilde{m}_\theta' \lambda^2) \frac{n}{\rho}$
	D	0
$a_{24}^{(n)}$	F	$-b(\omega_\theta + \nu\omega_\epsilon) \frac{n}{\rho} + p(\tilde{m}_\epsilon' \lambda^2 \tau - \tilde{m}_\epsilon \lambda^2 \omega_\epsilon \omega_\theta - \tilde{n}_\theta \omega_\theta) \frac{n}{\rho}$
	MF	$-b(\omega_\theta + \nu\omega_\epsilon) \frac{n}{\rho} + \lambda^2 d(1-\nu) [(3+\nu)\omega_\epsilon \omega_\theta - (3+\nu)\tau^2 \omega_\epsilon - (1+\nu)\omega_\theta \frac{n^2}{\rho^2} - 2\tau^2 \omega_\theta] \frac{n}{\rho} + p(\tilde{m}_\epsilon' \lambda^2 \tau - \tilde{m}_\epsilon \lambda^2 \omega_\epsilon \omega_\theta - \tilde{n}_\theta \omega_\theta) \frac{n}{\rho}$
	D	$-b(\omega_\theta + \nu\omega_\epsilon) \frac{n}{\rho}$
$a_{25}^{(n)}$	F . MF	$\lambda^2 d(1-\nu) [(1+\nu)\tau^2 + 2\frac{n^2}{\rho^2}] + p\tilde{n}_\epsilon$
	D	$2\lambda^2 d(1-\nu) \frac{n^2}{\rho^2} + p\tilde{n}_\epsilon$
$a_{26}^{(n)}$	F . MF	$-\lambda^2 d(1-\nu) \tau [(1+\nu)(2\omega_\epsilon \omega_\theta + \tau^2) + 2\frac{n^2}{\rho^2}] + p(\tilde{n}_\epsilon \tau + \tilde{n}_\epsilon')$
	D	$-\lambda^2 d(1-\nu^2) \tau \frac{n^2}{\rho^2}$
$a_{27}^{(n)}$	F . MF	$-b(\omega_\epsilon^2 + 2\nu\omega_\epsilon \omega_\theta + \omega_\theta^2) + \lambda^2 d(1-\nu) [(3+\nu)\omega_\epsilon \omega_\theta + 2(2+\nu)\tau^2 - (1+\nu)\frac{n^2}{\rho^2}] \frac{n^2}{\rho^2} - p\tilde{n}_\theta \frac{n^2}{\rho^2}$
	D	$-b(\omega_\epsilon^2 + 2\nu\omega_\epsilon \omega_\theta + \omega_\theta^2) + \lambda^2 d(1-\nu^2) (\omega_\epsilon \omega_\theta - \frac{n^2}{\rho^2} + 2\tau^2) \frac{n^2}{\rho^2} - p\tilde{n}_\theta \frac{n^2}{\rho^2}$
$a_{28}^{(n)}$	F . MF . D	λ^2
$a_{29}^{(n)}$	F . MF . D	$\lambda^2 (2-\nu) \tau$
$a_{30}^{(n)}$	F . MF . D	$-\lambda^2 [(1-\nu)\omega_\epsilon \omega_\theta + \nu \frac{n^2}{\rho^2}]$
$a_{31}^{(n)}$	F . D	0
	MF	$d\omega_\epsilon$
$a_{32}^{(n)}$	F . D	0
	MF	$d(\omega_\epsilon' + \nu\tau\omega_\epsilon)$
$a_{33}^{(n)}$	F . D	0
	MF	$d\nu\omega_\theta \frac{n}{\rho}$
$a_{34}^{(n)}$	F . MF . D	-d
$a_{35}^{(n)}$	F . MF	$-d\nu\tau$
	D	0
$a_{36}^{(n)}$	F . MF . D	$d\nu \frac{n^2}{\rho^2}$
$a_{37}^{(n)}$	F . MF . D	-1

2.3.4 圧力のみの場合

式(2.37)を解くためには、この係数 $a_1^{(n)} \sim a_{37}^{(n)}$ に含まれている圧力により生じる合応力・合モーメント、すなわち $\tilde{n}_\xi, \tilde{n}_\theta, \tilde{q}_\xi, \tilde{m}_\xi$ および $\tilde{m}_\theta$ をあらかじめ求めておかなければならない。式(2.30)から $\tilde{Q}_\xi$ を消去し、式(2.34)の関係を用いると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{n}_\xi' + r(\tilde{n}_\xi - \tilde{n}_\theta) + \lambda^2 \omega_\xi (\tilde{m}_\xi' + r\tilde{m}_\xi - r\tilde{m}_\theta) &= 0 \\ -\omega_\xi \tilde{n}_\xi - \omega_\theta \tilde{n}_\theta + \lambda^2 (\tilde{m}_\xi'' + 2r\tilde{m}_\xi' - r\tilde{m}_\theta' \\ -\omega_\xi \omega_\theta \tilde{m}_\xi + \omega_\xi \omega_\theta \tilde{m}_\theta) + 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

この問題、すなわち軸対称変形の問題に対しては表 1.1 で示された合応力・合モーメントと変位の関係は、Flügge, 修正したFlügge, および Donnell の各理論に対して表 2.2 のごとくになる。ただし表 2.2 で示している無次元の変位 $\tilde{u}_\xi, \tilde{w}$ は次式で定義している。

$$p \tilde{u}_\xi = \tilde{U}/a \quad p \tilde{w} = \tilde{W}/a \quad (2.42)$$

表 2.2 合応力・合モーメントと変位の関係

(F: Flügge, MF: 修正 Flügge, D: Donnell)

$\tilde{n}_\xi$	F, MF, D	$b[\tilde{u}_\xi' + \nu r \tilde{u}_\xi + (\omega_\xi + \nu \omega_\theta) \tilde{w}]$
$\tilde{n}_\theta$	F, MF, D	$b[\nu \tilde{u}_\xi' + r \tilde{u}_\xi + (\omega_\xi + \nu \omega_\theta) \tilde{w}]$
$\tilde{m}_\xi$	F	$d(-\tilde{w}'' - \nu r \tilde{w}')$
	MF	$d[\omega_\xi \tilde{u}_\xi' + (\omega_\xi' + \nu r \omega_\xi) \tilde{u}_\xi - \tilde{w}'' - \nu r \tilde{w}']$
	D	$-d \tilde{w}''$
$\tilde{m}_\theta$	F	$\nu \tilde{m}_\xi - d(1 - \nu^2) r \tilde{w}'$
	MF	$\nu \tilde{m}_\xi - d(1 - \nu^2)(-r \omega_\xi \tilde{u}_\xi + r \tilde{w}')$
	D	$\nu \tilde{m}_\xi$
$\tilde{q}_\xi$	F, MF, D	$\lambda^2 (\tilde{m}_\xi' + r \tilde{m}_\xi - r \tilde{m}_\theta)$

この表 2.2 の関係を式 (2.41) に用い、さらにこれと $\widetilde{m}_\xi$ と変位の関係式を合わせ示すとつぎの基礎方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} & \widetilde{a}_1 \widetilde{u}_\xi'' + \widetilde{a}_2 \widetilde{u}_\xi' + \widetilde{a}_3 \widetilde{u}_\xi + \widetilde{a}_4 \widetilde{w}' + \widetilde{a}_5 \widetilde{w} \\ & \quad + \widetilde{a}_6 \widetilde{m}_\xi' + \widetilde{a}_7 \widetilde{m}_\xi = 0 \\ & \widetilde{a}_8 \widetilde{u}_\xi' + \widetilde{a}_9 \widetilde{u}_\xi + \widetilde{a}_{10} \widetilde{w}'' + \widetilde{a}_{11} \widetilde{w}' + \widetilde{a}_{12} \widetilde{w} \\ & \quad + \widetilde{a}_{13} \widetilde{m}_\xi'' + \widetilde{a}_{14} \widetilde{m}_\xi' + \widetilde{a}_{15} \widetilde{m}_\xi + 1 = 0 \\ & \widetilde{a}_{16} \widetilde{u}_\xi' + \widetilde{a}_{17} \widetilde{u}_\xi + \widetilde{a}_{18} \widetilde{w}'' + \widetilde{a}_{19} \widetilde{w}' + \widetilde{a}_{20} \widetilde{m}_\xi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

係数 $\widetilde{a}_1 \sim \widetilde{a}_{20}$ は使用する各理論により異なり、これをまとめて表 2.3 に示す。

2.3.5 自由振動問題の場合

自由振動の問題に対しては 1.5 節での取扱いと全く同様にすればよい。ただし、式 (1.51) の無次元化に対してここではつぎのようにおく。

$$N_\xi^* = \sigma_0 h n_\xi^{(n)} \cos n\theta \cos \varrho \tau \quad (2.44)$$

他の変数も同様である。これを用いると式 (2.37) で表わされる基礎方程式が得られる。この係数 $a_1^{(n)} \sim a_{37}^{(n)}$ は表 2.1 の通りであるが、このとき付加外力の項 $\overline{X}^{(n)}$, $\overline{Y}^{(n)}$, および $\overline{Z}^{(n)}$ も 1.5 節での取扱いと同じくつぎのごとくになる。

$$\overline{X}^{(n)} = \varrho^2 u_\xi^{(n)} \quad \overline{Y}^{(n)} = \varrho^2 u_\theta^{(n)} \quad \overline{Z}^{(n)} = \varrho^2 w^{(n)} \quad (2.45)$$

Donnell によるときはつぎのようになる。

$$\overline{X}^{(n)} = \overline{Y}^{(n)} = 0 \quad \overline{Z}^{(n)} = \varrho^2 w^{(n)} \quad (2.46)$$

表 2.3 基礎方程式の係数

(F : Flügge , MF : 修正 Flügge , D : Donnell)

$\tilde{a}_1^{(n)}$	F. MF. D	b
$\tilde{a}_2^{(n)}$	F. MF. D	b r
$\tilde{a}_3^{(n)}$	F. D	$-b(r^2 + \nu \omega_\xi \omega_\theta)$
	MF	$-b(r^2 + \nu \omega_\xi \omega_\theta) - \lambda^2 d(1 - \nu^2) r^2 \omega_\xi^2$
$\tilde{a}_4^{(n)}$	F. MF	$b(\omega_\xi + \nu \omega_\theta) + \lambda^2 d(1 - \nu^2) r^2 \omega_\xi$
	D	$b(\omega_\xi + \nu \omega_\theta)$
$\tilde{a}_5^{(n)}$	F. MF	$b(\omega'_\xi + r \omega_\xi - r \omega_\theta)$
	D	$b r (1 - \nu)(\omega_\xi - \omega_\theta)$
$\tilde{a}_6^{(n)}$	F. MF. D	$\lambda^2 \omega_\xi$
$\tilde{a}_7^{(n)}$	F. MF. D	$\lambda^2 (1 - \nu) r \omega_\xi$
$\tilde{a}_8^{(n)}$	F. D	$-b(\omega_\xi + \nu \omega_\theta)$
	MF	$-b(\omega_\xi + \nu \omega_\theta) - \lambda^2 d(1 - \nu^2) r^2 \omega_\xi$
$\tilde{a}_9^{(n)}$	F. D	$-b r (\omega_\xi + \nu \omega_\theta)$
	MF	$-b r (\omega_\theta + \nu \omega_\xi) + \lambda^2 d(1 - \nu^2) r \omega_\xi (2 \omega_\xi \omega_\theta + r^2)$
$\tilde{a}_{10}^{(n)}$	F. MF	$\lambda^2 d(1 - \nu^2) r^2$
	D	0
$\tilde{a}_{11}^{(n)}$	F. MF	$-\lambda^2 d(1 - \nu^2)(r^2 + 2 \omega_\xi \omega_\theta) r$
	D	0
$\tilde{a}_{12}^{(n)}$	F. MF. D	$-b(\omega_\xi^2 + \omega_\theta^2 + 2 \nu \omega_\xi \omega_\theta)$
$\tilde{a}_{13}^{(n)}$	F. MF. D	λ^2
$\tilde{a}_{14}^{(n)}$	F. MF. D	$\lambda^2 (2 - \nu) r$
$\tilde{a}_{15}^{(n)}$	F. MF. D	$-\lambda^2 (1 - \nu) \omega_\xi \omega_\theta$
$\tilde{a}_{16}^{(n)}$	F. D	0
	MF	$-d \omega_\xi$
$\tilde{a}_{17}^{(n)}$	F. D	0
	MF	$-d(\omega'_\xi + \nu r \omega_\xi)$
$\tilde{a}_{18}^{(n)}$	F. MF. D	d
$\tilde{a}_{19}^{(n)}$	F. MF	$d \nu r$
	D	0
$\tilde{a}_{20}^{(n)}$	F. MF. D	1

2.3.6 座屈問題の場合

圧力による座屈の問題に対しては式(2.33)をつぎのようにおく。

$$N_{\xi}^* = \sigma_0 h n_{\xi}^{(n)} \cos n\theta \quad (2.47)$$

他の変数も同様である。このようにして前述のごとくに取り扱えば式(2.37)で示される基礎方程式が得られ、その係数 $a_1^{(n)} \sim a_{37}^{(n)}$ は表2.1の通りであるが、この問題では付加外力の項はつぎのようになる。

$$\bar{X}^{(n)} = \bar{Y}^{(n)} = \bar{Z}^{(n)} = 0 \quad (2.48)$$

2.4 応用例

数値計算例として自由振動問題および座屈の問題を取り扱う。

自由振動の問題は、圧力によるかくの自由振動特性の変化を前章で取扱った、円筒かく、球かく、圧力容器の模型について、ここで求めた各理論により数値計算を行ないそれらの結果を比較する。

またとくに、円筒かくについては Timoshenko の式によっても計算を行ない、これについても結果を比較する。また本解法の応用例として取扱う座屈問題に対しては、円筒かくの形状を変化させておのおの場合について外圧により座屈するときの解を求める。

数値計算は1.6節で述べた差分法により行なうが、このとき材料はすべて前章と同様に鋼としている。なお実験は自由振動問題に対して行ない、内圧の変化による固有振動数の変化を求めて計算結果と比較している。

2.4.1 自由振動問題

i) 円筒かく

数値計算および実験に用いた両端固定の円筒かくは図1.11の通

りである。円筒半径 R を代表長さ a に選ぶと、計算に必要な諸量は前章で示したものと同一になる。

本問題に対しては、圧力により生じる合応力・合モーメントをあらかじめ求めておかなければならない。

式(2.43)を用いて内圧を与えたときの結果を図

2.4 に示す。計算においては前章での取扱いと同じく差分点の数を101としている。この結果はいずれの理論により求めても大きな相違はないが、使用する

理論によって計算をすることが必要である。

つぎにこれらの値を式(2.37)に用いて、圧力の変化に対してその固有振動数がどのように変わるかについて求めたものが図2.5～2.8である。このとき $n = 5$ に対しては外圧を加えたときの結果をも載せている。振動数が0の外圧は $n = 5$ に対するこの円筒かくの座屈圧力である。圧力の変化による固有振動数の変化の傾向は、各フーリエ指数 n により大きく異なることがわかる。またこの場合も $n = 5$, $c = 0$ の結果を除いた他の数値計算

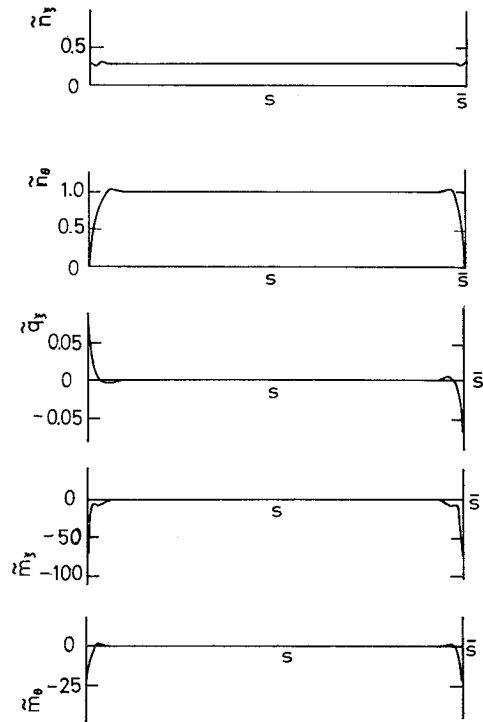


図2.4 円筒かくの内圧による合応力・合モーメント

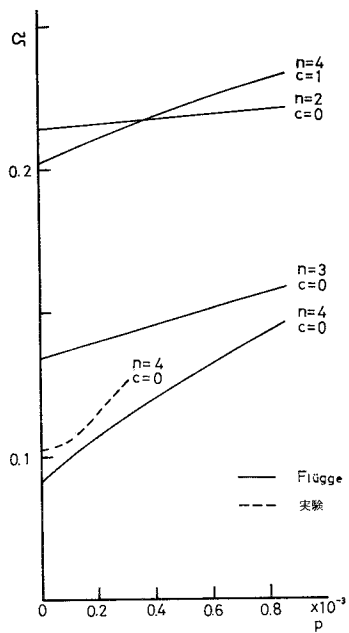


図 2.5 円筒かくの圧力による固有振動数の変化

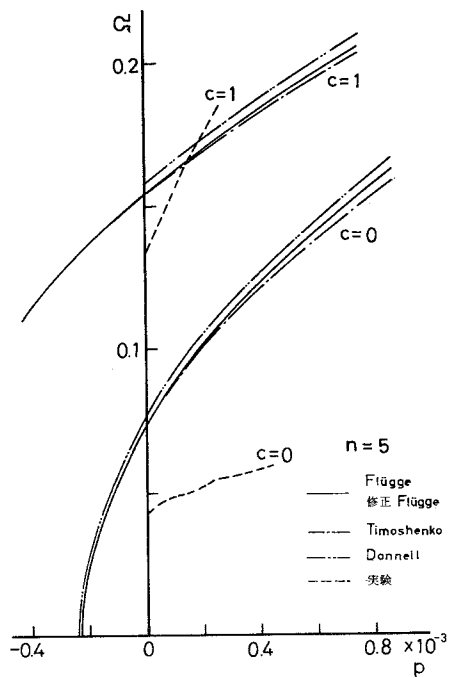


図 2.6 円筒かくの圧力による固有振動数の変化

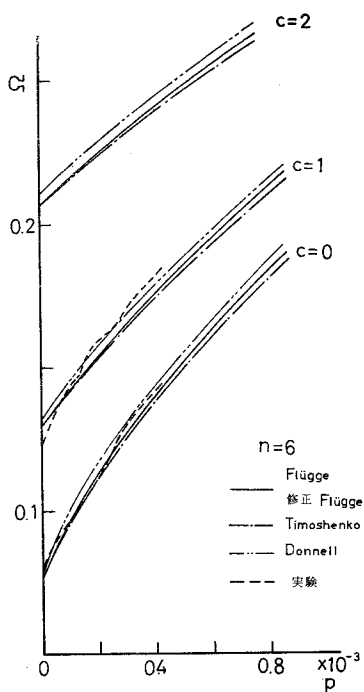


図 2.7 円筒かくの圧力による固有振動数の変化

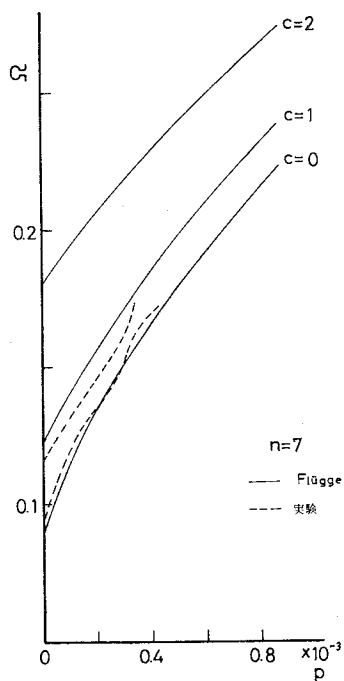


図 2.8 円筒かくの圧力による固有振動数の変化

結果は、実験結果とほぼ一致した。さらに Timoshenko らの式を用いた計算結果によれば、本研究による結果より圧力による固有振動数の変化は少々低くでることが確認される。また Donnell の理論に基づく解法による結果は全体に本解法 (Flügge および修正 Flügge に基づく解法) によるものより高くなり、圧力の上昇とともに差が大きくなることが確認される。なお修正した Flügge の理論に基づく解は、Flügge の理論に基づくものよりやや低くなるが、その差は約 0.5 % 程度であるので図ではこれを区別して描いてはいない。

ii) 球 か く

計算および実験に用いた球かくは図 1.13 の通りである。前章での取扱いと同じく球かくの半径 R を代表長さ a に取り、また差分分割数も同様に 150 としている。

この球かくの内圧による合応力・合モーメントを図 2.9 に示す。これを用いて圧力の変化による固有振動数の変化を求めたものが図 2.10 である。実験は $n=1$, $c=0$ に対するものを示しているが、計算結果の傾向と同様に圧力の変化に対してその固有振動数はほとんど変化しないことが認められる。ここで用いた球かくでは $n=2$ までについて計算を行なったが、このように n が

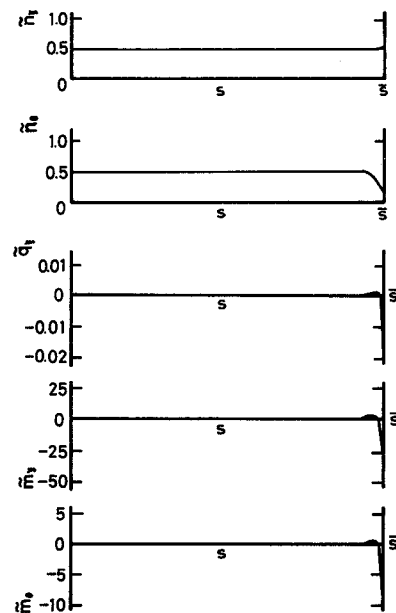


図 2.9 球かくの内圧による合応力・合モーメント

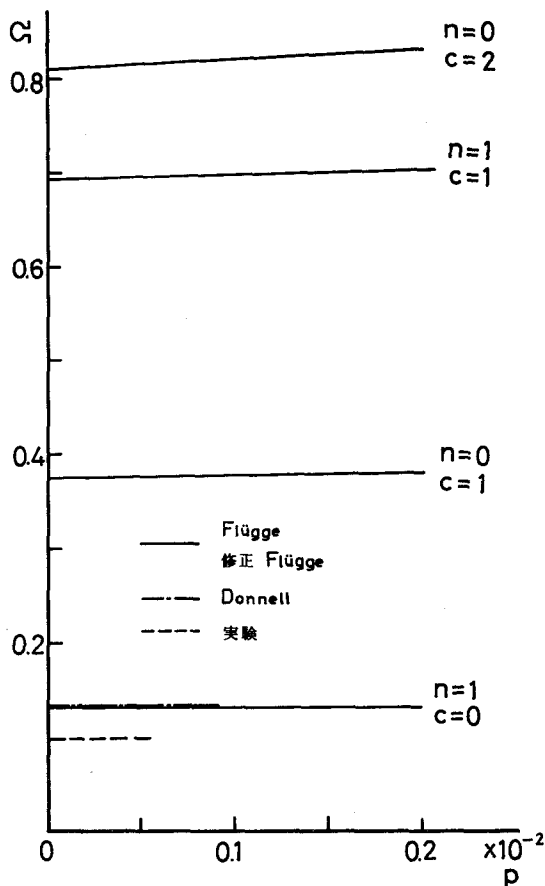


図 2.10 球かくの圧力による固有振動数の変化

この容器に内圧が加わったときに生じる合応力・合モーメントを図 2.11 に示す。これを用いて圧力の変化に対する固有振動数の変化を求めたものが図 2.12 である。このときも最低固有振動数である $n=6, c=1$ に対しては、圧力を加えても実験結果は計算結果と一致しないことが確認される。Flügge と修正 Flügge に基づく結果には、このときも差異はほとんどないが（約 0.5 % 程度修正 Flügge に基づく結果は Flügge に基づく結果より全体に低くなる）、Donnell に基づく結果は圧力の上昇にともないこれらとの差が大き

が小さいときには圧力の影響をあまり受けないことは、前記の円筒かくについても確認されたことである。なお Donnell の理論に基づく結果は、この場合も解は全体に高くでることがわかる。

Ⅲ) 圧力容器の模型

計算および実験に用いた圧力容器模型は図 1.15 の通りである。これに対しても前章での取扱いと同じく容器の円筒部の半径 R_0 を代表長さ a に選び、また差分点の数も同様に 319 としている。

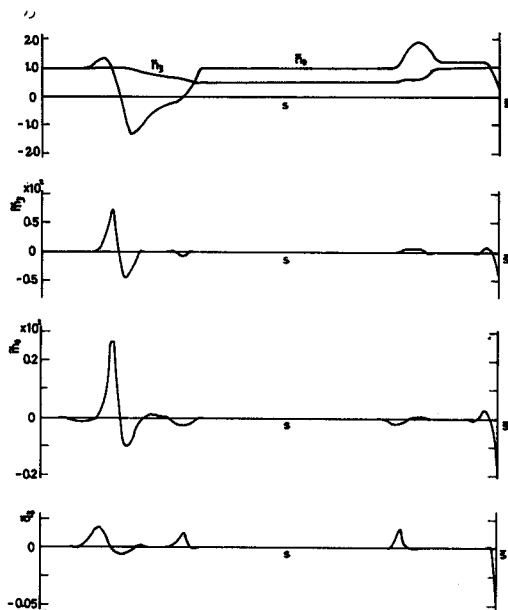


図 2.11 圧力容器模型の内圧による
合成力・合モーメント

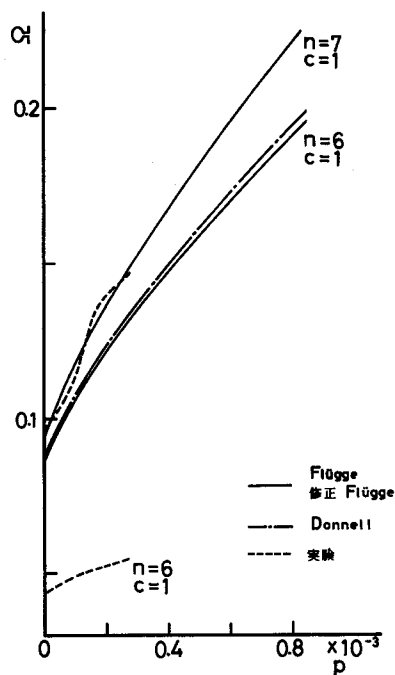


図 2.12 圧力容器模型の圧力による
固有振動数の変化

くなることがこのときも確認される。

2.4.2 座 屈 問 題

i) 円筒かく

図 1.11 の両端固定の円筒かくのかく厚と半径を一定にして円筒かくの長さのみを変化させたときに、その外圧による座屈圧力値がどのように変化するかについて調べる。この問題に対しては Flügge, および Donnell の理論に基づく解法により計算を行ない、その結果を図 2.13 に示している。図よりわかるように、円筒かくの長さが長くなると座屈圧力値は低くなりかつ n も小さくなることが確認される。また Donnell に基づく解法により求めた結果は、Flügge に基づく結果によるものより座屈圧力値はいくぶん高くなることがわかる。なお図 1.11 に示した円筒かくは、これより $n=7$

で座屈する。

Ⅱ) 球かくと円筒かくより成る圧力容器

図 2.14 の圧力容器の外圧による座屈問題を取扱う。この容器の座屈問題に対しては、Harari らの求めた結果⁽³⁾を用いてこれと Flügge に基づく解法により得られた結果とを比較する。

この問題に対しても、円筒かく部の長さを変化させて、そのときの座屈圧力値の変化を求める。その結果を図 2.15 に示す。円筒かく部の長さが長くなると座屈圧力値は低くなり、かつ n も小さくなることは前記の円筒かくのときと同じ傾向を示している。これより Harari らの結果は、本解析による結果より座屈圧力値は

少々高くでることが確認される。

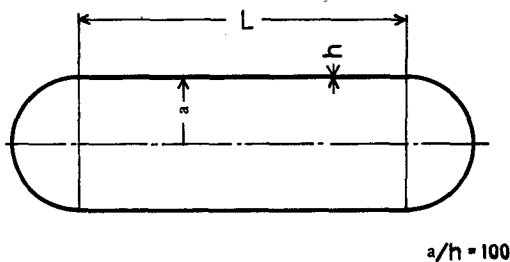


図 2.14 球かくと円筒かくより成る圧力容器

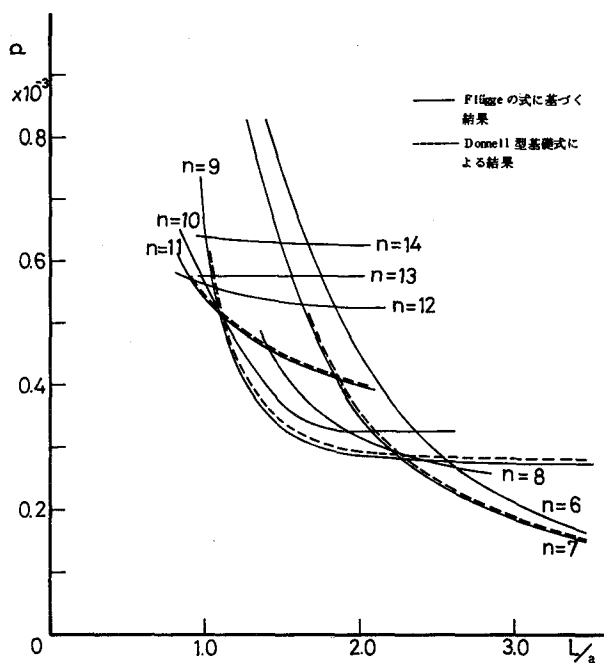


図 2.13 両端固定円筒かくの座屈圧力

2.4.3 考 察

まず自由振動問題の結果について考察する。円筒かくでは、このときも $n=5$, $c=0$ の結果を除いた他の計算結果は実験結果と良好な一致を見ている。また Timoshenko の式を用いて計算を行った結果を図

2.5, 2.6 に併載

したが、それによ

れば圧力が上昇するほど本解析との差は大きくなり、実験に用いた円筒かくに局部的な降伏が生じるときの圧力に対して約 2 ~ 3 % 程度の差が認められた。また Donnell に基づく結果は、その取扱いの簡易さにもかかわらず圧力による固有振動数の変化は本解析によるものと差異はいくぶん大きくなっているが、ほとんど同じ傾向を示していることがわかる。球かくについては $n=0$ と 1 の場合についてのみ結果を示したが、 $n=2$ 以上ではその固有振動数が高くなることを表 1.8 に示しているので、ここではそれ以上のものについては扱っていない。なお実験は $n=1$, $c=0$ の結果のみであるが、それ以外のものは実験による振動形の確認ができなかったため

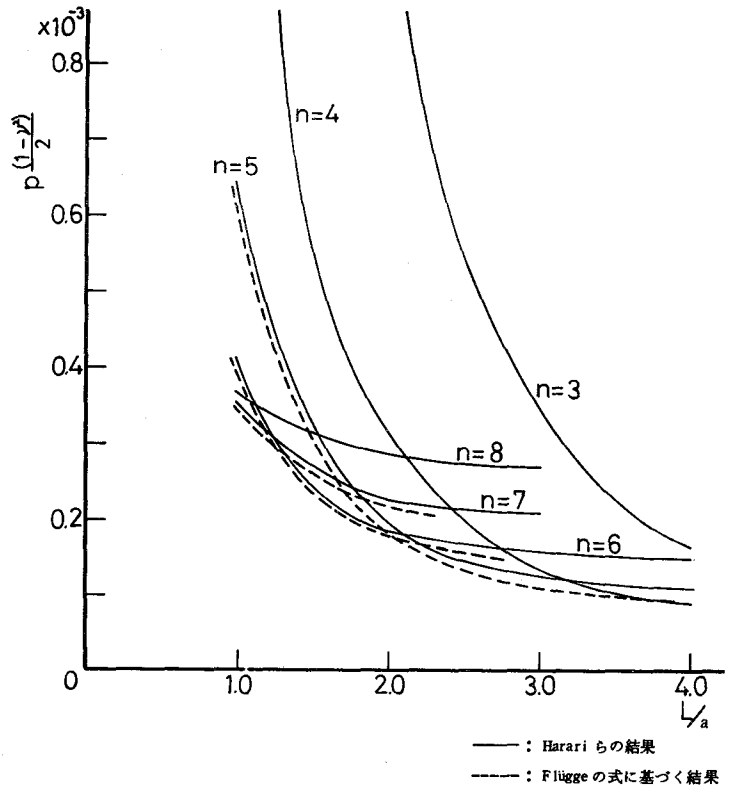


図 2.15 球かくと円筒かくより成る圧力容器の座屈圧力

である。また圧力容器の模型ではこのときも $n = 6$, $c = 1$ の結果は実験結果と合致しないが、他のものはほぼ一致することが認められる。これについては、前章において述べた理由によるものと考えられる。このときも、Donnell による結果は Flügge , および修正 Flügge によるものと比較して差異が大きいことがわかる。なお Flügge と修正した Flügge に基づくものは、予歪による影響を示す項の加え方が同じであるので、この両者にはほとんど差異は見られなかった。振動モードについては、ここで扱ったかくでは圧力によりそれほど大きく変化しないことがわかったのでこれに関する記述は省略した。

以上における結果は、内圧を加えたことによるかくの形状変化が、自由振動におよぼす影響を無視して計算を行なったものである。本解法を用いるとき、この影響を考慮して問題を解くことも可能であるが計算が面倒になる。この影響を調べるため円筒かくに対して計算を行なったが、これを無視したものと比較してほとんど差異は認められなかった。

つぎに円筒かくに対して座屈圧力値を求めた結果では、Donnell に基づく解は Flügge による解と比較すると、その座屈圧力値は約 5 % 程度高くなることが確認された。また球かくと円筒かくから成る圧力容器では、Harari らの使用している式は圧力による予歪の影響による項を Donnell の式と同様に簡単に扱っているので、この場合も本解析による結果より約 5 % 程度座屈圧力値は高くなった。

2.5 実験

実験は自由振動問題に対して行ない、圧力を加えることによりその固有振動数がどのように変化するかを確認することを目的として

いる。

2.5.1 実験装置および

実験方法

図 1.11, 1.13, およ
び 1.15 の三種類のかく
について実験を行なう。
実験装置の全景は図1.17
の通りである。本実験
に対する装置の略図を
図 2.16 に示す。すなわ
ち、前章における実験装
置に圧力を加える装置を
付加したものであり、そ

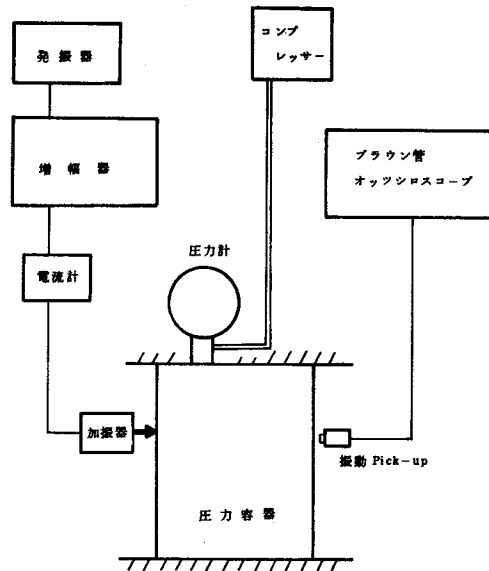


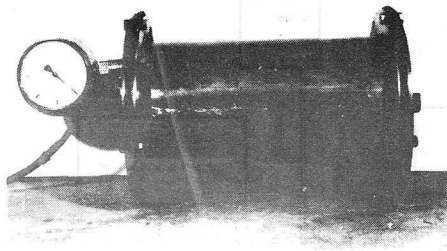
図 2.16 実験装置の略図

の他の装置は前章におけるものをそのまま使用している。この加
圧装置を付加した供試かくを図 2.17 に示す。

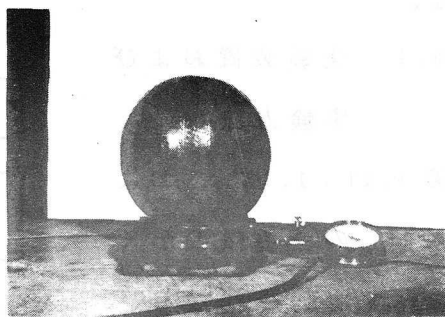
実験は圧力を加えない状態において、その振動形が確認されてい
るものについて、圧力を加えることによりその振動数の変化を追跡
する方法により行なう。

2.5.2 結果および考察

実験により得られた圧力の変化に対する固有振動数の変化を、円
筒かくについては図 2.5 ~ 2.8 に、球かくでは図 2.10 に、また圧
力容器の模型に対しては図 2.12 にそれぞれ計算結果とともに載せ
ている。それによると実験結果の圧力の変化に対する固有振動数
の変化はなめらかな曲線を描いていないが、これは実験において正
確にその固有振動数の変化を追跡しきれなかったためと思われる。

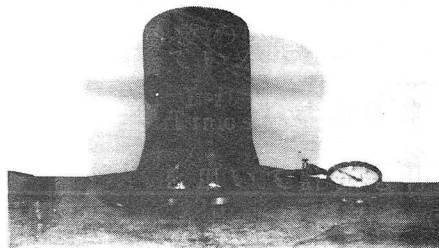


(a)



(b)

また各フーリエ指数 n により固有振動数の上昇の度合が異なるため、これを示す曲線が各所で交叉する。そのため固有振動数の追跡が困難になるので、このときは振動 pick-up によりそのつど振動形を確認して判別する方法を取った。



(c)

図 2.17 供 試 か く

(a)円筒かく (b)球かく (c)圧力容器の模型

なお線形振動ではないと考えられる円筒かくの $n=5$, $c=0$, 圧力容器模型の $n=6$, $c=1$ の振動に対しては、このときも圧力による固有振動数の変化の傾向は計算結果とは全く異なった。

2.6 結 言

本章では圧力などの作用により予歪を受けている軸対称かくに対してすべての項を考慮して平衡方程式を確立し、これに Flugge の理論に基づく解法を適用して曲げ、自由振動、および座屈問題に対

処できる基礎方程式を導いた。前章において、Flügge の理論による解法はある種の問題に対してその解の精度が落ちることを示したので、ここではさらにそのような問題にも対処できるように修正した Flügge の理論に基づく解法をもあわせ示した。これとは別に、実用上の取扱いの簡易さを目的として Donnell 型の平衡方程式を導き、これより Donnell の理論に基づく解法をも提案した。

本解析による平衡方程式における予歪の影響の加え方と他者の導いた平衡方程式におけるこの加え方との基本的な差を示すため、Timoshenko らにより円筒かくに対して導かれた式との比較を行ない本解析の妥当性を確認した。

また本解析の妥当性を具体的な問題に対して検討するため、応用例として自由振動と座屈の問題を扱い、自由振動問題に対してはさらに実験をも行なった。自由振動問題では圧力による固有振動数の変化について求めたが、このときは Flügge と修正した Flügge の理論に基づく結果の差異は、前章で示した圧力を加えない状態での固有振動数の差異と同様にごくわずかであった。Donnell 型の基礎式による結果は、その簡単のため本解析によるものと比較して差異がやや大きくなったが、この問題に対しては工学上十分に使用が可能であることが確認された。また Timoshenko の式による結果と本解とは、Donnell 型の式を用いたときと同様に明らかな差異が認められた。座屈の問題として外圧によるこれらのかくの座屈圧力を求めたが、Donnell 型の式による結果は本解析によるものより座屈圧力はやや高くなることがわかった。

つぎにここで示した三つの解法の特長を簡潔に述べると、つぎのようになる。

i) Flügge の理論に基づく解法によれば、本解析によりすべての予歪による項を考慮しているのでどのような問題に対しても十分に対処することができ、通常のかくの問題では実用上問題はない。

ii) 修正した Flügge の理論に基づく解法によれば、前章で示した Flügge の理論による解の精度が落ちる問題に対して圧力が加わることより生じるこれらの諸問題にも十分に対処でき、しかもその取扱いはそれほど複雑にはならない。

iii) Donnell の理論に基づく解法は、その取扱いがきわめて簡単でありかつ計算も容易であるが、予歪による影響を十分に考慮していないため、取扱う問題によってはかなり精度が落ちるので十分に注意を要する。

なお自由振動問題に対する実験においては、前章で述べた非線形振動が圧力を加えた振動においても生じることがわかった。

第3章 軸対称かくの自由振動問題に対する摂動解法

3.1 緒 言

種々の軸対称形状圧力容器の自由振動問題を差分法により解く方法について前章までにおいて述べたが、これらの方法によれば形状が変化した場合や圧力が変動する場合などには、与えられた個々の形状、あるいはまた各圧力値に対してそのつど計算を行なわなければならない。これは他の解法、たとえば有限要素法などを用いるときも同様である。このことは実際に使用される圧力容器などのように常時その圧力値が変動するときには取扱いが面倒である。そこで本章ではこの欠点に対処することを目的として、摂動法⁽⁶⁹⁾⁽⁷⁰⁾を差分法と合わせ用いてこの問題を一度に解く方法について考察する。

まず圧力の作用を受ける一般軸対称かくの自由振動問題では、第2章で提案したいずれの解法を用いることも可能であるが、ここではFlüggeの理論に基づいた基礎方程式を用いて、この基礎方程式の係数に含まれる圧力値を摂動パラメータに取ることにより圧力の変化に対する自由振動特性の変化を簡単なベキ級数で求める方法について述べる。またこの摂動解法により得られた結果と、第2章で扱った方法により直接圧力値を与えて求めた結果との比較を行ない、本解法による解の有効範囲について検討する。

つぎにかく形状を変化させる場合の自由振動問題では、この形状変化を表わすパラメータとして種々の量が考えられるが、一般の軸対称形状のかくに共通な量としてかく厚を摂動パラメータにとる。このときも第1章で扱った各理論のうちそのいずれを用いてもよい

が、この問題に対しては Sanders の理論に基づく基礎方程式を用いて、かく厚のみがある範囲内で変化し他の形状寸法は同一である軸対称かくの自由振動問題を解く方法について述べる。これに対しても第1章で扱った方法により直接かく厚を変化させて求めた結果と比較して、本解法により得られた解の有効範囲について検討を行なう。

本解法によるときは、自由振動特性と圧力値、およびかく厚との関係を簡単なベキ級数の形で求めることができる。また本章では摂動パラメータとして圧力値とかく厚を取上げるが、このほか他の形状寸法を摂動パラメータに取ることもできる。

3.2 摂動解法

3.2.1 圧力による展開

この問題の基礎方程式として Flügge の理論に基づいて導いた式 (2.37) を用いる。無次元圧力 p を摂動パラメータとし、式 (2.37) においてこれを含む項を他の項と区別して表わすと次式のごとくになる。ただし以下の式においては、簡単のため添字 (n) を省略している。

$$\begin{aligned}
 & c_1 u_\xi'' + (c_2 + pc_3) u_\xi' + (c_4 + pc_5) u_\xi + (c_6 + pc_7) u_\theta' \\
 & + c_8 u_\theta + pc_9 w'' + (c_{10} + pc_{11}) w' + c_{12} w + c_{13} m_\xi' \\
 & + c_{14} m_\xi = -Q^2 u_\xi \\
 & (c_{15} + pc_{16}) u_\xi' + (c_{17} + pc_{18}) u_\xi + c_{19} u_\theta'' + (c_{20} + pc_{21}) u_\theta' \\
 & (c_{22} + pc_{23}) u_\theta + c_{24} w'' + (c_{25} + pc_{26}) w' \\
 & + (c_{27} + pc_{28}) w + c_{29} m_\xi = -Q^2 u_\theta
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
 & (c_{30} + pc_{31}) u'_\xi + (c_{32} + pc_{33}) u_\xi + pc_{34} u''_\theta + pc_{35} u'_\theta \\
 & + (c_{36} + pc_{37}) u_\theta + (c_{38} + pc_{39}) w'' + (c_{40} + pc_{41}) w' \\
 & + (c_{42} + pc_{43}) w + c_{44} m''_\xi + c_{45} m'_\xi + c_{46} m_\xi = -Q^2 w \\
 & c_{47} w'' + c_{48} w' + c_{49} w + c_{50} m_\xi = 0
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

係数 $c_1 \sim c_{50}$ は、式 (2.37) と式 (3.1) を比較のうえ表 2.1 を参照すれば決定できる。その結果を示すとつぎのごとくになる。

$$\begin{aligned}
 c_1 &= b & c_2 &= b r & c_3 &= \widetilde{q}_\xi \omega_\xi \\
 c_4 &= -\nu b \omega_\xi \omega_\theta - b r^2 - b \frac{(1-\nu)}{2} \frac{n^2}{\rho^2} \\
 c_5 &= \omega_\xi + \widetilde{q}_\xi \omega'_\xi + (\widetilde{q}_\xi r + \widetilde{q}'_\xi) \omega_\xi & c_6 &= b \frac{(1+\nu)}{2} \frac{n}{\rho} \\
 c_7 &= -(\widetilde{n}_\theta + \widetilde{m}_\theta \lambda^2 \omega_\xi) \frac{n}{\rho} & c_8 &= -b (3-\nu) r \frac{n}{2\rho} \\
 c_9 &= -\widetilde{q}_\xi & c_{10} &= b (\omega_\xi + \nu \omega_\theta) + \lambda^2 d (1-\nu) \omega_\xi \left[\frac{n^2}{\rho^2} + (1+\nu) r^2 \right] \\
 c_{11} &= -\widetilde{q}_\xi r - \widetilde{q}'_\xi - 1 \\
 c_{12} &= b (\omega'_\xi + r \omega_\xi - r \omega_\theta) - \lambda^2 d (1-\nu) (2+\nu) \frac{n^2}{\rho^2} r \omega_\xi \\
 c_{13} &= \lambda^2 \omega_\xi & c_{14} &= \lambda^2 (1-\nu) r \omega_\xi & c_{15} &= -b (1+\nu) \frac{n}{2\rho} \\
 c_{16} &= (\widetilde{n}_\xi + \widetilde{m}_\xi \lambda^2 \omega_\theta) \frac{n}{\rho} & c_{17} &= -b (3-\nu) \frac{n}{2\rho} r \\
 c_{18} &= (\widetilde{n}'_\xi + \widetilde{m}'_\xi \lambda^2 \omega_\theta) \frac{n}{\rho} & c_{19} &= b \frac{(1-\nu)}{2} \\
 c_{20} &= b \frac{(1-\nu)}{2} r & c_{21} &= \widetilde{n}_\xi r + \widetilde{m}_\xi \lambda^2 r \omega_\theta + \widetilde{q}_\xi \omega_\theta \\
 c_{22} &= b \frac{(1-\nu)}{2} (\omega_\xi \omega_\theta - r^2) - b \frac{n^2}{\rho^2} \\
 c_{23} &= \widetilde{n}'_\xi r + \widetilde{m}'_\xi \lambda^2 r \omega_\theta + \widetilde{q}'_\xi \omega_\theta - \widetilde{n}_\xi \omega_\xi \omega_\theta - \widetilde{m}_\xi \lambda^2 \omega_\xi \omega_\theta^2 \\
 & \quad + \widetilde{q}_\xi r \omega_\xi + \omega_\theta \\
 c_{24} &= \lambda^2 d (1-\nu) \frac{n}{\rho} \omega_\theta & c_{25} &= \lambda^2 d (1-\nu^2) \frac{n}{\rho} r \omega_\theta \\
 c_{26} &= \widetilde{q}_\xi \frac{n}{\rho}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{27} &= -b (\omega_{\theta} + \nu \omega_{\xi}) \frac{n}{\rho} + \lambda^2 d (1 - \nu) \omega_{\theta} \frac{n}{\rho} \left[\omega_{\xi} \omega_{\theta} - (1 + \nu) \frac{n^2}{\rho^2} \right] \\
c_{28} &= (\widetilde{q}'_{\xi} + 1) \frac{n}{\rho} & c_{29} &= -\lambda^2 \nu \omega_{\theta} \frac{n}{\rho} & c_{30} &= -b (\omega_{\xi} + \nu \omega_{\theta}) \\
c_{31} &= \widetilde{m}_{\xi} \lambda^2 \frac{n^2}{\rho^2} - \widetilde{n}_{\xi} \omega_{\xi} & c_{32} &= -b r (\omega_{\theta} + \nu \omega_{\xi}) \\
c_{33} &= \widetilde{m}'_{\xi} \lambda^2 \frac{n^2}{\rho^2} - \widetilde{n}_{\xi} (r \omega_{\xi} + \omega_{\xi}^2) - \widetilde{n}'_{\xi} \omega_{\xi} & c_{34} &= -\widetilde{m}_{\theta} \lambda^2 \frac{n}{\rho} \\
c_{35} &= (\widetilde{m}_{\xi} \lambda^2 r - \widetilde{m}'_{\theta} \lambda^2) \frac{n}{\rho} & c_{36} &= -b (\omega_{\theta} + \nu \omega_{\xi}) \frac{n}{\rho} \\
c_{37} &= (\widetilde{m}'_{\xi} \lambda^2 r - \widetilde{m}_{\xi} \lambda^2 \omega_{\xi} \omega_{\theta} - \widetilde{n}_{\theta} \omega_{\theta}) \frac{n}{\rho} \\
c_{38} &= \lambda^2 d (1 - \nu) \left[(1 + \nu) r^2 + 2 \frac{n^2}{\rho^2} \right] & c_{39} &= \widetilde{n}_{\xi} \\
c_{40} &= -\lambda^2 d (1 - \nu) r \left[(1 + \nu) (2 \omega_{\xi} \omega_{\theta} + r^2) + 2 \frac{n^2}{\rho^2} \right] \\
c_{41} &= \widetilde{n}_{\xi} r + \widetilde{n}'_{\xi} \\
c_{42} &= -b (\omega_{\xi}^2 + 2 \nu \omega_{\xi} \omega_{\theta} + \omega_{\theta}^2) + \lambda^2 d (1 - \nu) \left[(3 + \nu) \omega_{\xi} \omega_{\theta} \right. \\
&\quad \left. + 2 (2 + \nu) r^2 - (1 + \nu) \frac{n^2}{\rho^2} \right] \frac{n^2}{\rho^2} \\
c_{43} &= -\widetilde{n}_{\theta} \frac{n^2}{\rho^2} & c_{44} &= \lambda^2 & c_{45} &= \lambda^2 (2 - \nu) r \\
c_{46} &= -\lambda^2 \left[(1 - \nu) \omega_{\xi} \omega_{\theta} + \nu \frac{n^2}{\rho^2} \right] & c_{47} &= -d & c_{48} &= -d \nu r \\
c_{49} &= d \nu \frac{n^2}{\rho^2} & c_{50} &= -1
\end{aligned}$$

式 (3.1) に式 (1.56) を用いて差分近似すると式 (1.57) と同様に次式が得られる。

$$\bar{A}_j Z_{j-1} + \bar{B}_j Z_j + \bar{C}_j Z_{j+1} = \varrho \bar{D}_j Z_j \quad (3.2)$$

ここに、 $\bar{A}_j$, $\bar{B}_j$, $\bar{C}_j$ 、 および $\bar{D}_j$ はつぎの 4×4 行列である。

また、 Z_j は式 (1.55) で定義している解行列である。

$$\begin{aligned}
\bar{A}_j &= \begin{bmatrix} 2c_1 & -(c_6 + pc_7)\Delta & 2pc_9 & -c_{13}\Delta \\ -(c_2 + pc_3)\Delta & & -(c_{10} + pc_{11})\Delta & \\ -(c_{15} + pc_{16})\Delta & 2c_{19} & 2c_{24} & 0 \\ & -(c_{20} + pc_{21})\Delta & -(c_{25} + pc_{26})\Delta & \\ -(c_{30} + pc_{31})\Delta & 2pc_{34} - pc_{35}\Delta & 2(c_{38} + pc_{39}) & 2c_{44} - c_{45}\Delta \\ & & -(c_{40} + pc_{41})\Delta & \\ 0 & 0 & 2c_{47} - c_{48}\Delta & 0 \end{bmatrix} \\
\bar{B}_j &= \begin{bmatrix} 2(c_4 + pc_5)\Delta^2 & 2c_8\Delta^2 & 4pc_9 & 2c_{14}\Delta^2 \\ -4c_1 & & +2c_{12}\Delta^2 & \\ 2(c_{17} + pc_{18})\Delta^2 & 2(c_{22} + pc_{23})\Delta^2 & 2(c_{27} + pc_{28})\Delta^2 & 2c_{29}\Delta^2 \\ & -4c_{19} & -4c_{24} & \\ 2(c_{32} + pc_{33})\Delta^2 & 2(c_{36} + pc_{37})\Delta^2 & 2(c_{42} + pc_{43})\Delta^2 & 2c_{46}\Delta^2 \\ & -4c_{34} & -4(c_{38} + pc_{39}) & -4c_{44} \\ 0 & 0 & 2c_{49}\Delta^2 - 4c_{47} & 2c_{50}\Delta^2 \end{bmatrix} \\
\bar{C}_j &= \begin{bmatrix} (c_2 + pc_3)\Delta & (c_6 + pc_7)\Delta & (c_{10} + pc_{11})\Delta & c_{13}\Delta \\ +2c_1 & & -2pc_9 & \\ (c_{15} + pc_{16})\Delta & (c_{20} + pc_{21})\Delta & (c_{25} + pc_{26})\Delta & 0 \\ & +2c_{19} & +2c_{24} & \\ (c_{30} + pc_{31})\Delta & 2pc_{34} + pc_{35}\Delta & 2(c_{38} + pc_{39}) & 2c_{44} + c_{45}\Delta \\ & & + (c_{40} + pc_{41})\Delta & \\ 0 & 0 & 2c_{47} + c_{48}\Delta & 0 \end{bmatrix} \\
\bar{D}_j &= \begin{bmatrix} -2\Delta^2 & & & \\ & -2\Delta^2 & & \\ & & -2\Delta^2 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

境界条件式 (1.61), (1.62)、および接合条件式 (1.63) を用い

て、式 (3.2) を差分点 $j = 1$ から N までについて行列表示すると、式 (1.69) で表わされる連立方程式が得られる。これを式 (1.70) と同様に表わすことにする。すなわち

$$H Z = \varrho^2 D Z \quad (3.4)$$

ここに、 H 、 D は $4N \times 4N$ 行列、 Z は $4N \times 1$ 行列である。この式 (3.4) を満足する固有値 ϱ と固有関数 Z は、各フーリエ指数 n に対して多数存在するから、これを ϱ_c, Z_c ($c = 0, 1, 2, \dots, M$, $M \leq N-3$) と表わす。添字 c は自由振動における節円数を表わしている。このようにおくと、式 (3.4) は次式のように書ける。

$$H Z_c = \varrho_c^2 D Z_c \quad (3.5)$$

つぎに、摂動パラメータの無次元圧力 p により固有値 ϱ_c および固有関数 Z_c を展開する。

$$\varrho_c^2 = \sum_{i=0}^M \varrho_{ci}^2 p^i \quad (3.6)$$

$$Z_c = \sum_{i=0}^M Z_{ci} p^i \quad (3.7)$$

ただし、 $c = 0, 1, 2, \dots, M$, $M \leq N-3$

また演算子 H を非摂動演算子 H_0 とこれに対する摂動項 H_1 とに分離する。すなわち

$$H = H_0 + p H_1 \quad (3.8)$$

この行列 H_0 に含まれる式 (3.2) の係数の行列 $\bar{A}_j, \bar{B}_j, \bar{C}_j$ を $\bar{A}_{j0}, \bar{B}_{j0}, \bar{C}_{j0}$ とし、 H_1 に含まれるものを $\bar{A}_{j1}, \bar{B}_{j1}, \bar{C}_{j1}$ とするとつぎのようになる。

$$\bar{A}_{j0} = \begin{bmatrix} 2c_1 - c_2 \Delta & -c_6 \Delta & -c_{10} \Delta & -c_{13} \Delta \\ -c_{15} \Delta & 2c_{19} - c_{20} \Delta & 2c_{24} - c_{25} \Delta & 0 \\ -c_{30} \Delta & 0 & 2c_{38} - c_{40} \Delta & 2c_{44} \Delta - c_{45} \Delta \\ 0 & 0 & 2c_{47} - c_{48} \Delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_{j0} = \begin{bmatrix} 2c_4 \Delta^2 - 4c_1 & 2c_8 \Delta^2 & 2c_{12} \Delta^2 & 2c_{14} \Delta^2 \\ 2c_{17} \Delta^2 & 2c_{22} \Delta^2 - 4c_{19} & 2c_{27} \Delta^2 - 4c_{24} & 2c_{29} \Delta^2 \\ 2c_{32} \Delta^2 & 2c_{36} \Delta^2 - 4c_{34} & 2c_{42} \Delta^2 - 4c_{38} & 2c_{46} \Delta^2 - 4c_{44} \\ 0 & 0 & 2c_{49} \Delta^2 - 4c_{47} & 2c_{50} \Delta^2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_{j0} = \begin{bmatrix} 2c_1 + c_2 \Delta & c_6 \Delta & c_{10} \Delta & c_{13} \Delta \\ c_{15} \Delta & 2c_{19} + c_{20} \Delta & 2c_{24} + c_{25} \Delta & 0 \\ c_{30} \Delta & 0 & 2c_{38} + c_{40} \Delta & 2c_{44} \Delta + c_{45} \Delta \\ 0 & 0 & 2c_{47} + c_{48} \Delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{j1} = \begin{bmatrix} -c_3 \Delta & -c_7 \Delta & 2c_9 - c_{11} \Delta & 0 \\ -c_{16} \Delta & -c_{21} \Delta & -c_{26} \Delta & 0 \\ -c_{31} \Delta & 2c_{34} - c_{35} \Delta & 2c_{39} - c_{41} \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_{j1} = \begin{bmatrix} 2c_5 \Delta^2 & 0 & 4c_9 & 0 \\ 2c_{18} \Delta^2 & 2c_{23} \Delta^2 & 2c_{28} \Delta^2 & 0 \\ 2c_{33} \Delta^2 & 2c_{37} \Delta^2 & 2c_{43} \Delta^2 - 4c_{39} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_{j1} = \begin{bmatrix} c_3 \Delta & c_7 \Delta & -2c_9 + c_{11} \Delta & 0 \\ c_{16} \Delta & c_{21} \Delta & c_{26} \Delta & 0 \\ c_{31} \Delta & 2c_{34} + c_{35} \Delta & 2c_{39} + c_{41} \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

式 (3.6), (3.7), および (3.8) を式 (3.5) に代入し両辺

の p の同次項の係数を等置すれば、つぎの第零次摂動式、第一次摂動式などが得られる。

$$p^0 : H_0 Z_{c0} = Q_{c0}^2 DZ_{c0} \quad (3.9)$$

$$p^1 : H_0 Z_{c1} + H_1 Z_{c0} = Q_{c0}^2 DZ_{c1} + Q_{c1}^2 DZ_{c0} \quad (3.10)$$

$$p^2 : H_0 Z_{c2} + H_1 Z_{c1} = Q_{c0}^2 DZ_{c2} + Q_{c1}^2 DZ_{c1} + Q_{c2}^2 DZ_{c0} \quad (3.11)$$

$$p^3 : \text{-----}$$

3.2.2 かく厚による展開

この問題に対しては Sanders のかく理論に基づく基礎方程式を用いる。ここで基準かく厚を h_0 としつぎの量を定義する。

$$\lambda_0 = h_0 / a \quad \epsilon = (h^2 - h_0^2) / h_0^2 \quad (3.12)$$

ϵ はかく厚の変化量を表わすパラメータであり、これを摂動パラメータにとる。このようにおくと式 (1.14) で表わされる Sanders による基礎方程式はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} & c_1 u_\xi'' + c_2 u_\xi' + (c_3 + c_4 \lambda_0^2 + c_4 \lambda_0^2 \epsilon) u_\xi + (c_5 + c_6 \lambda_0^2 \\ & + c_6 \lambda_0^2 \epsilon) u_\theta' + (c_7 + c_8 \lambda_0^2 + c_8 \lambda_0^2 \epsilon) u_\theta + (c_9 \\ & + c_{10} \lambda_0^2 + c_{10} \lambda_0^2 \epsilon) w' + (c_{11} + c_{12} \lambda_0^2 + c_{12} \lambda_0^2 \epsilon) w \\ & + (c_{13} \lambda_0^2 + c_{13} \lambda_0^2 \epsilon) m_\xi' + (c_{14} \lambda_0^2 + c_{14} \lambda_0^2 \epsilon) m_\xi \\ & = -Q^2 u_\xi \\ & (c_{15} + c_{16} \lambda_0^2 + c_{16} \lambda_0^2 \epsilon) u_\xi' + (c_{17} + c_{18} \lambda_0^2 + c_{18} \lambda_0^2 \epsilon) u_\xi \\ & + (c_{19} + c_{20} \lambda_0^2 + c_{20} \lambda_0^2 \epsilon) u_\theta'' + (c_{21} + c_{22} \lambda_0^2 \\ & + c_{22} \lambda_0^2 \epsilon) u_\theta' + (c_{23} + c_{24} \lambda_0^2 + c_{24} \lambda_0^2 \epsilon) u_\theta + (c_{25} \lambda_0^2 \\ & + c_{25} \lambda_0^2 \epsilon) w'' + (c_{26} \lambda_0^2 + c_{26} \lambda_0^2 \epsilon) w' + (c_{27} + c_{28} \lambda_0^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
& + c_{28} \lambda_0^2 \varepsilon) w + (c_{29} \lambda_0^2 + c_{29} \lambda_0^2 \varepsilon) m_\xi = -Q^2 u_\theta \\
& (c_{30} + c_{31} \lambda_0^2 + c_{31} \lambda_0^2 \varepsilon) u'_\xi + (c_{32} + c_{33} \lambda_0^2 + c_{33} \lambda_0^2 \varepsilon) u_\xi \\
& + (c_{34} \lambda_0^2 + c_{34} \lambda_0^2 \varepsilon) u''_\theta + (c_{35} \lambda_0^2 + c_{35} \lambda_0^2 \varepsilon) u'_\theta \\
& + (c_{36} + c_{37} \lambda_0^2 + c_{37} \lambda_0^2 \varepsilon) u_\theta + (c_{38} \lambda_0^2 + c_{38} \lambda_0^2 \varepsilon) w'' \\
& + (c_{39} \lambda_0^2 + c_{39} \lambda_0^2 \varepsilon) w' + (c_{40} + c_{41} \lambda_0^2 + c_{41} \lambda_0^2 \varepsilon) w \\
& + (\lambda_0^2 + \varepsilon \lambda_0^2) m''_\xi + (c_{42} \lambda_0^2 + c_{42} \lambda_0^2 \varepsilon) m'_\xi + (c_{43} \lambda_0^2 \\
& + c_{43} \lambda_0^2 \varepsilon) m_\xi = -Q^2 w \\
& c_{44} u'_\xi + c_{45} u_\xi + c_{46} u_\theta + c_{47} w'' + c_{48} w' + c_{49} w + c_{50} m'_\xi = 0
\end{aligned} \tag{3.13}$$

この係数 $c_1 \sim c_{50}$ は表 1.2 の Sanders の理論による基礎方程式の係数 $a_1 \sim a_{36}$ を λ_0^2 の項、 $\lambda_0^2 \varepsilon$ の項、およびその他の項に分けることにより得られる。これを示すとつぎのようになる。

$$c_1 = b \quad c_2 = br$$

$$c_3 = -\nu b \omega_\xi \omega_\theta - br^2 - b \frac{(1 - \nu)}{2} \frac{n^2}{\rho^2}$$

$$c_4 = -d(1 - \nu) \left[(1 + \nu) r^2 \omega_\xi^2 + (3\omega_\xi - \omega_\theta)^2 \frac{n^2}{8\rho^2} \right]$$

$$c_5 = b(1 + \nu) \frac{n}{2\rho}$$

$$c_6 = d(1 - \nu) (3\omega_\xi - \omega_\theta) (3\omega_\theta - \omega_\xi) \frac{n}{8\rho}$$

$$c_7 = -b(3 - \nu) r \frac{n}{2\rho}$$

$$\begin{aligned}
c_8 = & -d(1 - \nu) r \frac{n}{\rho} \left[\frac{1}{8} (3\omega_\xi - \omega_\theta) (3\omega_\theta - \omega_\xi) \right. \\
& \left. + (1 + \nu) \omega_\xi \omega_\theta \right]
\end{aligned}$$

$$c_9 = b(\omega_\xi + \nu \omega_\theta)$$

$$c_{10} = d(1 - \nu) \left[(1 + \nu) r^2 \omega_\xi + (3\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{n^2}{2\rho^2} \right]$$

$$c_{11} = b(\omega'_\xi + r\omega_\xi - r\omega_\theta)$$

$$c_{12} = -d(1 - \nu) r \frac{n^2}{\rho^2} \left[\frac{1}{2} (3\omega_\xi - \omega_\theta) + (1 + \nu) \omega_\xi \right]$$

$$c_{13} = \omega_\xi \quad c_{14} = (1 - \nu) r \omega_\xi \quad c_{15} = -b(1 + \nu) \frac{n}{2\rho}$$

$$c_{16} = -d(1 - \nu) (3\omega_\xi - \omega_\theta) (3\omega_\theta - \omega_\xi) \frac{n}{8\rho}$$

$$c_{17} = -b(3 - \nu) r \frac{n}{2\rho}$$

$$c_{18} = -d(1 - \nu) \frac{n}{\rho} \left[(1 + \nu) r \omega_\xi \omega_\theta - \frac{r}{8} (6\omega_\xi \omega_\theta - 7\omega_\xi^2 - 3\omega_\theta^2) + \frac{\omega'_\xi}{4} (5\omega_\theta - 3\omega_\xi) \right]$$

$$c_{19} = b \frac{(1 - \nu)}{2} \quad c_{20} = d \frac{(1 - \nu)}{8} (3\omega_\theta - \omega_\xi)^2$$

$$c_{21} = b r \frac{(1 - \nu)}{2}$$

$$c_{22} = d \frac{(1 - \nu)}{8} (3\omega_\theta - \omega_\xi) \left[r(5\omega_\xi - 3\omega_\theta) - 2\omega'_\xi \right]$$

$$c_{23} = b \frac{(1 - \nu)}{2} (\omega_\xi \omega_\theta - r^2) - b \frac{n^2}{\rho^2}$$

$$c_{24} = d(1 - \nu) \left[\frac{1}{8} \omega_\xi \omega_\theta (3\omega_\theta - \omega_\xi)^2 - (1 + \nu) \omega_\theta^2 \frac{n^2}{\rho^2} + \frac{r}{8} (3\omega_\theta - \omega_\xi) (2\omega'_\xi - 5r\omega_\xi + 3r\omega_\theta) \right]$$

$$c_{25} = d(1 - \nu) (3\omega_\theta - \omega_\xi) \frac{n}{2\rho}$$

$$c_{26} = d(1 - \nu) \left[2(1 + \nu) r \omega_\theta - \omega'_\xi + 3r(\omega_\xi - \omega_\theta) \right] \frac{n}{2\rho}$$

$$c_{27} = -b(\omega_\theta + \nu \omega_\xi) \frac{n}{\rho}$$

$$c_{28} = d(1 - \nu) \frac{n}{2\rho} \left[r \omega'_\xi - 2r^2 \omega_\xi - 2(1 + \nu) \omega_\theta \frac{n^2}{\rho^2} + (3\omega_\theta - \omega_\xi) (r^2 + \omega_\xi \omega_\theta) \right]$$

$$c_{29} = -\nu \omega_\theta \frac{n}{\rho} \quad c_{30} = -b(\omega_\xi + \nu \omega_\theta)$$

$$c_{31} = -d(1 - \nu) \left[(1 + \nu) r^2 \omega_\xi + (3\omega_\xi - \omega_\theta) \frac{n^2}{2\rho^2} \right]$$

$$c_{32} = -b r (\omega_\theta + \nu \omega_\xi)$$

$$c_{33} = d(1 - \nu) \left[(1 + \nu) r (2\omega_\xi^2 \omega_\theta + r^2 \omega_\xi - r \omega'_\xi - \omega_\xi \frac{n^2}{\rho^2}) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + (r\omega_\xi - r\omega_\theta - 3\omega'_\xi) \frac{n^2}{2\rho^2} \Big\} \\
c_{34} &= d(1-\nu)(3\omega_\theta - \omega_\xi) \frac{n}{2\rho} \\
c_{35} &= d(1-\nu) \Big[3r\omega_\xi - r\omega_\theta(5+2\nu) - \omega'_\xi \Big] \frac{n}{2\rho} \\
c_{36} &= -b(\omega_\theta + \nu\omega_\xi) \frac{n}{\rho} \\
c_{37} &= d(1-\nu) \Big[2(1+\nu)(\omega_\xi\omega_\theta^2 - r^2\omega_\xi + 2r^2\omega_\theta - \omega_\theta \frac{n^2}{\rho^2}) \\
& + r\omega'_\xi + 3r^2(\omega_\theta - \omega_\xi) + \omega_\xi\omega_\theta(3\omega_\theta - \omega_\xi) \Big] \frac{n}{2\rho} \\
c_{38} &= d(1-\nu) \Big[(1+\nu)r^2 + 2\frac{n^2}{\rho^2} \Big] \\
c_{39} &= -d(1-\nu)r \Big[(1+\nu)(2\omega_\xi\omega_\theta + r^2) + 2\frac{n^2}{\rho^2} \Big] \\
c_{40} &= -b(\omega_\xi^2 + 2\nu\omega_\xi\omega_\theta + \omega_\theta^2) \\
c_{41} &= d(1-\nu) \Big[(3+\nu)\omega_\xi\omega_\theta + 2(2+\nu)r^2 \\
& - (1+\nu)\frac{n^2}{\rho^2} \Big] \frac{n^2}{\rho^2} \\
c_{42} &= (2-\nu)r \quad c_{43} = - \Big[(1-\nu)\omega_\xi\omega_\theta + \nu\frac{n^2}{\rho^2} \Big] \\
c_{44} &= d\omega_\xi \quad c_{45} = d(\omega'_\xi + \nu r\omega_\xi) \quad c_{46} = d\nu\omega_\theta \frac{n}{\rho} \\
c_{47} &= -d \quad c_{48} = -d\nu r \quad c_{49} = d\nu \frac{n^2}{\rho^2} \quad c_{50} = -1
\end{aligned}$$

式(3.13)を差分近似すると式(3.2)が得られる。ただし、このときの行列 $\bar{A}_j$, $\bar{B}_j$, $\bar{C}_j$ はつぎのようになる。 $\bar{D}_j$ は式(3.3)の通りである。

$$\begin{aligned}
\bar{A}_j &= \begin{bmatrix} 2c_1 - c_2 \Delta & -c_5 \Delta & -c_9 \Delta & -c_{13} \Delta \lambda_0^2 (1+\epsilon) \\ & -c_6 \Delta \lambda_0^2 (1+\epsilon) & -c_{10} \Delta \lambda_0^2 (1+\epsilon) & \\ -c_{15} \Delta & 2c_{19} - c_{21} \Delta & (2c_{25} - c_{26} \Delta) & 0 \\ -c_{16} \Delta \lambda_0^2 (1+\epsilon) & + (2c_{20} - c_{22} \Delta) & \times \lambda_0^2 (1+\epsilon) & \\ & \times \lambda_0^2 (1+\epsilon) & & \\ -c_{30} \Delta & (2c_{34} - c_{35} \Delta) & (2c_{38} - c_{39} \Delta) & (2 - c_{42} \Delta) \\ -c_{31} \Delta \lambda_0^2 (1+\epsilon) & \times \lambda_0^2 (1+\epsilon) & \times \lambda_0^2 (1+\epsilon) & \times \lambda_0^2 (1+\epsilon) \\ -c_{44} \Delta & 0 & 2c_{47} - c_{48} \Delta & 0 \end{bmatrix} \\
\bar{B}_j &= \begin{bmatrix} 2c_3 \Delta^2 - 4c_1 & 2c_7 \Delta^2 & 2c_{11} \Delta^2 & 2c_{14} \Delta^2 \\ + 2c_4 \Delta^2 \lambda_0^2 (1+\epsilon) & + 2c_8 \Delta^2 \lambda_0^2 (1+\epsilon) & + 2c_{12} \Delta^2 \lambda_0^2 (1+\epsilon) & \times \lambda_0^2 (1+\epsilon) \\ 2c_{17} \Delta^2 & 2c_{23} \Delta^2 - 4c_{19} & 2c_{27} \Delta^2 & 2c_{29} \Delta^2 \\ + 2c_{18} \Delta^2 \lambda_0^2 (1+\epsilon) & + (2c_{24} \Delta^2 - 4c_{20}) & + (2c_{28} \Delta^2 - 4c_{25}) & \times \lambda_0^2 (1+\epsilon) \\ & \times \lambda_0^2 (1+\epsilon) & \times \lambda_0^2 (1+\epsilon) & \\ 2c_{32} \Delta^2 & 2c_{36} \Delta^2 & 2c_{40} \lambda_0^2 & (2c_{43} \Delta^2 - 4) \\ + 2c_{33} \Delta^2 \lambda_0^2 (1+\epsilon) & + (2c_{37} \Delta^2 - 4c_{34}) & + (2c_{41} \Delta^2 - 4c_{38}) & \times \lambda_0^2 (1+\epsilon) \\ & \times \lambda_0^2 (1+\epsilon) & \times \lambda_0^2 (1+\epsilon) & \\ 2c_{45} \Delta^2 & 2c_{46} \Delta^2 & 2c_{49} \Delta^2 - 4c_{47} & 2c_{50} \Delta^2 \end{bmatrix} \\
\bar{C}_j &= \begin{bmatrix} 2c_1 + c_2 \Delta & c_5 \Delta & c_9 \Delta & c_{13} \Delta \lambda_0^2 (1+\epsilon) \\ & + c_6 \Delta \lambda_0^2 (1+\epsilon) & + c_{10} \Delta \lambda_0^2 (1+\epsilon) & \\ c_{15} \Delta & 2c_{19} + c_{21} \Delta & (2c_{25} + c_{26} \Delta) & 0 \\ + c_{16} \Delta \lambda_0^2 (1+\epsilon) & + (2c_{20} + c_{22} \Delta) & \times \lambda_0^2 (1+\epsilon) & \\ & \times \lambda_0^2 (1+\epsilon) & & \\ c_{30} \Delta & (2c_{34} + c_{35} \Delta) & (2c_{38} + c_{39} \Delta) & (2 + c_{42} \Delta) \\ + c_{31} \Delta \lambda_0^2 (1+\epsilon) & \times \lambda_0^2 (1+\epsilon) & \times \lambda_0^2 (1+\epsilon) & \times \lambda_0^2 (1+\epsilon) \\ c_{44} \Delta & 0 & 2c_{47} + c_{48} \Delta & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(3.14)

境界条件、接続条件に使用される合応力を表わす式もまた同様に

λ_0^2 の項、 $\lambda_0^2 \varepsilon$ の項、 およびその他の項に分離しなければならない。
これを示すと、式 (1.42) および表 1.1 からつぎのようになることがわかる。

$$\begin{aligned}
 n_\xi &= d_1 u'_\xi + d_2 u_\xi + d_3 u_\theta + d_4 w \\
 \hat{n}_{\xi\theta} &= (d_5 + d_6 \lambda_0^2 + d_6 \lambda_0^2 \varepsilon) u_\xi + (d_7 + d_8 \lambda_0^2 \\
 &\quad + d_8 \lambda_0^2 \varepsilon) u'_\theta + (d_9 + d_{10} \lambda_0^2 + d_{10} \lambda_0^2 \varepsilon) u_\theta \\
 &\quad + (d_{11} \lambda_0^2 + d_{11} \lambda_0^2 \varepsilon) w' + (d_{12} \lambda_0^2 + d_{12} \lambda_0^2 \varepsilon) w \\
 \hat{q}_\xi &= (d_{13} \lambda_0^2 + d_{13} \lambda_0^2 \varepsilon) u_\xi + (d_{14} \lambda_0^2 + d_{14} \lambda_0^2 \varepsilon) u'_\theta \\
 &\quad + (d_{15} \lambda_0^2 + d_{15} \lambda_0^2 \varepsilon) u_\theta + (d_{16} \lambda_0^2 + d_{16} \lambda_0^2 \varepsilon) w' \\
 &\quad + (d_{17} \lambda_0^2 + d_{17} \lambda_0^2 \varepsilon) w + (\lambda_0^2 + \lambda_0^2 \varepsilon) m'_\xi \\
 &\quad + (d_{18} \lambda_0^2 + d_{18} \lambda_0^2 \varepsilon) m_\xi
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

この係数 $d_1 \sim d_{18}$ を示すとつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 d_1 &= b & d_2 &= b\nu r & d_3 &= b\nu \frac{n}{\rho} & d_4 &= b(\omega_\xi + \nu\omega_\theta) \\
 d_5 &= -b(1-\nu)\frac{n}{2\rho} \\
 d_6 &= -d(1-\nu)\frac{n}{8\rho}(3\omega_\xi - \omega_\theta)(3\omega_\theta - \omega_\xi) \\
 d_7 &= b\frac{(1-\nu)}{2} & d_8 &= d\frac{(1-\nu)}{8}(3\omega_\theta - \omega_\xi)^2 \\
 d_9 &= -b\frac{(1-\nu)}{2}r & d_{10} &= -d(1-\nu)r\frac{n}{2\rho}(3\omega_\theta - \omega_\xi)^2 \\
 d_{11} &= d(1-\nu)\frac{n}{2\rho}(3\omega_\theta - \omega_\xi) \\
 d_{12} &= -d(1-\nu)r\frac{n}{2\rho}(3\omega_\theta - \omega_\xi) \\
 d_{13} &= -d(1-\nu)\left[(1+\nu)r^2\omega_\xi + \frac{n^2}{2\rho^2}(3\omega_\xi - \omega_\theta)\right] \\
 d_{14} &= d(1-\nu)\frac{n}{2\rho}(3\omega_\theta - \omega_\xi) \\
 d_{15} &= -d(1-\nu)r\frac{n}{2\rho}\left[3\omega_\theta - \omega_\xi + 2(1+\nu)\omega_\theta\right] \\
 d_{16} &= d(1-\nu)\left[2\frac{n^2}{\rho^2} + (1+\nu)r^2\right]
 \end{aligned}$$

$$d_{17} = -d(1 - \nu)(3 + \nu)r \frac{n^2}{\rho^2}$$

$$d_{18} = (1 - \nu)r$$

その他の境界条件および接続条件に関する諸式は第1章での取扱いと同じである。

式(3.2)を差分点 $j = 1$ から N までについて行列表示すれば式(3.4)が得られ、これを各節円数 c について表わすと式(3.5)となる。

ここで、摂動パラメータのかく厚変化量 ϵ により固有値と固有関数をつぎのように展開する。

$$Q_c^2 = \sum_{i=0}^M Q_{ci}^2 \epsilon^i \quad (3.16)$$

$$Z_c = \sum_{i=0}^M Z_{ci} \epsilon^i \quad (3.17)$$

ただし、 $c = 0, 1, 2, \dots, M$, $M \leq N - 3$

また演算子 H をつぎのように置く。

$$H = H_0 + \epsilon H_1 \quad (3.18)$$

この行列 H_0 に含まれる行列 $\bar{A}_{j0}$, $\bar{B}_{j0}$, $\bar{C}_{j0}$ と行列 H_1 に含まれる行列 $\bar{A}_{j1}$, $\bar{B}_{j1}$, $\bar{C}_{j1}$ を示すとつぎのごとくになる。

$$\bar{A}_{j0} = \begin{bmatrix} 2c_1 - c_2 \Delta & -c_5 \Delta - c_6 \Delta \lambda_0^2 & -c_9 \Delta - c_{10} \Delta \lambda_0^2 & -c_{13} \Delta \lambda_0^2 \\ -c_{15} \Delta - c_{16} \Delta \lambda_0^2 & 2c_{19} - c_{21} \Delta & (2c_{25} - c_{26} \Delta) \lambda_0^2 & 0 \\ & + (2c_{20} - c_{22} \Delta) \lambda_0^2 & & \\ -c_{30} \Delta - c_{31} \Delta \lambda_0^2 & (2c_{34} - c_{35} \Delta) \lambda_0^2 & (2c_{38} - c_{39} \Delta) \lambda_0^2 & (2 - c_{42} \Delta) \lambda_0^2 \\ -c_{44} \Delta & 0 & 2c_{47} - c_{48} \Delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{B}_{j0} = \begin{bmatrix} 2c_3 \Delta^2 - 4c_1 & 2c_7 \Delta^2 & 2c_{11} \Delta^2 & 2c_{14} \Delta^2 \lambda_0^2 \\ + 2c_4 \Delta^2 \lambda_0^2 & + 2c_8 \Delta^2 \lambda_0^2 & + 2c_{12} \Delta^2 \lambda_0^2 & \\ 2c_{17} \Delta^2 & 2c_{23} \Delta^2 - 4c_{19} & 2c_{27} \Delta^2 & 2c_{29} \Delta^2 \lambda_0^2 \\ + 2c_{18} \Delta^2 \lambda_0^2 & + (2c_{24} \Delta^2 - 4c_{20}) \lambda_0^2 & + (2c_{28} \Delta^2 - 4c_{25}) \lambda_0^2 & \\ 2c_{32} \Delta^2 & 2c_{36} \Delta^2 & 2c_{40} \Delta^2 & (2c_{43} \Delta^2 - 4) \\ + 2c_{33} \Delta^2 \lambda_0^2 & + (2c_{37} \Delta^2 - 4c_{34}) \lambda_0^2 & + (2c_{41} \Delta^2 - 4c_{38}) \lambda_0^2 & \times \lambda_0^2 \\ 2c_{45} \Delta^2 & 2c_{46} \Delta^2 & 2c_{49} \Delta^2 - 4c_{47} & 2c_{50} \Delta^2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{C}_{j0} = \begin{bmatrix} 2c_1 + c_2 \Delta & c_5 + c_6 \Delta \lambda_0^2 & c_9 \Delta + c_{10} \Delta \lambda_0^2 & c_{13} \Delta \lambda_0^2 \\ c_{15} \Delta + c_{16} \Delta \lambda_0^2 & 2c_{19} + c_{21} \Delta & (2c_{25} + c_{26} \Delta) \lambda_0^2 & 0 \\ & + (2c_{20} + c_{22} \Delta) \lambda_0^2 & & \\ c_{30} \Delta + c_{31} \Delta \lambda_0^2 & (2c_{34} + c_{35} \Delta) \lambda_0^2 & (2c_{38} + c_{39} \Delta) \lambda_0^2 & (2 + c_{42} \Delta) \lambda_0^2 \\ c_{44} \Delta & 0 & 2c_{47} + c_{48} \Delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A}_{j1} = \begin{bmatrix} 0 & -c_6 \Delta \lambda_0^2 & -c_{10} \Delta \lambda_0^2 & -c_{13} \Delta \lambda_0^2 \\ -c_{16} \Delta \lambda_0^2 & (2c_{20} - c_{22} \Delta) \lambda_0^2 & (2c_{25} - c_{26} \Delta) \lambda_0^2 & 0 \\ -c_{31} \Delta \lambda_0^2 & (2c_{34} - c_{35} \Delta) \lambda_0^2 & (2c_{38} - c_{39} \Delta) \lambda_0^2 & (2 - c_{42} \Delta) \lambda_0^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{B}_{j1} = \begin{bmatrix} 2c_4 \Delta^2 \lambda_0^2 & 2c_8 \Delta^2 \lambda_0^2 & 2c_{12} \Delta^2 \lambda_0^2 & 2c_{14} \Delta^2 \lambda_0^2 \\ 2c_{18} \Delta^2 \lambda_0^2 & (2c_{24} \Delta^2 - 4c_{20}) \lambda_0^2 & (2c_{28} \Delta^2 - 4c_{25}) \lambda_0^2 & 2c_{29} \Delta^2 \lambda_0^2 \\ 2c_{33} \Delta^2 \lambda_0^2 & (2c_{37} \Delta^2 - 4c_{34}) \lambda_0^2 & (2c_{41} \Delta^2 - 4c_{38}) \lambda_0^2 & (2c_{43} \Delta^2 \\ & & & - 4) \lambda_0^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_{j1} = \begin{bmatrix} 0 & c_6 \Delta \lambda_0^2 & c_{10} \Delta \lambda_0^2 & c_{13} \Delta \lambda_0^2 \\ c_{16} \Delta \lambda_0^2 & (2c_{20} + c_{22} \Delta) \lambda_0^2 & (2c_{25} + c_{26} \Delta) \lambda_0^2 & 0 \\ c_{31} \Delta \lambda_0^2 & (2c_{34} + c_{35} \Delta) \lambda_0^2 & (2c_{38} + c_{39} \Delta) \lambda_0^2 & (2 + c_{42} \Delta) \lambda_0^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

式 (3.16) , (3.17)、および (3.18) を式 (3.5) に代入し、両辺の ϵ の同次項について整理すると次式が得られる。

$$\epsilon^0 : H_0 Z_{c0} = Q_{c0}^2 DZ_{c0} \quad (3.19)$$

$$\epsilon^1 : H_0 Z_{c1} + H_1 Z_{c0} = Q_{c0}^2 DZ_{c1} + Q_{c1}^2 DZ_{c0} \quad (3.20)$$

$$\epsilon^2 : H_0 Z_{c2} + H_1 Z_{c1} = Q_{c0}^2 DZ_{c2} + Q_{c1}^2 DZ_{c1} + Q_{c2}^2 DZ_{c0} \quad (3.21)$$

$$\epsilon^3 : \text{-----}$$

3.3 直交関係

本問題に摂動法を用いるためには、かくの自由振動における直交関係が必要であるので、ここでこの関係について考えることにする。

一般に弾性体の自由振動においては、二つの自由振動変位場 $V_i^{(c)}$ と $V_i^{(k)}$ の間につぎの直交関係が成立する。⁽⁷¹⁾⁽⁷²⁾

$$\int V_i^{(c)} V_i^{(k)} dm = \begin{cases} \text{定数} & (c = k) \\ 0 & (c \neq k) \end{cases} \quad (3.22)$$

ここに dm は微小質量要素であり、積分はかく体の体積全体にわたって行なう。この関係式が不連続点を持つかくに対して差分によりどのように表わされるかについて考える。

まずはじめにつぎの行列を定義する。

$$\rho = \begin{bmatrix} \overline{\rho}_1 & & & & & \\ & \overline{\rho}_2 & & & & \\ & & \overline{\rho}_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \overline{\rho}_{N-2} & \\ & & & & & \overline{\rho}_{N-1} \\ & & & & & & \overline{\rho}_N \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

ここに $\overline{\rho}_j$ はつぎの行列である。

$$\overline{\rho}_j = \begin{bmatrix} \rho_j & & & \\ & \rho_j & & \\ & & \rho_j & \\ & & & \rho_j \end{bmatrix}$$

ρ_j は任意差分点の無次元半径である。

つぎに図 1.6 のような領域 $(0, \overline{s})$ の分割に対して、つぎに示す行列を定義する。ただし、ここでは簡単のため不連続点の数 l を 2 個としこれを m, l としている。3 個以上のときも取扱いは同様である。

$$g = \begin{bmatrix} \overline{g}_1 & & & & & \\ & \overline{g}_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \overline{g}_{m-1} & & \\ & & & & \overline{g}_m & \\ & & & & & \overline{g}_{m+1} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \overline{g}_{l-1} \\ & & & & & & & \overline{g}_l \\ & & & & & & & & \overline{g}_{l+1} \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \overline{g}_{N-1} \\ & & & & & & & & & & \overline{g}_N \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\text{ここに} \quad \bar{g}_j = \begin{bmatrix} g_j & & & \\ & g_j & & \\ & & g_j & \\ & & & g_j \end{bmatrix}$$

ただし、 g_j はつぎの量である。

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= g_m = \frac{A_1}{2A_s} & g_2 &= g_3 = \cdots = g_{m-1} = \frac{A_1}{A_s} \\ g_{m+1} &= g_l = \frac{A_2}{2A_s} & g_{m+2} &= g_{m+3} = \cdots = g_{l-1} = \frac{A_2}{A_s} \\ g_{l+1} &= g_N = \frac{A_3}{2A_s} & g_{l+2} &= g_{l+3} = \cdots = g_{N-1} = \frac{A_3}{A_s} \\ A_s &= \bar{s}/a \{ N_1 + N_2 + \cdots + N_{l+1} - (l-1) \} \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

A_1 , A_2 , A_3 は各領域における差分間隔である。 すなわち、 g は分割した長さに比列して領域 $(0, \bar{s})$ を各差分点に割り当てたときの比率を表わす行列である。 これらの行列を用いると式 (3.22) の直交関係式は次式のように表わされる。

$$(\rho \quad g \quad Z_k)^T D Z_c = \begin{pmatrix} 1/k & (k=c) \\ 0 & (k \neq c) \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

$$(\rho \quad g \quad Z_{k_0})^T D Z_{c_0} = \begin{pmatrix} 1/k_0 & (k=c) \\ 0 & (k \neq c) \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

ここに、 k, k_0 はある定数である。 しかし、のちに示すように $k=k_0$ であるので、この両式は本質的には同じである。

本問題においては全領域 $(0, \bar{s})$ において板厚が一定である軸対称かくを取扱っているから、式 (3.22) の積分を行なうときに式 (3.26) , (3.27) に ρ, g だけが含まれる。 また Z の要素としては、変位成分 $u_{\xi j}, u_{\theta j}, w_j$ のほかに $m_{\xi j}$ が含まれているので、その影響を除去するために D が必要である。

3.4 摂動項

摂動解法により解を求めるときには式 (3.6), (3.7)、および式 (3.16), (3.17) のように展開したときのパラメータの係数、すなわち第 i 次摂動項 ϱ_{ci} , Z_{ci} ($i = 0, 1, 2, \dots$) を式 (3.9) ~ (3.11)、および式 (3.19) ~ (3.21) を用いて求めることに帰着する。以下にこれらを求める方法について述べる。

3.4.1 第零次摂動

固有値の第零次摂動項 ϱ_{c0} を求めるため、式 (3.5) をつぎのように書く。

$$(H_0 - \varrho_{c0}^2 D) Z_{c0} = 0 \quad (3.28)$$

これより、次式を満足する ϱ_{c0} を試算法により求める。

$$\left| H_0 - \varrho_{c0}^2 D \right| = 0 \quad (3.29)$$

ここでは差分法を用いているため、差分分割数 N に対して $4N \times 4N$ 行列式となる。解の精度を保つためには N を多く取らなければならないことを第1章において述べた。このためこの行列式の値を直接に計算することは困難であるので、1.6節で示した漸化式により計算を行なう。摂動のない時の解、すなわち固有値および固有関数の第零次摂動項 ϱ_{c0} , Z_{c0} を求める過程は1.6節での取扱いと全く同一であるのでここでは記述を省略する。

3.4.2 第一次摂動

まず、固有関数の第一次摂動項 Z_{c1} を Z_{c0} ($c = 0, 1, 2, \dots$) により展開する。

$$Z_{c1} = \sum_{c=0}^M \alpha_c Z_{c0} \quad (3.30)$$

これを式 (3.10)、または式 (3.20) に代入すると次式となる。

$$H_0 \sum_{c=0}^M \alpha_c Z_{c0} + H_1 Z_{c0} = Q_{c0}^2 D \sum_{c=0}^M \alpha_c Z_{c0} + Q_{c1}^2 D Z_{c0} \quad (3.31)$$

式 (3.9) または式 (3.19) を用いてこれを変形し、さらに両辺に $K_0 (\rho g Z_{k0})^T$ をかけると次式が得られる。

$$\begin{aligned} K_0 (\rho g Z_{k0})^T \sum_{c=0}^M Q_{c0}^2 D \alpha_c Z_{c0} + K_0 (\rho g Z_{k0})^T H_1 Z_{c0} \\ = K_0 Q_{c0}^2 (\rho g Z_{k0})^T D \sum_{c=0}^M \alpha_c Z_{c0} \\ + K_0 (\rho g Z_{k0})^T Q_{c1}^2 D Z_{c0} \end{aligned} \quad (3.32)$$

これに式 (3.27) の直交関係を用いると、固有値の第一次摂動項はつぎのように得られる。

$$Q_{c1}^2 = \frac{ (\rho g Z_{c0})^T H_1 Z_{c0} }{ (\rho g Z_{c0})^T D Z_{c0} } \quad (3.33)$$

つぎに固有関数の第一次摂動項を求める。式 (3.30) において Z_{c0} は既知量であるから、 α_c を決定すればよいことになる。式 (3.32) において、 $k \neq c$ として直交関係式 (3.27) を用いるとつぎの結果が得られる。

$$\alpha_k = \frac{ K_0 (\rho g Z_{k0})^T H_1 Z_{c0} }{ Q_{c0}^2 - Q_{k0}^2 } \quad (3.34)$$

ただし $k \neq c$

$k = c$ のときの α_k を決定するため、つぎのような操作を行なう。

かく厚の変化量を表わすパラメータ ϵ で固有関数を展開した式 (3.17) を $k = c$ として式 (3.26) に用いると次式を得る (圧力のパラメータ p で展開しても同様である)。

$$\begin{aligned}
K(\rho \mathbf{g} \mathbf{Z}_c)^T \mathbf{D} \mathbf{Z}_c &= K(\rho \mathbf{g} \mathbf{Z}_{c_0})^T \mathbf{D} \mathbf{Z}_{c_0} + K\epsilon \{ (\rho \mathbf{g} \mathbf{Z}_{c_1})^T \mathbf{D} \mathbf{Z}_{c_0} \\
&+ (\rho \mathbf{g} \mathbf{Z}_{c_0})^T \mathbf{D} \mathbf{Z}_{c_1} \} + K\epsilon^2 \{ (\rho \mathbf{g} \mathbf{Z}_{c_0})^T \mathbf{D} \mathbf{Z}_{c_2} + (\rho \mathbf{g} \mathbf{Z}_{c_1})^T \\
&\cdot \mathbf{D} \mathbf{Z}_{c_1} + (\rho \mathbf{g} \mathbf{Z}_{c_2})^T \mathbf{D} \mathbf{Z}_{c_0} \} + \dots = 1
\end{aligned} \tag{3.35}$$

ϵ の値のいかんにかかわらず上式が成立すべきことから次式のようになる。

$$K(\rho \mathbf{g} \mathbf{Z}_{c_0})^T \mathbf{D} \mathbf{Z}_{c_0} = 1 \tag{3.36}$$

$$(\rho \mathbf{g} \mathbf{Z}_{c_1})^T \mathbf{D} \mathbf{Z}_{c_0} + (\rho \mathbf{g} \mathbf{Z}_{c_0})^T \mathbf{D} \mathbf{Z}_{c_1} = 0 \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
(\rho \mathbf{g} \mathbf{Z}_{c_0})^T \mathbf{D} \mathbf{Z}_{c_2} + (\rho \mathbf{g} \mathbf{Z}_{c_1})^T \mathbf{D} \mathbf{Z}_{c_1} \\
+ (\rho \mathbf{g} \mathbf{Z}_{c_2})^T \mathbf{D} \mathbf{Z}_{c_0} = 0
\end{aligned} \tag{3.38}$$

- - - - -

式(3.26), (3.27)と式(3.36)を比較すればつぎのことがわかる。

$$K = K_0 \tag{3.39}$$

ここで、式(3.30)を式(3.37)に代入すると、つぎの結果が得られる。

$$\alpha_k = 0 \quad \text{ただし } k = c \tag{3.40}$$

3.4.3 第二次摂動

第一次摂動と同様に固有関数の第二次摂動項を第零次摂動項で展開する。

$$\mathbf{Z}_{c2} = \sum_{c=0}^M \beta_c \mathbf{Z}_{c0} \tag{3.41}$$

式(3.11)、または式(3.21)に式(3.30)および式(3.41)を代

入し、これを式 (3.9) または式 (3.19) を用いて変形したのち、両辺に $K_0 (\rho g Z_{k0})^T$ をかけると次式となる。

$$\begin{aligned} & K_0 (\rho g Z_{k0})^T \sum_{c=0}^M \varrho_{c0}^2 D \beta_c Z_{c0} + K_0 (\rho g Z_{k0})^T H_1 \sum_{c=0}^M \alpha_c Z_{c0} \\ & = K_0 (\rho g Z_{k0})^T \varrho_{c0}^2 D \sum_{c=0}^M \alpha_c Z_{c0} + K_0 (\rho g Z_{k0})^T \varrho_{c2}^2 D Z_{c0} \quad (3.42) \end{aligned}$$

ここで、 $k = c$ とおき式 (3.27) を用いて変形を行なうと、固有値の第二次摂動項 ϱ_{c2} はつぎのように求まる。

$$\varrho_{c2}^2 = \sum_{c=0}^M K_0 (\rho g Z_{k0})^T H_1 \alpha_c Z_{c0} \quad (3.43)$$

ただし、ここにおいて Z_{k0} は ϱ_c に対する固有関数の第零次摂動項である。

つぎに固有関数の第二次摂動項を求める。 Z_{c0} は既知であるから式 (3.41) における β_c を決定すればよい。式 (3.42) において、 $k \neq c$ として式 (3.27) を用いて変形を行なうと係数 β_k はつぎのように求まる。

$$\beta_k = \alpha_k \frac{ \{ \varrho_{c1}^2 - K_0 (\rho g Z_{k0})^T H_1 Z_{k0} \} }{ \varrho_{k0}^2 - \varrho_{c0}^2 } \quad \text{ただし } k \neq c \quad (3.44)$$

また $k = c$ のときの β_k を求めるため、式 (3.38) に式 (3.30) , (3.41) を代入し、式 (3.27) を用いて整理すると次式が得られる。

$$\beta_k = -\frac{1}{2} \sum_{c=0}^M \alpha_c^2 \quad \text{ただし } k = c \quad (3.45)$$

以下、同様の操作により第三次摂動以降についても求めることができる。

3.5 応 用 例

本解法の妥当性を検証するため、以下に述べる各種の軸対称かくについて摂動計算を行なう。

3.5.1 圧力による展開

第2章で扱った円筒かく、球かく、および圧力容器の模型の自由振動問題に対して摂動計算を行なう。これらのかくの問題に対しては、2.4節で扱った具体的に直接圧力値を与えて求めた結果（以下これを直接解と呼ぶことにする）との比較を行ない本解により得られた結果の有効範囲の広さについて確認する。なおかくの材料特性は1.7節で示した通りである。

1) 円筒かく

図1.11の円筒かくについて圧力により展開した摂動計算を行なう。代表長さ a として円筒かくの半径 R を取り、また差分分割数は前章での取扱いと同じく100としている。圧力の変化に対する固有振動数の変化を各フーリエ指数 n に対して摂動解を求めたものが図3.1～3.4である。図中の×印は直接解であり、実線が摂動解を示している。ここでは摂動解を第一次摂動項まで求めているが、直接解との比較からわかるように本解法による結果の有効範囲は実用上十分に広いことが確認できる。(注1) 摂動計算により得られた図3.1の $n=4$ ， $c=0$ に対する結果を式で示すとつぎのようになる。

$$\Omega^2 = 0.09222^2 + 3.906^2 p$$

(注1) 無次元圧 $p = 0.42 \times 10^{-3}$ は、ここに用いた円筒かくの材料がSS41の場合、内圧のみにより円筒かくの一部にはば降伏の生じる圧力である。

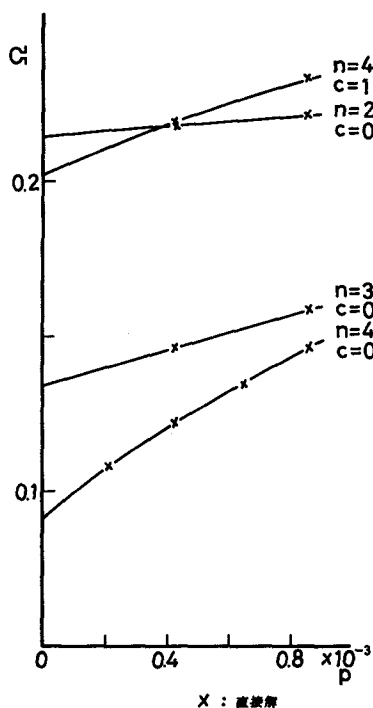


図 3.1 円筒かくの圧力による固有振動数の変化

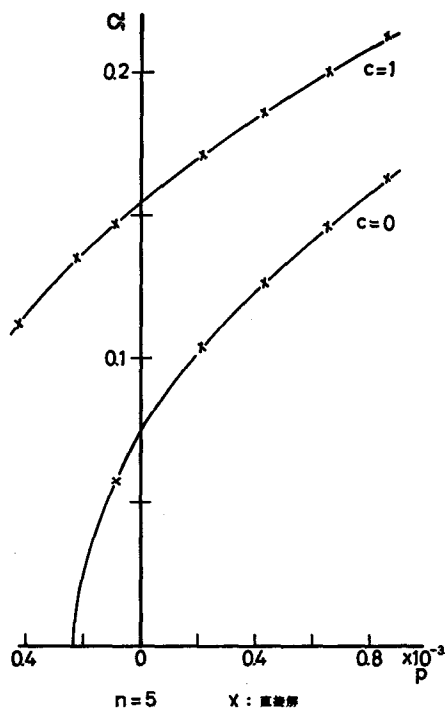


図 3.2 円筒かくの圧力による固有振動数の変化

なお振動形については、圧力によりそれほど大きく変化しないことを前章において述べたので、ここではこれにふれていない。

ii) 球かく

図 1.13 の球かくを取扱う。球かくの半径 R を代表長さ a に選び、差分分割数を 150 として圧力の変化による固有振動数の変化を各フーリエ指数 n に対して摂動計算した結果を図 3.5 に示している。このときも摂動解は第一次摂動項まで求めたものであるが、直接解と比較することにより解の有効範囲は十分に広いことが確認できる。
(注²) 摂動解を $n = 0$, $c = 1$ の結果に対して示すと次式である。

(注²) 材料が SS41 であれば、この球かくの一部には $p = 0.1 \times 10^{-2}$ の付近で内圧のみにより降伏が生じる。

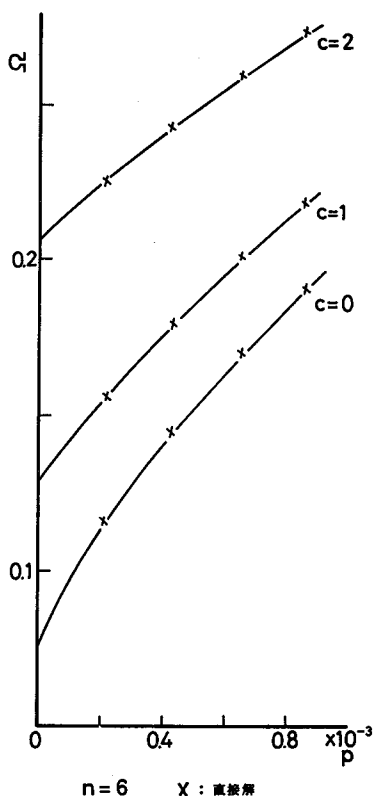


図 3.3 円筒かくの圧力による固有振動数の変化

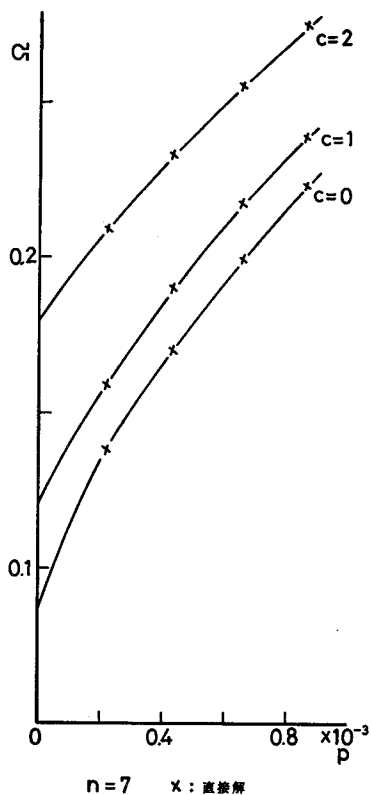


図 3.4 円筒かくの圧力による固有振動数の変化

$$Q^2 = 0.3766p^2 + 0.9126p$$

Ⅲ) 圧力容器の模型

図 1.15 の圧力容器模型を取扱う。この容器の円筒部の半径 R_3 を代表長さ a にとる。差分点の数は前章での取扱いと同じく 319 とし、圧力による固有振動数の変化を $n = 6$ について摂動計算を行った結果を図 3.6 に示している。この摂動解も第一次摂動項まで求めたものであるが、直接解と比較すれば解の有効範囲は十分に広いことが確認できる。(注³) なおこれを式で示すと次式である。

(注³) 材料が SS41 のとき、この容器の一部には $p = 0.4 \times 10^{-3}$ 付近で内圧のみにより降伏が生じる。

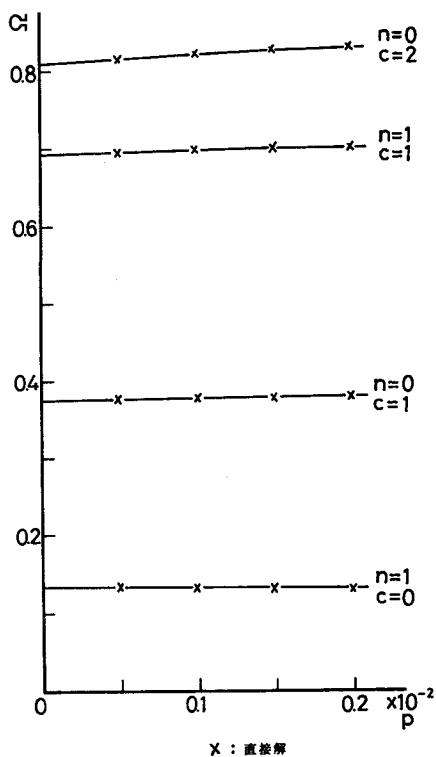


図 3.5 球かくの圧力による固有振動数の変化

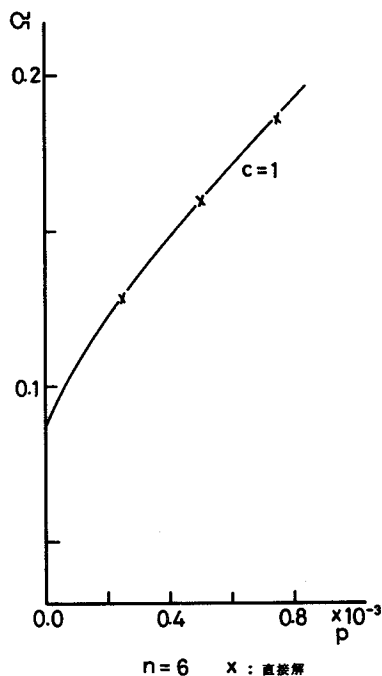


図 3.6 圧力容器模型の圧力による固有振動数の変化

$$\alpha^2 = 0.08656^2 + 3.617p$$

3.5.2 かく厚による展開

この問題に対しては種々のかく厚を基準値に取り、その基準かく厚に対して摂動計算を行ない、これと直接かく厚を変化させて得られた結果（直接解）とを比較する。計算においてはこのときもかくの材料を鋼としている。すなわち、この材料特性は前記のものと同じである。

i) 円板

円板ではその固有振動数は板厚に比例することが基礎方程式からわかるが、本解法の妥当性を確認する意味で計算を行なった。そ

の結果を図 3.7 に示す。 摂動解を $c = 1$ に対して示すと次式である。

$$Q^2 = 0.0635^2 + 0.00386 \epsilon$$

なお、計算においては円板の周縁を自由とし半径 R を代表長さ a とした。 計算に用いた値は $R = 80\text{ mm}$ 、基準板厚 $h_0 = 0.82\text{ mm}$ である。 差分分割数は 100 とした。 このときも摂動解を実線で、また直接解を $\times$ 印で示している。

ii) 円筒かく

図 3.8 の記号を用いる。 円筒かくの半径 R を代表長さ a に選ぶ。 計算においては $R = 250.5\text{ mm}$ 、 $L = 600\text{ mm}$ とし、差分分割数を 100 とする。 $n = 2$ に対して、基準かく厚 $h_0 = 1\text{ mm}$ 、 2 mm 、 3 mm の三つの場合について摂動計算を行なう。 その結果を図 3.9 に示す。 この場合、かく厚の変化に対して円筒かくの固有振動数はあまり変化しないことがわかる。 $h_0 = 1\text{ mm}$ 、 $c = 0$ のときの摂動解を示すと次式となる。

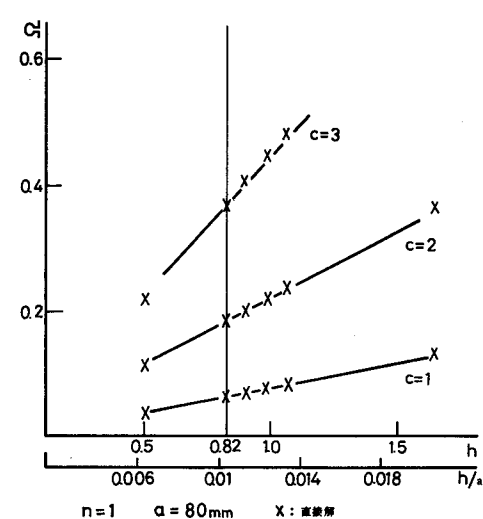


図 3.7 円板の板厚による固有振動数の変化

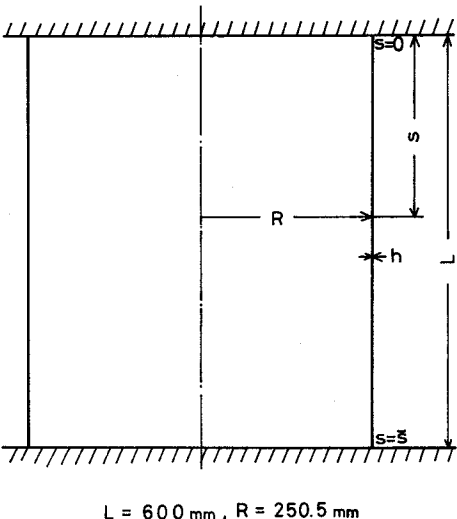


図 3.8 両端固定の円筒かく

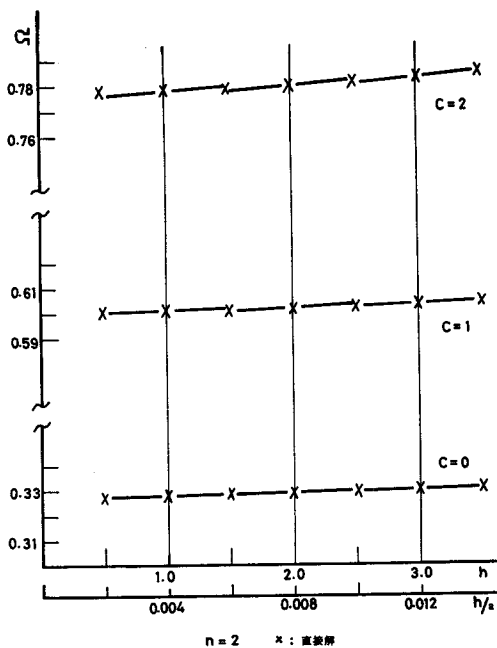


図 3.9 円筒かくのかく厚による固有振動数の変化

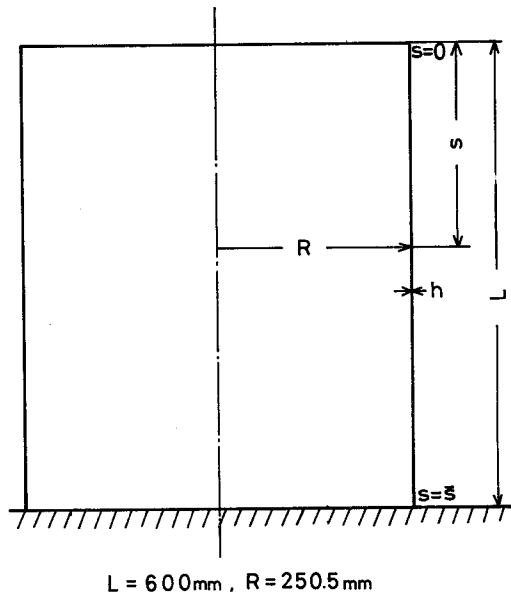


図 3.10 下端固定の円筒かく

$$Q^2 = 0.328^2 + 0.000278\epsilon$$

つぎに、この円筒かくを図 3.10 のように上端を自由としたときに、 $n = 1$ に対して基準かく厚を同じく $h_0 = 1, 2$, および 3 mm として計算を行なう。差分分割数は前記のものと同一である。その結果を図 3.11 に示している。このとき、 $h_0 = 1 \text{ mm}$, $c = 0$ に対する摂動解をつぎに示す。

$$Q^2 = 0.406^2 + 0.00225\epsilon$$

両端固定のときと比較して、かく厚の変化に対する固有振動数の変化はわずかに大きいことが認められる。

iii) 円すいかく

図 3.12 の記号を用いる。円すいかく中央部の半径 R を代表長さ a に取る。円筒かくでは、かく厚の変化に対してその固有振動数があまり大きく変化しないことが認められた。一方、円板では

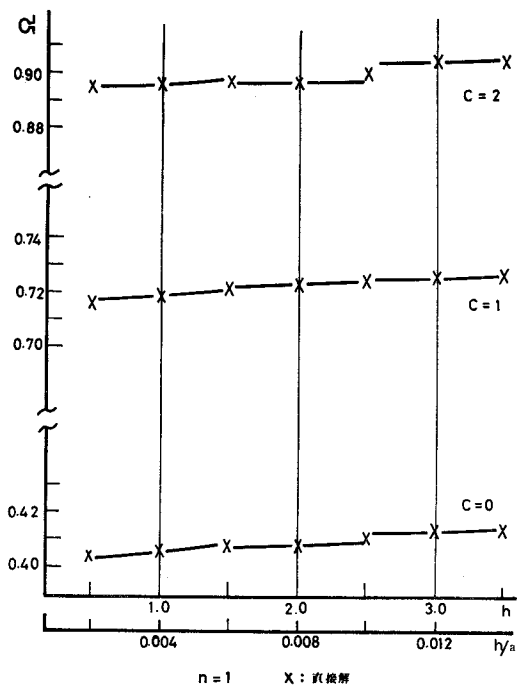


図 3.11 円筒かくのかく厚による固有振動数の変化

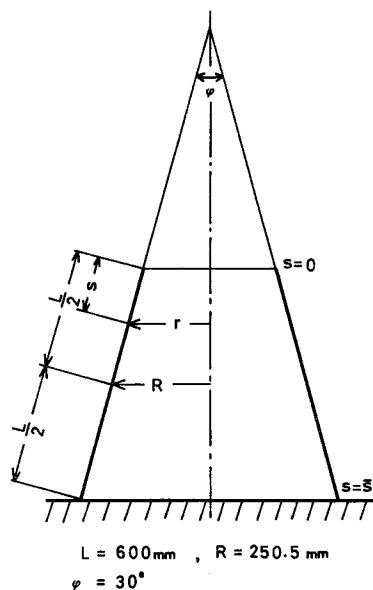


図 3.12 下端固定の円すいかく

板厚の変化に比例してその固有振動数が変化することがわかっている。そこで、前述の下端固定の円筒かくの形状を少し変化させて得られる円すいかくについて、 $n = 1$ に対する摂動計算を行なうことにする。

それゆえ、ここで計算に用いた円すいかくの形状寸法として、 $R = 250.5 \text{ mm}$, $L = 600 \text{ mm}$ を与え、また頂角 $\varphi = 30^\circ$ とした。差分分割数を 150 とし、基準かく厚 h_0 として 1, 2 , および 3 mm とする。その結果を図 3.13 に示している。 $h_0 = 1 \text{ mm}$, $c = 0$ の摂動解をつぎに示す。

$$Q^2 = 0.425^2 + 0.00201 \varepsilon$$

円筒かくの場合と比較して、このときもかく厚の変化に対してその固有振動数の変化はそれほど大きく変化しないことがわかる。

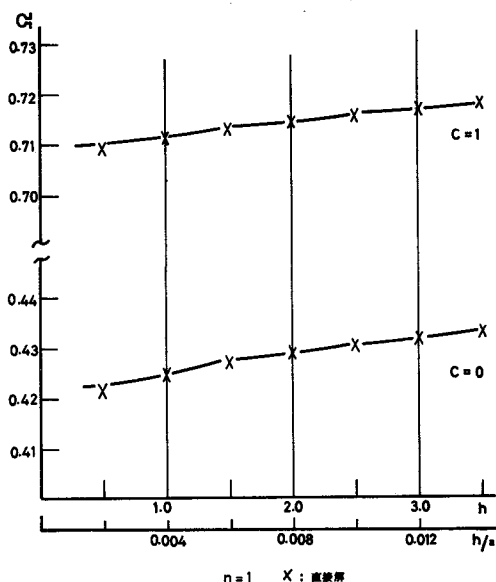


図 3.13 円すいかくのかく厚による固有振動数の変化

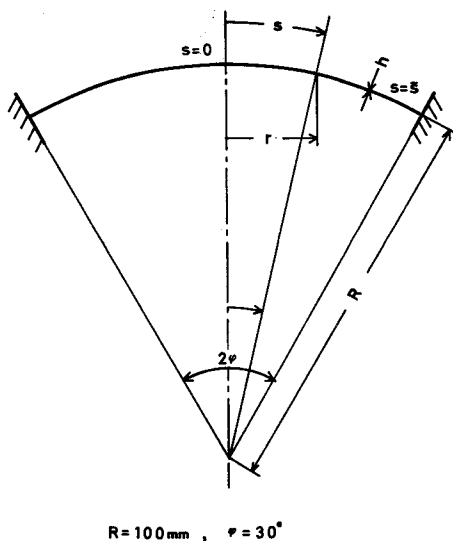


図 3.14 周縁固定の部分球かく

これについては頂角をさらに大きく取れば、円板のときの結果に近づくと考えられる。

iv) 部分球かく

図 3.14 の記号を用いる。曲率半径 R を代表長さ a に取る。数値計算は $R = 100 \text{ mm}$, $\varphi = 30^\circ$ とし、 $n = 2$ の場合について行なう。基準かく厚として $h_0 = 1, 2.5$, および 4 mm の各場合について摂動計算を行ない、その結果を図 3.15 に示している。このとき、差分分割数は 100 とした。 $h_0 = 1 \text{ mm}$, $c = 0$ のときの摂動解をつぎに示す。

$$Q^2 = 1.108^2 + 0.1755 \epsilon$$

部分球かくでは円筒かくや円すいかくなどの場合と比較して、その固有振動数はかなり大きくかく厚の変化に伴って変わることがわかる。また摂動解はかなり広い範囲にわたってその解の精度を保っているが、節円数 c が大きくなるとその解の精度が悪くなること

が認められる。

V) 原子炉容器の模型

図 3.16 に示す原子炉容器の模型に対して計算を行なう。この容器は 3 種類の軸対称かくから成っており、領域Ⅰは半球、Ⅱは円筒、Ⅲは円環かくである。円筒部の半径 R を代表長さ a に選ぶ。計算に用いた形状寸法は $R = 250.5 \text{ mm}$, $L_1 = 600 \text{ mm}$, $L_2 = 200 \text{ mm}$ である。差分点の数は各領域において、その差分間隔 Δ がほぼ等しくなるようにつぎのように取った。

領域Ⅰ : $N_1 = 101$, 領域Ⅱ : $N_2 = 151$

領域Ⅲ : $N_3 = 61$

この容器は下端固定としている。

計算は $n=1$ の場合について行ない、このとき基準かく h_0 を 1, 2,

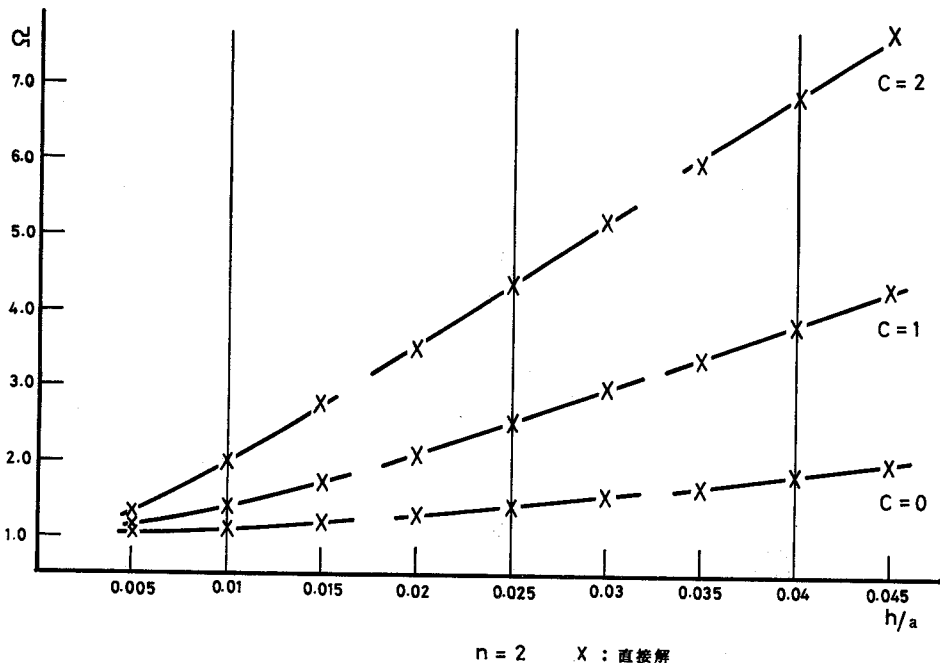


図 3.15 部分球かくのかく厚による固有振動数の変化

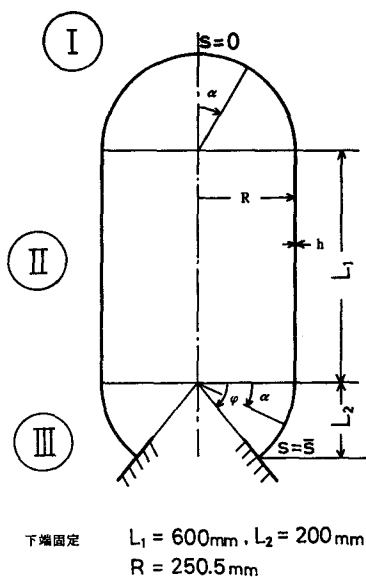


図 3.16 原子炉容器の模型

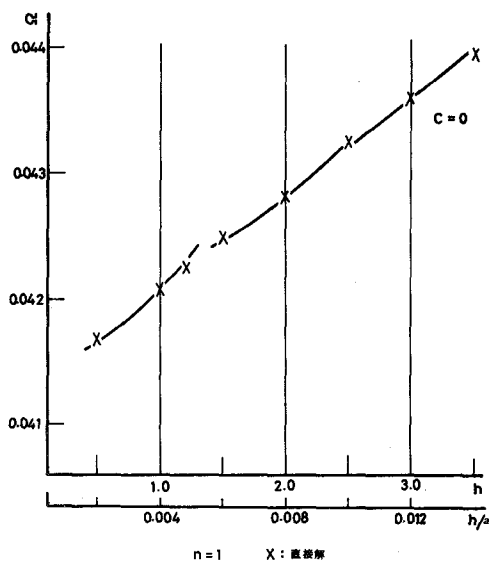


図 3.17 原子炉容器模型のかく厚による固有振動数の変化

および 3 mm とする。その結果を図 3.17 に示している。摂動解を $h_0 = 1\text{ mm}$ の場合について示すとつぎのようになる。

$$\Omega^2 = 0.04207^2 + 0.0000429\epsilon$$

図は節円数 c が 0 のときのみであるが、これは $c = 1$ の値を求めることが困難であったためである。

3.5.3 考 察

圧力およびかく厚の変化による固有振動数の変化を摂動法により求めることによって、つぎのことがわかった。

まず圧力値を摂動パラメータにとる問題に対して計算は第二次摂動項まで求めたが、第一次摂動項と比較してその値はきわめて小さく解にほとんど影響を及ぼさないことがわかったので、結果はす

べて第一次摂動までとした。それによれば、解の有効範囲は直接解と比較することにより十分に広く、実用上全く問題のないことが確認された。また本解法を用いるためには、圧力の加わらないときの固有振動数（第零次摂動項）を求め、このときの振動形を定める固有関数を求めなければならない。この固有値の有効けた数が少ないとこれに対する固有関数が正確に求まらず摂動解の精度が悪くなるが、ここで用いたかくではその有効けた数は4～5で十分であった。

なお振動形の変化についてはふれなかったが、これについても本解法により求めることができる。

つぎにかく厚の変化量を摂動パラメータにとる問題に対しても計算は第二次摂動項まで求めたが、圧力による展開のときと同じくその影響はきわめて小さいことを確認したので、これに対しても結果は第一次摂動項までとした。解の有効範囲は簡単な形状のものではかなり広いことが確認されたが、複雑な形状のかくでは狭くなる。しかもこのような複雑な形状のかくでは、各フーリエ指数 n に対して高次の振動形を求めることは数値計算上困難であるので、より高次の摂動項を得ることはできず解の有効範囲を高次の摂動項まで取ることにより広げることにはできない欠点がある。また本解法の使用にあたり、固有値の有効けた数はこのときも4～5で十分であった。

なお振動形はかく厚の変化によってそれほど変化しないことがわかったので、これにはふれなかった。

以上の問題において第二次摂動項以降のものを求めるためにはより高次の振動形を求めることが必要であるが、計算の結果いずれの

場合もはじめの振動形から 3 ～ 4 次のものまでを求めれば十分に良い収束を示した。また固有値の有効けた数は差分分割数によっても大きく影響されるため、これについて十分に考慮を払うことが必要である。ここで示した例題では、いずれの場合もこれ以上分割数を増しても解に影響のないことを確認している。

3.6 結 言

本研究は第 1 章、および第 2 章において取扱った軸対称形状の圧力容器の自由振動特性が、圧力およびかく形状の変化に対してそのつど計算しなおさなくてもよいように、これらの解を一度に求めることを目的として進めたものである。その結果、圧力およびかく形状（本研究ではかく厚）の変化をおおう摂動解の有効範囲は、実用上十分に広いことが確認された。ただし、かく厚の変化に対する摂動解の有効範囲は、かく形状が複雑になると狭くなることがわかった。

本解法を使用して解を求めることと、第 1 章、および第 2 章で示した方法により直接的に解を求めることを比較すると、計算の複雑さ、および解の有効範囲に注意を払わなければならないことなどを考慮すると、本解法は必ずしも有利であるとは断言できない。しかしそのつど圧力値やかく厚の値を与えて計算しなおす必要はなく、計算機の使用時間の点では有利である。

なお二個以上の固有値が近接する場合には、数値計算のさいに有効けた数を多くするなどすれば対処できると考えられる。また完全に一致する（縮退）場合には、本解法に適当な修正を加えることにより用いることができる。⁽⁷³⁾

結 論

本論文は一般軸対称かくの曲げ、自由振動、および線形座屈の問題を解析するための数値解法を取扱ったものである。本研究では従来から数多く提案されているかく理論 (Flügge, Sanders, 溝口、および Donnell のかく理論) を一般軸対称かくに適用して、曲げ、および自由振動問題に対処できる解法を提案し、これに差分法をあわせ用いることにより任意形状の軸対称かくを取扱うことができることを示した。なお上記の各かく理論とは別に、本研究で取扱わなかったかく理論をも同様にして適用することは可能である。

つぎに圧力の作用などにより予歪を受けるかくの問題に対する研究としては、円筒かくでは多くの取扱った例が見られるが一般軸対称かくでこれを扱った研究はわずかしか発表されておらず、しかもそのいずれも十分なものとはいいがたいので、本論文においてこれに対する差分法による解法を提案した。さらにこれを円筒かくに適用して、これと Timoshenko らにより提案された式とを比較することにより Timoshenko らの誤りを指摘した。

これらの問題の与えられたかく形状や圧力値などの条件の一つが変わるときには、本論文での取扱いを含む従来から示されてきた解法によれば、そのつど計算をしない必要がある。そこで数値解法と解析的解法との折衷的方法の試みとして、軸対称かくの自由振動問題に摂動法を差分法とあわせ用いて解く方法について研究を行ない良好な結果を得た。

本研究の解析により得られた結果に対する考察および結論は各章において詳細に述べているが、それらを要約するとつぎのようになる。

第1章においては、各かく理論を一般軸対称かくの問題に適用する方法について述べた。本論文では5つの解法を示し、それらによる結果の差異がどの程度であるかを調べることに主眼をおいたが、通常のかくの問題ではきわめてわずかであることが確認された。またその厳密性で円筒かくの多くの問題が解かれてきた溝口のかく理論を一般軸対称かくに適用する解法は、本論文ではじめて示したものである。さらに取扱いの簡易さで円筒かくの問題に広く用いられてきたDonnellのかく理論を適用する解法をも示した。

第2章では、圧力の作用により予歪を受ける一般軸対称かくの基礎方程式を確立し、これを用いて自由振動と座屈の問題を取扱った。このとき取扱いの簡単なDonnell型の式もあわせ示したが、予歪の影響の考慮のしかたが異なるため本解析による結果とDonnell型の式による結果、およびTimoshenkoらの式を用いた結果にはかなりの差異があることが確認された。

第3章では、軸対称かくの自由振動問題に摂動法を差分法とあわせ用いる方法について考察を行ない、与えられたかく厚や圧力値の一つが変わるときにその自由振動特性の変化を簡単なベキ級数の形で求め、これを検討したが良好な結果であった。摂動解法によれば、これらの値が変わるたびに計算する必要はなく計算時間の点では有利であることが確認された。また摂動解の有効範囲も実用上十分に広く、かつ低次の摂動項で十分であることも確認された。

終りに臨み、研究を遂行するにあたり終始懇切なる指導と激励を賜った大阪大学浜田実教授、北川浩助教授、近畿大学溝口孝喜教授に対して謹んで深甚の感謝をささげます。

また有益なる御討論、御助言を賜った大阪大学菊川真教授、大路

清嗣教授、中川憲治教授、小松定夫教授、松浦義一教授、実験に際して御援助をいただいた大阪大学井上豊助手、実験および計算に協力をいただいた旭化成飛石力、三菱重工原田高雄、大阪大学大学院神尾洋一、橋本正一、故渡部和幸の諸氏に対して合わせて厚く感謝の意を表します。

付録 円板およびはりの自由振動問題に対する摂動解法の適用

1. 緒 言

第3章において、一般軸対称かくの自由振動問題に摂動解法を適用する方法について述べたが、本解法は他の自由振動問題に対しても有効であることを示すため、ここで回転する円板と軸力を受けるはりの自由振動問題を摂動解法を用いて解く方法について述べる。

まず厚さがその半径方向に任意に変化する円板が回転する場合の曲げの自由振動問題は実用的にも重要な基礎的問題であるが、これについては従来からあまり取扱われていない。ここではこの問題に対する基礎方程式を確立し、これに対して差分法と摂動法をあわせ用いて数値的に解く方法について考察する。この方法によれば、差分法を用いることにより半径方向における任意の板厚の変化に対処することができる。このとき回転数を摂動パラメータに取ることにより、回転数の変化による固有振動数の変化を求めることが容易となる。

つぎに可変断面のはりが軸力を受けるとき、その軸力を摂動パラメータに取ることにより軸力の変化に対する固有振動数の変化の状態をこのときも容易に求めることができる。

以上の二つの問題に対して、本解法により得られた解の有効範囲を確認するため、回転する円板に対しては本論文の第3章での取扱いと同じく直接回転数を与えて求めた解との比較を行なう。また軸力を受けるはりでは、一様断面のはりについては Timoshenko などにより示された理論解と、⁽⁷⁴⁾ 可変断面のはりについては Ritz⁽⁷⁶⁾ の近似解法により求めた解と比較する。

2. 回転円板

2.1 基礎関係式

ここで使用するおもな記号を以下に示す（図 1, 2 参照）。その他の記号は本文におけるものと同じである。

a : 円板の半径（代表長さにとる）

M_r , M_θ , $M_{r\theta}$, $M_{\theta r}$: 合モーメント

N_r , N_θ , Q_r : 合応力

r : 任意点における円板の半径

$\tilde{u}$: 回転により生じる無次元変位

$\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\theta$: 回転により生じる応力

ω : 回転数

$\tilde{\omega}$: 無次元回転数 $= \omega \sqrt{\rho^* a^2 / E}$

はじめに、面要素 $A B C D$ の平衡を考えると次式を得る。(注 1)

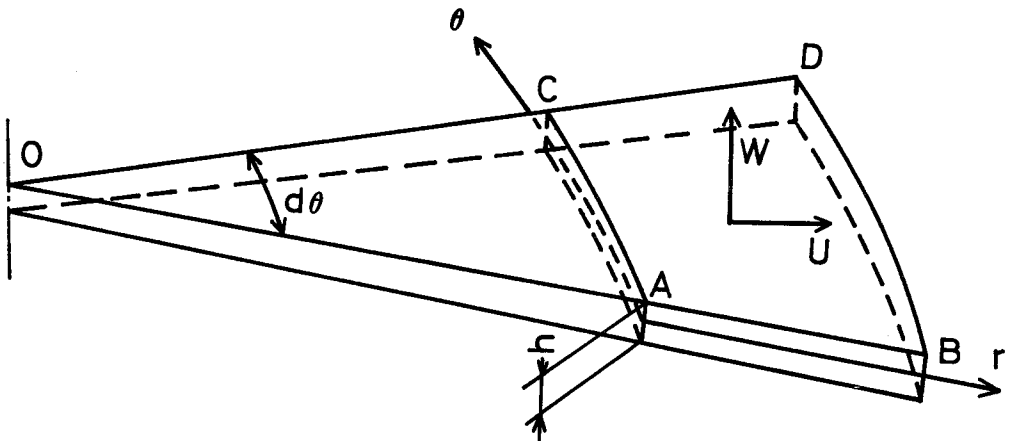


図 1 円板の座標および変位

(注 1) 式 (1)～(3)は妹沢^[7]の式と同じである。ただし、これよりあとの式の誘導過程で本研究の式と妹沢の式とは異なる。

$$\begin{aligned} \frac{Q_r}{r} + \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{\partial Q_\theta}{r \partial \theta} + \bar{\sigma}_r h \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \bar{\sigma}_r \frac{h}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + h \frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial r} \frac{\partial W}{\partial r} \\ + \bar{\sigma}_r \frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial W}{\partial r} + \bar{\sigma}_\theta h \frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \theta^2} = \rho^* h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial M_\theta}{r \partial \theta} + \frac{M_{r\theta}}{r} + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{M_{\theta r}}{r} - Q_\theta = 0 \quad (2)$$

$$\frac{M_r}{r} + \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{\partial M_{\theta r}}{r \partial \theta} - \frac{M_\theta}{r} - Q_r = 0 \quad (3)$$

合モーメントと変位は次式で関係づけられる⁽⁶⁵⁾。

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{\partial W}{r \partial r} + \frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \theta^2} \right) \right] \\ M_\theta &= -D \left[\frac{\partial W}{r \partial r} + \frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right] \\ M_{r\theta} &= M_{\theta r} = -D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 W}{r \partial r \partial \theta} - \frac{\partial W}{r^2 \partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式(1)に含まれている円板の回転により生じる応力 $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\theta$ は次式から求められる⁽⁷⁸⁾。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (hr \bar{\sigma}_r) - h \bar{\sigma}_\theta + h \rho^* r^2 \omega^2 \\ = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

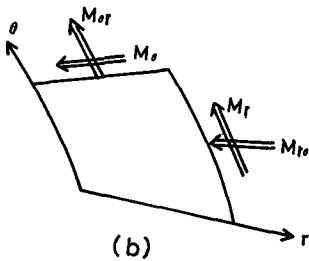
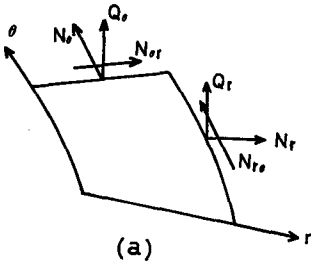


図 2 記号 (a) 合 応 力
(b) 合 モーメント

このとき、応力と変位は次式で関係づけられる⁽⁶⁵⁾。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \nu \frac{U}{r} \right) \\ \bar{\sigma}_\theta &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{U}{r} + \nu \frac{\partial U}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで、つぎのように各変数を無次元化する。

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= h/a & \xi &= r/a \\ \tilde{\omega} &= \omega \sqrt{\rho^* a^2 / E} \\ U &= a \tilde{\omega}^2 \tilde{u} & \bar{\sigma}_r &= E \tilde{\omega}^2 \tilde{\sigma}_r \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_\theta &= E \tilde{\omega}^2 \tilde{\sigma}_\theta & W &= \sigma_0 (a/E) w \cos n\theta \cos \varrho \bar{\tau} \\ M_r &= \sigma_0 (h^3/a) m_r \cos n\theta \cos \varrho \bar{\tau} \end{aligned} \right\} (7)$$

ここに、 σ_0 は代表応力であり ϱ ， $\bar{\tau}$ は式(1.51)で定義している無次元振動数および無次元時間である。

式(2)～(4)を式(1)に代入し、これと式(4)の第1式とに式(7)を用いると、本問題の基礎方程式としてつぎの変数 w, m_r に関する連立式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} (a_1 + a_2 \tilde{\omega}^2) w'' + (a_3 + a_4 \tilde{\omega}^2) w' \\ + (a_5 + a_6 \tilde{\omega}^2 + \varrho^2) w + a_7 m_r'' + a_8 m_r' &= 0 \\ a_9 w'' + a_{10} w' + a_{11} w + a_{12} m_r &= 0 \end{aligned} \right\} (8)$$

この係数 $a_1 \sim a_{12}$ はつぎのものである。

$$\begin{aligned} a_1 &= d\lambda^2 (2n^2 - \nu^2 - \nu n^2 + 1) / \xi^2 - 3\lambda\lambda' d (2 - \nu) / \xi \\ &\quad - 6d\lambda'^2 - 3\lambda\lambda'' d \end{aligned}$$

$$a_2 = \tilde{\sigma}_r$$

$$\begin{aligned} a_3 &= d\lambda^2 \{ n^2 (\nu^2 + 2\nu - 2) - 1 + \nu^2 \} / \xi^3 + 3d\lambda\lambda' (1 - 2\nu \\ &\quad - 2\nu n^2 + 2n^2) / \xi^2 - 3\nu d (2\lambda'^2 + \lambda\lambda'') / \xi \end{aligned}$$

$$a_4 = \tilde{\sigma}_r / \xi + \tilde{\sigma}_r' + \tilde{\sigma}_r \lambda' / \lambda$$

$$\begin{aligned} a_5 &= 2n^2 \lambda^2 d (2 - \nu - \nu^2) / \xi^4 - \lambda^2 n^4 d / \xi^4 - 3\lambda\lambda' n^2 d (3 - 4\nu) / \xi^3 \\ &\quad + 3\nu n^2 d (2\lambda'^2 + \lambda\lambda'') / \xi^2 \end{aligned}$$

$$a_6 = -\tilde{\sigma}_\theta n^2 / \xi^2 \quad a_7 = \lambda^2 \quad a_8 = \lambda^2 (2 - \nu) / \xi + 6\lambda\lambda'$$

$$a_9 = d \quad a_{10} = d\nu / \xi \quad a_{11} = -d\nu n^2 / \xi^2 \quad a_{12} = 1$$

また、式(6)に式(7)を用いると次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}_r &= \frac{1}{1 - \nu^2} (\tilde{u}' + \frac{\nu}{\xi} \tilde{u}) \\ \tilde{\sigma}_\theta &= \frac{1}{1 - \nu^2} (\frac{\tilde{u}}{\xi} + \nu \tilde{u}') \end{aligned} \right\} (9)$$

式(5)に式(7)を用いて変形したのち、式(9)を代入すると次式が得られる。

$$\xi^2 \widetilde{u}'' + (\xi + \xi^2 \lambda' / \lambda) \widetilde{u}' + (\nu \xi \lambda' / \lambda - 1) \widetilde{u} + (1 - \nu^2) \xi^3 = 0 \quad (10)$$

2.2 摂動解法

式(1.56)を用いて式(8)を差分近似するとつぎのようになる。

$$A_j Z_{j-1} + B_j Z_j + C_j Z_{j+1} = \mathcal{Q}^2 D_j Z_j \quad (11)$$

ここに、 A_j 、 B_j 、 C_j 、および D_j はつぎの行列である。また、 Z_j は解行列である。

$$A_j = \begin{bmatrix} a_1 - \frac{\mathcal{Q}}{2} a_3 + \widetilde{\omega}^2 (a_2 - \frac{\mathcal{Q}}{2} a_4) & a_7 - \frac{\mathcal{Q}}{2} a_8 \\ a_9 - \frac{\mathcal{Q}}{2} a_{10} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_j = \begin{bmatrix} a_5 \mathcal{Q}^2 - 2a_1 + \widetilde{\omega}^2 (a_6 \mathcal{Q}^2 - 2a_2) & -2a_7 \\ a_{11} \mathcal{Q}^2 - 2a_9 & a_{12} \mathcal{Q}^2 \end{bmatrix}$$

$$C_j = \begin{bmatrix} a_1 + \frac{\mathcal{Q}}{2} a_3 + \widetilde{\omega}^2 (a_2 + \frac{\mathcal{Q}}{2} a_4) & a_7 + \frac{\mathcal{Q}}{2} a_8 \\ a_9 + \frac{\mathcal{Q}}{2} a_{10} & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_j = \begin{bmatrix} -\mathcal{Q}^2 & \\ & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z_j = \begin{bmatrix} w \\ m_r \end{bmatrix}$$

境界条件を示す式(1.61)、(1.62)とともに、式(11)を差分点 $j = 1$ から N までについて表わすと $2N$ 元の連立方程式が得られ、これを次式のようにおく。

$$HZ = \mathcal{Q}^2 DZ \quad (12)$$

ここに、 H および D は $2N \times 2N$ 行列であり、 Z は $2N \times 1$ 行列である。
式(12)を満足する固有値 ϱ と固有関数 Z は多数存在するため、こ
れを ϱ_c , Z_c ($c = 0, 1, 2 \dots M$, $M \leq N - 3$) と表わす。 すな
わち、式(12)をつぎのように書く。

$$HZ_c = \varrho_c^2 DZ_c \quad (13)$$

ここで、摂動パラメータの無次元回転数 $\tilde{\omega}^2$ により ϱ_c および Z_c を展
開する。

$$\varrho_c^2 = \sum_{i=0}^M \varrho_{ci}^2 \tilde{\omega}^{2i} \quad (14)$$

$$Z_c = \sum_{i=0}^M Z_{ci} \tilde{\omega}^{2i} \quad (15)$$

また、摂動演算子 H を非摂動項 H_0 とこれに対する $\tilde{\omega}^2$ の摂動項 H_1 とに
分離する。

$$H = H_0 + \tilde{\omega}^2 H_1 \quad (16)$$

式(14)～(16)を式(13)に代入し、両辺の $\tilde{\omega}$ のべき数について
整理すれば、つぎの第零次摂動式、第一次摂動式などが得られる。

$$H_0 Z_{c0} = \varrho_{c0}^2 DZ_{c0} \quad (17)$$

$$H_0 Z_{c1} + H_1 Z_{c0} = \varrho_{c0}^2 DZ_{c1} + \varrho_{c1}^2 DZ_{c0} \quad (18)$$

また本問題の自由振動では、式(3.27)に対してつぎの直交関係
の成立することが証明できる。

$$K_0 (h r Z_{k0})^T DZ_{c0} = \begin{pmatrix} 1 & (k = c) \\ 0 & (k \neq c) \end{pmatrix} \quad (19)$$

ただし、 K_0 はある定数であり h , r はつぎのような $2N \times 2N$ 行列で
ある。

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \bar{h}_1 & & & \\ & \bar{h}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{h}_{N-1} \\ & & & & \bar{h}_N \end{bmatrix} \quad \bar{h}_j = \begin{bmatrix} \frac{h_j}{h_0} & \\ & \frac{h_j}{h_0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 & & & \\ & \bar{r}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{r}_{N-1} \\ & & & & \bar{r}_N \end{bmatrix} \quad \bar{r}_j = \begin{bmatrix} \xi_j \\ \xi_j \end{bmatrix}$$

すなわち、 $\mathbf{h}$ は各差分点における板厚の比率を与える行列であり、 $\mathbf{r}$ は中心からの半径を与える行列である。

第零次摂動式 (17) を解けば ϱ_{c0} , $\mathbf{Z}_{c0}$ を求めることができる。これを求める過程は本文 1.6 節で述べた通りである。

つぎに固有関数の第一次摂動項 $\mathbf{Z}_{c1}$ を $\mathbf{Z}_{c0}$ により展開する。

$$\mathbf{Z}_{c1} = \sum_{c=0}^M \alpha_c \mathbf{Z}_{c0} \quad (20)$$

式 (20) を式 (18) に代入し、式 (17) および式 (19) の関係を用いて整理すれば、固有値の第一次摂動項はつぎのように求まる。

$$\varrho_{c1}^2 = \frac{(\mathbf{h} \mathbf{r} \mathbf{Z}_{c0})^T \mathbf{H}_1 \mathbf{Z}_{c0}}{(\mathbf{h} \mathbf{r} \mathbf{Z}_{c0})^T \mathbf{D} \mathbf{Z}_{c0}} \quad (21)$$

また、式 (20) の係数 α_c はつぎのように求まる。

$$\alpha_k = \frac{K_0 (\mathbf{h} \mathbf{r} \mathbf{Z}_{k0})^T \mathbf{H}_1 \mathbf{Z}_{c0}}{\varrho_{c0}^2 - \varrho_{k0}^2} \quad (c \neq k)$$

$$\alpha_k = 0 \quad (c = k)$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} (22)$$

第二次摂動項以降についても、同様にして求めることができる。

2.3 数値計算例

本解法を用いて板厚一定の円板と板厚が半径方向に直線的に変化する円板について計算を行なう。境界条件はいずれの場合も中心で極の条件⁽⁶⁰⁾ ($n = 0 : w = m_r' = 0$, $n = 1 : w = m_r = 0$, $n \geq 2 : w = w' = 0$)を用い、また周辺を自由 ($M_r = \hat{Q}_r = 0$, ただし $\hat{Q}_r$ は有効横せん断力であり $\hat{Q}_r = Q_r + \partial M_{r\theta} / r \partial \theta$ で定義している)とされている。

i) 板厚一定の円板

$h/a = 0.01$ の場合を例にとり計算を行なう。円板の回転により生じる応力の分布を示したものが図3である。この値を用いて、円板の回転により固有振動数の変化を円周方向波数 $n = 2$ の場合について示したものが図4である。このとき、具体的に回転数を与えて直接計算を行なった結果(直接解)と比較すれば、本解の有効

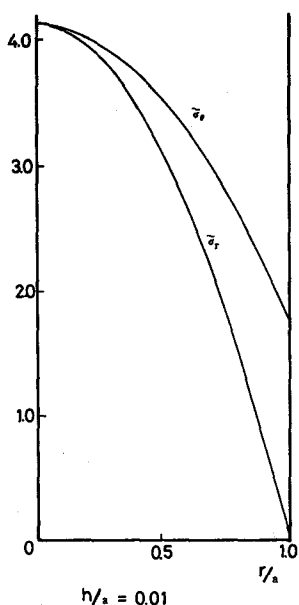


図3 板厚一定円板の回転による応力分布

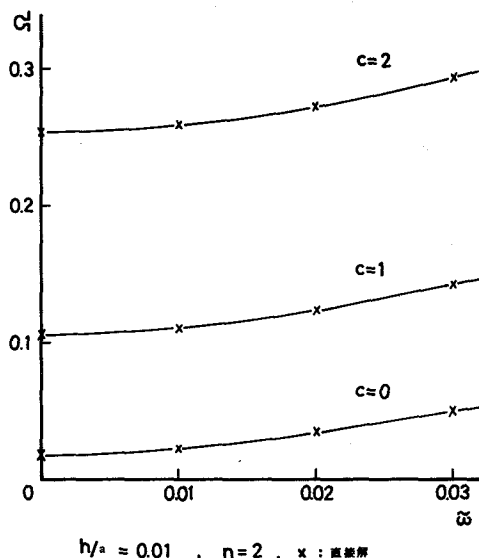


図4 板厚一定円板の回転による固有振動数の変化

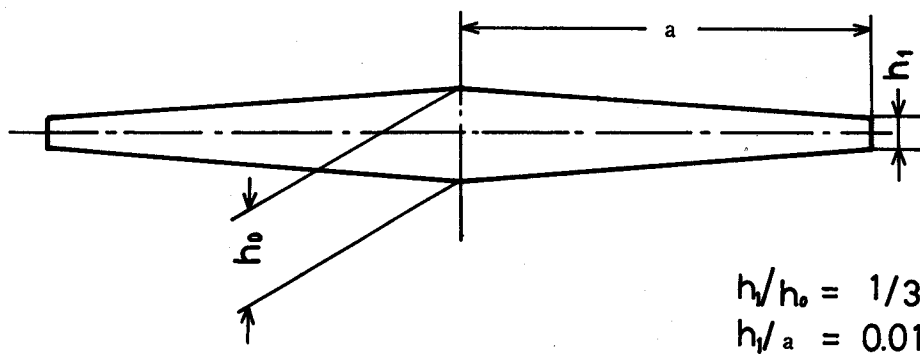
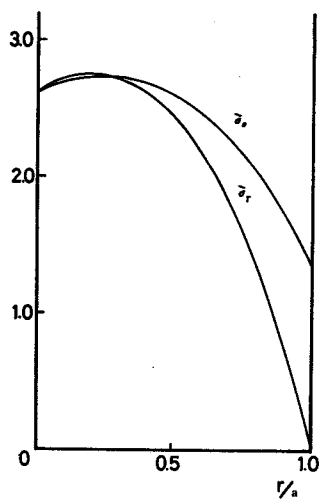
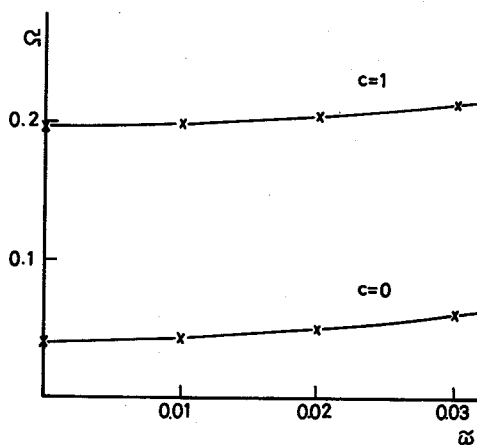


図5 板厚の変化する円板



$h_1/h_0 = 1/3$
 $h_1/a = 0.01$

図6 板厚の変化する円板の回転による応力分布



$h_1/h_0 = 1/3$
 $h_1/a = 0.01$

$n=2$ x : 直接解

図7 板厚の変化する円板の回転による固有振動数の変化

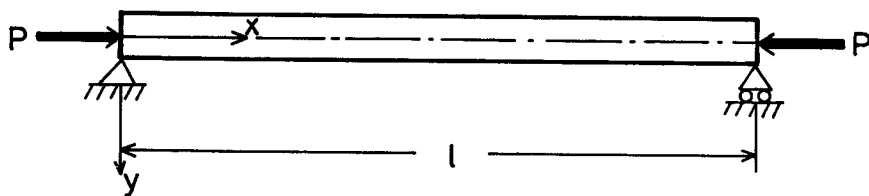


図8 軸力を受けるはり

範囲が十分に広いことがわかる。(注1)

ii) 板厚の変化する円板

図5のように、板厚が直線的に変化する場合について計算を行なう。 $h_1/h_0 = 1/3$, $h_1/a = 0.01$ のときを例にとり、円板の回転により生じる応力の分布を求めると図6のようになる。この値を用いて $n = 2$ のときに、円板の回転により固有振動数の変化を求めたものが図7である。このときも、直接解と比較すれば解の有効範囲が十分に広いことが確認できる。

2.4 考 察

本解法の有効性を示すため、板厚一定と板厚の変化する円板に対して数値計算を行ない $\varrho - \tilde{\omega}$ 曲線を描き、これと直接解を比較したが、いずれの場合も摂動解は第一次摂動項まで取れば十分であり、しかもその有効範囲も実用上十分に広いことがわかった。なお、ここで取扱った円板では差分分割数は100程度で十分であった。

また、このときも振動形については円板の回転によりそれほど大きく変わらないことを確認したので、これにはふれなかった。

なお、ここでは取扱わなかったが、板厚の変化が途中で段がついている場合なども接合条件を用いることにより計算できる。

3. 軸力を受けるはり

3.1 基礎関係式

ここで使用するおもな記号を以下に列挙する(図8参照)。その他のものは前述のものと同じである。

(注1) 円板の材料が軟鋼の場合、約 $\tilde{\omega} = 0.03$ で降伏が生じる。

A : 任意断面における断面積

A_0 : 基準断面積

a : 無次元断面積 = A/A_0

a_j : 差分点 j における無次元断面積

g : 重力加速度

h_0 : はりの基準厚さ

I : 慣性二次モーメント

I_0 : 基準断面における I

i : I の無次元値 = I/I_0

n : 自由振動の次数

P : 軸力

p : 無次元軸力 = $P l^2 / E I_0$

$\alpha^2 = A_0 r / E I_0 g$

$\beta^2 = \alpha^2 l^4$

r : はりの比重量

η : 無次元座標 = y/l

$\overline{\omega}$: 無次元円振動数 = $\beta \omega$

ξ : 無次元座標 = x/l

ω : 円振動数

軸方向に圧縮力 P を受ける可変断面のはりの自由振動の基礎式はつぎのようになる。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{A r}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (23)$$

ここで、 ξ , η , i , a , およびつぎの記号を式 (23) に用いる。

$$S = \frac{2}{iI_0} \frac{\partial I}{\partial \xi}, \quad T = \frac{1}{iI_0} \frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2}, \quad \bar{p} = p/i, \quad \bar{a} = a/i$$

このとき次式が得られる。

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} + S \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} + T \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + \bar{p} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} = -\beta^2 \bar{a} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (24)$$

また、 $\eta = \bar{y} \sin \omega t$

とおき、これを式(24)に用いると次式となる。

$$\frac{d^4 \bar{y}}{d\xi^4} + S \frac{d^3 \bar{y}}{d\xi^3} + T \frac{d^2 \bar{y}}{d\xi^2} + \bar{p} \frac{d^2 \bar{y}}{d\xi^2} = \bar{a} \mathcal{D}^2 \bar{y} \quad (25)$$

ここで、式(25)をつぎのように連立式に変形して表わす。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \bar{y}}{d\xi^2} - \bar{x} &= 0 \\ \frac{d^2 \bar{x}}{d\xi^2} + S \frac{d \bar{x}}{d\xi} + T \bar{x} + \bar{p} \bar{x} &= \bar{a} \mathcal{D}^2 \bar{y} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

この式(26)の解行列をつぎのようにおく。

$$Z = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \quad (27)$$

つぎに、はりに段がついているようなときには、この点でつぎの諸量が連続であるとする。

(i)たわみ、(ii)傾斜角、(iii)曲げモーメント、(iv)せん断力

これを用いると式(1.63)で示される関係が得られる。このときの係数 $(A_M)_m \sim (L_M)_{m+1}$ は 2×2 行列である。また、境界についても同様に式(1.61)、(1.62)で示される条件式が得られる。

このときの係数 $(A_1) \sim (C_N)$ も 2×2 行列であり、境界条件の種類により定まる。

3.2 摂動解法

式 (1.56) を用いて式 (2.6) を差分近似すると次式が得られる。

$$A_j Z_{j-1} + B_j Z_j + C_j Z_{j+1} = \bar{D}^2 D_j Z_j \quad (28)$$

ここに、 A_j , B_j , C_j 、および D_j はつぎの 2×2 行列である。

$$A_j = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{D}^2} - \frac{S}{2\bar{D}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{D}^2} \end{bmatrix}$$

$$B_j = \begin{bmatrix} T + \bar{p} - \frac{2}{\bar{D}^2} & 0 \\ -1 & -\frac{2}{\bar{D}^2} \end{bmatrix}$$

$$C_j = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{D}^2} + \frac{S}{2\bar{D}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{D}^2} \end{bmatrix} \quad D_j = \begin{bmatrix} 0 & \bar{a}_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

式 (2.8) を境界条件式 (1.61), (1.62)、および接合条件式

(1.63) とともに、差分点 $j = 1$ から N までについて表わすと式

(1.69) のような式で示される $2N$ 元の連立式が得られ、これを前記の問題と同様につぎのように表わす。

$$HZ = \bar{D}^2 DZ \quad (29)$$

これを満足する固有値 $\bar{D}$ と固有関数 Z は多数個存在するため、これを $\bar{D}_n$, Z_n ($n = 1, 2, 3 \dots M$, $M \leq N - 3$) と表わす。式

(2.9) はつぎのように書くことができる。

$$HZ_n = \bar{D}_n^2 DZ_n \quad (30)$$

ここで、摂動パラメータとして p を取り、これにより $\bar{D}_n$ と Z_n を展開する。

$$\bar{D}^2 = \sum_{i=0}^M \bar{D}_{ni}^2 p^i \quad (31)$$

$$Z_n = \sum_{i=0}^M Z_{ni} p^i \quad (32)$$

また、演算子 H も非摂動項 H_0 とこれに対する摂動項 H_1 とに分離する。

$$H = H_0 + p H_1 \quad (33)$$

式 (31) ~ (33) を式 (30) に代入し、両辺の p の同次項について整理すると次式が得られる。

$$H_0 Z_{n0} = \mathcal{D}_{n0}^2 D Z_{n0} \quad (34)$$

$$H_1 Z_{n1} + H_1 Z_{n0} = \mathcal{D}_{n0}^2 D Z_{n1} + \mathcal{D}_{n1}^2 D Z_{n0} \quad (35)$$

つぎに、不連続点を持つはりの自由振動問題においては、つぎの直交関係式が成立する。

$$K (g Z_{k0})^T D Z_{n0} = \begin{pmatrix} 1 & (k = n) \\ 0 & (k \neq n) \end{pmatrix} \quad (36)$$

ただし、 K はある定数であり、 g はつぎの行列である。

$$g = \begin{bmatrix} \bar{g}_1 \bar{h}_1 & & & & & \\ & \bar{g}_2 \bar{h}_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \bar{g}_{m-1} \bar{h}_{m-1} & & \\ & & & & \bar{g}_m \bar{h}_m & \\ & & & & & \bar{g}_{m+1} \bar{h}_{m+1} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \bar{g}_{N-1} \bar{h}_{N-1} \\ & & & & & & & \bar{g}_N \bar{h}_N \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\text{ここに } \bar{g}_j = \begin{bmatrix} g_j & \\ & g_j \end{bmatrix} \quad \bar{h}_j = \begin{bmatrix} h_j / h_0 & \\ & h_j / h_0 \end{bmatrix}$$

ただし

$$g_1 = \frac{A_1}{2A} a_1, \quad g_m = \frac{A_1}{2A} a_m, \quad g_2 = \frac{A_1}{A} a_2,$$

$$\begin{aligned}
g_3 &= \frac{d_1}{d} a_3, \dots, & g_{m-1} &= \frac{d_1}{d} a_{m-1}, & g_{m+1} &= \frac{d_2}{2d} a_{m+1}, \\
g_N &= \frac{d_2}{2d} a_N, & g_{m+2} &= \frac{d_2}{d} a_{m+2}, & g_{m+3} &= \frac{d_2}{d} a_{m+3}, \dots, \\
g_{N-1} &= \frac{d_2}{d} a_{N-1}, & d_1 &= \frac{l_1}{l(m-1)}, & d_2 &= \frac{l_2}{l(N-m-1)}
\end{aligned}$$

ここでは、図 1.6 の分割に対して行列を示したが、不連続点が多数個あるときも同様である。

すなわち、 $\mathbf{g}$ は各差分点に分割した長さやはりの厚さの比率を与える行列である。

式 (34) を解けば、固有値および固有関数の第零次摂動項が得られる。

また、固有関数の第一次摂動項 Z_{n1} を Z_{n0} により展開する。

$$Z_{n1} = \sum_{n=1}^M \alpha_n Z_{n0} \quad (38)$$

これを式 (35) に代入し、式 (34), (36) の関係を用いて変形を行なえば、固有値および固有関数の係数はつぎのように求まる。

$$\bar{\mathcal{Q}}_{n1}^2 = \frac{(\mathbf{g}Z_{n0})^T \mathbf{H}_1 Z_{n0}}{(\mathbf{g}Z_{n0})^T \mathbf{D} Z_{n0}} \quad (39)$$

$$\left. \begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{K(\mathbf{g}Z_{k0})^T \mathbf{H}_1 Z_{n0}}{\bar{\mathcal{Q}}_{n0}^2 - \bar{\mathcal{Q}}_{k0}^2} & (k \neq n) \\
\alpha_k &= 0 & (k = n)
\end{aligned} \right\} \quad (40)$$

第二次摂動項以降についてはここでは説明を省略するが、同様にして求めて行くことができる。

3.3 数値計算例

まず、一様断面のはりについて本解法により解を求め、これと Timoshenko⁽⁷⁴⁾ の理論解と比較して本解の妥当性を確認したうえで、

テーパはりについて摂動計算を行なう。 はりの支持条件はいずれの場合も自由支持としている。 すなわち、 $\bar{x} = \bar{y} = 0$

i) 一様断面はり

一様断面のはりについては、差分分割数の影響を調べるため分割数を変えて摂動解を求め、これを理論解と比較した(図9)。 はりの問題では30分割程度に取れば、十分な精度を持つことがこれよりわかる。 また、解は第一次摂動項までに対するものであるが、理論解と比較すれば十分に広い有効範囲を持つことが確認される。

ii) テーパはり

図10の記号を用いる。 はりの横断面は長方形とし、テーパの度合を δ により表わす。 この δ の値を変えて計算を行なう。 このとき、第一次摂動項まで求めた結果を図11, 12に示す。 なお、図中の×印は $\delta=0.1$ の場合に対して正弦級数のはじめの3項を用いてRitz⁽⁷⁶⁾の方法により求めた値である。 これとの比較によれば、一様断面はりの場合と同様に第一次摂動項までで十分の精度が得られることがわかる。 また、このときも差分分割数は20~30で十分である。

3.4 考 察

一様断面はりとはりについて計算を行ない $p-\bar{d}$ 曲線を描いて、これと理論解およびRitzの近似解との比較を行なった。 その結果によるといずれの場合も第一次摂動項まで求めれば十分な精度を持つことがわかり、しかもその有効範囲も十分に広いことが確認された。 また断面の変化の状態がそれほど急激でなければ差分分割数も20~30で十分であることがわかる。

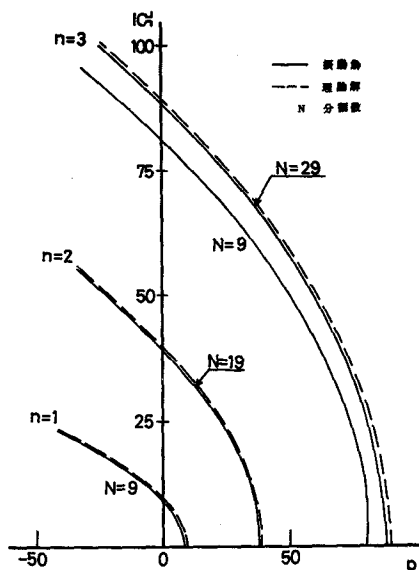


図9 一断面はりの軸力による固有振動数の変化

なお、このときも振動形については、軸力の変化に対してそれほど大きく変化しないのでこれにふれていない。

4. 結 言

ここでは種々の自由振動問題に対して、本研究で確立した摂動解法の有効性を示すため、例題として回転円板および軸力を受けるはりの自由振動問題を取扱った。

これらの問題に対して、円板の回転数およびはりの軸力値をそれぞれ摂動パラメータに取り、これらの変化に対する固有振動数の変化を求めたが、そのいずれの場合も第一次摂動項まで取るだけで本解の有効範囲は実用上十分に広いことが確認できた。

これらの問題に対しても、本研究の第1章で示した差分法による

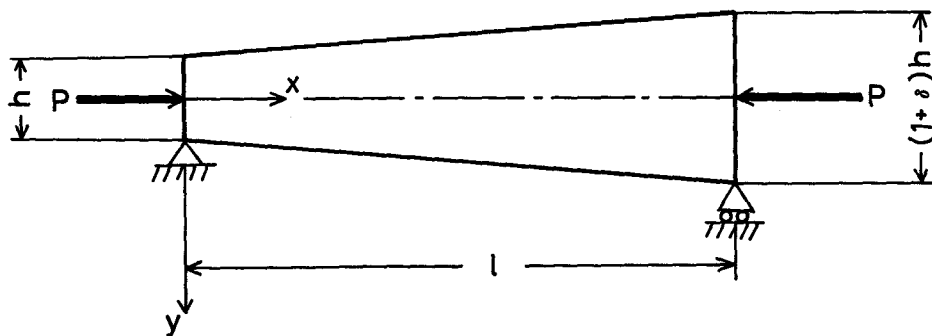


図10 軸力を受けるテーパはり

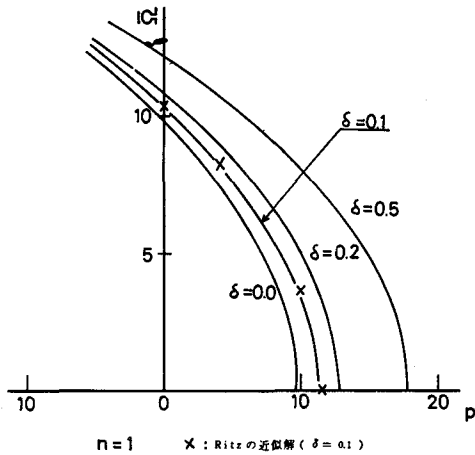


図 11 テーベはりの軸力による固有振動数の変化

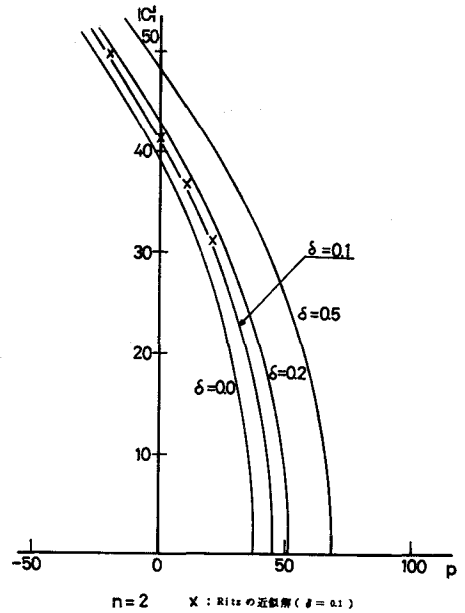


図 12 テーベはりの軸力による固有振動数の変化

解法により直接解を求めることができる。しかし、本解法による
ときはそのつど回転数および軸力値を変えて計算しなおす必要はな
く、このときも計算機の使用時間の点では有利である。

文 献

- (1) P.M.Naghdi , C.N.Desilva , Proc.U.S.N.C.Appl.Mech., 2 (1954)
333 .
- (2) C.R.Steele , Trans.ASME , Ser , E , 7 (1962) , 353 .
- (3) A.Harari , M.L.Baron , Trans.ASME , Ser.E , 6 (1970) , 393 .
- (4) D.E.Johnson , R.Grele , AIAA , J. , 4-3 (1966) , 486 .
- (5) 太田 , ほか 3 名 , 機論 , 29-197 (昭38-1) , 142 .
- (6) 太田 , ほか 4 名 , 機論 , 29-197 (昭38-1) , 159 .
- (7) 太田 , ほか 3 名 , 機論 , 29-197 (昭38-1) , 167 .
- (8) 太田 , ほか 3 名 , 機論 , 29-197 (昭38-1) , 175 .
- (9) 浜田 , ほか 3 名 , 機論 , 31-223 (昭40-3) , 389 .
- (10) M.J.Turner , R.W.Clough , H.C.Martin , and L.J.Topp , J.Aeron-
aut. Sci. , 23 (1956) , 805 .
- (11) P.E.Grafton , D.R.Strome , AIAA , J. , 1 (1963-10) , 2342 .
- (12) W.K.Sepetoski , C.E.Pearson , I.W.Dingwell , and A.E.Adkins ,
Trans. ASME , Ser.E (1962) , 655 .
- (13) A.Kalnins , Trans. ASME , Ser. E , 9 (1964) , 467 .
- (14) R.F.Hartung , Proceedings of a Conference on Computer Oriented
Analysis of Shell Structures , 10-14 (1971-8) , California .
- (15) 妹沢 , 振動学 , (昭7) , 岩波書店 .
- (16) H.Deresiewicz , R.D.Mindlin , Trans. ASME , Ser. E , 3 (1955) ,
86 .
- (17) K.Forsberg , AIAA , J. , 2-12 (1964) , 2150 .
- (18) D.L.Johnson , R.Grief , AIAA , J. , 4-3 (1966) , 486 .
- (19) 平野 , 機論 , 34-266 (昭43-10) , 1723 .

- ②① 溝口，機論，27-176(昭36-4)，493.
- ②② 溝口，機論，35-279(昭44-11)，2166.
- ②③ A.Kalnins，Proc.U.S.N.C.Appl.Mech.，4(1963)，225.
- ②④ P.M.Naghdi，A.Kalnins，Trans.ASME，Ser.E，3(1962)，65.
- ②⑤ A.Kalnins，Proc.U.S.N.C.Appl.Mech.，1(1962)，225.
- ②⑥ 谷，八巻，機論，36-290(昭45-10)，1648.
- ②⑦ A.Kalnins，J.Acoustical Society of America，36-7(1964).
- ②⑧ 浜田，宮田，機誌，74-629(昭46-6)，766.
- ②⑨ W.Flügge，Stresses in Shells，Springer-Verlag，1960.
- ③① J.L.Sanders，NASA，Rept.，24(1959-6)，1.
- ③② A.E.H.Love，A Treatise on The Mathematical Theory of Elasticity，4th.，Cambridge.
- ③③ 溝口，機論，20-95(昭29-7)，483.
- ③④ 溝口，井上，機論，25-159(昭34-11)，1172.
- ③⑤ 溝口，機論，29-203(昭38-7)，1217.
- ③⑥ K.Mizoguchi，Bull.Uni.of Osaka Prefecture，Ser.A，15-2(1966)，1.
- ③⑦ 溝口，白川，間瀬，機論，37-293(昭46-1)，17.
- ③⑧ K.Mizoguchi，Bull.Uni.of Osaka Prefecture，Ser.A，5(1957)，5.
- ③⑨ K.Mizoguchi，Bull.Uni.of Osaka Prefecture，Ser.A，8(1960)，1.
- ③⑩ L.H.Donnell，N.A.C.A.Rept.，479(1933)，3.
- ④① B.Budiansky，P.P.Radkowski，AIAA，J.，1-3(1963)，1833.
- ④② 浜田，ほか3名，機誌，73-620(昭45-9)，1221.
- ④③ S.Timoshenko，K.S.Woinowsky，Theory of Plates and Shells，

McGraw-Hill, New York.

- (42) S. Timoshenko, J. M. Gere, Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, New York.
- (43) V. I. Weingarten, J. Aerospace Sci., (1962-7), 804.
- (44) G. Herrmann, A. E. Armenakas, Proc. U. S. N. C. Appl. Mech., (1962), 203.
- (45) L. R. Koval, E. T. Cranch, Proc. Fourth, U. S. N. C. Appl. Mech., (1962), 107.
- (46) P. A. Cooper, NASA, TN D-3831 (1967-3).
- (47) B. Budiansky, Trans. ASME, Ser. E, 6 (1968), 393.
- (48) A. Kalnins, V. Biricikoglu, Nuclear Engineering and Design, 16 (1971), 343.
- (49) A. Kalnins, V. Biricikoglu, J. Acoustical Society of America, 51 (1972-6), 1697.
- (50) A. Kalnins, Nuclear Engineering and Design, 20 (1972), 131.
- (51) L. H. Donnell, Trans. ASME, Ser. E, 56 (1934), 795.
- (52) C. L. Dym, N. J. Hoff, Trans. ASME, Ser. E, 12 (1968), 754.
- (53) E. Reissner, American J. of Mathematics, 63 (1941), 177.
- (54) E. Reissner, Proceeding of Symposia in Applied Mathematics, American Mathematical Society, 3 (1950), 27.
- (55) D. P. Updike, A. Kalnins, Trans. ASME, Ser. E, 9 (1970), 635.
- (56) 強度設計データブック, (昭40), 837, 裳華房.
- (57) S. H. Iyer, S. H. Simmonds, Trans. ASME, Ser. E, 9 (1972), 836.
- (58) 鵜戸口, 加納, 高圧力, 9-1 (1971), 2229.
- (59) A. E. H. Love, A Treatise on The Mathematical Theory of Elas-

- ticity , 4 th., Cambridge , 5 3 6 .
- (60) G.A.Greenbaum , AIAA , J. , 2—3 (1 9 6 4) , 5 9 0 .
 - (61) P.M.Naghdi , Quart .Appl .Math. , 1 4 (1 9 5 6) , 3 6 9 .
 - (62) 川股 , 柴田 , 生産研究 , 2 3—9 (昭4 6) , 4 0 0 .
 - (63) 川股 , 柴田 , 建築学会講演梗概集 , (昭4 6) , 6 2 1 .
 - (64) Y.Tsuboi , K.Akino , Rept . Inst . Industrial Sci . Univ . of Tokyo ,
1 1 (1 9 6 1—9) .
 - (65) D.A.Evensen , NASA , TN , D—4 0 9 0 (1 9 6 7—8) .
 - (66) E.Reissner , Aeromech. Rept . AM5—4 , Ramo—Wooldrige Corp. ,
(1 9 5 5—1 1) .
 - (67) Y.C.Fung , E.E.Sechler , and A.Kaplan , J.Aero.Sci. , 2 4 (1957) ,
6 5 0 .
 - (68) V.I.Weingarten , I.J.Mech. Sci. , 8 (1 9 6 6) , 1 1 5 .
 - (69) 寺沢 , 数学概論 , 応用編 , (昭3 5) , 1 9 7 , 岩波書店 .
 - (70) 井町 , 機械振動学 , (昭3 9) , 2 2 7 , 朝倉書店 .
 - (71) 妹沢 , 振動学 , (昭7) , 3 1 , 岩波書店 .
 - (72) H.Herman , Trans . ASME , Ser . E , 3 7 (1 9 7 0—9) , 5 9 6 .
 - (73) R.Courant , D.Hilbert , Methoden der Mathematischen Physik , Erster
Band , Zweite Verbesserte Auflage , Springer—Verlag , 1 9 3 1 .
 - (74) S.Timoshenko , Vibration Problems in Engireering , (1 9 3 7) ,
3 6 4 .
 - (75) 強度設計データブック (昭4 0) , 4 2 3 , 裳華房 .
 - (76) 近藤 , 技術者・研究者のための応用数学 (昭4 0) , 4 1 1 , 丸善書店 .
 - (77) 妹沢 , 振動学 (昭7) , 2 6 4 , 岩波書店 .
 - (78) S.Timoshenko , J.N.Goodier , Theory of Elasticity , McGrow—Hill .

発 表 論 文

1. 浜田・間瀬 一般軸対称かくの曲げ問題に対する三つのかく理論の適用
日本機械学会論文集 39巻325号
昭和48年9月掲載予定 (第1章)
1. 浜田・間瀬 圧力を受ける一般軸対称かくの自由振動問題
日本機械学会論文集
掲載予定 (第2章)
1. 浜田・北川 一般軸対称かくの自由振動問題に対する摂動
間瀬 解法
日本機械学会論文集 39巻317号
昭和48年1月 (第3章)
1. 浜田・間瀬 回転円板の自由振動問題に対する摂動解法
神尾 日本機械学会論文集 39巻326号
昭和48年10月(寄書)掲載予定
(付 録)
1. 浜田・北川 軸力を受けるはりの自由振動問題に対する摂
間瀬・原田 動解法
日本機械学会論文集 38巻307号
昭和47年3月(寄書) (付 録)

1. 浜田・間瀬
渡部・橋本

一般軸対称かくの曲げ問題に対する三つのか
く理論の適用（補遺）

日本機械学会関西支部第48期定時総会
講演論文集 734-1号

昭和48年3月 (第1章)

(第2章)

1. 浜田・間瀬

内圧を受ける一般軸対称かくの自由振動問題
に対する摂動解法

日本機械学会関西支部第47期定時総会
講演論文集 724-1号

昭和47年3月 (第3章)