



Title	円形断面曲管内層流に関する理論的研究
Author(s)	稲葉, 武彦
Citation	大阪大学, 1976, 博士論文
Version Type	VoR
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/129">https://hdl.handle.net/11094/129</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

円形断面曲管内層流  
に関する理論的研究

1976年

稲葉武彦

## 目 次

第1章	序 論	1
1.1	まえがき	1
1.2	従来の研究の概要	2
1.3	本研究の目的と概要	7
第2章	コイル管内層流定常流れ	11
2.1	緒 言	11
2.2	解 析	12
2.2.1	基礎式	12
2.2.2	パラメータ $D_c$ の値が小さい場合	16
2.2.3	パラメータ $D_c$ の任意の値に対する解析	19
2.3	数値例および議論	27
2.4	結 言	37
第3章	管軸に沿って曲率が変化する曲管内層流定常流れ	38
3.1	緒 言	38
3.2	直行管内層流	38
3.2.1	解 析	38
3.2.2	管軸に沿って曲率がゆっくり変化する場合	42
3.2.3	管軸に沿う曲率の変化が任意の場合	46
3.2.4	管軸の曲りが平均流量に及ぼす影響	51
3.2.5	数値例および議論	53
3.3	管軸に沿って曲率がゆっくり変化する曲りが1回 および2回の曲管内層流	58
3.3.1	曲りが1回の場合	58
3.3.2	曲りが2回の場合	61

3.3.3	数値例および議論	62
3.4	管軸に沿う曲率の変化がゆっくりしている場合の 統一的取り扱いについて	65
3.5	結 言	67
第4章	だ行管内を流れる非圧縮性流体の層流脈動流れ	69
4.1	結 言	69
4.2	解 析	70
4.3	数値例および議論	78
4.4	結 言	86
第5章	圧縮性をわずかに考慮した場合の円管内非定常流 れに及ぼす平均流の影響	87
5.1	結 言	87
5.2	解 析	87
5.3	伝達マトリクス	100
5.4	数値例および議論	102
5.5	結 言	108
第6章	結 論	109
謝 辞		111
参考文献		112

## 主要記号

- $A$ : 脈動圧力こう配の無次元振巾  
 $a$ : 曲管の曲りの振巾または曲管が漸近する直線のこう配 (無次元)  
 $c^*$ : 流体中を伝わる音波の速度  
 $De$ : デイーン数に類似の無次元パラメータ (式 (2.46))  
 $G_{ij}$ : 伝達マトリクスの要素 ( $i, j = 1, 2$ ) (無次元)  
 $\left. \begin{matrix} g_{ij} \\ g_{ij} \end{matrix} \right\}$ : 計量テンソル  
 $Im$ : 虚数部分を示す  
 $i$ : 虚数単位 ( $= \sqrt{-1}$ )  
 $J_0$ : 第1種0次ベッセル関数  
 $J_1$ : 第1種1次ベッセル関数  
 $K^*$ : 管軸方向の圧力こう配 ( $= -\partial p^* / \partial x^*$  または  $-\partial p^* / \partial x^*$ )  
 $Re^2$ : 変動流のレイノルズ数 ( $= \omega^* r_0^{*2} / \nu^*$ ) (無次元)  
 $M$ : マッハ数 ( $= W_0^* / c^*$ ) (無次元)  
 $N_{De}$ : デイーン数 ( $= Re_m (r_0^* / R^*)^{1/2}$ ) (無次元)  
 $p^*$ : 圧力  
 $R^*$ : らせん円柱の半径  
 $Re$ : ポアズイユ流れを基礎とするレイノルズ数 ( $= W_0^* r_0^* / \nu^*$ ) (無次元)  
 $Re$ : 実数部分を示す  
 $Re_m$ : 管断面平均流速を基礎とするレイノルズ数 ( $= 2 \omega_m^* r_0^* / \nu^*$ ) (無次元)  
 $r$ : 半径方向座標 (無次元)  
 $r_0^*$ : 管の内半径  
 $x$ : 管軸に沿う長さまたはラプラス演算子 (無次元)  
 $t$ : 時間 (無次元)  
 $u$ :  $r$ 方向流速 (無次元)

- $U$ :  $\varphi$ 方向流速 (無次元)  
 $U_i$ : 速度の反変成分  
 $W_0^*$ : ポアゾイユ流れの最大流速  
 $w$ :  $x$ あるいは $y$ 方向流速 (無次元)  
 $x$ : 管軸の接線方向座標 (無次元)

## ギリシア文字

- $\beta$ : 円柱らせ線のピッチ角あるいは $\lambda_0/\delta$  (無次元)  
 $\Gamma_{jk}^i$ : クリストッフエルの第2種記号  
 $\gamma$ :  $= \lambda_1/\delta$  (無次元)  
 $\eta$ :  $= \sqrt{-i} \tau_0 = \sqrt{-i \omega^* / \nu^*} r_0^*$  (無次元)  
 $\kappa$ :  $= \cos \beta / R$  あるいは管軸に沿う曲率の変化を表わすパラメータ (無次元)  
 $\kappa_c$ : 管軸の主曲率 (無次元)  
 $\lambda$ : 固有値 (無次元)  
 $\nu^*$ : 流体の動粘性係数  
 $\rho^*$ : 流体の密度  
 $\tau$ : 管軸のねい率 (無次元)  
 $\varphi$ : 周方向座標 (無次元)  
 $\omega^*$ : うず度または角振動数

## 上つき添字

- $*$ : 次元量であることを示す  
 $\cdot$ :  $w_{0i} = \text{Im} \{ w_{0i} e^{it} \}$  など  
 $\wedge$ : ラプラス変換された量につける

## 下つき添字

- $0$ : 主として第0近似値につける

- l : 主として第1近似値につける
- m : 主として平均値であることを示す
- r : rのみの関数であることを示す

# 第1章 序論

## 1.1 まえがき

管内流れは基礎流れとして古くから関心をもたれている。とくに直管の管摩擦損失に関しては、その工学的重要性から、円形のみならず種々の断面形状の管について広く研究され、その損失係数の式として層流域に対しては理論式が、また乱流域に対してはいくつかの経験式が呈示されている。また実際の管路の曲り部としてよく用いられるベンドの圧力損失に関する研究も多く、損失係数も与える二・三の経験式が得られている。管路に対してはこのような圧力損失と同時にその内部流れについても関心をもたれ、直管内層流についてはいうまでもないが、内部流れから圧力損失を求めようとする研究はこれまでもわめて多くなされている。とくに管軸の曲率が一定であり、その曲率半径が管の半径に比し大きい円環状曲管内層流については理論的取り扱いが比較的容易であるところから多くの研究者によってさまざまな角度から解析がなされている。このような曲管内を粘性流体が流れるときには、軸流速度の断面内分布のため曲りによって生ずる遠心力も分布をもつ。つまり軸流速度の小さい管壁近くでは遠心力も小さく、速度の大きい管中心部では遠心力も大きい。そのため管断面内に圧力こう配を生じ、二次流れが誘起される。その結果、曲り部での流速分布は直管の場合とは異なったものとなり、管摩擦損失も一般に増大する。圧力損失を減ずるために曲り部にガイドベーンを入れて二次流れを弱める措置をとる場合がある反面、積極的にこの二次流れを利用する場合も多い。熱交換器ではこの二次流れにより熱交換量が増大する。またこの二次流れは軸方向拡散を減ずる効果があり、化学反応器の設計などに応用されている。さらにこの二次流れにより流れが安定化し、臨界レイノルズ数が上昇する。このように興味深い性質をもつ二次流れに対してこれまで層流域を中心として多くの理論解析がなされているが、前述のようにそれらはいずれも曲率が一定で、し

かも二次元的な曲りをもつ管（円環状曲管）の場合に限られている。実際には管軸の曲率は管軸に沿って変化したり，コイル管のように曲率は一定でも三次元的な曲りをもっていたりする。本論文ではこの点に着目し，管軸の曲率が管軸に沿って変化する管および三次元的な曲りをもつコイル管を中心に非定常な場合を含め，層流域での内部流れの解析を行う。実際の管内流れでは乱流の場合が多いが，流れの定性的な面については層流域での性質が乱流域でも保持され，また層流に対しては理論的基礎が確定している点を考えると，まず層流域での解析から始めるのが順当であると考えられる。さらに二次流れに関しては，前述の速度分布に関する議論からも想像できるように，その強さに及ぼす曲率の影響は層流域で顕著である。またこのような曲管内層流は近年バイオメカニクスの分野でも深い関心をもたれている。

## 1.2 従来の研究の概要

二次流れについて実験的にその存在を示したのは Thomson<sup>(89,90)</sup> が最初であるとされている。彼は河川のにが行がすすむのは，流速の小さい底部と大きい表面近くでの遠心力の差によって生ずる二次流れによると考え，横形実験でトレーサによる可視化を行い，二次流れの存在を示した。1902年に Saphir<sup>(81)</sup> は 180°ベンドの流速分布および圧力損失の測定を行った。1910年 Eustice<sup>(26)</sup> はコイル管の抵抗を測定し，その結果から明確な臨界点が存在しないと指摘し，1911年には染料を用いて流動状態を調べた。<sup>(25)</sup>

曲管内流れの理論解析は Dean<sup>(14)</sup> によって初めてなされた。彼は1927年に曲率半径比（管の半径と管軸の曲率半径の比）の小さい円環状曲管内層流に対して曲率半径比をパラメータとする摂動展開を行い，二次流れを求めた<sup>(14)</sup>（図1.1）。さらに1928年には曲管内層流の性質を特徴づける相似パラメータとして，レイノルズ数と曲率半径比の $\frac{1}{2}$ 乗とから成るデーン数を提案し，デーン数が小さい範囲で曲管と直管との

流量比を計算し、曲管では抵抗が増加することを示した。<sup>(65)</sup>これらの論文は曲管内流れの解析の基礎を成すものである。

1929年にはWhite<sup>(98)</sup>による実験結果が報告されている。その中で彼は臨界レイノルズ数は直管の場合に比しかなり大きくなるが、曲管内流れにも明確な臨界点が存在すると指摘した。これに関連してTaylorは染料を用いて実験的

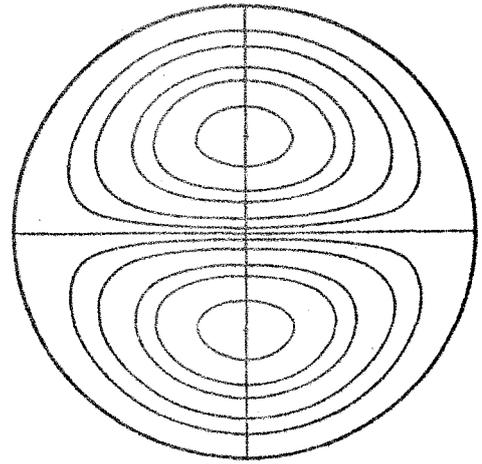


図 1.1

に臨界レイノルズ数を求め、それは直管の場合より一般にかなり高く、また曲率半径比が大になるほど大になることを確めた。<sup>(99)</sup>またこの年にはNippert<sup>(66)</sup>によるベンドの流れに関する研究も報告されている。その後1930年のRichter<sup>(76)</sup>による圧力損失に関する実験、1935年のWattendorf<sup>(96)</sup>によるく形断面曲管内の流速分布の測定、1937年のKeuleganら<sup>(46)</sup>による円形断面曲管内の流速測定などが報告されている。

さて1934年にはAdler<sup>(1)</sup>による研究が報告されている。彼はレイノルズ数が大きい場合には、管断面内を曲りの内側から外側に向けて流れる二次流れは管壁に沿う薄い層内を流れて再び曲りの内側にもどると考え、管断面内を粘性の作用が無視できる主流部と、二次流れが曲りの内側にもどるときに通る粘性の影響の大きい境界層部との二つの領域に分けて考えた。主流部では対称軸に沿う軸流速度分布を直線的と仮定し、その一次式に含まれる二つの未知数は実測された軸流速度分布から決めている。境界層部では流速分布も二次式で近似して運動量式も解いている。この論文は曲管内流れの境界層近似モデルの最初のものであり、これ以後のこの種の解析の基礎を成すものである。この段階で円環状曲管の内部流れに関する解析的取り扱いの基礎は、前述のDeanとともにAdlerによって確立されたといえる。

その後しばらく曲管に関する研究論文が見られないが、第二次大戦後1951年に Squire ら<sup>(86)</sup>は翼列の二次流れに関して、曲り部に流入する流れが一様でない場合には非粘性流体でも二次流れを生じることを示した。これは粘性流体の流れをうす度をもった理想流体の流れで表現したものであり、これ以後翼列の二次流れの解析は新しい展開をみるに至った。この考えは曲管内の流れの解析にも適用され、Hawthorne<sup>(29)</sup>、Eichenberger<sup>(21)</sup>、Squire<sup>(87)</sup>、Horlock<sup>(30)</sup>、Rowe<sup>(79)</sup>などの論文で扱われている。

さて曲率半径比の小さい曲管内層流に関する理論研究のうち、摂動法を用いた解析はその後も多くなされている。たとえば Cuming<sup>(13)</sup>、伊藤<sup>(35)</sup>、Becker<sup>(7)</sup>、Kapur<sup>(46)</sup>、Erdogan<sup>(22)</sup>、Topakoglu<sup>(91)</sup>、Özsisik<sup>(70)</sup>、Larrain<sup>(55)</sup>、Sankaraiyah<sup>(80)</sup>などが挙げられる。

一方デーン数が大きい場合に適用できる境界層近似は Adler 以後 Barua<sup>(6)</sup>により改良され、伊藤によって完成された。Barua<sup>(6)</sup>は主流部での二次流れ流線を対称軸に平行と仮定し、境界層部に流入する二次流れ流量と境界層内を流れるそれとが等しいという条件により主流部と境界層部の接続を行った。したがって実験から決定される量は何も含まれていない。また境界層部の流速分布を三次式で表現して運動量式を解いている。伊藤<sup>(39)</sup>は主流部での運動方程式を解き、Baruaと同じ方法で主流部と境界層部の二次流れの接続を行っている。境界層内の流速分布としては四次式を仮定している。森<sup>(59,61)</sup>も境界層近似を用いた解析を行っている。1976年に Smith<sup>(85)</sup>は特異摂動法により、デーン数が大きい領域での厳密解を初めて求め、境界層近似に対する数学的裏付けを行った。

これまでなされていることから中間のデーン数に対する流れの研究は電子計算機の発達とともに盛んになった。McConalogue<sup>(57)</sup>はフーリエ展開を用いて解を求めている。その外、基礎式を差分近似して解く方法は Truesdell<sup>(92)</sup>、Cheng<sup>(11)</sup>、Akiyama<sup>(2,3)</sup>、Klab<sup>(47)</sup>、

Austinら<sup>(4)</sup>, Greenspan,<sup>(28)</sup> Patankarら<sup>(71)</sup>, Collinsら<sup>(2)</sup>などに採用されている。任意のテイラー数の領域に対するこの他の解析としては、粗い近似を用い Sonine 展開の公式を応用し、二次流れ強さをパラメータとして整理した Deanら<sup>(6)</sup>の研究が挙げられる。

以上は曲率半径比が小さい場合についての解析であったが、それが大きい場合を扱ったものとしては Nungeら<sup>(68)</sup>の研究がある。また管壁の曲り部の丸みが異なる3種のベンド内流れに対する数値解が Kawaguti<sup>(64)</sup>によって得られている。さらに特別な場合として粘性力が支配的であるゆっくりにした流れを扱ったものもみられる。伊藤は慣性項が無視できる場合について変分法による解析を行った。<sup>(33,34)</sup> また Riegerら<sup>(77)</sup>はく形断面曲管内の creeping motion についてフーリエ変換を用いて解析している。軸方向拡散については Koutskyら<sup>(49)</sup>の実験があり、層流域での理論解析は Erdoganら<sup>(22)</sup>, McConalogue,<sup>(59)</sup> Nungeら<sup>(67)</sup>などの論文にみられる。

さて前述の境界層近似モデルは乱流の場合にも適用され、Weske,<sup>(97)</sup> 伊藤,<sup>(36)</sup> 森ら<sup>(60)</sup>などの解析が報告されている。これとは別に two-equation turbulence model を用い、得られた式も数値的に解いて流れ場を求めるという方法による解析が Patankarら<sup>(72)</sup> および Pratapら<sup>(73)</sup>によりなされている。

曲管内あるいはベンド内の流速分布や管摩擦損失に関する実験も多く、伊藤,<sup>(34,36,37,38)</sup> Kubairら,<sup>(50,51)</sup> Sebanら,<sup>(82)</sup> Rogersら,<sup>(78)</sup> Masypov,<sup>(100)</sup> Rowe,<sup>(79)</sup> 村上ら,<sup>(63,64,65)</sup> Austinら,<sup>(5)</sup> Patankarら<sup>(72)</sup>などが報告されている。また曲管内乱流の乱れの測定が Eskinaziら<sup>(23)</sup>によりなされている。曲管の熱伝達に関する研究としては Jeshke,<sup>(41,42)</sup> Kreith,<sup>(49)</sup> Sebanら,<sup>(82)</sup> Draavidら,<sup>(19)</sup> 森ら,<sup>(59,60,61)</sup> Chengら,<sup>(11)</sup> Akiyamaら,<sup>(2,3)</sup> Klabら,<sup>(47)</sup> Patankarら<sup>(71,72)</sup>などがある。

また管軸の曲率中心軸まわりに回転する円環状曲管内層流の理論解析が伊藤らにより報告されている。とくに流れの方向と回転の方向とが逆

の場合には、ある回転数の範囲で二次流れの逆転現象が生じ、この逆転域では対称軸で二分される管断面半平面内に二つの中心をもち、たがいに逆方向に流れる二つの二次流れが現われる(図1.2)。この

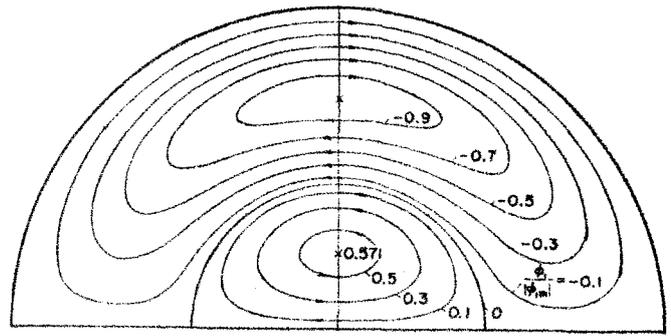


図1.2 二次流れ流線(右が曲りの外側)

二次流れの性質は管の曲りによる遠心力と回転によるコリオリ力の大きさの割合で決まるものである。またこの論文には回転する曲管に関する文献も多く記載されている。

以上が曲管内定常流に対してこれまでなされた研究の概要であるが、最近このような曲管内の非定常流れに関する研究もなされている。その基礎となる真直な円管内脈動流れに関する研究は古くからなされている。それらのうち最初の重要なものは Richardson<sup>(74,75)</sup>による実験である。彼は脈動周波数が高い場合には最大流速は必ずしも管中心ではなく、管壁近くに生ずる場合があることを発見した。この事実は Sexl<sup>(76)</sup>によりナビエ-ストークスの式から理論的に証明された。また伊藤はラプラス変換を用い、管軸方向の圧力こう配が時間的に種々に変化する場合の流れを解析した<sup>(77)</sup>。草間も液体の二次元脈動流れの理論解析も圧縮性を考慮しない場合<sup>(72)</sup> および考慮した場合<sup>(73)</sup> についてそれぞれ行い、液体の場合には圧縮性の影響は無視してよいと結論づけ、非圧縮の仮定のもとで円管内脈動流れの解を求めている<sup>(74)</sup>。その後 Uchida<sup>(78)</sup> も平均流のある場合について解析している。

最近このような非圧縮の仮定のもとでの管内脈動流れの解析は曲率半径比の小さい円環状曲管についてもなされている。1970年 Lyne<sup>(56)</sup> は表皮効果の厚さが薄い場合について境界層近似モデルを用いて解析を行い、脈動流れの場合には定常流とは異なる二次流れが生じる場合のあることを発見し、染料を流した実験でその存在を確かめた。この二次流

れは対称軸で分けられる管断面半平面内に二つの中心をもち、たがいに逆向きに流れ、管軸付近では曲りの外側から内側に向って流れるものである。このように二次流れが半円内に二つ現われることは前述の伊藤ら<sup>(69)</sup>の場合と類似ではあるが、伊藤らの場合には曲りによる遠心力と回転によるコリオリ力の作用によるが、Lyneの場合は曲りによる遠心力の管断面内での分布によるものであり、両者の生成のメカニズムは異なっている。Lyneが理論的に求めたこの二次流れは Bertelsen<sup>(8)</sup>およびその後の Munson<sup>(62)</sup>による管断面内二次流れの写真撮影でその存在がはっきりと示された。Zaloshら<sup>(99)</sup>は直管の場合からの摂動展開による解析を行った。Smith<sup>(84)</sup>は Lyne および Zaloshらの場合を含む種々の場合に対する解析を報告している。この外、曲管が管軸の曲率中心軸まわりにおじり振動もする場合に生じる二次流れによって物質交換量が増すという報告が Drinkerら<sup>(19)</sup>によりなされている。

以上では流体は非圧縮であるとして扱われていたが、非定常流れにおいては流体の圧縮性が問題となることもあり、その影響は直管の場合についてこれまで解析されている。圧縮性が小さい流体の層流に対する理論解析の主なものとしては草間<sup>(53)</sup>、Brown<sup>(10)</sup>、D'souzaら<sup>(20)</sup>、Gerlachら<sup>(24)</sup>、浦田<sup>(94)</sup>、DeArmondら<sup>(17)</sup>、近江ら<sup>(69)</sup>などの研究がある。また圧縮性が大きく、エネルギー式を考慮したものとして Kantola<sup>(63)</sup>、浦田<sup>(94)</sup>の研究がある。1971年までの直管内非定常流れに関するレビューは Goodson<sup>(27)</sup>により述べられている。上記の論文はすべて慣性対流項を省略した運動方程式を基礎にした解析であり、平均流が存在する場合には単にそれを変動流の解に加えているだけで、流体の圧縮性を考慮した場合に、平均流が変動流に及ぼす影響についての十分な吟味が行われていない。

### 1.3 本研究の目的と概要

§1.2で挙げた曲管内の流れに関する多くの論文のうち、理論解析はいずれも管軸の曲率が一定で、しかも平面的な曲りを有する管に限られ

ている。§ 1.1でも述べたように、現実には管軸の曲率は一定でない場合が多く、また熱交換器などによく用いられるコイル管では、曲率は一定であるが三次元的な曲りも有している。このような管内の流れは一定曲率で平面的な曲りをもつ円環状曲管の場合とは異なる。したがってその内部流れや圧力損失を明らかにすることは重要であると考えられる。

非定常流れにおいては流体の圧縮性が問題となることがあり、それに関する研究も多くなされている。しかし従来の研究では平均流が存在する場合には単にそれを変動流の解に加えるだけで、平均流の存在が変動流にどのような影響を与えるかについての満足すべき議論がなされていない。したがって平均流のこのような影響を調べ、上記のような加え合せによる取り扱いが有効である範囲を知ることが大切であると考えられる。

本研究は以上の諸点を明らかにすべくなされたものであり、以下にその概要を述べる。

本論文は6章から成る。

第1章は序論であり、曲管内流れに関する従来の研究の概要と本研究の目的を述べる。

第2章から第5章までが理論解析に関する部分で、第2章および第3章では定常流れを、第4章および第5章では非定常流れを扱う。まず第2章では三次元的な曲りをもつコイル管内層流について解析し、デーン数と類似のパラメータ  $D_c$  の値が小さい場合については摂動解を、それが任意の場合については数値解を求めた。 $D_c$  の値が小さい範囲では粘性力により、また大きい場合にはコリオリカのため、管断面内に現われる二つの二次流れ流線がたがいに対称でなくなり、さらに後者の場合には二次流れ流線および軸流速度分布が傾斜してくる。管摩擦損失に関しては、円環状曲管の曲率の代わりにコイル管の曲率を用いた拡張されたデーン数を用いると、コイル管に対しても円環状曲管の管摩擦損失の式が適用できる。

第3章では管軸に沿って曲率が変化する曲管の例として、管軸の形状  $y$  が、 $y = a \sin \kappa x$ ,  $y = a(1 + \kappa^2 x^2)^{1/2}$ ,  $y = a \tanh \kappa x$  ( $a, \kappa$ : 定数,  $x$ : 管軸の接線方向座標) で表わされる場合について解析を行。これらの曲線はそれぞれ、周期的に曲る管、曲りが1回および2回の管の管軸の形状に相当する。解析は管軸の曲率が小さい場合についてすすめられた。レイノルズ数が小さいときには軸流速度は曲りの内側で早くなり、大きいときは遠心力の作用で曲りの外側で早くなる。だ行管においてだ行の波数  $\kappa$  が大で、しかもレイノルズ数が大きい場合には曲りの影響は管軸の変化に対して遅れて流速分布に現われる。曲りが2回の管ではそれが1回の管に比べて、曲りの影響の及ぶ軸方向の範囲が狭くなる。また管軸の形状が、円まやかに変化する二次元曲線で表わされる曲管内層流については統一的な手法で解析できることも示す。

第4章では第3章で扱っただ行管内の層流脈動流れの解析を、管軸の曲率とパラメータ ( $A/\tau^2$ ) の値が小さい場合について行った。ここで  $A$  は脈動圧力こう配の無次元振幅であり、 $\tau^2$  は変動流のレイノルズ数とみなせる無次元量である。平均流がない場合には一々に曲りの内側で軸流速度が早くなる。平均流があると曲率の影響は管軸の変化に対して遅れて速度分布に現われる。そのような場所的な遅れの程度は  $\tau$  の値が小さいときは定常流の場合と同じであり、時間的にもほぼ不変であるが、 $\tau$  の値が大になると定常流の場合とは異なり、また時間的にも変化する。

第5章ではこれまで非圧縮であると仮定してきた流体の圧縮性を考慮した場合に、どの程度の影響が現われるかも最も簡単な直直管内の流れについて解析した。平均流がない場合の解析はすでになされているので、平均流が変動成分に及ぼす影響について吟味した。平均流が存在すると進行波と後退波で固有値および流速分布に差が生じ、その程度は平均流速と音速との比のオーダーである。

第6章は本研究で得た結論の総括である。

なお理論解析にあたり、本論文全体を通じて次の仮定が用いられている。

1. 流体はニュートン流体である。
  2. 流れは層流である。
  3. 管は剛体壁を有する円形断面管である。
  4. 管長は入口部および出口部の影響が無視できる程度に長い。
- また第2章、第3章および第4章では非圧縮性流体を仮定している。

## 第2章 コイル管内層流定常流れ

### 2.1 緒言

コイル管は一定空間内での伝熱面積の広さと製作の容易さのために熱交換器としてよく用いられているが、この外その曲りのために生じる二次流れにより伝熱特性がよいという利点もある<sup>(41, 42, 52, 1P)</sup>。またこの二次流れのために軸方向拡散が減ることから化学反応器としても用いられ、その分野での研究も盛んに行われている<sup>(44, 22, 58, 67)</sup>。しかしコイル管内流れに関する理論解析ではピッチの影響は無視され、円環状曲管内流れとしての解析がなされているだけである。円環状曲管内層流の場合には、その性質を特徴づける相似パラメータとしてディーン数  $N_{De} = Re_m (r_0^*/R^*)^{1/2}$  が存在し、圧力損失などはこのディーン数を用いて整理できることがわかっている<sup>(15, 63P)</sup>。(ただしここで  $r_0^*$  は管の半径、 $R^*$  は円環状曲管の曲率半径であり、 $Re_m$  は管断面平均流速を基礎とするレイノルズ数で  $w_m^*$  をその平均流速、 $\mu^*$  を流体の動粘性係数として  $Re_m = 2 w_m^* r_0^* / \mu^*$  で定義される。) コイル管においてもピッチが小さい場合にはその圧力損失などは近似的に上述のディーン数で整理でき、たとえば White<sup>(98)</sup> の実験はコイル管で行われているがディーン数を用いて整理されている。村上<sup>(63)</sup> は、このようにそれまでのコイル管内流れに関する実験が管軸の曲りの三次元性の小さい場合に限られている点に着目し、三次元性の強い管について実験を行い、層流域では従来のディーン数において円環状曲管の曲率の代わりにコイル管の曲率を用いれば、コイル管にも円環状曲管の管摩擦損失の式が適用できることを見いだした。

以上のように、三次元的な曲りも考慮したコイル管内流れに関する理論解析はこれまで全然行われていない。また前述の村上の実験結果についてもコイル管の曲率を用いたディーン数で整理できることについての理論的根拠が示されていない。これらの理由から、本章ではコイル管内層流を支配する基礎式を導き、コイル管内の流れおよびその管摩擦損

先について明らかにする。解は管径とコイルの巻径との比が小さい場合について求められ、ディーン数に類似のパラメータ  $D_c$  が小さい場合には摂動法が、それが任意の場合については数値解法が適用された。なお解析にあたっては § 1.3 の最後で述べた仮定が用いられている。

## 2.2 解析

### 2.2.1 基礎式

図 2.1 のように直角座標  $x^*, y^*, z^*$  をとり、 $R^*$  をらせ線が巻かれている円柱の半径、 $\beta$  をらせ線のピッチ角、 $\theta$  を図に示すパラメータとすると、管軸曲線は

$$\left. \begin{aligned} x^* &= R^* \cos \theta \\ y^* &= R^* \sin \theta \\ z^* &= R^* \theta \tan \beta \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

で与えられ、管軸の主曲率  $\kappa^*$  およびねじり率  $\tau^*$  はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \kappa^* &= \cos^2 \beta / R^* \\ \tau^* &= \sin \beta \cos \beta / R^* \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

となる。管軸に沿う座標を  $s^*$  とし、管軸に直交する面内に  $r^*, \varphi$  を図のようにとる。曲線座標  $(r^*, \varphi, s^*)$  はこの順で右手系を成し、直角座標  $(x^*, y^*, z^*)$  との間には次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} x^* &= R^* \cos \kappa^* s^* + r^* (\sin \beta \sin \varphi \sin \kappa^* s^* - \cos \varphi \cos \kappa^* s^*) \\ y^* &= R^* \sin \kappa^* s^* - r^* (\sin \beta \sin \varphi \cos \kappa^* s^* + \cos \varphi \sin \kappa^* s^*) \\ z^* &= s^* \sin \beta + r^* \cos \beta \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

に於て  $\kappa^* = \cos \beta / R^*$  とある。

$(x^*, y^*, z^*)$  を  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  と、 $(r^*, \varphi, s^*)$  を  $(x^1, x^2, x^3)$  と表現すれば、式 (2.3) より

$$g_{ij} = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} \quad (2.4a)$$

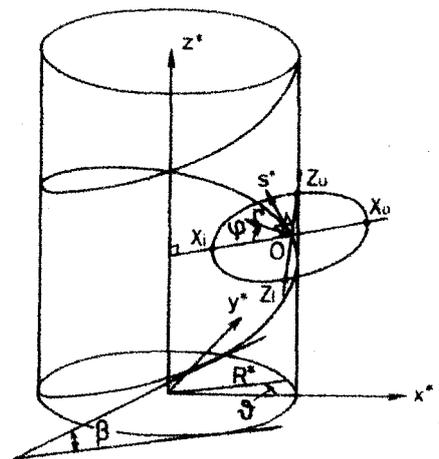


図 2.1 座標系

および

$$g^{ik}g_{kj} = \delta_j^i, \quad \delta_j^i = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (2.4b)$$

で定義される計量テンソルはそれぞれ以下のとおりとなる。

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= 1, & g_{12} &= 0, & g_{13} &= 0 \\ g_{21} &= 0, & g_{22} &= r^{*2}, & g_{23} &= \kappa^* r^{*2} \sin \beta \\ g_{31} &= 0, & g_{32} &= g_{23}, & g_{33} &= (1 - \kappa^* r^* \cos \beta \cos \varphi)^2 + \kappa^{*2} r^{*2} \sin^2 \beta \end{aligned} \right\} \quad (2.5a)$$

$$\left. \begin{aligned} g'' &= 1, & g'^2 &= 0, & g'^3 &= 0 \\ g^{21} &= 0, & g^{22} &= \frac{1}{r^{*2}} + \frac{\kappa^{*2} \sin^2 \beta}{(1 - \kappa^* r^* \cos \beta \cos \varphi)^2}, & g^{23} &= \frac{-\kappa^* \sin \beta}{(1 - \kappa^* r^* \cos \beta \cos \varphi)^2} \\ g^{31} &= 0, & g^{32} &= g^{23}, & g^{33} &= \frac{1}{(1 - \kappa^* r^* \cos \beta \cos \varphi)^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.5b)$$

クリストッフェルの第2種記号  $\Gamma_{jk}^i$  は

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_l g^{il} \left( \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \quad (2.6)$$

で定義され、式(2.5)を用いて計算した結果は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{12}^1 &= 0, & \Gamma_{13}^1 &= 0, \\ \Gamma_{21}^1 &= 0, & \Gamma_{22}^1 &= -r^*, & \Gamma_{23}^1 &= -\kappa^* r^* \sin \beta, \\ \Gamma_{31}^1 &= 0, & \Gamma_{32}^1 &= \Gamma_{23}^1, & \Gamma_{33}^1 &= \kappa^* \cos \beta \cos \varphi (1 - \kappa^* r^* \cos \beta \cos \varphi) - \kappa^{*2} r^* \sin^2 \beta, \\ \Gamma_{11}^2 &= 0, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r^*}, & \Gamma_{13}^2 &= \frac{\kappa^* \sin \beta}{r^* (1 - \kappa^* r^* \cos \beta \cos \varphi)}, \\ \Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{12}^2, & \Gamma_{22}^2 &= 0, & \Gamma_{23}^2 &= -\frac{\kappa^* r^* \sin \beta \cos \beta \sin \varphi}{(1 - \kappa^* r^* \cos \beta \cos \varphi)}, \\ \Gamma_{31}^2 &= \Gamma_{13}^2, & \Gamma_{32}^2 &= \Gamma_{23}^2, & \Gamma_{33}^2 &= -\frac{\kappa^*}{r^*} \cos \beta \sin \varphi \left\{ 1 - \kappa^* r^* \cos \beta \cos \varphi \right. \\ & & & & & \left. + \frac{\kappa^{*2} r^{*2} \sin^2 \beta}{1 - \kappa^* r^* \cos \beta \cos \varphi} \right\}, \end{aligned} \right\}$$

(注) 本章で用いる  $\Gamma_{jk}^i$  および  $v^i$  は次元をもつが繁雑にはるので\*は省略している。

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^3 &= 0, \quad \Gamma_{12}^3 = 0, \quad \Gamma_{13}^3 = -\frac{\kappa^* \cos \beta \cos \varphi}{1 - \kappa^* r^* \cos \beta \cos \varphi}, \\ \Gamma_{21}^3 &= 0, \quad \Gamma_{22}^3 = 0, \quad \Gamma_{23}^3 = \frac{\kappa^* r^* \cos \beta \cos \varphi}{1 - \kappa^* r^* \cos \beta \cos \varphi}, \\ \Gamma_{31}^3 &= \Gamma_{13}^3, \quad \Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3, \quad \Gamma_{33}^3 = \frac{\kappa^{*2} r^* \sin \beta \cos \beta \sin \varphi}{1 - \kappa^* r^* \cos \beta \cos \varphi}. \end{aligned}$$

(2.7)

基礎式を導くにあたりテンソル演算を利用するが、式(2.5)よりわかるようにここで選んだ曲線座標系は斜交系であるので、テンソル表示による基礎式を用いるのが便利である。

連続の式および運動方程式は、反変形式で書くと、それぞれ

$$v_{,i}^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^i} + \Gamma_{ki}^i v^k = 0 \quad (2.8)$$

$$v^j v_{,j}^i = -\frac{1}{\rho^*} g^{ij} \frac{\partial \rho^*}{\partial x^j} + \nu^* g^{jk} v_{,jk}^i \quad (2.9)$$

で与えられる。ここで  $\rho^*$  は流体の密度、 $p^*$  は圧力、 $v^i$  は速度の反変成分であり、物理速度  $(u^*, v^*, w^*)$  とは次式で関係づけられる。

$$v^1 = \frac{u^*}{\sqrt{g_{11}}}, \quad v^2 = \frac{v^*}{\sqrt{g_{22}}}, \quad v^3 = \frac{w^*}{\sqrt{g_{33}}} \quad (2.10)$$

式(2.5), (2.7) および (2.10) を用いて、式(2.8) および (2.9) からコイル管内流れの基礎式として次の四式を得る。

$$\frac{\partial(r^* u^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} - \frac{\kappa^*}{h} r^* \cos \beta (u^* \cos \varphi - v^* \sin \varphi) = 0 \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} & u^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{v^* \partial u^*}{r^* \partial \varphi} - \frac{v^{*2}}{r^*} - 2\kappa^* \sin \beta \frac{v^* w^*}{\sqrt{g_{33}}} + \kappa^* (h \cos \beta \cos \varphi - \kappa^* r^* \sin^2 \beta) \left( \frac{w^*}{\sqrt{g_{33}}} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \rho^*}{\partial r^*} + \nu^* \left[ \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^{*2}} + \left( \frac{1}{r^*} - \frac{\kappa^*}{h} \cos \beta \cos \varphi \right) \frac{\partial u^*}{\partial r^*} - \left( \frac{1}{r^{*2}} + \frac{\kappa^{*2}}{h^2} \cos^2 \beta \cos^2 \varphi \right) u^* \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{r^{*2}} + \frac{\kappa^{*2}}{h^2} \sin^2 \beta \right) \frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2} + \frac{\kappa^*}{h} \cos \beta \cos \varphi \left( 1 - \frac{\kappa^{*2}}{h^2} r^{*2} \sin^2 \beta \right) \frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} \right] \end{aligned}$$

$$-\frac{\kappa^*}{h} \sin \beta \sin \varphi \frac{v^*}{r^*} - \frac{2}{h} \kappa^* \sin \beta \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{w^*}{\sqrt{g_{33}}} \right) \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} & u^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} + \frac{v^* \partial v^*}{r^* \partial \varphi} + \frac{u^* v^*}{r^*} + \frac{2}{h} \kappa^* \sin \beta \frac{u^* w^*}{\sqrt{g_{33}}} - \frac{2}{h} \kappa^{*2} r^* \sin \beta \cos \beta \sin \varphi \frac{v^* w^*}{\sqrt{g_{33}}} \\ & - \kappa^* \cos \beta \sin \varphi \left( h + \frac{\kappa^{*2}}{h} r^{*2} \sin^2 \beta \right) \left( \frac{w^*}{\sqrt{g_{33}}} \right)^2 = - \left( 1 + \frac{\kappa^{*2}}{h^2} r^{*2} \sin^2 \beta \right) \frac{1}{\rho^*} \frac{1}{r^*} \frac{\partial p^*}{\partial \varphi} \\ & + \frac{\kappa^*}{h^2} r^* \sin \beta \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial r^*} + v^* \left[ \frac{\partial^2 v^*}{\partial r^{*2}} + \left( \frac{1}{r^*} - \frac{\kappa^*}{h} \cos \beta \cos \varphi \right) \frac{\partial v^*}{\partial r^*} \right. \\ & - \left. \left\{ \frac{1}{r^{*2}} + \frac{\kappa^{*2}}{h^2} \cos^2 \beta \sin^2 \varphi - \frac{\kappa^{*2}}{h^2} r^* \sin^2 \beta \cos \beta (\cos \varphi - \kappa^* r^* \cos \beta) \right\} v^* \right. \\ & + \left. \left( \frac{1}{r^{*2}} + \frac{\kappa^{*2}}{h^2} \sin^2 \beta \right) \frac{\partial^2 v^*}{\partial \varphi^2} + \frac{\kappa^*}{h} \cos \beta \sin \varphi \left( 1 + \frac{\kappa^{*2}}{h^2} r^{*2} \sin^2 \beta \right) \frac{1}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} \right. \\ & + \left. 2 \left( \frac{1}{r^{*2}} - \frac{\kappa^{*2}}{h^2} r^* \sin^2 \beta \cos \beta \cos \varphi \right) \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} + \frac{\kappa^*}{h^2} \cos \beta \sin \varphi \left( \frac{1}{r^*} - \frac{\kappa^{*2}}{h^2} r^* \sin^2 \beta \right) u^* \right. \\ & \left. + \frac{2}{h} \kappa^* \sin \beta \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{w^*}{\sqrt{g_{33}}} \right) \right] \quad (2.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & u^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{w^*}{\sqrt{g_{33}}} \right) + \frac{v^*}{r^*} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{w^*}{\sqrt{g_{33}}} \right) - \frac{2}{h} \kappa^* \cos \beta (u^* \cos \varphi - v^* \sin \varphi) \frac{w^*}{\sqrt{g_{33}}} \\ & + \frac{\kappa^{*2}}{h} r^* \sin \beta \cos \beta \sin \varphi \left( \frac{w^*}{\sqrt{g_{33}}} \right)^2 = \frac{1}{h^2} \left( \kappa^* \sin \beta \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial r^*} \right) \\ & + v^* \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} \left( \frac{w^*}{\sqrt{g_{33}}} \right) + \left( \frac{1}{r^*} - \frac{3}{h} \kappa^* \cos \beta \cos \varphi \right) \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{w^*}{\sqrt{g_{33}}} \right) + \left( \frac{1}{r^{*2}} + \frac{\kappa^{*2}}{h^2} \sin^2 \beta \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{w^*}{\sqrt{g_{33}}} \right) \right. \\ & + \frac{\kappa^*}{h} \cos \beta \sin \varphi \left( 3 - \frac{\kappa^{*2}}{h^2} r^{*2} \sin^2 \beta \right) \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{w^*}{\sqrt{g_{33}}} \right) + \frac{2}{h^2} \kappa^{*2} \sin \beta \cos \beta \left( \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \cos \varphi - \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} \sin \varphi \right) \\ & \left. - \frac{\kappa^{*2}}{h^2} \sin \beta \cos \beta \left\{ u^* \sin \varphi + v^* (\cos \varphi - \kappa^* r^* \cos \beta) \right\} \right] \quad (2.14) \end{aligned}$$

1に於し上式において簡単のため

$$h = 1 - \kappa^* r^* \cos \beta \cos \varphi \quad (2.15)$$

の記号を用いている。式(2.11)は連続の式、式(2.12)~(2.14)は運動方程式のそれぞれ $r^*$ ,  $\varphi$  および  $\lambda^*$  方向成分であるが、流れは軸方向に変化しないので、 $\partial p^*/\partial \lambda^*$  も除いて  $\lambda^*$  による微分の項はすべて0となり、上式においてそれらは消去されている。

### 2.2.2 パラメータ $D_c$ の値が小さい場合

管の内半径を  $r_0^*$  とし、いま曲率半径比 ( $r_0^*/R^*$ ) が小さい場合について式(2.11)~(2.14)の解を求めることを考える。そしてまず曲率半径比 ( $r_0^*/R^*$ ) も摂動パラメータとして直管内の流れからの摂動解を求める。そこで長さの単位を  $r_0^*$  で、流速を  $\nu^*/r_0^*$  で、圧力を  $p^*(\nu^*/r_0^*)^2$  でそれぞれ無次元化し、\*印を取り去って区別する。このように無次元化された曲率半径  $R$  も用い、式(2.11)~(2.14)を  $(1/R)$  のべき級数で展開し、さらに

$$\left. \begin{aligned} p &= p_0 + (1/R)p_1 + \dots, & u &= (1/R)u_1 + \dots, \\ v &= (1/R)v_1 + \dots, & w &= w_0 + (1/R)w_1 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

と置いて代入し、 $(1/R)$  のべきで整理する。 $(1/R)^0$  のオーダーの式はポアズイユ流れを表わすものとなり、その解は  $P_0$  を定数として次式で表現される。

$$P_0 = P_0 - 4Re\lambda, \quad w_0 = Re(1-r^2) \quad (2.17)$$

ここで  $Re$  はポアズイユ流れに基づくレイノルズ数で、ポアズイユ流れの最大流速を  $W_0^*$  として次式で定義される。

$$Re = W_0^* r_0^* / \nu^* \quad (2.18)$$

次に  $(1/R)^1$  のオーダーの連続の式は

$$\frac{\partial(ru_1)}{\partial r} + \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} = 0 \quad (2.19)$$

となる。運動方程式は、式(2.17)を用いて少し整理すると

$$w_0^2 \cos^2 \beta \cos \varphi = -\frac{\partial P_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{u_1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} \quad (2.20)$$

$$-\omega_0^2 \cos^2 \beta \sin \varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - 8Re r \sin \beta \cos \beta \quad (2.21)$$

$$u_1 \frac{\partial \omega_0}{\partial r} = -\frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial \varphi^2} + 6Re r \cos^2 \beta \cos \varphi \quad (2.22)$$

となる。

上式を解くのに流れ関数  $\psi_1$  を用い、

$$u_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi}, \quad v_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial r} \quad (2.23)$$

とすれば連続の式 (2.19) は満足される。いま  $f_1(r)$ ,  $g_1(r)$  をそれぞれ  $r$  のみの関数とすれば、式 (2.19) ~ (2.23) から  $\psi_1$  は次式の形であることがわかる。

$$\psi_1 = \{ f_1(r) \sin \varphi + g_1(r) \} \cos^2 \beta \quad (2.24)$$

式 (2.20) と (2.21) から  $p_1$  を消去し、式 (2.23) および (2.24) を代入して整理すると、 $f_1$  および  $g_1$  に関してそれぞれ次式で示される 4 階の常微分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} f_1'''' + \frac{2}{r} f_1''' - \frac{3}{r^2} f_1'' + \frac{3}{r^3} f_1' - \frac{3}{r^4} f_1 &= -4Re^2 r(1-r^2) \\ g_1'''' + \frac{2}{r} g_1''' - \frac{1}{r^2} g_1'' + \frac{1}{r^3} g_1' &= -16Re \tan \beta \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

ただし ' は  $r$  に関する常微分を示す。境界条件は管壁  $r=1$  で  $u_1 = v_1 = 0$  より

$$r=1: \quad f_1 = f_1' = g_1' = 0 \quad (2.26)$$

である。式 (2.26) を満足し、 $0 \leq r \leq 1$  で有界な速度を与える式 (2.25) の解は

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= -\frac{Re^2}{288} r(1-r^2)^2(4-r^2) \\ g_1 &= \frac{Re}{2} r^2(1-\frac{1}{2}r^2) \tan \beta \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

となす。上式より  $u_1$  および  $v_1$  を求め、式(2.20) および(2.21) に代入すれば  $\rho_1$  が求まる。さらに  $u_1$  および  $v_1$  を求め、これを式(2.22) に代入すれば  $w_1$  が求められる。このようにして求められに結果は

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= -\frac{Re}{12} r(3-6r^2+2r^4) \cos\varphi \cos^2\beta \\ u_1 &= -\frac{Re^2}{288} (1-r^2)^2 (4-r^2) \cos\varphi \cos^2\beta \\ v_1 &= \left[ -Re r(1-r^2) \tan\beta + \frac{Re^2}{288} (1-r^2)(4-23r^2+7r^4) \sin\varphi \right] \cos^2\beta \\ w_1 &= Re r(1-r^2) \left[ \frac{Re^2}{11520} (19-21r^2+9r^4-r^6) + \frac{v}{4} \right] \cos\varphi \cos^2\beta \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

となす。上式は  $v_1$  の右辺第1項目の項が加わることの外は、円環状曲管に対する Dean の解<sup>(4)</sup> において、 $(1/R)$  の代わりに  $(\cos^2\beta/R)$  と書き換えたものに等しい。この新しく加わった項は、管軸を中心として管断面全体にわたって同心円状に巡回する回転粘性流れを、管軸のねじれとともに回転する座標系によって表わしたものである。この回転粘性流れは管軸に沿ってすすむとき、そのねじれにつれ流体の粘性によって生じ、その回転速度は管軸に沿ってすすむときの管軸のねじれの割合に比べ小さいので、管軸と同じ割合で回転している座標系から見ると流れの方向は管軸のねじれ方向とは逆になる。

本節の取り扱いが有効な範囲は式(2.28) からわかるように  $(1/R) \ll 1$  であり、 $Re^2(\cos^2\beta/R) \ll 1$  である。そしていま  $(1/R)$  のオーダーまで考えると、次節の式(2.46) で定義されるパラメータ  $D_c$  はここで用いた  $Re$  を用いて

$$D_c = 4\sqrt{2} Re (\cos^2\beta/R)^{1/2} \quad (2.29)$$

と表現でき、本節の解析の有効範囲は  $D_c^2 \ll 1$  となす。実際には式(2.28) の  $w_1$  の右辺の  $r$  の関数のうち  $Re^2$  のかかる項の  $0 \leq r \leq 1$  での最大値が1に比べ十分小さいので、後の数値計算との比較でわかるように

必ずしも  $D_c < 1$  でなくてもよい。このように  $D_c$  の値が小さい範囲では、式(2.28)からわかるように管軸に沿う圧力こう配は直管の場合と同じである。二次流れ流線は  $v dr = r u d\varphi$ , つまり

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{-r(1-r^2)(4-r^2)\cos\varphi}{-\frac{2\beta\beta}{R_c} r \tan\beta + (4-2\beta r^2 + 7r^4)\sin\varphi} \quad (2.30)$$

から求められるが、前述の  $v$  の右辺第1項が存在するため数値積分による計算が必要である。

### 2.2.3 パラメータ $D_c$ の任意の値に対する解析

前節の手法は  $D_c > 1$  でも有効ではあるが、比較的小さい  $D_c$  の値の範囲にのみ適用可能である。より大きな、そして任意の値の  $D_c$  に対する流れを求めるとには数値解法が適している。

いま再び  $(r^*/R^*) \ll 1$  の場合を考え、この仮定のもとに基礎式(2.11)~(2.14)の高次の微小項を省略して簡単化を行うのであるが、式(2.11)~(2.14)のままでは複雑すぎるので形式的に  $1/R^*$  のオーダーの項まで残した式について各項のオーダーの比較を行う。それらの式は次式となる。

$$\frac{\partial(r^*u^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} - \frac{r^*}{R^*} \cos^2\beta (u^* \cos\varphi - v^* \sin\varphi) = 0 \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} & u^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{v^*}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} - \frac{v^{*2}}{r^*} - \frac{2}{R^*} v^* w^* \sin\beta \cos\beta + \frac{w^{*2}}{R^*} \cos^2\beta \cos\varphi = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial r^*} \\ & + \gamma^* \left[ \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial r^*} - \frac{u^*}{r^{*2}} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} - \frac{\cos^2\beta}{R^*} \left( \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \cos\varphi - \frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \sin\varphi \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{v^*}{r^*} \sin\varphi \right) - \frac{2}{R^*} \frac{1}{r^*} \frac{\partial w^*}{\partial \varphi} \sin\beta \cos\beta \right] \quad (2.32) \end{aligned}$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} + \frac{v^*}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} + \frac{u^* v^*}{r^*} + \frac{2}{R^*} u^* w^* \sin\beta \cos\beta - \frac{w^{*2}}{R^*} \cos^2\beta \sin\varphi = -\frac{1}{\rho^*} \frac{1}{r^*} \frac{\partial p^*}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\rho^* R^*} \frac{\partial p^*}{\partial s^*} \sin \beta \cos \beta + \nu^* \left[ \frac{\partial^2 v^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial r^*} - \frac{v^*}{r^{*2}} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 v^*}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \right. \\
& \left. - \frac{\cos^2 \beta}{R^*} \left( \frac{\partial v^*}{\partial r^*} \cos \varphi - \frac{1}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} \sin \varphi - \frac{u^*}{r^*} \sin \varphi \right) + \frac{2}{R^*} \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \sin \beta \cos \beta \right] \quad (2.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( 1 + \frac{\cos^2 \beta}{R^*} \cos \varphi \right) \left( u^* \frac{\partial w^*}{\partial r^*} + \frac{v^*}{r^*} \frac{\partial w^*}{\partial \varphi} \right) - \frac{w^*}{R^*} \cos^2 \beta \left( u^* \cos \varphi - v^* \sin \varphi \right) \\
& - \frac{1}{\rho^* R^*} \frac{\partial p^*}{\partial \varphi} \sin \beta \cos \beta - \left( 1 + \frac{2r^*}{R^*} \cos^2 \beta \cos \varphi \right) \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial s^*} + \nu^* \left[ \frac{\partial^2 w^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial w^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \varphi^2} \right. \\
& \left. + \frac{r^*}{R^*} \cos^2 \beta \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial r^{*2}} \cos \varphi + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \varphi^2} \cos \varphi + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial w^*}{\partial \varphi} \sin \varphi \right) \right] \quad (2.34)
\end{aligned}$$

さていま  $(r_0^*/R) \ll 1$  と仮定しているのて、1に比えは

$$\frac{\partial}{\partial r^*} + \frac{r^*}{R^*} \cos^2 \beta \cos \varphi$$

などは  $\partial/\partial r^*$  で置き換えることができる。また式(2.33)から

$$\frac{1}{\rho^* R^*} \frac{\partial p^*}{\partial \varphi} \sim \frac{w_m^{*2}}{R^*} \cos^2 \beta, \quad (w_m^* \text{は } w^* \text{の断面平均})$$

であることがわかるから、式(2.34)の右辺第1項は

$$\frac{1}{\rho^* R^*} \frac{\partial p^*}{\partial \varphi} \sin \beta \cos \beta \sim \frac{r_0^{*2}}{R^{*2}} w_m^{*2} \sin \beta \cos^3 \beta$$

とほり省略できる。一方、軸方向流速が大きい場合には、Adler<sup>11)</sup> などの境界層近似モデルで示されるように、管壁近くを除けば流体は非粘性として扱えるので、 $\varepsilon$ も未定の定数として  $u^*, v^* \sim \varepsilon w_m^*$  と置くと式(2.34)から

$$\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial s^*} \sim \frac{\varepsilon w_m^{*2}}{r_0^*}$$

とほり、式(2.33)の右辺第2項は

$$\frac{1}{\rho^* R^*} \frac{\partial p^*}{\partial s^*} \sin \beta \cos \beta \sim \frac{\varepsilon w_m^{*2}}{R^*} \sin \beta \cos \beta$$

となり、慣性項中の  $(2/R^*)u^*w^*\sin\beta\cos\beta$  と同じオーダーの大きさとなる。さて式(2.32)および(2.33)の慣性項のうち  $(w^{*2}/R^*)\cos^2\beta$  の項は管軸の曲りにより流体が受ける遠心力を表わし、二次流れはこの遠心力によって生じるのであるから、前述の未定定数  $\varepsilon$  は  $\sqrt{r_0^*/R^*}\cos\beta$  のオーダーである。そしてたとえば式(2.32)では  $u^*(\partial u^*/\partial r^*)$  は  $\varepsilon^2 w_m^{*2}/r_0^*$  のオーダーとなり、 $(v^*w^*/R^*)\sin\beta\cos\beta$  の項は  $(\varepsilon^2 w_m^{*2}/r_0^*) \times \varepsilon \tan\beta$  のオーダーとなる。  $\varepsilon < 1$  であるが、 $\varepsilon \tan\beta \sim 1$  となる場合にはこの項が他の項に比し無視できなくなる。 $(w^*/R^*)\sin\beta\cos\beta = w^*c^*$  ( $c^*$ : 傾率) は管軸に沿ってすすむときの座標系の回転角速度を表わすので、上述の  $(v^*w^*/R^*)\sin\beta\cos\beta$  および  $(u^*w^*/R^*)\sin\beta\cos\beta$  はそのような回転する座標系に対する相対運動により生ずるコリオリ力を表わし、二次流れ流線に垂直に作用する。したがってこの項の値が大きい場合には二次流れ流線などが傾斜し、これまでにわかっている円環状曲管の場合とは異なった流れとなることが考えられる。

さて以上の単純化を行った結果、次の四式を得る。

$$\frac{\partial(r^*u^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} = 0 \quad (2.35)$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{v^* \partial u^*}{r^* \partial \varphi} - \frac{v^{*2}}{r^*} - \frac{2}{R^*} v^* w^* \sin\beta \cos\beta + \frac{w^{*2}}{R^*} \cos^2\beta \cos\varphi = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial r^*}$$

$$+ v^* \left[ \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial r^*} - \frac{u^*}{r^{*2}} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} - \frac{2}{R^*} \frac{1}{r^*} \frac{\partial w^*}{\partial \varphi} \sin\beta \cos\beta \right] \quad (2.36)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} + \frac{v^* \partial v^*}{r^* \partial \varphi} + \frac{u^* v^*}{r^*} + \frac{2}{R^*} u^* w^* \sin\beta \cos\beta - \frac{w^{*2}}{R^*} \cos^2\beta \sin\varphi = -\frac{1}{\rho^*} \frac{1}{r^*} \frac{\partial p^*}{\partial \varphi}$$

$$- \frac{r^* K^*}{R^* \rho^*} \sin\beta \cos\beta + v^* \left[ \frac{\partial^2 v^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial r^*} - \frac{v^*}{r^{*2}} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 v^*}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \right. \\ \left. + \frac{2}{R^*} \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \sin\beta \cos\beta \right] \quad (2.37)$$

$$u^* \frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} + \frac{v^*}{r^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial \varphi} = \frac{K^*}{\rho^*} + \nu^* \left[ \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial \varphi^2} \right] \quad (2.38)$$

に於て  $K^* = -\partial p^* / \partial r^*$  である。式(2.36)と(2.37)から  $p^*$  を消去し、

$$\omega^* = \frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* v^*)}{\partial r^*} - \frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \quad (2.39)$$

を用い、さらに式(2.38)を用いて次式を得る。

$$\begin{aligned} & u^* \frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} + \frac{v^*}{r^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial \varphi} - \frac{2}{R^*} \omega^* \cos^2 \beta \left( \frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} \sin \varphi + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) \\ &= -\frac{4}{R^*} \frac{K^*}{\rho^*} \sin \beta \cos \beta + \nu^* \left[ \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial \varphi^2} \right] \end{aligned} \quad (2.40)$$

流れ関数を  $\psi^*$  とし、

$$u^* = \frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial \varphi}, \quad v^* = -\frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} \quad (2.41)$$

とすると連続の式(2.35)は満足される。式(2.39)、(2.38)および(2.40)に式(2.41)を代入し、さらに

$$\left. \begin{aligned} \varphi^* &= \nu^* f, & \omega^* &= \omega (\nu^{*2} R^* / 2 r_0^{*2} \cos^2 \beta)^{1/2} \\ r^* &= r_0^* r, & \omega^* &= \omega r^* / r_0^{*2} \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

の無次元化を行って次式を得る。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = -\omega \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} + \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] = -D_c \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} + \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) \frac{\partial \omega}{\partial r} \right]$$

$$= 2D_c D_c - \omega \left( \frac{\partial \omega}{\partial r} \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) \quad (2.45)$$

よって

$$\left. \begin{aligned} D_c &= \frac{1}{\nu^{*2}} \frac{K^*}{\rho^*} r_0^{*3} \left( \frac{2r_0^*}{R^*} \cos^2 \beta \right)^{1/2} \\ D_c &= \left( \frac{2r_0^*}{R^*} \cos^2 \beta \right)^{1/2} \tan \beta \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

である。\$D\_c\$ は管軸の無次元曲率 \$\kappa\_c\$ を用いると

$$D_c = \frac{1}{\nu^{*2}} \frac{K^*}{\rho^*} r_0^{*3} (2\kappa_c)^{1/2}$$

となり、円環状曲管の数値計算においてディーン数の代りに用いられているパラメータ \$D\$ (上式において \$\kappa\_c = r\_0^\*/R^\*\$ としたものの<sup>(57, 28, 12)</sup>) に相当する。また \$\beta = 0^\circ\$ の場合には \$D\_c = D\$, \$D\_c = 0\$ となり、式(2.43) ~ (2.45) は従来の円環状曲管に対するものに一致する<sup>(57, 28, 12)</sup>。

式(2.43) ~ (2.46) を差分近似し

$$r=1; \quad f=0, \quad w=0, \quad \partial f / \partial r = 0 \quad (2.47)$$

の境界条件のもとに解く。その際 \$r=0\$ では式(2.43) ~ (2.45) のままだでは特異性が存在するので、それらの式の代わりに \$r, \varphi\$ と

$$X = -r \cos \varphi, \quad Y = r \sin \varphi \quad (2.48)$$

の関係で示される直角座標 \$X, Y\$ で表現される式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} &= -\omega \\ \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} + \left( \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial w}{\partial X} - \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial Y} \right) &= -D_c \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} + \left( \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} - \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} \right) &= 2D_c D_c - \omega \frac{\partial \omega}{\partial Y} \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

いま図2.2に示すように半径方向の格子間隔を \$\Delta r\$, 周方向のそれを \$\Delta \varphi\$ とする。差分近似はすべて中央差分で行う。まず図2.2(a)に示されるような通常の点について、式(2.43) ~ (2.45) の差分近似式を導く。図のように \$(r\_0, \varphi\_0)\$, \$(r\_0, \varphi\_0 + \Delta \varphi)\$, \$(r\_0 + \Delta r, \varphi\_0)\$, \$(r\_0, \varphi\_0 - \Delta \varphi)\$, \$(r\_0 - \Delta r, \varphi\_0)\$ で示される5点における量にそれぞれ添字 0, 1, 2, 3, 4

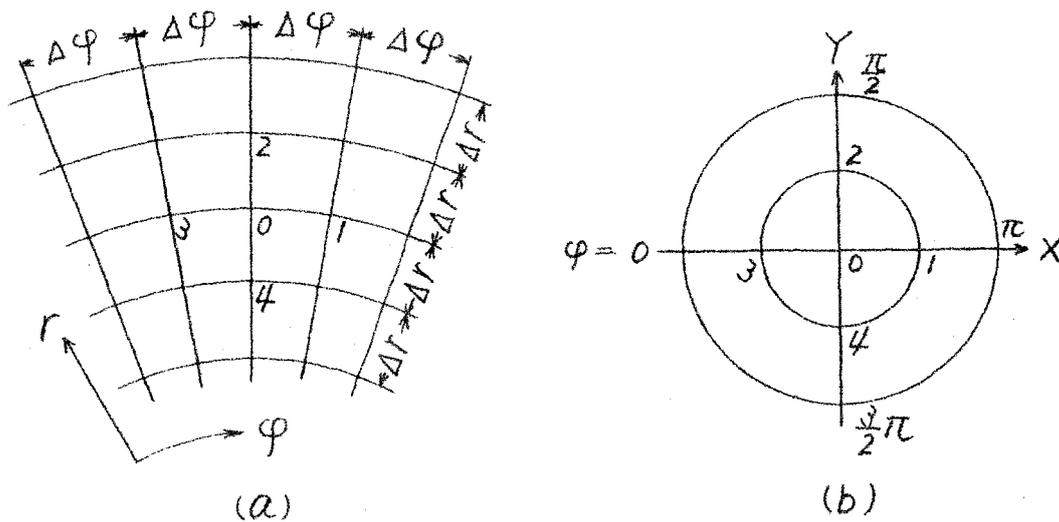


図 2.2

もつけて示すと

$$\frac{\partial f}{\partial r}\bigg|_0 = \frac{f_2 - f_4}{2(\Delta r)}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\bigg|_0 = \frac{f_2 + f_4 - 2f_0}{(\Delta r)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi}\bigg|_0 = \frac{f_1 - f_3}{2(\Delta \varphi)}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\bigg|_0 = \frac{f_1 + f_3 - 2f_0}{(\Delta \varphi)^2}$$

などと近似でき、この差分近似による誤差は格子間隔の2乗のオーダーである。上式を式(2.43)~(2.45)に代入して整理して次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} A_0 f_0 + B_0 f_1 + C_0 f_2 + B_0 f_3 + D_0 f_4 &= -\omega_0 \\ A_0 \omega_0 + E_0 \omega_1 + F_0 \omega_2 + G_0 \omega_3 + H_0 \omega_4 &= -D_c \\ A_0 \omega_0 + E_0 \omega_1 + F_0 \omega_2 + G_0 \omega_3 + H_0 \omega_4 &= S_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

これより

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= -\frac{2}{(\Delta r)^2} - \frac{2}{r_0^2 (\Delta \varphi)^2}, & B_0 &= \frac{1}{r_0^2 (\Delta \varphi)^2} \\ C_0 &= \frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{2r_0 (\Delta r)}, & D_0 &= \frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{2r_0 (\Delta r)} \\ E_0 &= \frac{1}{r_0^2 (\Delta \varphi)^2} + \frac{f_2 - f_4}{4r_0 (\Delta r) (\Delta \varphi)}, & F_0 &= \frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{2(\Delta \varphi) - f_1 + f_3}{4r_0 (\Delta r) (\Delta \varphi)} \\ G_0 &= \frac{1}{r_0^2 (\Delta \varphi)^2} - \frac{f_2 - f_4}{4r_0 (\Delta r) (\Delta \varphi)}, & H_0 &= \frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{2(\Delta \varphi) - f_1 + f_3}{4r_0 (\Delta r) (\Delta \varphi)} \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

$$S_0 = 2D_c D_t - \omega_0 \left\{ \frac{\omega_2 - \omega_4}{2(\Delta r)} \sin \varphi_0 + \frac{\omega_1 - \omega_3}{2r_0(\Delta \varphi)} \cos \varphi_0 \right\} \quad \Bigg\}$$

である。

$r=1$  においては、 $f$  および  $\omega$  の値は境界条件式 (2.47) によって決まっているので、 $\omega$  の値を求めると計算だけが必要である。式 (2.47) を考慮すると、式 (2.43) は  $r=1$  においては

$$\omega = -\partial^2 f / \partial r^2 \quad (2.52)$$

となる。図 2.2 (a) の記号を用い、点 2 を仮想点として上式の差分近似を行くと、

$$\omega_0 = -\frac{f_2 + f_4 - 2f_0}{(\Delta r)^2} \quad (2.53)$$

となるが、 $\partial f / \partial r = 0$  であるから

$$\left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_0 = \frac{f_2 - f_4}{2(\Delta r)} = 0$$

より  $f_2 = f_4$  となる。また  $f_0 = 0; r=1$  であるから、式 (2.53) は

$$\omega_0 = -2f_4 / (\Delta r)^2 \quad (2.54)$$

となる。

次に  $r=0$  での差分近似式を導く。図 2.2 (b) に示すように  $(0, 0)$ ,  $(\Delta r, \pi)$ ,  $(\Delta r, \pi/2)$ ,  $(\Delta r, 0)$ ,  $(\Delta r, \pi/2)$  なる 5 点での量にそれぞれ添字 0, 1, 2, 3, 4 をつけて示すと、式 (2.49) は

$$\left. \begin{aligned} -4f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 &= -(\Delta r)^2 \omega_0 \\ -4\omega_0 + A\omega_1 + B\omega_2 + C\omega_3 + D\omega_4 &= -(\Delta r)^2 D_c \\ -4\omega_0 + A\omega_1 + B\omega_2 + C\omega_3 + D\omega_4 &= T \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

となる。[に]はし

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 + (f_2 - f_4) / 4, & B &= 1 - (f_1 - f_3) / 4 \\ C &= 1 - (f_2 - f_4) / 4, & D &= 1 + (f_1 - f_3) / 4 \\ T &= 2(\Delta r)^2 D_c D_t - (\Delta r / 2) \omega_0 (\omega_2 - \omega_4) \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

である。以上の諸式、すなわち

$r=1$ :  $f=w=0$ , お

よび式(2.54)

$0 < r < 1$ : 式(2.50)

$r=0$ : 式(2.55)

を緩和法で解く。その一般的な手順を簡単に述べらる。

(i) まず図2.3に示すように  $(r, \varphi) = (1, 0)$  を起点にして、半径方向に  $i$ 、周方向に  $j$  の番号をつけて考える点の位置を示す。スイープの順序は、まず  $i$  を一定にして  $j$  を変化させる。次に  $i$  を1つ増して同じ操作を繰り返す。

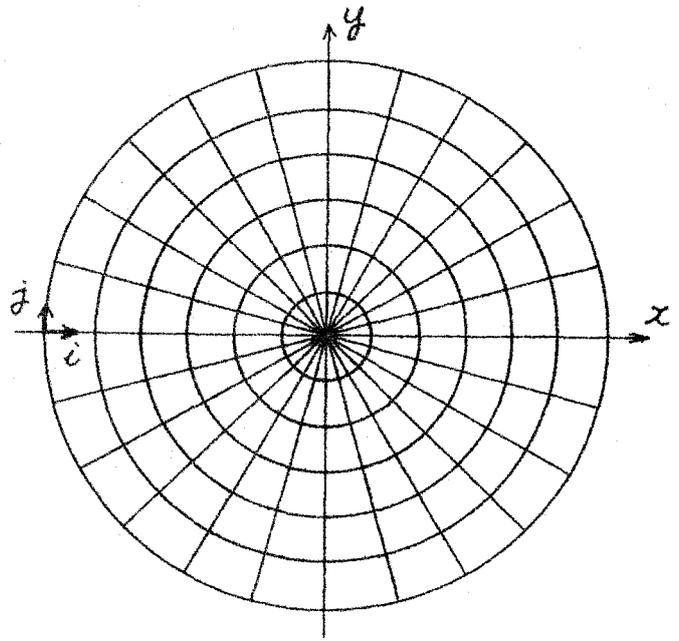


図 2.3

(ii) 境界条件から  $f_{i,j} = w_{i,j} = 0$  である。次に残りの量および点について初期値  $f^{(0)}$ ,  $w^{(0)}$ ,  $\omega^{(0)}$  を決める。

(iii) 緩和計算はまず  $f$  から始める。その  $n$  回目の繰り返しによる値  $f^{(n)}$  は次式により求められる。たとえば式(2.50)について示すと

$$\left. \begin{aligned} e_{f_{i,j}}^{(n)} &= f_{i,j}^{(n-1)} + \frac{1}{A_{ij}} \{ B_{ij} f_{i,j+1}^{(n-1)} + C_{ij} f_{i-1,j}^{(n-1)} + B_{ij} f_{i,j-1}^{(n-1)} + D_{ij} f_{i+1,j}^{(n-1)} + w_{i,j}^{(n-1)} \} \\ \bar{f}_{i,j}^{(n)} &= f_{i,j}^{(n-1)} - r_f e_{f_{i,j}}^{(n)} \\ f_{i,j}^{(n)} &= \xi_f f_{i,j}^{(n-1)} + (1 - \xi_f) \bar{f}_{i,j}^{(n)} \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

である。ここで  $r_f$  は  $f$  を計算する場合の過大緩和係数、 $\xi_f$  はパラメータで  $0 < \xi_f \leq 1$  である。

(iv) 次に  $w, \omega$  の順に (iii) と同じ要領で計算も行う。

(v) (iii), (iv) を繰り返す、ある正の定数  $\epsilon_f, \epsilon_w, \epsilon_\omega$  に対して

$$|f_{i,j}^{(n)} - f_{i,j}^{(n-1)}| \leq \epsilon_f, \quad |w_{i,j}^{(n)} - w_{i,j}^{(n-1)}| \leq \epsilon_w, \quad |\omega_{i,j}^{(n)} - \omega_{i,j}^{(n-1)}| \leq \epsilon_\omega \quad (2.58)$$

の三つの条件がすべての点で満足されれば計算を終了する。

### 2.3 数値例および議論

§ 2.2 で求めた結果について、まず  $De$  の値が小さい場合から述べる。図 2.4 は式 (2.30) を用いて計算した二次流れ流線である。図は  $Re=50$  の場合であり、図の右側が曲りの外側、左側が内側である。(a) は  $\beta=0^\circ$  の場合で、 $Dean^{(4)}$  のものと同じである。(b), (c), (d), (e) はそれぞれ  $\beta=15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  の場合であり、 $\beta$  の増加とともに図の上側の二次流れが強くなることわかる。これは式 (2.28) の  $v$  の右辺第 1 項が  $\beta$  とともに増加し、図で反時計方向に管断面全体にわたって旋回する回転粘性流れが強くなるためである。図中の数値は二次流れの無次元流量を  $g_c$  とするとき、 $g_c/\kappa_c Re^2$  の値を示したものである。二次流れ流線は  $Re$  および  $\beta$  により変るが、§ 2.2.2 のような取り扱いが有効な範囲では  $\beta=0^\circ$  の解が図の左右に対称なものであり、 $\beta \neq 0^\circ$  の場合にはその解に  $\psi$  には無関係な同心円状の流線を重ね合わせたものとなるため、二次流れ流線は図の上下には非対称となるが、左右には対称のままである。

図 2.5 は図 2.1 に示す  $Z_u-Z_e$  断面での周方向流速分布を示したものである。(a) は  $Re=1$  の場合であり、このように小さい  $Re$  では  $\beta=0^\circ$  以外では回転粘性流れだけがみられ、 $\beta$  の変化はその流れの強さの変化だけとなって現われる。(b) は図 2.4 と同じ  $Re=50$  の場合であり、 $\beta$  の変化に応じて上下の二次流れの強さの変化する様子がよくわかる。(c) は  $Re=100$  の場合である。この二次流れの上下での強弱は粘性によって生ずるものであり、 $Re$  が増加するにつれ、管軸の曲りによる遠心力の寄与がますます大きくなるので、 $\beta$  の影響が小さくなっていく。

図 2.6 は  $\beta=30^\circ$  の場合について  $Re$  の影響を示したものである。 $Re=1$  および  $10$  では二次流れは管断面全体にわたる旋回流線となっている。 $Re$  が大きくなるにつれ、二次流れ流線はしだいに  $\beta=0^\circ$  の場合に近づ

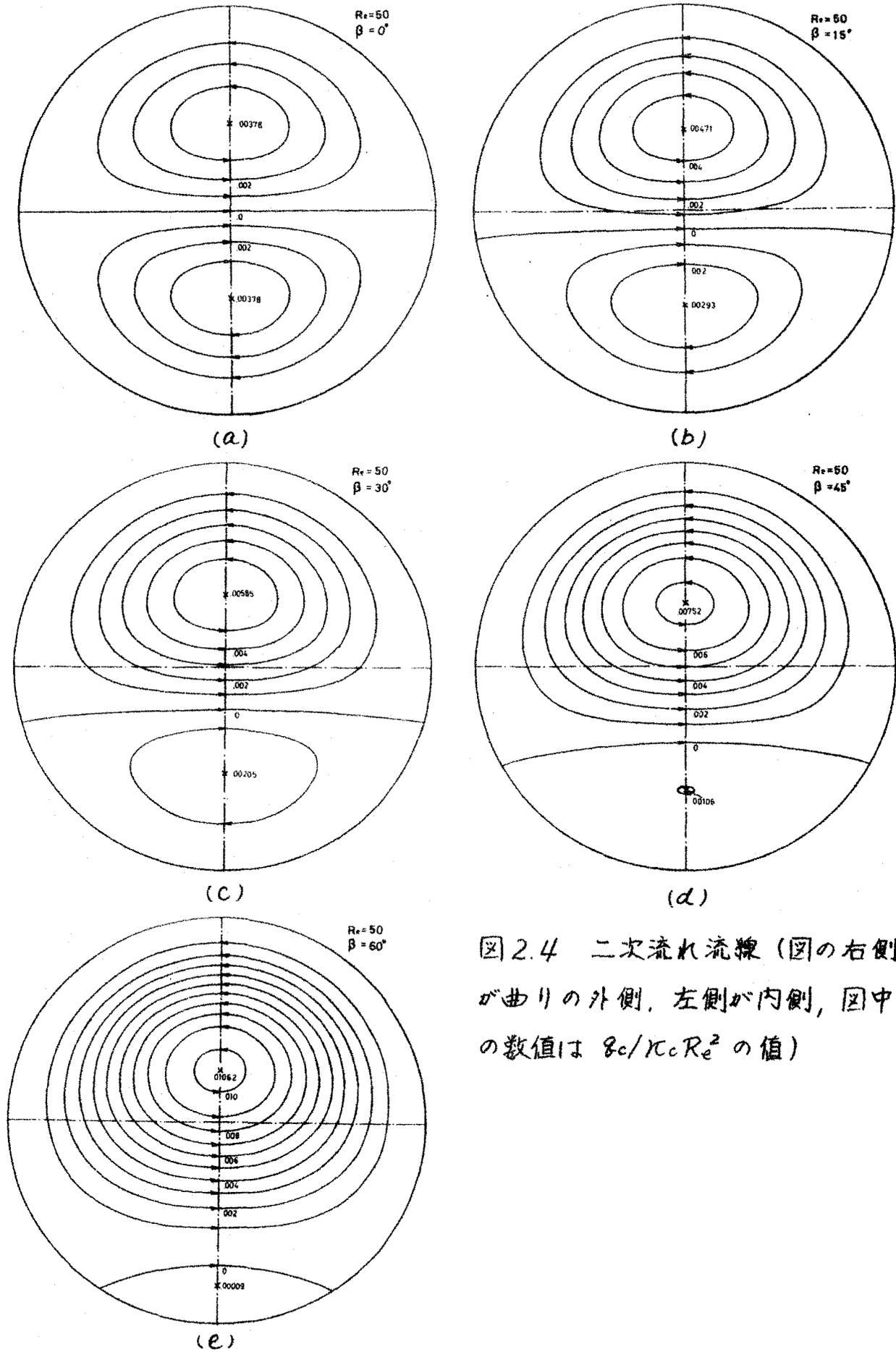


図2.4 二次流れ流線 (図の右側が曲りの外側, 左側が内側, 図中の数値は  $8c/\kappa c Re^2$  の値)

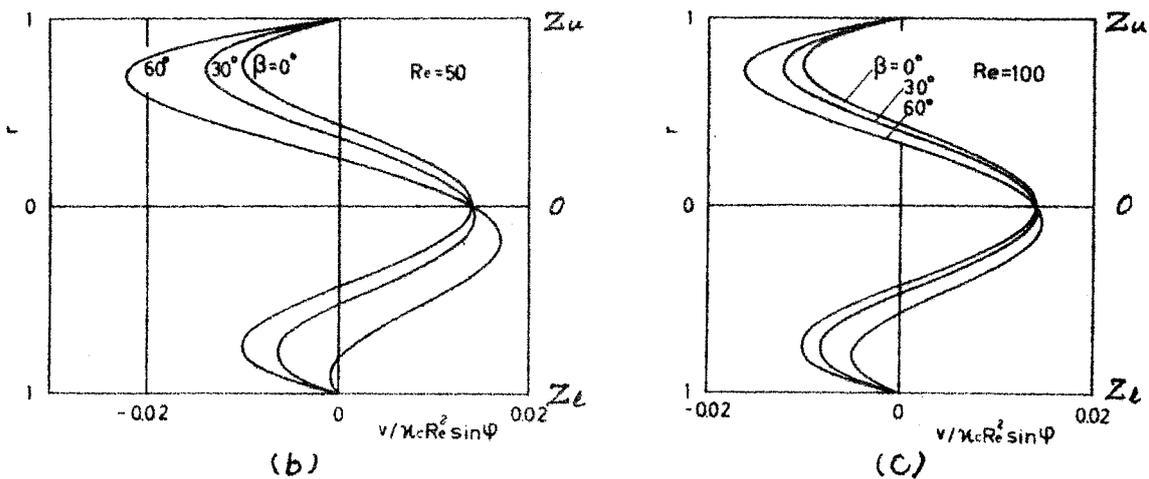
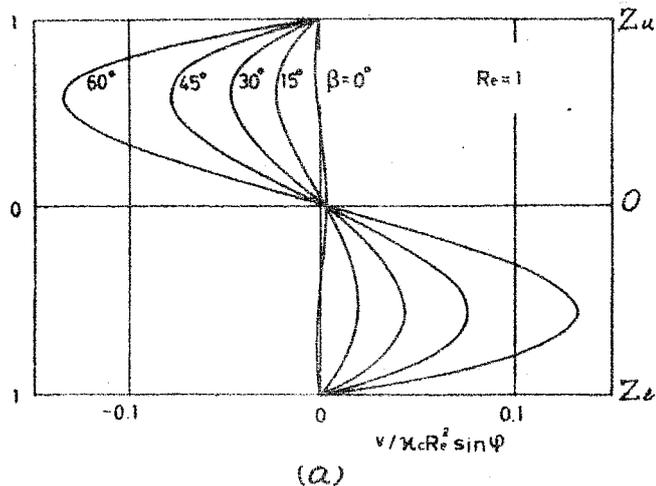


図2.5  $\beta$ の影響 (図2.1の $Z_u$ - $Z_l$ 断面での $\psi$ 方向流速分布)

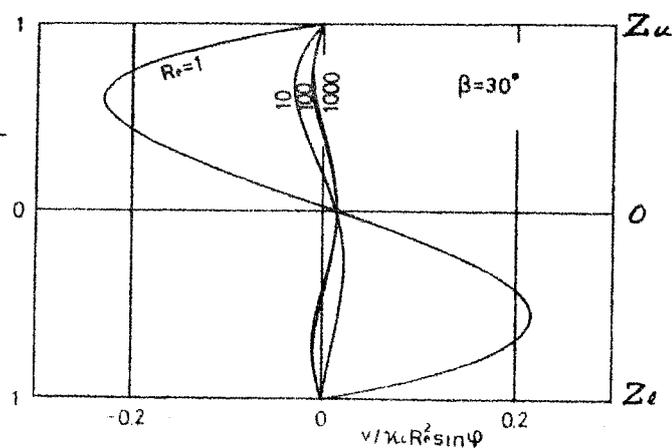


図2.6  $Re$ の影響

いて行く。

軸方向流速分布は式(2.28)からわかるように円環状曲管の場合と同

じである。つまり、粘性力が支配的である小さい  $Re$  の領域では流体はエネルギーの散逸が最小になるように流れ<sup>(22)</sup>、軸流速度は軸方向距離の短い曲りの内側で大きくなる。他方、 $Re$  が大きいと遠心力が支配的となり、軸流速度は曲りの外側で大きくなる。

次に § 2.2.3 で得られた差分近似式を解いた結果について述べる。数値例はすべて  $(1/R) = 1/20$ ,  $\Delta r = 0.1$ ,  $\Delta \varphi = \pi/18$  の場合であり、 $D_c$  および  $\beta$  をパラメータとしている。計算は  $D_c = 10$ ,  $\beta = 0^\circ$  から始め、その初期値としてはすべての点で  $f = w = \omega = 0$  を用いた。それ以上の値の  $D_c$  の場合には、その前の結果を初期値として用い、まず  $\beta = 0^\circ$  の場合について順次  $D_c$  の値を増加させて行く。 $\beta$  についても同様にして、各  $D_c$  の値ごとに  $\beta$  の値を増加させる。計算に用いた  $E_f$ ,  $E_w$ ,  $E_\omega$  は表 2.1 に示すとおりであるが、収束の判定には式 (2.58) の外に、ノルム (式 (2.57) の第 1 式の  $e_{f_{i,j}}^{(n)}$  の絶対値の全点に関する総和,  $\sum_i |e_{f_{i,j}}^{(n)}|$ ,  $\sum_j |e_{w_{i,j}}^{(n)}|$  および  $\sum_j |e_{\omega_{i,j}}^{(n)}|$ ) のすべてが繰り返し数  $n$  の増加に対して減少傾向にあることをその条件に入れたので、計算が終了した段階での実際の  $E_f$ ,  $E_w$ ,  $E_\omega$  は表に示すものよりかなり小さいものとなっている。

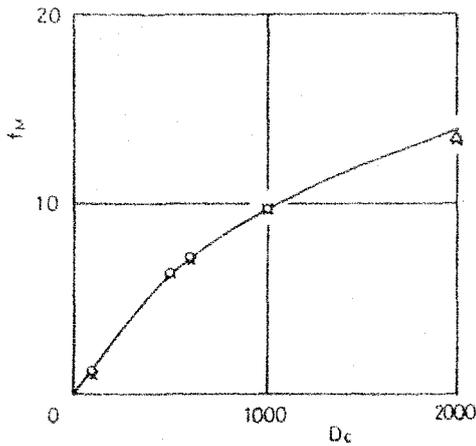
表 2.1

$E \setminus D_c$	50	100	250	500	1000	2000
$E_f$	$1 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-3}$	$7 \times 10^{-3}$
$E_w$	$1 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-2}$	$4 \times 10^{-2}$	$5 \times 10^{-2}$	$8 \times 10^{-2}$
$E_\omega$	$1 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^{-2}$	$8 \times 10^{-2}$	$17 \times 10^{-2}$	$3 \times 10^{-1}$

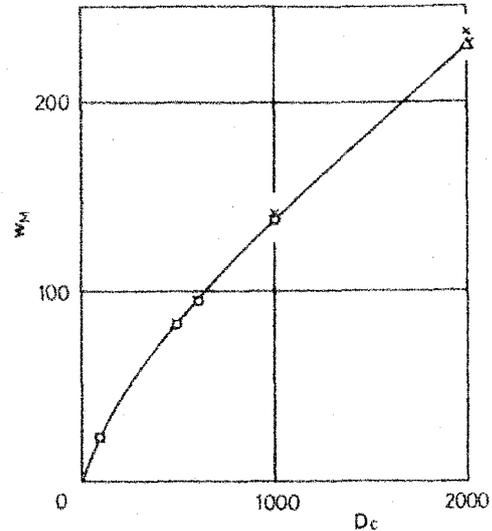
計算に用いた  $D_c$  は 10, 20, 30, 50, 100, 250, 500, 1000, 2000 で、 $\beta$  はそれぞれの  $D_c$  について  $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  である。ただし  $D_c = 1000$  と  $2000$  の間で  $D_c = 1500$ ,  $\beta = 0^\circ$  について計算を行い、その結果を  $D_c = 2000$  の場合の初期値とした。過大緩和係数  $r_f$ ,  $r_w$ ,  $r_\omega$  およびパラメータ  $\xi_f$ ,  $\xi_w$ ,  $\xi_\omega$  は表 2.2 に示すとおりであり、それらの値は  $D_c = 10$  の場合を除いて、各  $D_c$  ごとにすべての  $\beta$  に対して適用した。

表 2.2

$D_c$	$r_f$	$r_w$	$r_w$	$\xi_f$	$\xi_w$	$\xi_w$
10 ( $\beta=0^\circ$ )	1.0	1.0	1.0	0.1	0.1	0.1
10 ~ 100 ( $D_c=10, \beta=0^\circ$ を除く)	1.3	1.3	1.3	0.1	0.1	0.1
250, 500	1.0	1.0	1.0	0.1	0.1	0.1
1000	1.0	1.0	1.0	0.5	0.5	0.5
2000	1.0	1.0	1.0	0.6	0.5	0.6



(a)  $D_c$ による  $f_M$  の変化



(b)  $D_c$ による  $W_M$  の変化

図 2.7 差分解の精度の比較 ( $\beta=0^\circ$ ), —; 本論文の結果 ( $\Delta r=0.1$ ,  $\Delta\varphi=\pi/18$ ),  $\circ, \Delta, \times$ ; 文献(12)の結果 ( $\circ$ ;  $\Delta r=0.1$ ,  $\Delta\varphi=\pi/18$ ,  $\Delta$ ;  $\Delta r=0.05$ ,  $\Delta\varphi=\pi/36$ ,  $\times$ ;  $\Delta r=0.025$ ,  $\Delta\varphi=\pi/72$ .)

さて  $\beta=0^\circ$  についてはすでに多くの結果が発表されている<sup>(57, 28, 12)</sup>  $\beta=0^\circ$  の場合の本論文の計算結果も文献(12)のそれと比較してみると、図 2.7 に示すようになる。(a) は  $D_c$  が変化したときの  $f$  の最大値  $f_M$  の変化も、(b) は  $w$  の最大値  $w_M$  の変化を示したものである。文献(12)では差分近似の網目の大きさの影響を調べているが、その結果によれば同じ値の  $D_c$  の場合、網目の大きさを小さくするにつれ  $f_M$  は減少し、 $w_M$  は増加するが、 $D_c \leq 2000$  では本論文で採用した網目の大きさで十分精度よく計算されていることがわかる。またこれまでに発表されている計算結果<sup>(7)</sup> および実験結果<sup>(11)</sup> もこの線上あるいはその延長上に乗っている。<sup>(12)</sup>

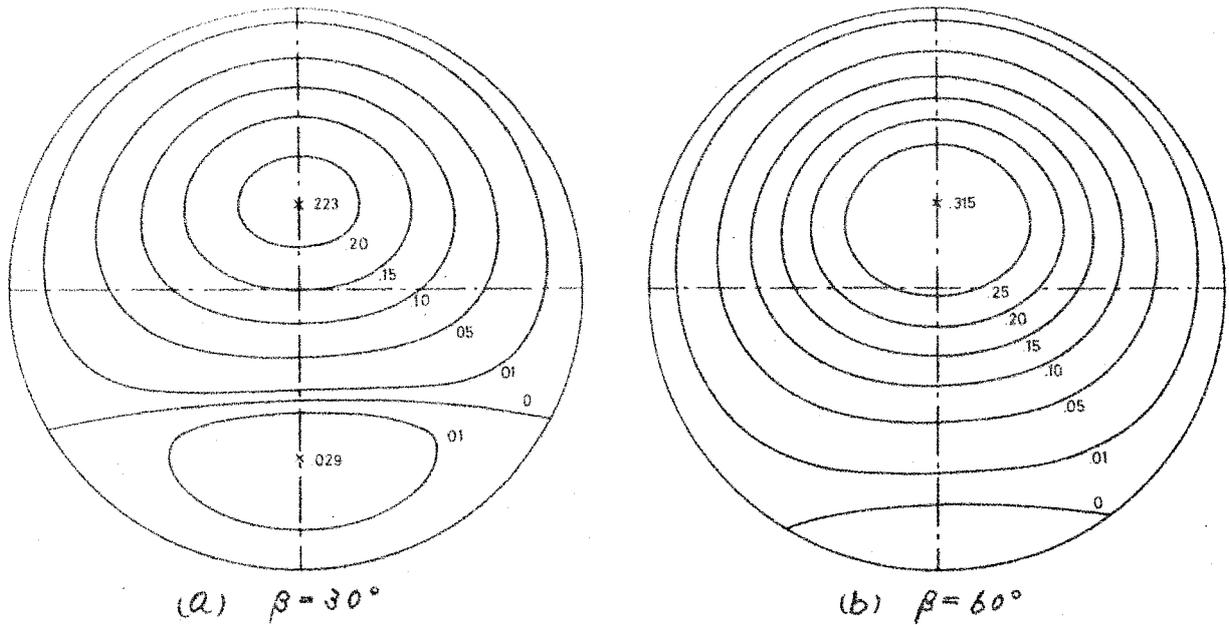


図 2.8  $D_c=30$  のときの  $f$

図 2.8 は  $D_c=30$  で  $\beta=30^\circ$  および  $60^\circ$  の場合の二次流れ流線である。このように小さい  $D_c$  の場合には、 $w$  はほとんどポアズイユ流れに等しい分布を示し、§ 2.2.2 の摂動解とよく似て結果となっている。すなわち図 2.4 の場合と同様に  $\beta$  が増すにつれ回転粘性流れが強くなり、それとともに図の上部の二次流れが強くなるが、左右の対称性はほとんど失われない。いま  $w$  の分布としてポアズイユ流れを仮定すると、§ 2.2.2 の  $Re$  と § 2.2.3 の  $D_c$  の間には

$$D_c = 4 Re (2 r_0^* \cos^2 \beta / R^*)^{1/2} = 4 \sqrt{2} Re \kappa_c^{1/2}$$

の関係がある。図 2.8 の場合も近似的に上式の関係が成り立つので、摂動解の適用範囲は越えすが、 $r_0^*/R^* = 1/20$  として  $Re=50$  の場合の  $D_c$  を計算してみると、 $\beta=60^\circ$  のとき  $D_c=31.6$ 、 $\beta=30^\circ$  のとき  $D_c=54.8$  となる。 $\beta=60^\circ$  のときは両者の  $D_c$  の値がほぼ等しく、図 2.4 (e) と図 2.8 (b) より摂動解の結果と数値解の結果とがよく一致することがわかる。また図 2.4 の図中の数値  $(g_c/\kappa_c Re^2)$  と図 2.8 の  $f$  との間には

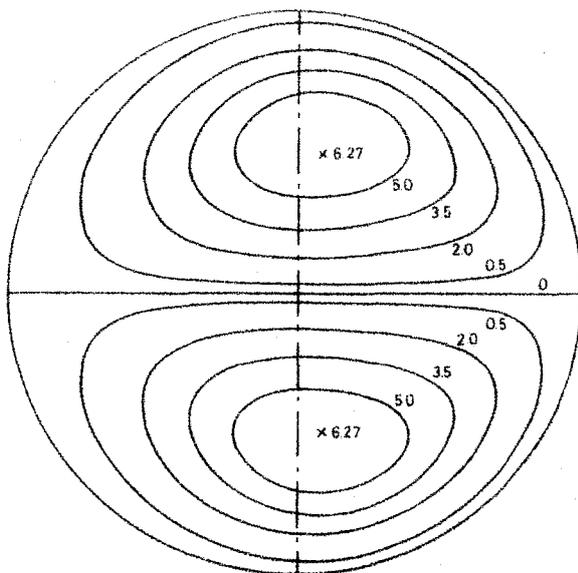
$$f = (g_c/\kappa_c Re^2) \kappa_c Re^2 = (g_c/\kappa_c Re^2) (D_c/4\sqrt{2})^2$$

の関係があるので、たとえば図 2.4 (e) での最大値 0.01062 は  $D_c=31.6$  として  $f$  に換算すると 0.331 となり、図 2.8 (b) が  $D_c=30$  であ

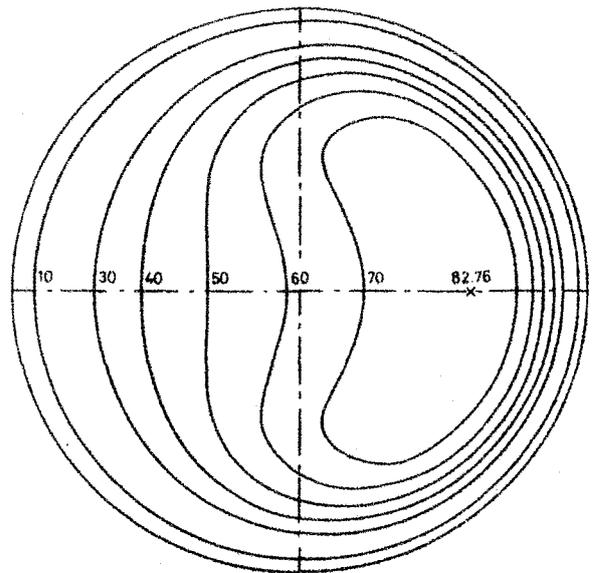
のこととを考慮すれば両者は一致しているといえる。

さらに小さい  $D_c$  では、摂動解において  $Re$  がさらに小さい場合と同様、回転粘性流れが支配的となる。

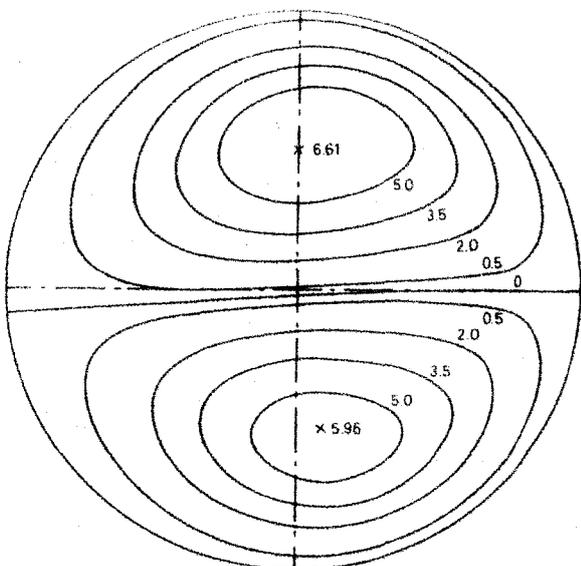
$D_c=500$  で  $\beta=0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$  の場合の等  $f$  線および等  $w$  線をそれぞれ図 2.9 (a), (b), (c) に示す。前述のようにコリオリ力の作用で  $f$  および  $w$  の分布が  $\beta$  の増加とともに傾斜していく。二次流れは  $\beta$  の増加につれ上部の方がわずかに強くなっているが、 $w$  に関しては  $\beta$  が異なっても図も中心まわりに回転させるだけで互いによく一致する。



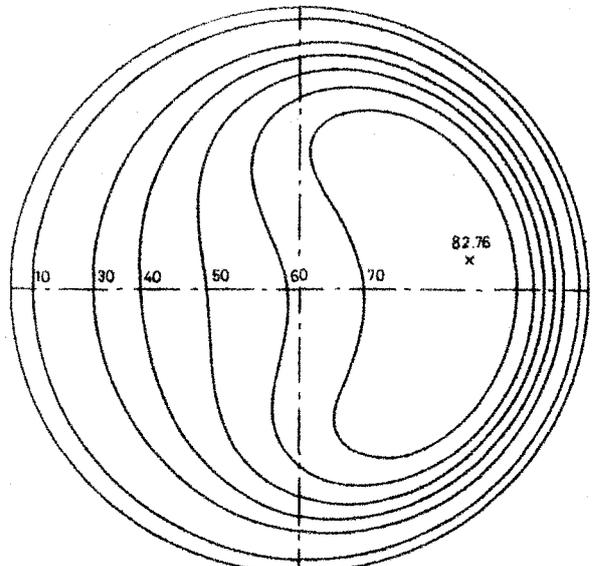
(a-1)  $\beta=0^\circ$  における  $f$



(a-2)  $\beta=0^\circ$  における  $w$

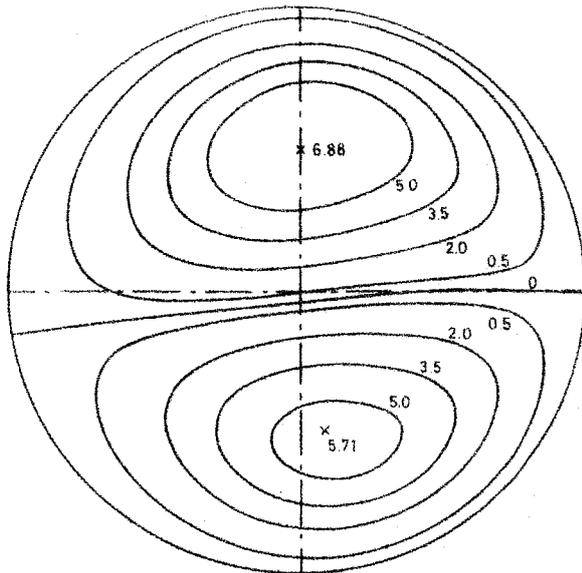


(b-1)  $\beta=30^\circ$  における  $f$

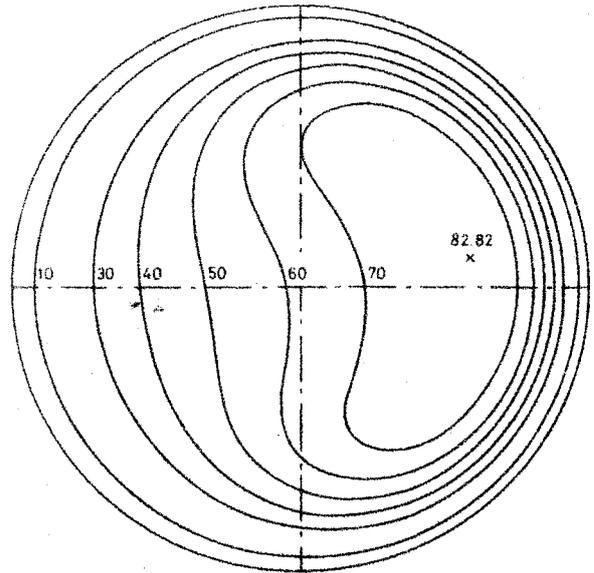


(b-2)  $\beta=30^\circ$  における  $w$

図 2.9  $D_c=500$  のときの  $f$  および  $w$



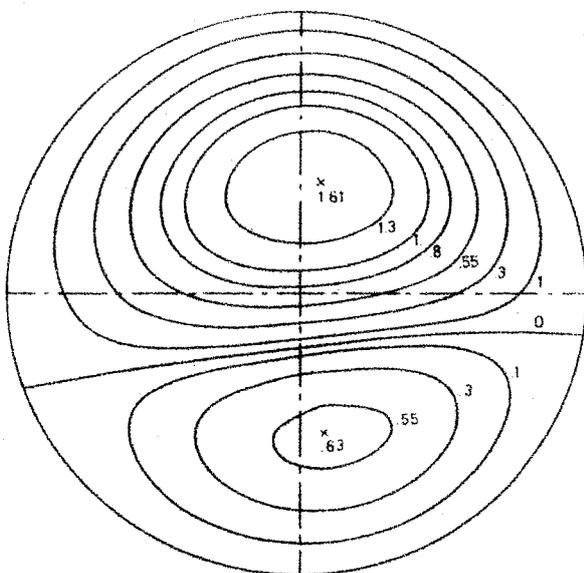
(c-1)  $\beta=60^\circ$ における  $f$



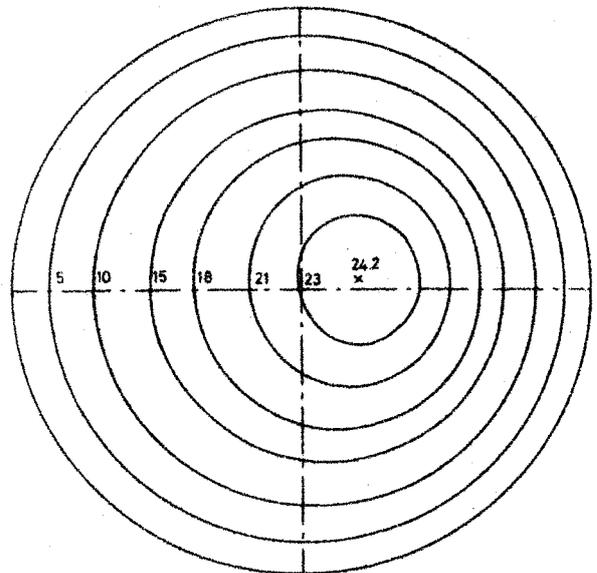
(c-2)  $\beta=60^\circ$ における  $W$

図 2.9  $D_c=500$  のときの  $f$  および  $W$

図 2.10 は  $\beta=60^\circ$  の  $D_c$  が変化する場合の等  $f$  線および等  $W$  線を示したものである。等  $f$  線については  $D_c=100$  ではコリオリ力の影響と回転粘性流れの影響とを同時に受け、流線が傾斜すると同時に上部の二次流れの方が強くなっている。前の図 2.9 (c) からわかるように  $D_c=500$  になると、回転粘性流れの影響は小さくなり、二次流れ強さは上下でさほど差がなく、流線が傾斜している。  $D_c=1000$  では回転粘性流れの影響

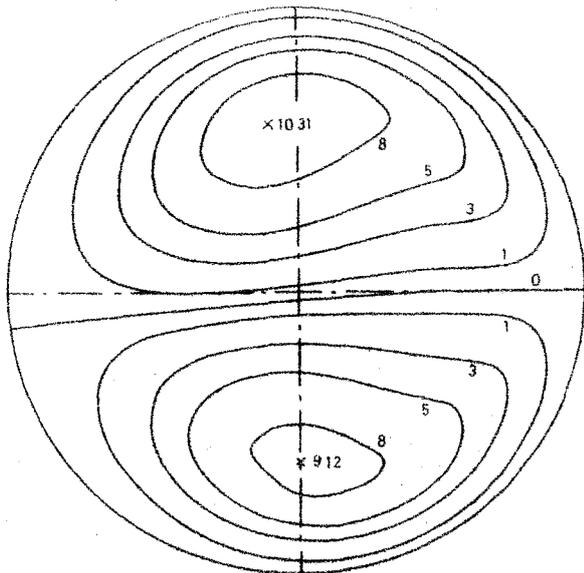


(a-1)  $D_c=100$  における  $f$

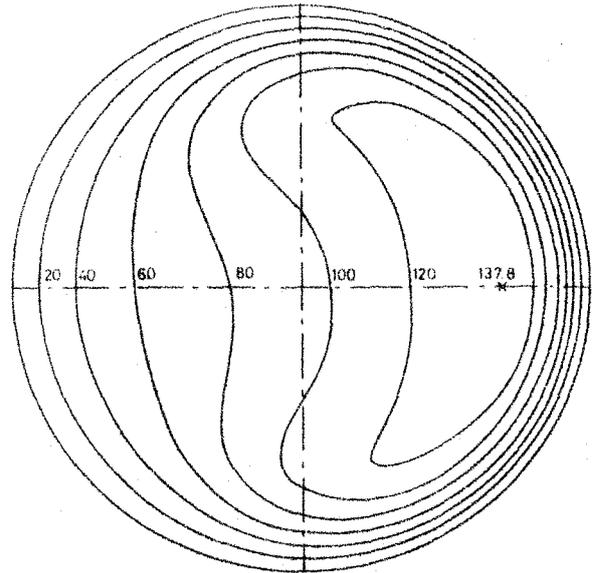


(a-2)  $D_c=100$  における  $W$

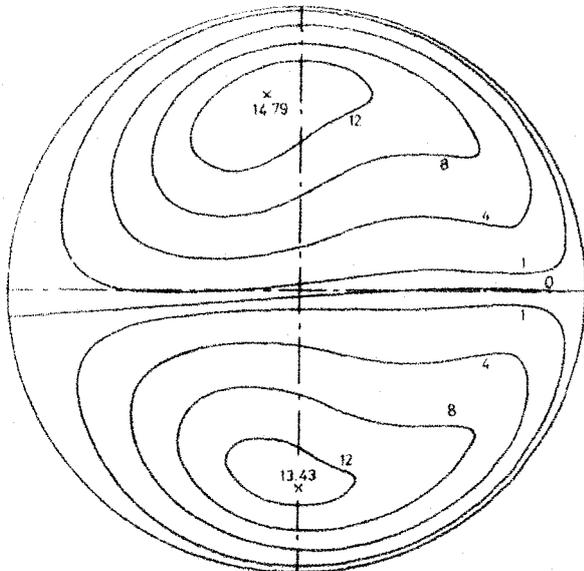
図 2.10  $D_c$  による  $f$  および  $W$  の分布の変化 ( $\beta=60^\circ$ )



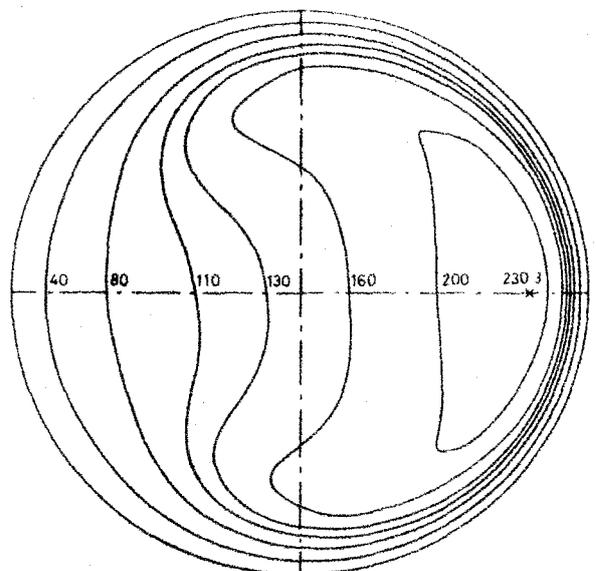
(b-1)  $D_c=1000$  における  $f$



(b-2)  $D_c=1000$  における  $w$



(c-1)  $D_c=2000$  における  $f$



(c-2)  $D_c=2000$  における  $w$

図 2.10  $D_c$  による  $f$  および  $w$  の分布の変化 ( $\beta=60^\circ$ )

響はさらに小さくなるが、傾斜角度も  $D_c=500$  の場合より小さくなっている。この傾向は  $D_c=2000$  でさらに明確になっている。いさ簡単にこの傾斜角度がコリオリ力と遠心力の合力によって決まると考え、 $v^* = \sqrt{u^{*2} + v^{*2}}$  として式 (2.36) および (2.37) に基づき両者の比もとってみると

$$\frac{(2V_0^* w^*/R^*) \sin \beta \cos \beta}{(w^{*2}/R^*) \cos^2 \beta} = \frac{2V_0^*}{w^*} \tan \beta$$

となる。したがって上述の傾斜角度の傾向は  $D_c$  が増加するときの  $f$  と  $w$  の増加の仕方により説明される。つまり  $f$  および  $w$  を  $f_M$  および  $w_M$  で代表させると、これらは  $\beta$  によって多少変化するが、たとえば図 2.7 からわかるように  $D_c$  が増加するとき  $D_c=500$  を境に  $f_M$  の増え方が減少する。一方  $w_M$  の増え方もわずかに減少するが  $f_M$  に比べるとその程度は小さく、 $D_c$  の増加とともに  $f_M/w_M$  はますます小さくなる。  $\beta=0^\circ$  の場合についてこのような傾向が存在することは数値計算以外の方法<sup>(4)</sup> でも、また実験<sup>(25)</sup> によっても確かめられている。以上の説明は等  $w$  線についても同様に適用できる。

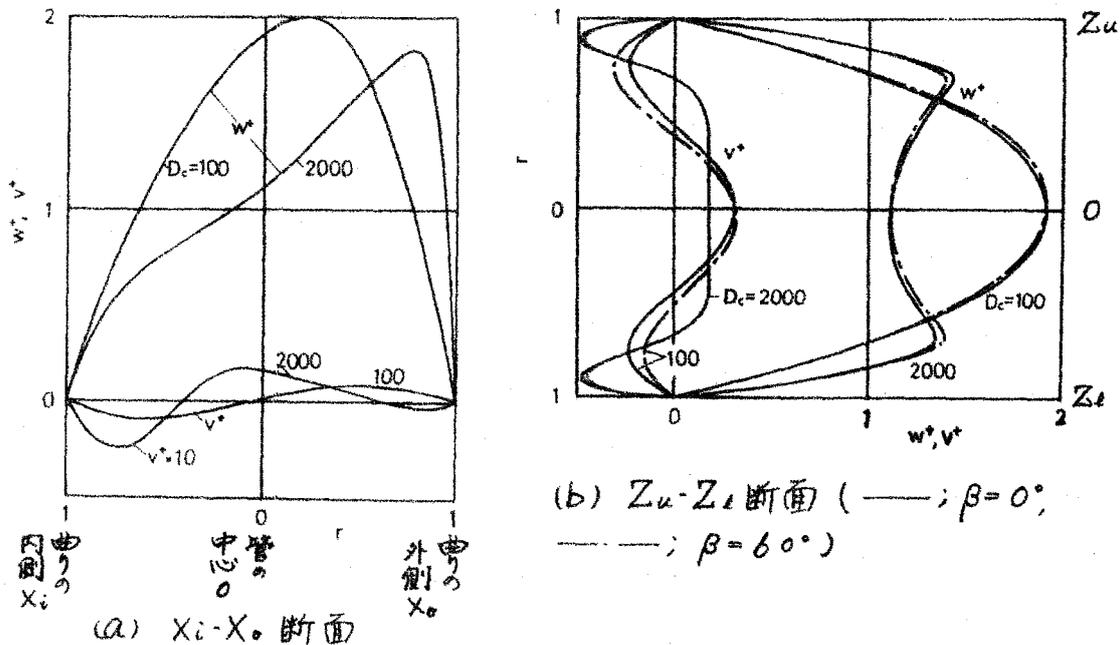


図 2.11  $X_i-X_0$  および  $Z_u-Z_d$  面での流速分布 ( $w^+ = w/w_m$ ,  $v^+ = v/w_m \sin \varphi$ )

次に図 2.1 の  $X_i-X_0$  断面での  $w^+ = w/w_m$ ,  $v^+ = v/w_m \sin \varphi$  (ただし  $w_m$  は  $w$  の断面平均値) を図 2.11 (a) に、 $Z_u-Z_d$  断面でのそれらを (b) に示す。(a) の  $v^+$  は  $\beta=60^\circ$  の場合であるが、 $X_i-X_0$  断面での  $w^+$  の分布は  $\beta$  によってほぼほとんど変化しない。(b) は  $\beta=0^\circ$  と  $60^\circ$  について示しているが、 $w^+$  についてはその差はわずかである。以上のことから  $w_m$  は  $\beta$  によってほとんど変化しないことが予想される。実際、各  $D_c$  ごとに  $\beta=0^\circ$  のときの  $w_m$  と  $\beta \neq 0^\circ$  のときのそれとの比をとってみると、計算した

すべての  $D_c$  および  $\beta$  についてその値は  $1.000 + O(10^{-4})$  となる。  $\beta = 0^\circ$  の場合には直管と曲管との管摩擦損失係数の比について多くの研究が報告されている<sup>(1,59,99,12)</sup>  $\beta$  の変化による  $W_m$  の変化についての上述の結果から、  $\beta \neq 0^\circ$  の場合には円環状曲管に対する結果において、円環状曲管の曲率の代りにら線管の曲率を用いれば、任意の  $\beta$  に対してこれまでの式をそのまま適用してよいことがわかる。このことは実験的にはすでに確かめられている<sup>(63)</sup> が、その妥当性が理論的に示されたことになる。

## 2.4 結 言

コイル管内層流を支配する基礎式を導き、管径に比べコイルの巻径が大きいとして曲率が小さい場合について計算を行った結果、次のことが明らかとなった。

(1) コイル管内層流を支配する特性数として  $D_c$  および  $D_t$  が存在し、流れはそれらの組合せにより種々に変化するが、  $D_t$  は幾何学的条件だけで定まり、流れの相似性は  $D_c$  により決定される。

(2) したがって管摩擦損失には  $D_c$  だけが影響し、円環状曲管の曲率の代りにコイル管の曲率を用いれば、任意の  $\beta$  に対して従来の  $\beta = 0^\circ$  の場合の摩擦係数の式が適用できる。

(3)  $D_c$  の値が小さい場合には投動解と数値解との結果がよく合う。

(4) 管軸のねじれのために管内流れに非対称性が生じる。  $D_c$  が小さい場合には  $W$  は直管の場合とほとんど同じであるが、断面内に生じる二次流れ流線および等  $W$  線の分布が傾斜してくる。

(5)  $D_c$  がある程度 ( $\geq 1000$ ) 以上大きくなると、軸流速度の増加の割には二次流れ強さが増加せず、コリオリカに比べ遠心力が大きくなって二次流れ流線および等  $W$  線の分布の傾斜角度が小さくなり、  $\beta = 0^\circ$  の場合の分布に近づく。

### 第3章 管軸に沿って曲率が変化する曲管内層流定常流れ

#### 3.1 緒言

§ 1.2で述べたように、曲率が一定で、かつ曲率が零である管（円環状曲管）内の流れはあらゆる形の曲管内の流れの基礎として広く研究されている。しかし円環状曲管の応用として実際に用いられている曲管の多くはコイル管であり、コイル管は曲率の外に曲率を有するため、その内部流れは円環状曲管の場合と異なることを第2章で示した。現実の管路でよく用いられるこの外の曲管としてはベンド、二重ベンドなどがある。この形の曲管は管軸に沿って曲率が変化する曲管として解釈することができる。本章ではそのような観点から、管軸の形状が二次元曲線で表わされる曲管内層流定常流れの解析を行う。管の曲りが1回、2回および周期的である管の例として、管軸の形状がそれぞれ双曲線、双曲線関数および正弦関数で表現される場合を扱い、それぞれの場合に対する基礎式を導く。得られた基礎式は、管軸の最大曲率が比較的小さい場合について解かれる。とくに管軸に沿っての曲率の変化がゆるやかな場合には、上述の三種の管を統一的に扱うことができ、この解は管軸の形状がゆるやかに変化する二次元曲線で与えられる管内層流定常流れに対して一般に有効である。なお解析にあたっては§ 1.3の最後に述べて仮定を用いている。

#### 3.2 1次元管内層流

##### 3.2.1 解析

長さの単位を管の半径  $r_0^*$  で、流速を  $v^*/r_0^*$  で、圧力を  $P^*(v^*/r_0^*)^2$  でそれぞれ無次元化する。本章で以下に用いられる量は原則として無次元である。

さて直角座標を  $(x_0, y_0, z_0)$  とすると、管軸の形状は

$$y_0 = a \sin Kx_0 \quad (3.1)$$

で表わされる。ここで  $A$  および  $\kappa$  はそれぞれ定数である。図 3.1 に示すように、管軸に直交する面内に曲線座標  $r, \varphi$  をとり、これらを第 1 および第 2 軸とする。この面に垂直に  $(r, \varphi, x)$  がこの順で右手系を成すように第 3 軸  $x$  を考える。この  $x$  を用いると管軸の形状  $y$  は

$$y = A \sin \kappa x \quad (3.2)$$

と表現され、その曲率  $\kappa_c$  は

$$\kappa_c = \kappa^2 A \sin \kappa x / S^3 \quad (3.3)$$

となる。ただし

$$S = (1 + \kappa^2 A^2 \cos^2 \kappa x)^{1/2}$$

である。そして直角座標  $x_0, y_0, z_0$  と曲線座標  $r, \varphi, x$  とは次式で関係づけられる。

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= x - \kappa A r \cos \varphi \cos \kappa x / S \\ y_0 &= A \sin \kappa x + r \cos \varphi / S \\ z_0 &= r \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

式 (3.4) を用い、式 (2.4) の定義にしたがって計量テンソルを計算すると、それらは以下のとおりとなる。

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= 1, & g_{12} &= 0, & g_{13} &= 0, \\ g_{21} &= 0, & g_{22} &= r^2, & g_{23} &= 0, \\ g_{31} &= 0, & g_{32} &= 0, & g_{33} &= S^2 (1 + \kappa^2 A r \cos \varphi \sin \kappa x / S^3)^2, \end{aligned} \right\} \quad (3.5a)$$

$$\left. \begin{aligned} g^{ii} &= 1/g_{ii}, & (i=1, 2, 3), \\ g^{ij} &= 0, & (i \neq j). \end{aligned} \right\} \quad (3.5b)$$

上式からもわかるように  $r, \varphi, x$  は直交曲線座標系を成す。式 (2.6) で定義される  $\Gamma_{jk}^i$  は

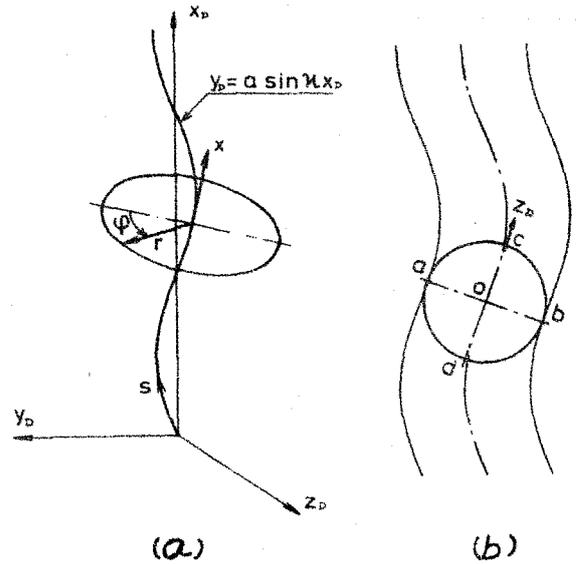


図 3.1 座標系

$$\begin{aligned}
&\Gamma'_{11} = 0, \quad \Gamma'_{12} = 0, \quad \Gamma'_{13} = 0, \\
&\Gamma'_{21} = 0, \quad \Gamma'_{22} = -r, \quad \Gamma'_{23} = 0, \\
&\Gamma'_{31} = 0, \quad \Gamma'_{32} = 0, \quad \Gamma'_{33} = -\frac{\kappa^2 a \cos \varphi \sin \kappa x}{s^4} (s^2 + \kappa^2 a r \cos \varphi \sin \kappa x), \\
&\Gamma^2_{11} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^2_{13} = 0, \\
&\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12}, \quad \Gamma^2_{22} = 0, \quad \Gamma^2_{23} = 0, \\
&\Gamma^2_{31} = 0, \quad \Gamma^2_{32} = 0, \quad \Gamma^2_{33} = \frac{\kappa^2 a \cos \varphi \sin \kappa x}{s^4} \left( \frac{s^2}{r} + \kappa^2 a \cos \varphi \sin \kappa x \right), \\
&\Gamma^3_{11} = 0, \quad \Gamma^3_{12} = 0, \quad \Gamma^3_{13} = \frac{\kappa^2 a \cos \varphi \sin \kappa x}{s^2 + \kappa^2 a r \cos \varphi \sin \kappa x}, \\
&\Gamma^3_{21} = 0, \quad \Gamma^3_{22} = 0, \quad \Gamma^3_{23} = \frac{-\kappa^2 a r \sin \varphi \sin \kappa x}{s^2 + \kappa^2 a r \cos \varphi \sin \kappa x}, \\
&\Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{13}, \quad \Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23}, \quad \Gamma^3_{33} = \frac{\kappa^2 a \cos \kappa x}{s^2 + \kappa^2 a r \cos \varphi \sin \kappa x} \left\{ r \cos \varphi \right. \\
&\quad \left. + a \sin \kappa x \left( \frac{2}{s^2} \kappa^2 a r \cos \varphi \sin \kappa x - s \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

となる。

さて流速の  $r, \varphi, x$  方向成分をそれぞれ  $u, v, w$  とすると、式(2.8) ~ (2.10) にしにがって導かれる連続の式および運動方程式は以下のとおりとなる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{w}{\sqrt{g_{33}}} \right) + \Gamma^3_{31} u + \Gamma^3_{32} \frac{v}{r} + \Gamma^3_{33} \frac{w}{\sqrt{g_{33}}} = 0 \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
&u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v^2}{r} + \frac{w}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial u}{\partial x} + \Gamma^3_{33} \frac{w^2}{g_{33}} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \\
&+ \frac{1}{g_{33}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\Gamma^3_{33}}{g_{33}} \left( \Gamma^3_{13} u + \Gamma^3_{23} \frac{v}{r} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\Gamma^3_{33}}{g_{33}} \left( v - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) - \frac{\Gamma^3_{33}}{g_{33}} \frac{\partial u}{\partial x} \\
&+ \frac{1}{g_{33}} \left\{ \frac{w}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial x} (\Gamma^3_{33}) + 2 \Gamma^3_{33} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{w}{\sqrt{g_{33}}} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
& u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{uv}{r} + \frac{w}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial v}{\partial x} + \Gamma_{33}^2 \frac{r w^2}{g_{33}} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \\
& + \frac{1}{g_{33}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\Gamma_{33}^2}{g_{33}} (\Gamma_{13}^3 r u - u + \Gamma_{23}^3 v - \frac{\partial v}{\partial \varphi}) - \frac{\Gamma_{33}^1}{g_{33}} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\Gamma_{33}^2}{g_{33}} \frac{\partial v}{\partial x} \\
& + \frac{r}{g_{33}} \left\{ \frac{w}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial x} (\Gamma_{33}^2) + 2 \Gamma_{33}^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{w}{\sqrt{g_{33}}} \right) \right\} \quad (3.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{w}{\sqrt{g_{33}}} \right) + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{w}{\sqrt{g_{33}}} \right) + \frac{w}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{w}{\sqrt{g_{33}}} \right) + \frac{w}{\sqrt{g_{33}}} (2 \Gamma_{31}^3 u + 2 \Gamma_{32}^3 \frac{v}{r} + \Gamma_{33}^3 \frac{w}{\sqrt{g_{33}}}) \\
& = -\frac{1}{g_{33}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{w}{\sqrt{g_{33}}} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{w}{\sqrt{g_{33}}} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{w}{\sqrt{g_{33}}} \right) + \frac{1}{g_{33}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{w}{\sqrt{g_{33}}} \right) \\
& + \frac{w}{\sqrt{g_{33}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (\Gamma_{13}^3) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Gamma_{23}^3) \right\} + \frac{1}{g_{33}} \left\{ u \frac{\partial}{\partial x} (\Gamma_{13}^3) + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial x} (\Gamma_{23}^3) \right\} \\
& + \Gamma_{13}^3 \left\{ \frac{2}{g_{33}} \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{w}{\sqrt{g_{33}}} \right) + \frac{1}{r} \frac{w}{\sqrt{g_{33}}} \right\} + \frac{2}{r^2} \Gamma_{23}^3 \left\{ \frac{r}{g_{33}} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{w}{\sqrt{g_{33}}} \right) \right\} \\
& + \frac{w}{\sqrt{g_{33}}} \left\{ (\Gamma_{13}^3)^2 + \left( \frac{\Gamma_{23}^3}{r} \right)^2 \right\} - \frac{1}{g_{33}} \left\{ \Gamma_{33}^1 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{w}{\sqrt{g_{33}}} \right) + \Gamma_{33}^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{w}{\sqrt{g_{33}}} \right) - \frac{w}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial x} (\Gamma_{33}^3) - \Gamma_{33}^3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{w}{\sqrt{g_{33}}} \right) \right\} \\
& \quad (3.10)
\end{aligned}$$

いまだ行の無次元振中  $a$  が小さいと仮定し、直管の場合からの摂動解を求めるときを考えると、静圧および流速は

$$\left. \begin{aligned}
p &= p_0 + a p_1 + a^2 p_2 + \dots, & u &= a u_1 + a^2 u_2 + \dots, \\
v &= a v_1 + a^2 v_2 + \dots, & w &= a w_1 + a^2 w_2 + \dots,
\end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

と置くことができる。式(3.11)を式(3.7)~(3.10)に代入し、 $a$ の等しいべきの項をまとめて整理する。 $a^0$ のオーダーの式はポアズイユ流れを表わすものとなり、その解は

$$\left. \begin{aligned}
p_0 &= P_0 - 4 R_e x \\
w_0 &= R_e (1 - r^2)
\end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

となる。ここで  $P_0$  は定数であり、 $R_e$  は  $w_0^*$  もポアズイユ流れの最大流速として

$$R_e = w_0^* r_0^* / \nu^* \quad (3.13)$$

で定義されるレイノルズ数である。

次に  $\alpha'$  のオーダーの連続の式および運動方程式は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_1)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \omega_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \kappa^2 \omega_0^2 \cos \varphi \sin \kappa x &= -\frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{u_1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\ -\frac{2}{r^2} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} - \kappa^2 \omega_0 \cos \varphi \cos \kappa x & \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \omega_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \kappa^2 \omega_0^2 \sin \varphi \sin \kappa x &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \\ + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + \kappa^2 \omega_0 \sin \varphi \cos \kappa x & \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} u_1 \frac{\partial \omega_0}{\partial r} + \omega_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} &= -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \\ -6Re \kappa^2 r \cos \varphi \sin \kappa x & \end{aligned} \quad (3.17)$$

といたし、境界条件は  $r=1$  で

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0 \quad (3.18)$$

である。上式から解は変数分離形で求められることがわかる。

### 3.2.2 管軸に沿って曲率がゆっくり変化する場合

まず管軸に沿う曲率の変化がゆるやかな場合、すなわち  $\kappa \ll 1$  の場合を考え、

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \kappa^2 p_{11} + \kappa^4 p_{12} + \dots \\ u_1 &= \kappa^2 u_{11} + \kappa^4 u_{12} + \dots \\ v_1 &= \kappa^2 v_{11} + \kappa^4 v_{12} + \dots \\ w_1 &= \kappa^2 w_{11} + \kappa^4 w_{12} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

と置いて解を求め、式(3.14)~(3.17)において、 $\kappa$ で1回微分するとともに  $\kappa$  についての次数が1ずつ増すことを考慮すると、 $\kappa^2$  のオーダーの式は次式となる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_{11})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{11}}{\partial \varphi} = 0 \quad (3.20)$$

$$-w_0^2 \cos \varphi \sin \kappa x = -\frac{\partial p_{11}}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{11}}{\partial r} - \frac{u_{11}}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_{11}}{\partial \varphi} \quad (3.21)$$

$$w_0^2 \sin \varphi \sin \kappa x = -\frac{1}{r} \frac{\partial p_{11}}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_{11}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{11}}{\partial r} - \frac{v_{11}}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_{11}}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_{11}}{\partial \varphi} \quad (3.22)$$

$$u_{11} \frac{\partial w_0}{\partial r} = \frac{\partial^2 w_{11}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_{11}}{\partial \varphi^2} - b R_0 r \cos \varphi \sin \kappa x \quad (3.23)$$

上式を解くのに関数  $\psi_{11}$  を用い,

$$\left. \begin{aligned} \psi_{11} &= f_{11}(r) \sin \varphi \sin \kappa x \\ u_{11} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{11}}{\partial \varphi}, \quad v_{11} = -\frac{\partial \psi_{11}}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

とすれば連続の式(3.20)は満足される。ただし  $f_{11}$  は  $r$  のみの関数である。式(3.21)および式(3.22)から  $p_{11}$  を消去し、式(3.24)を代入して整理すると次式を得る。

$$f_{11}'''' + \frac{2}{r} f_{11}''' - \frac{3}{r^2} f_{11}'' + \frac{3}{r^3} f_{11}' - \frac{3}{r^4} f_{11} = 4 R_0^2 r (1-r^2) \quad (3.25)$$

ただし ' は  $r$  に関する常微分を示す。  $r=1$  での境界条件式

$$u_{11} = v_{11} = 0, \quad \text{すなわち} \quad f_{11} = f_{11}' = 0 \quad (3.26a)$$

を満足する、式(3.25)の解は

$$f_{11} = \frac{R_0}{288} r (1-r^2)^2 (4-r^2) \quad (3.27)$$

となる。上式より  $u_{11}$  を求め、式(3.23)に代入し、  $r=1$  での境界条件

$$w_{11} = 0 \quad (3.26b)$$

を考慮すれば  $w_{11}$  が求められる。以上のようにして求めた結果は

$$p_{11} = \frac{R_0^2}{12} r (3 - 6r^2 + 2r^4) \cos \varphi \sin \kappa x$$

$$u_{11} = \frac{R_0^2}{288} (1-r^2)^2 (4-r^2) \cos \varphi \sin \kappa x$$

$$\left. \begin{aligned} U_{11} &= -\frac{Re^2}{288}(1-r^2)(4-23r^2+7r^4) \sin \varphi \sin \kappa x \\ W_{11} &= Re r(1-r^2) \left\{ \frac{Re^2}{11520}(19-21r^2+9r^4-r^6) - \frac{\nu}{4} \right\} \cos \varphi \sin \kappa x \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

となる。

次に  $\kappa^2$  のオータの式は次式となる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r U_{12})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{12}}{\partial \varphi} + \frac{\partial W_{11}}{\partial x} = 0 \quad (3.29)$$

$$W_0 \frac{\partial U_{11}}{\partial x} = -\frac{\partial p_{12}}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_{12}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{12}}{\partial r} - \frac{U_{12}}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_{12}}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_{12}}{\partial \varphi} - W_0 \cos \varphi \cos \kappa x \quad (3.30)$$

$$W_0 \frac{\partial V_{11}}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p_{12}}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 V_{12}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{12}}{\partial r} - \frac{V_{12}}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_{12}}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_{12}}{\partial \varphi} + W_0 \sin \varphi \cos \kappa x \quad (3.31)$$

$$U_{12} \frac{\partial W_0}{\partial r} + W_0 \frac{\partial W_{11}}{\partial x} = -\frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial^2 W_{12}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_{12}}{\partial \varphi^2} \quad (3.32)$$

境界条件は

$$r=1; \quad U_{12} = V_{12} = W_{12} = 0 \quad (3.33)$$

である。こゝでも関数  $\varphi_{12}$  を用い、 $f_{12}$  を  $r$  のみの関数として

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{12} &= f_{12}(r) \sin \varphi \cos \kappa x \\ U_{12} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \varphi} - Re \left\{ \frac{Re^2}{11520} \left( \frac{r^{10}}{11} - \frac{10}{9} r^8 + \frac{30}{7} r^6 - 8r^4 + \frac{19}{3} r^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} \left( \frac{r^4}{5} - \frac{r^2}{3} \right) \right\} \cos \varphi \cos \kappa x \\ V_{12} &= -\partial \varphi_{12} / \partial r \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

とすれば、連続の式(3.29)は満足される。式(3.30)および式(3.31)から  $p_{12}$  を消去し、式(3.33)を代入すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} & f_{12}'''' + \frac{2}{r} f_{12}''' - \frac{\nu}{r^2} f_{12}'' + \frac{\nu}{r^3} f_{12}' - \frac{\nu}{r^4} f_{12} \\ &= -Re^3 \left( \frac{49}{180} r - \frac{117}{126} r^3 + \frac{47}{54} r^5 - \frac{85}{396} r^7 \right) - \frac{16}{5} Re r \end{aligned} \quad (3.35)$$

境界条件を考慮して上式を解き、式(3.34)により  $u_{12}$  を求め、式(3.32)に代入して  $w_{12}$  を求め、以上のようにして求めた結果は次式となる。

$$\begin{aligned}
 p_{12} &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{-Re^2}{15966720} r (93324 - 11088r^2 + 83160r^4 - 27720r^6 \right. \\
 &+ 2772r^8) + \frac{1}{6} (1 - 3r^2) \left. \right\} \cos \varphi \cos \kappa x \\
 u_{12} &= -\operatorname{Re} (1 - r^2)^2 \left\{ \frac{Re^2}{15966720} (3003 - 3465r^2 + 1617r^4 - 231r^6) \right. \\
 &+ \frac{1}{6} \left. \right\} \cos \varphi \cos \kappa x \\
 v_{12} &= \operatorname{Re} (1 - r^2) \left\{ \frac{Re^2}{15966720} (3003 - 51744r^2 + 61446r^4 \right. \\
 &- 28644r^6 + 3927r^8) + \frac{1}{12} (2 - r^2) \left. \right\} \sin \varphi \cos \kappa x \\
 w_{12} &= -\frac{Re^2}{576} r (1 - r^2) \left\{ \frac{Re^2}{554400} (32659 - 48191r^2 + 35739r^4 \right. \\
 &- 14311r^6 + 3014r^8 - 220r^{10}) - (7 - 5r^2 + 3r^4) \left. \right\} \cos \varphi \cos \kappa x
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

式(3.36)は後述する遅れを示す項である。また式(3.28)と式(3.36)とから  $\kappa$  によって展開して求めた解が収束する範囲は  $\kappa Re < 1$  であることがわかる。

次に  $x$  = 一定の断面での二次元流れ流線は  $dr/u_1 = r d\varphi/v_1$ 、つまり9次式により求めることができる。

$$\log \left| \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0} \right| = \int_{r_0}^r \frac{\frac{Re}{288} (4 - 23r^2 + 7r^4) \sin \kappa x + \kappa \left\{ \frac{Re^2}{15966720} (3003 - 51744r^2 \right.}{r(1 - r^2) \left[ \frac{Re}{288} (4 - r^2) \sin \kappa x - \kappa \left\{ \frac{Re^2}{15966720} (3003 - 3465r^2 \right. \right.} \\
 \left. \left. + 61446r^4 - 28644r^6 + 3927r^8) + \frac{1}{12} (2 - r^2) \right\} \cos \kappa x \right.}{\left. + 1617r^4 - 231r^6) + 1/6 \right\} \cos \kappa x} dr \tag{3.37}$$

## 3.2.3 管軸に沿う曲率の変化が任意の場合

次に任意の値の  $\kappa$  に対する解について述べる。この場合、式 (3.14) ~ (3.18) を解くため関数  $\psi_i$  を導入し、

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \{ f_s(r) \sin \kappa x + f_c(r) \cos \kappa x \} \sin \varphi \\ \psi_2 &= \{ g_s(r) \sin \kappa x + g_c(r) \cos \kappa x \} \cos \varphi \\ u_1 &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} \\ v_1 &= -\frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \kappa r (g_s \cos \kappa x - g_c \sin \kappa x) \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

と置けば、連続の式 (3.14) は満足される。ただし式 (3.38) において  $f_s, f_c, g_s, g_c$  はすべて  $r$  のみの関数である。式 (3.15) および (3.16) から  $p_i$  を消去し、式 (3.38) を代入して得られる式は  $\sin \kappa x \sin \varphi$  を含む項と  $\cos \kappa x \sin \varphi$  を含む項とに分けることができる。  $\kappa x$  および  $\varphi$  の任意の値に対してその式が成立するためには  $\sin \kappa x \sin \varphi$  でくくられる項および  $\cos \kappa x \sin \varphi$  でくくられる項のそれぞれが独立に成立しなければならぬことから、次の二つの式を得る。

$$\begin{aligned} & f_s'''' + \frac{2}{r} f_s''' - \frac{1}{r^2} (\nu + \kappa^2 r^2) f_s'' + \frac{1}{r^2} (\nu - \kappa^2 r^2) f_s' - \frac{1}{r^2} (\nu - \kappa^2 r^2) f_s \\ & - \kappa r \left\{ g_c'' + \frac{5}{r} g_c' + \frac{1}{r^2} (2 - \kappa^2 r^2) g_c - \frac{2}{r^2} (1 + \kappa^2 r^2) g_c \right\} \\ & + \kappa \operatorname{Re} \left[ \left\{ (1 - r^2) f_c'' + \frac{1}{r} (1 - \nu r^2) f_c' - \frac{1}{r^2} (1 - r^2) f_c \right\} \right. \\ & \left. + \kappa \left\{ r(1 - r^2) g_s' + 2(1 - 2r^2) g_s \right\} - 4\kappa \operatorname{Re} r(1 - r^2) \right] = 0 \quad (3.39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f_c'''' + \frac{2}{r} f_c''' - \frac{1}{r^2} (\nu + \kappa^2 r^2) f_c'' + \frac{1}{r^2} (\nu - \kappa^2 r^2) f_c' - \frac{1}{r^2} (\nu - \kappa^2 r^2) f_c \\ & + \kappa r \left\{ g_s'' + \frac{5}{r} g_s' + \frac{1}{r^2} (2 - \kappa^2 r^2) g_s - \frac{2}{r^2} (1 + \kappa^2 r^2) g_s \right\} \\ & - \kappa \operatorname{Re} \left[ \left\{ (1 - r^2) f_s'' + \frac{1}{r} (1 - \nu r^2) f_s' - \frac{1}{r^2} (1 - r^2) f_s \right\} \right. \\ & \left. - \kappa \left\{ r(1 - r^2) g_c' + 2(1 - 2r^2) g_c \right\} - 2\kappa^2 r \right] = 0 \quad (3.40) \end{aligned}$$

また同様にして式(3.16)および(3.17)から $\rho_1$ を消去して次の二式を得る.

$$\begin{aligned} & \kappa r \left\{ f_a'' + \frac{1}{r} f_a' - \frac{1}{r^2} (2 + \kappa^2 r^2) f_a + \frac{2}{r^3} f_a \right\} - \left\{ (1 + \kappa^2 r^2) g_c'' \right. \\ & + \frac{1}{r} (1 + 3\kappa^2 r^2) g_c' - \frac{1}{r^2} (1 + \kappa^2 r^2)^2 g_c \left. \right\} + \operatorname{Re} \left[ \kappa^2 r (1 - r^2) f_c' - 2 f_c \right. \\ & \left. + \kappa (1 - r^2) (1 + \kappa^2 r^2) g_a + \kappa^2 \operatorname{Re} r (1 - r^2)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} & \kappa r \left\{ f_c'' + \frac{1}{r} f_c' - \frac{1}{r^2} (2 + \kappa^2 r^2) f_c + \frac{2}{r^3} f_c \right\} + \left\{ (1 + \kappa^2 r^2) g_a'' \right. \\ & + \frac{1}{r} (1 + 3\kappa^2 r^2) g_a' - \frac{1}{r^2} (1 + \kappa^2 r^2)^2 g_a \left. \right\} - \operatorname{Re} \left[ \kappa^2 r (1 - r^2) f_a' - 2 f_a \right. \\ & \left. - \kappa (1 - r^2) (1 + \kappa^2 r^2) g_c + \kappa^2 r \{ 6 + \kappa^2 (1 - r^2) \} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

式(3.41)および(3.42)を $r$ で微分して, それぞれ式(3.39)および(3.40)から引いて $f_a$ および $f_c$ の4階微分の項を消去する. このようにして, 結局計算すべき式として次の四式を得る.

$$\begin{aligned} & f_a'' + \frac{1}{r} f_a' - \frac{1}{r^2} (2 + \kappa^2 r^2) f_a + \frac{2}{r^3} f_a - \frac{1}{\kappa r} \left\{ (1 + \kappa^2 r^2) g_c'' + \frac{1}{r} (1 + 3\kappa^2 r^2) g_c' \right. \\ & - \frac{1}{r^2} (1 + \kappa^2 r^2)^2 g_c \left. \right\} + \operatorname{Re} \left[ \kappa (1 - r^2) f_c' - \frac{2}{\kappa r} f_c + \frac{1}{r} (1 - r^2) (1 + \kappa^2 r^2) g_a \right. \\ & \left. + \kappa^2 \operatorname{Re} (1 - r^2)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} & f_c'' + \frac{1}{r} f_c' - \frac{1}{r^2} (2 + \kappa^2 r^2) f_c + \frac{2}{r^3} f_c + \frac{1}{\kappa r} \left\{ (1 + \kappa^2 r^2) g_a'' + \frac{1}{r} (1 + 3\kappa^2 r^2) g_a' \right. \\ & - \frac{1}{r^2} (1 + \kappa^2 r^2)^2 g_a \left. \right\} - \operatorname{Re} \left[ \kappa (1 - r^2) f_a' - \frac{2}{\kappa r} f_a - \frac{1}{r} (1 - r^2) (1 + \kappa^2 r^2) g_c \right. \\ & \left. + \kappa \{ 6 + \kappa^2 (1 - r^2) \} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} & g_a'' + \frac{1}{r} g_a' - \frac{1}{r^2} (2 + \kappa^2 r^2) g_a + \frac{2}{r^3} (1 + \kappa^2 r^2) g_a + \frac{\kappa}{r} \left\{ f_c'' + \frac{1}{r} f_c' \right. \\ & - \frac{1}{r^2} (1 + \kappa^2 r^2) f_c \left. \right\} + \operatorname{Re} \left[ 2 f_a' - \frac{\kappa^2}{r} (1 - r^2) f_a + \kappa (1 - r^2) g_c' - 2 \kappa r g_c \right. \\ & \left. - \kappa^2 \{ 6 + \kappa^2 (1 - r^2) \} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned}
& g_c''' + \frac{1}{r} g_c'' - \frac{1}{r^2} (2 + \kappa^2 r^2) g_c' + \frac{2}{r^3} (1 + \kappa^2 r^2) g_c - \frac{\kappa}{r} \left\{ f_a'' + \frac{1}{r} f_a' \right. \\
& \left. - \frac{1}{r^2} (1 + \kappa^2 r^2) f_a \right\} + \text{Re} \left[ 2 f_c' - \frac{\kappa^2}{r} (1 - r^2) f_c - \kappa (1 - r^2) g_a' + 2 \kappa r g_a \right. \\
& \left. - \kappa^3 \text{Re} (1 - r^2)^2 \right] = 0 \quad (3.46)
\end{aligned}$$

境界条件は  $r=1$  で  $u_1 = v_1 = w_1 = 0$  より

$$f_a = f_a' = f_c = f_c' = g_a = g_c = 0 \quad (3.47)$$

である。式(3.43)~(3.46)を連立して式(3.47)の条件のもとに数値積分によって解くのであるが、上式は数値積分の際に  $r=0$  で特異性をもつので、その近傍で

$$\left. \begin{aligned}
f_a &= \sum_n a_{an} r^n, & f_c &= \sum_n a_{cn} r^n \\
g_a &= \sum_n b_{an} r^n, & g_c &= \sum_n b_{cn} r^n
\end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

のように  $r$  のべき級数で展開する。式(3.48)を式(3.43)~(3.46)に代入し、 $r$  の同じべきの項を集めることにより式(3.48)の係数  $a_{an}, a_{cn}, b_{an}, b_{cn}$  を決める式が得られる。その結果

$$a_{an} = a_{cn} = b_{an} = b_{cn} = 0 \quad (n=0, 2, 4, \dots)$$

となり、さらに  $a_{a1}, a_{c1}, b_{a1}, b_{c1}$  の四つの係数および  $a_{a2}, a_{c2}, b_{a2}, b_{c2}$  のうちの任意の二つ、計6個の係数が未定となり、他はこれらの6個の未定係数を用いて順次求めることができる。いま  $a_{a1}, a_{c1}, b_{a1}, b_{c1}, a_{a2}, a_{c2}$  の6個を未定係数に選んで  $n=9$  まで求めた結果は次式となる。

$$\left. \begin{aligned}
& a_{a1} : \text{未定} \\
& a_{a3} : \text{未定} \\
& a_{a5} = (1/192) [8\kappa^2 a_{a3} + 40\kappa b_{c3} - 3\kappa^3 b_{c1} \\
& + \kappa \text{Re} (2a_{c1} - 8a_{c3} - 3\kappa b_{a1} + 4\kappa \text{Re})] \\
& a_{a7} = (1/1152) [24\kappa^2 a_{a5} + 168\kappa b_{c5} - 5\kappa^3 b_{c3} \\
& + \kappa \text{Re} \{14a_{c3} - 24a_{c5} + 5\kappa (b_{a1} - b_{a3}) - 4\kappa \text{Re}\}] \\
& a_{a9} = (1/3840) [48\kappa^2 a_{a7} + 432\kappa b_{c7} - 7\kappa^3 b_{c5}
\end{aligned} \right\} \quad (3.49a)$$

$$\begin{aligned}
 & +X\text{Re}\{34a_{c5} - 48a_{c7} + 7\kappa(b_{a0} - b_{a5})\}] \\
 & a_{c1} : \text{未定} \\
 & a_{c3} : \text{未定} \\
 & a_{c5} = (1/192)[8\kappa^2 a_{c3} - 40\kappa b_{a0} + 3\kappa^3 b_{a1} \\
 & -X\text{Re}(2a_{a1} - 8a_{a3} + 3\kappa b_{c1} + 2\kappa^2)] \\
 & a_{c7} = (1/1152)[24\kappa^2 a_{c5} - 168\kappa b_{a5} + 5\kappa^3 b_{a0} \\
 & -X\text{Re}\{14a_{a3} - 24a_{a5} - 5\kappa(b_{c1} - b_{c3})\}] \\
 & a_{c9} = (1/3840)[48\kappa^2 a_{c7} - 432\kappa b_{a7} + 7\kappa^3 b_{a5} \\
 & -X\text{Re}\{34a_{a5} - 48a_{a7} - 7\kappa(b_{c3} - b_{c5})\}]
 \end{aligned} \tag{3.49b}$$

$$\begin{aligned}
 & b_{a1} : \text{未定} \\
 & b_{a3} = (1/8)[-8\kappa a_{c3} + \kappa^3 a_{c1} - \kappa^2 b_{a1} \\
 & +\text{Re}\{(\kappa^2 - 2)a_{a1} - \kappa b_{c1} + \kappa^2(\kappa^2 + 6)\}] \\
 & b_{a5} = (1/24)[-72\kappa a_{c5} + 3\kappa^3 a_{c3} + \kappa^4 b_{a1} - 13\kappa^2 b_{a0} \\
 & +\text{Re}\{13\kappa^2 - 2)a_{a3} - \kappa^2 a_{a1} + \kappa(1 - \kappa^2)b_{c1} - \kappa b_{c3} - \kappa^4\}] \\
 & b_{a7} = (1/48)[-240\kappa a_{c7} + 5\kappa^3 a_{c5} + \kappa^4 b_{a3} - 33\kappa^2 b_{a5} \\
 & +\text{Re}\{(5\kappa^2 - 2)a_{a5} - 3\kappa^2 a_{a3} + \kappa^3 b_{c1} + \kappa(1 - \kappa^2)b_{c3} - \kappa b_{c5}\}] \\
 & b_{a9} = (1/80)[-560\kappa a_{c9} + 7\kappa^3 a_{c7} + \kappa^4 b_{a5} - 61\kappa^2 b_{a7} \\
 & +\text{Re}\{(7\kappa^2 - 2)a_{a7} - 5\kappa^2 a_{a5} + \kappa^3 b_{c3} + \kappa(1 - \kappa^2)b_{c5} - \kappa b_{c7}\}]
 \end{aligned} \tag{3.49c}$$

$$\begin{aligned}
 & b_{c1} : \text{未定} \\
 & b_{c3} = (1/8)[8\kappa a_{a3} - \kappa^3 a_{a1} - \kappa^2 b_{c1} \\
 & +\text{Re}\{(\kappa^2 - 2)a_{c1} + \kappa b_{a1} + \kappa^3 \text{Re}\}] \\
 & b_{c5} = (1/24)[72\kappa a_{a5} - 3\kappa^3 a_{a3} + \kappa^4 b_{c1} - 13\kappa^2 b_{c3} \\
 & +\text{Re}\{13\kappa^2 - 2)a_{c3} - \kappa^2 a_{c1} - \kappa(1 - \kappa^2)b_{a1} + \kappa b_{a3} - 2\kappa^3 \text{Re}\}] \\
 & b_{c7} = (1/48)[240\kappa a_{a7} - 5\kappa^3 a_{a5} + \kappa^4 b_{c3} - 33\kappa^2 b_{c5} \\
 & +\text{Re}\{(5\kappa^2 - 2)a_{c5} - 3\kappa^2 a_{c3} - \kappa^3 b_{a1} - \kappa(1 - \kappa^2)b_{a3} + \kappa b_{a5} + \kappa^3 \text{Re}\}] \\
 & b_{c9} = (1/80)[560\kappa a_{a9} - 7\kappa^3 a_{a7} + \kappa^4 b_{c5} - 61\kappa^2 b_{c7} \\
 & +\text{Re}\{(7\kappa^2 - 2)a_{c7} - 5\kappa^2 a_{c5} - \kappa^3 b_{a3} - \kappa(1 - \kappa^2)b_{a5} + \kappa b_{a7}\}]
 \end{aligned} \tag{3.49d}$$

そして6個の未定係数は  $r=1$  での6個の条件式(3.47)を満足する。

うな組合せとして決まる。具体的には、 $r=1$ での  $f_0, f_1, f_2, f_3, g_0$  および  $g_1$  の値をこれらの6個の未定係数の関数と考え、代数方程式の根を求めるときに用いる多元ニュートン法を応用して反復計算を行う。その際必要となる微係数  $\partial f_0 / \partial \alpha_0$  などには次の方法<sup>(9)</sup> を応用することによって求めることができる。いま簡単のため、一変数  $\alpha$  から成る関数  $K(\alpha)$  を例にとり、 $K(\alpha) = 0$  を満足する  $\alpha$  を求める場合について述べる。まず  $\alpha$  の初期推定値  $\alpha_0$  を任意に決めて計算を行う。ここでは一般に  $K(\alpha_0) \neq 0$  とはならないので、微小量  $\Delta\alpha_0$  を任意に決めて  $K(\alpha_0 + \Delta\alpha_0)$  の計算を行う。ここでも一般に  $K(\alpha_0 + \Delta\alpha_0) \neq 0$  であるが、テイラー展開すれば、

$$K(\alpha_0 + \Delta\alpha_0) = K(\alpha_0) + \left. \frac{\partial K}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \Delta\alpha_0$$

となり

$$\left. \frac{\partial K}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} = \frac{K(\alpha_0 + \Delta\alpha_0) - K(\alpha_0)}{\Delta\alpha_0} \quad (3.50)$$

を得る。 $K(\alpha_0 + \Delta\alpha_0) = 0$  とするのための補正量  $\Delta\alpha_0$  は、ふたたびテイラー展開を応用して

$$K(\alpha_0 + \Delta\alpha_0) = K(\alpha_0) + \left. \frac{\partial K}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \Delta\alpha_0 = 0$$

より

$$\Delta\alpha_0 = -K(\alpha_0) / \left. \frac{\partial K}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \quad (3.51)$$

として求められる。式(3.51)の  $\left. \frac{\partial K}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0}$  は式(3.50)によって求められる値を用いる。実際には式(3.50)と(3.51)の反復によって根を求める。

数値積分は  $r=0$  から  $r=0.05$  までを級数展開法で、 $r=0.05$  から  $r=1$  まで積分区間も  $0.005$  として Runge-Kutta-Gill 法で行った。

### 3.2.4 管軸の曲りが平均流量に及ぼす影響

さて式(3.28)の $P_1$ および式(3.36)の $P_2$ を見ればわかるように、管軸の曲りが管の圧力損失に及ぼす影響は $Q^1$ のオーダーでは現れない。圧力損失について調べるためには $Q^2$ のオーダーの流れについて解析しなければならぬ。ふたたび $\kappa \ll 1$ の場合を考え、式(3.7)~(3.10)から $Q^2$ のオーダーの式を求め、 $\kappa$ で1回微分するごとに $\kappa$ の次数が1ずつ増すことを考慮して $\kappa^4$ のオーダーまで残して次式を得る。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rU_2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \varphi} + \kappa^4 (U_{11} \cos \varphi - V_{11} \sin \varphi) \sin \kappa x = 0 \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} & \kappa^4 \left[ U_{11} \frac{\partial U_{11}}{\partial r} + \frac{V_{11}}{r} \frac{\partial U_{11}}{\partial \varphi} - \frac{V_{11}^2}{r} + \omega_0 (r \omega_0 \cos \varphi \sin \kappa x - 2 \omega_{11}) \cos \varphi \sin \kappa x \right] \\ &= -\frac{\partial P_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_2}{\partial r} - \frac{U_2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_2}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_2}{\partial \varphi} \\ &+ \kappa^4 \left\{ \frac{\partial U_{11}}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial U_{11}}{\partial \varphi} - V_{11} \right) \sin \varphi \right\} \sin \kappa x \quad (3.53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \kappa^4 \left[ U_{11} \frac{\partial V_{11}}{\partial r} + \frac{V_{11}}{r} \frac{\partial V_{11}}{\partial \varphi} + \frac{U_{11} V_{11}}{r} - \omega_0 (r \omega_0 \cos \varphi \sin \kappa x - 2 \omega_{11}) \sin \varphi \sin \kappa x \right] \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial r} - \frac{V_2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_2}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} \\ &+ \kappa^4 \left\{ \frac{\partial V_{11}}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_{11}}{\partial \varphi} + U_{11} \right) \sin \varphi \right\} \sin \kappa x \quad (3.54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \kappa^4 \left[ U_{11} \frac{\partial \omega_{11}}{\partial r} + \frac{V_{11}}{r} \frac{\partial \omega_{11}}{\partial \varphi} + \left\{ r U_{11} \left( \frac{\omega_0}{r} - \frac{\partial \omega_0}{\partial r} \right) \cos \varphi - V_{11} \omega_0 \sin \varphi \right\} \sin \kappa x \right] \\ &+ U_2 \frac{\partial \omega_0}{\partial r} = -\frac{\partial P_2}{\partial x} - \kappa^2 \left( \nu \kappa^2 r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \kappa x - \frac{1}{2} \cos^2 \kappa x \right) \frac{\partial P_0}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial \varphi^2} - \kappa^4 \left\{ r \left( \frac{\partial^2 \omega_{11}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega_{11}}{\partial \varphi^2} \right) \cos \varphi \right. \\ &\left. + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_{11}}{\partial \varphi} \sin \varphi \right\} \sin \kappa x + \kappa^4 \left\{ r^2 \left( \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_0}{\partial r} \right) \cos^2 \varphi - \omega_0 \right\} \sin^2 \kappa x \quad (3.55) \end{aligned}$$

いま  $\partial P / \partial x$  を直管の場合と同じにしたときの平均流量の変化を求めよことを考える。  $dA = (1 + \kappa^2 Q^2 \cos^2 \kappa x)^{1/2} dx$  であるが、いま考え

ているのは  $a \ll 1$ ,  $\kappa \ll 1$  の場合であるから, 上式から

$$dx/ds = 1 - \kappa^2 a^2 \cos^2 \kappa x / 2$$

とすると,  $\partial P / \partial s$  は

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial s} = & \frac{\partial P_0}{\partial s} + a(\kappa^2 \frac{\partial P_{11}}{\partial s} + \kappa^3 \frac{\partial P_{12}}{\partial s} + \kappa^4 \frac{\partial P_{13}}{\partial s} + \dots) \\ & + a^2(\kappa^2 \frac{\partial P_{21}}{\partial s} + \kappa^3 \frac{\partial P_{22}}{\partial s} + \kappa^4 \frac{\partial P_{23}}{\partial s} + \dots) + \dots \end{aligned}$$

と展開でき, 一方  $\partial P / \partial s = (\partial P / \partial x)(dx/ds)$  であるから

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial s} = & \frac{dx}{ds} \left[ \frac{\partial P_0}{\partial x} + a(\kappa^2 \frac{\partial P_{11}}{\partial x} + \kappa^3 \frac{\partial P_{12}}{\partial x} + \kappa^4 \frac{\partial P_{13}}{\partial x} + \dots) \right. \\ & \left. + a^2(\kappa^2 \frac{\partial P_{21}}{\partial x} + \kappa^3 \frac{\partial P_{22}}{\partial x} + \kappa^4 \frac{\partial P_{23}}{\partial x} + \dots) + \dots \right] \end{aligned}$$

とすると,  $dx/ds$  を代入し, 上の二つの式の各項を比較することにより,

下記の関係を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P_0}{\partial s} = \frac{\partial P_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial P_{11}}{\partial s} = \frac{\partial P_{11}}{\partial x}, \quad \frac{\partial P_{12}}{\partial s} = \frac{\partial P_{12}}{\partial x}, \quad \dots \\ \frac{\partial P_{21}}{\partial s} = \frac{\partial P_{21}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial P_0}{\partial x} \cos^2 \kappa x, \quad \frac{\partial P_{22}}{\partial s} = \frac{\partial P_{22}}{\partial x}, \quad \frac{\partial P_{23}}{\partial s} = \frac{\partial P_{23}}{\partial x}, \quad \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

に直管と曲管とにおいて管軸に沿う長さの等しい2点間の圧力降下をたがいに同じにするとき, すなわち  $\partial P / \partial s = \partial P_0 / \partial s$  とするときの流量を求めよ。式(3.28)の  $P_{11}$  および式(3.26)の  $P_{12}$  は管軸方向に周期的に変化し, 圧力降下を生じない。そこで  $\partial P / \partial s = \partial P_0 / \partial s$  とするためには, 式(3.56)から  $\partial P_{21} / \partial s = 0$ , すなわち

$$-\frac{\partial P_{21}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial P_0}{\partial x} \cos^2 \kappa x = 0 \quad (3.57)$$

とあらなければならない。

さて式(3.54)はすべての項が  $\sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \kappa x = \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sin^2 \kappa x$  を含む形で表現できる。そこで  $\psi$  は次式で表わされる。よって式(3.57)

を考慮して式(3.53)および(3.55)の場合も同様に考えれば解は

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= \{I_1(r) \cos 2\varphi + J(r)\} \kappa^4 \sin^2 \kappa x \\ v_2 &= I_2(r) \sin 2\varphi \cdot \kappa^4 \sin^2 \kappa x \\ w_2 &= \{H_1(r) \cos 2\varphi + H_2(r)\} \kappa^4 \sin^2 \kappa x \end{aligned} \right\} \quad (3.58)$$

の形であることがわかる。ここで  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $H_1$  および  $H_2$  はすべて  $r$  のみの関数である。これらのうち平均流量に関与するのは  $H_2(r)$  である。式(3.52)から

$$J(r) = -(Re^2/576)r(1-r^2)^2(4-r^2) \quad (3.59)$$

となる。式(3.59)を式(3.55)の  $u_2$  に代入して  $H_2(r)$  を求めると

$$\begin{aligned} H_2(r) &= \frac{\kappa^4 Re}{32 \times 144^2} \left[ Re^4 \left( -\frac{12357}{67200} + \frac{19}{20} r^2 - \frac{331}{160} r^4 + \frac{99}{40} r^6 - \frac{569}{320} r^8 + \frac{157}{200} r^{10} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{33}{160} r^{12} + \frac{1}{35} r^{14} - \frac{1}{640} r^{16} \right) + Re^2 \left( -\frac{2664}{25} + \frac{378}{5} r^2 + 126 r^4 - 144 r^6 + 54 r^8 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{126}{25} r^{10} \right) - \frac{1}{64} (3 - 14 r^2 + 11 r^4) \right] \quad (3.60) \end{aligned}$$

となる。  $\sin^2 \kappa x = (1 - \cos 2\kappa x)/2$  であるから平均無次元流量は

$$\begin{aligned} F_c &= 2\pi \int_0^1 r \left\{ Re(1-r^2) + \frac{\kappa^4 a^2}{2} H_2(r) \right\} dr \\ &= \pi \left[ \frac{1}{2} Re + \kappa^4 a^2 \int_0^1 r H_2(r) dr \right] \end{aligned}$$

であり、直管の平均無次元流量  $F_0 = (\pi/2) Re$  との比で示すと

$$\begin{aligned} F_c/F_0 &= 1 - \kappa^4 a^2 \left[ 2(Re^2/576)^2 (0.03058) \right. \\ &\quad \left. + 2(Re/576)^2 (128.4) - 0.01042 \right] \quad (3.61) \end{aligned}$$

となる。

### 3.2.5 数値例および議論

以上求めた結果から  $\kappa Re \ll 1$  の場合には式(3.28)および(3.36)を用い、 $\kappa Re$  が小さくない場合には式(3.43)~(3.47)の数値積分を行って計算した結果を示す。なお  $\kappa Re \ll 1$  では摂動展開して求めた



小さいときにはかえって流量が増すが、この現象も上述の理由により説明される。 $Re$ が大きくなるとしにがって遠心力の効果が増加し、軸流速度は曲りの外側で大きくなる(図3.3)。

それと同時に軸方向の慣性も大きくなり、速度分布の管軸方向の変化が管軸の変化に対して遅れてくる。たとえば図3.2(b)では $\kappa x = 0^\circ$ ではまだ前方の影響が残り、 $\kappa x = 30^\circ$ 付近で $w_1$ が0に近づく。また $w_1$ が最大となるのは曲率最大となる $\kappa x = 90^\circ$ ではなく、図には示されていないが、 $\kappa x = 120^\circ$ 付近である。したがってだいたい $30^\circ$ くらいの遅れが存在する。

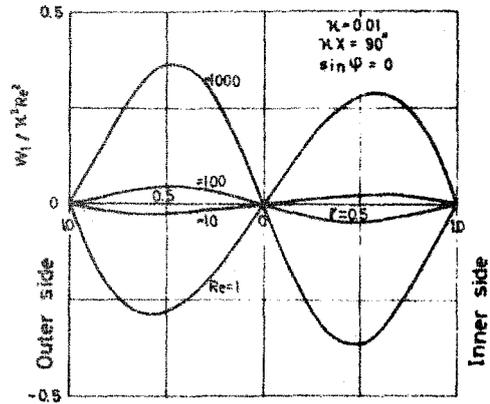


図3.3 軸流速度分布 ( $Re$ の影響)

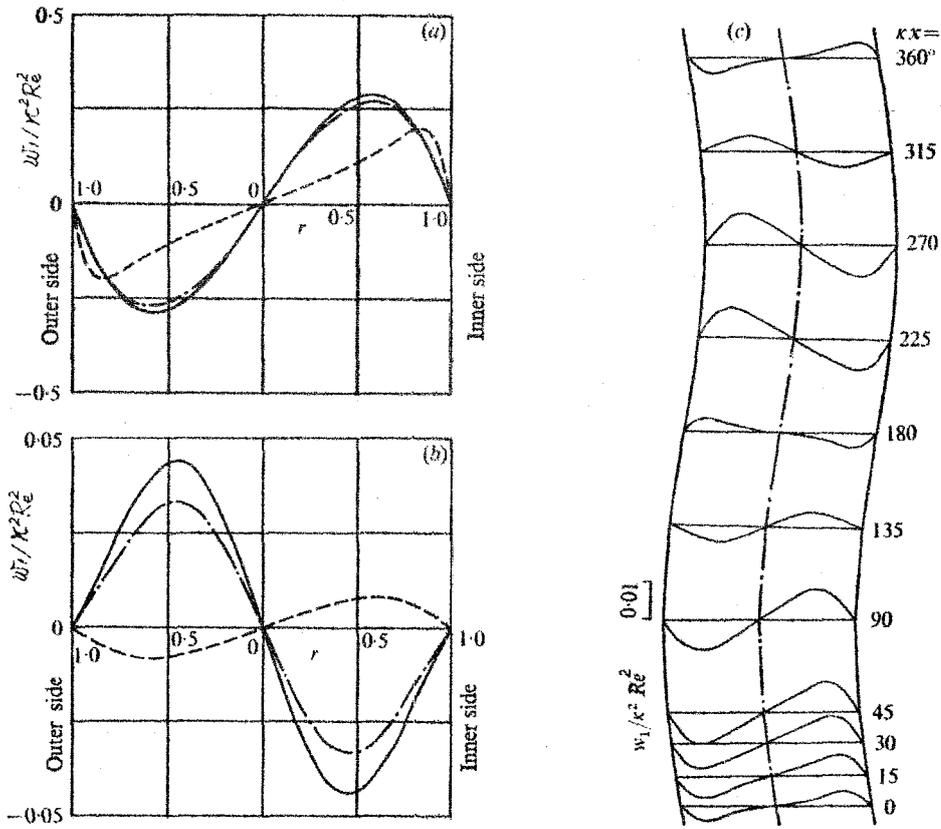


図3.4 軸流速度分布に及ぼす $\kappa$ の影響。  $\kappa x = 90^\circ$ ,  $\sin \phi = 0$ . (a)  $Re = 1$   $\kappa = 10.0$  は 10 倍されている。 (b)  $Re = 100$ . (c)  $Re = 100$ ,  $\kappa = 1.0$

$\kappa$	(a)	0.1	1.0	10.0
	(b)	0.01	0.1	1.0

図3.4 (a)は  $Re=1$  の場合について  $\kappa$  の影響について示したものである。  $\kappa \leq 1$  ではほとんど差がなく、  $\kappa=1$  でわずかに差が出てくる。  $\kappa=10$  になるとたけのピッチが過小になり、その影響は壁面近くで大きくなり、図のような速度分布を示す。(b)は  $Re=100$  の場合の  $\kappa$  の影響を示したものである。この場合には  $\kappa$  が増すにしたがい遅れが顕著となり、  $\kappa=1$  では曲率最大となる  $\kappa\alpha=90^\circ$  では、  $w$  は曲りの内側で大きくなっている。この場合には遅れが  $165^\circ$  くらいとなり、  $\kappa\alpha=75^\circ$  付近で  $w$  が最大となり、  $\kappa\alpha=90^\circ$  では曲りの外向きに働く遠心力で前方の偏りが打ち消される途中である(図3.4 (c))。

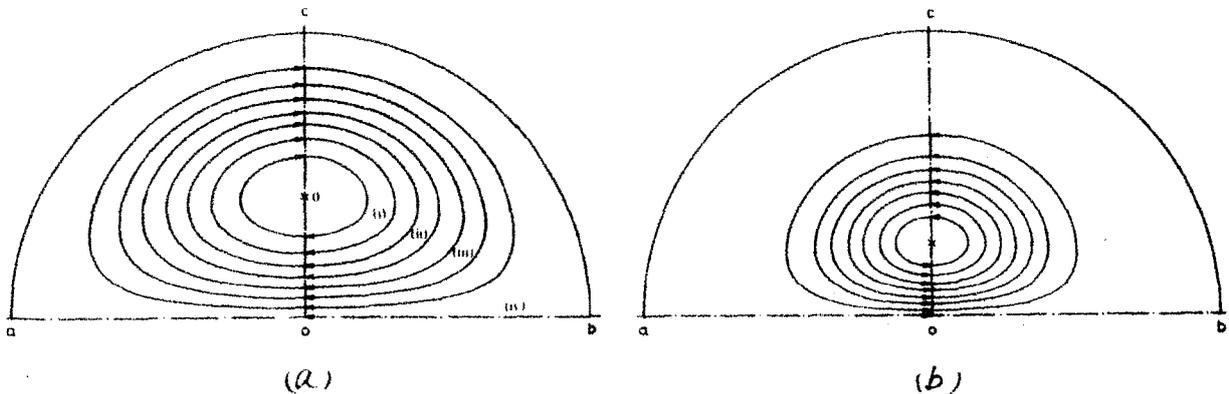
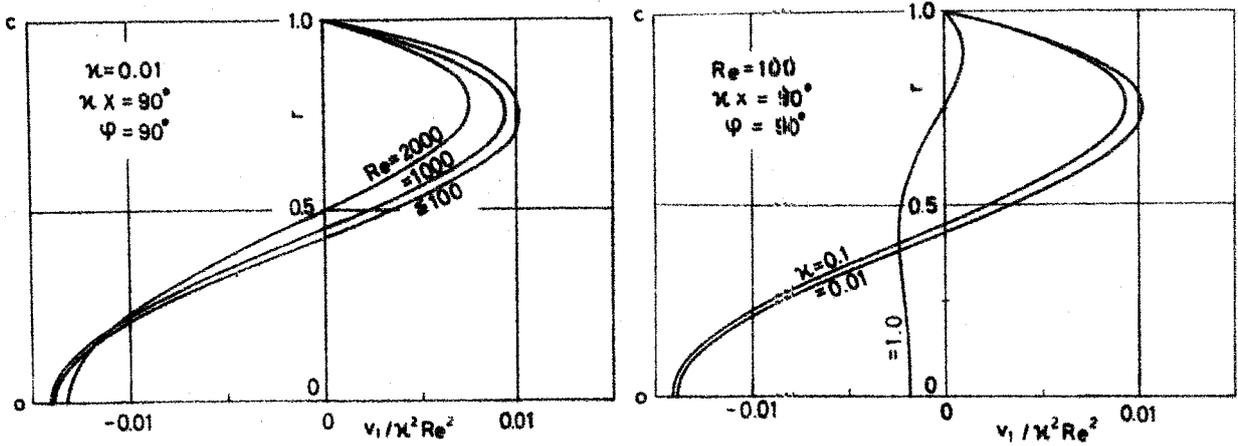


図3.5 二次流れ流線。  $Re=100$ ,  $\kappa=0.01$ 。(a)  $\kappa\alpha=90^\circ$ ; (i)  $q/\kappa\alpha R^2 = 0.0946 \times 10^{-2}$ , (ii)  $0.1892$ , (iii)  $0.2838$ , (iv)  $0.3784$ 。(b)  $\kappa\alpha=0^\circ$

図3.5は式(3.37)により計算した断面内二次流れ流線である。図は  $r=0$  と二次流れ中心との間の流量を8等分する点を通る流線である。(a)は  $\kappa\alpha=90^\circ$  の断面であり、ここでは  $\cos \kappa\alpha=0$  となるため式(3.24)および(3.34)からわかるように、流線は同時に二次流れの等流量線となり、Dean<sup>(4)</sup>により求められたものと同じとなる。(b)は  $\kappa\alpha=0^\circ$  の断面での流線であり、この場合には等流量線とはならない。一般には連続の式(3.14)からわかるように、流線は等流量線とならず、  $\kappa$  のオーダーまで考えた場合には  $\cos \kappa\alpha=0$  の断面でのみ等流量線となる。

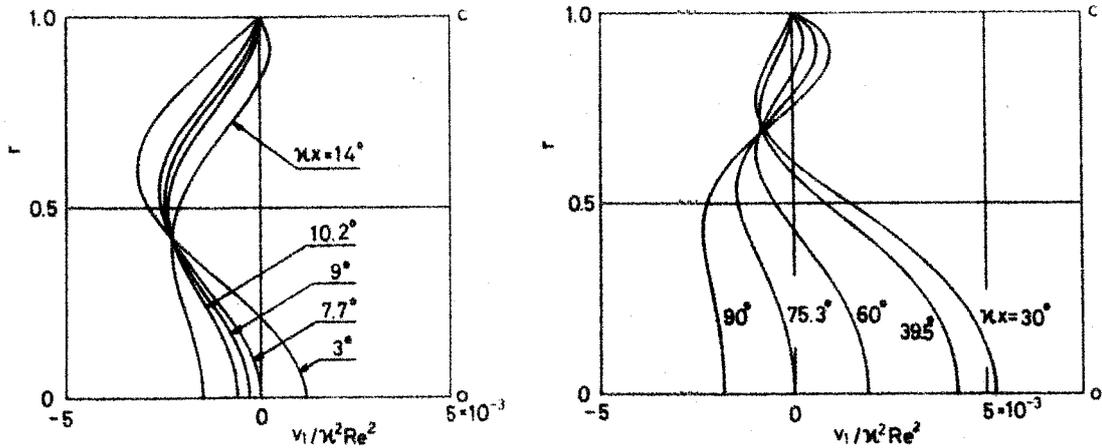
図3.6は図3.1 (b)のc-oにおける周方向速度分布を示したものである。(a)は  $Re$  の影響、(b)は  $\kappa$  の影響を示す。  $Re$  あるいは  $\kappa$  が小さいと二次流れ流量は断面内でつりあうが、それらが大きくなると遅



(a)  $Re$  の影響

(b)  $\kappa$  の影響

図 3.6 周方向流速分布



(a)  $\kappa = 0.01, Re = 1000.$

(b)  $\kappa = 1.0, Re = 100.$

図 3.7 二次流れの逆転域での周方向流速分布の軸方向変化,  $\varphi = 90^\circ.$

れのため断面内にはけではつりあわず、軸方向流量の変化といっしょにな  
って連続の式を満足するような流れとなる。

この外、に行管では管軸の曲りの方向が変わるため、二次流れの逆転  
現象が生じる。この逆転現象は

$$r = 0 ; \quad v_i = 0 \tag{3.62 a}$$

$$r = 0 ; \quad \partial v_i / \partial r = 0 \tag{3.62 b}$$

を満足する二つの断面の間で生ずる。これらの断面の位置および断面間  
の長さは  $\kappa$  と  $Re$  の値により異なる。まず  $\kappa \ll 1$  の場合について述べ  
る。図 3.7 (a) は  $\varphi = 90^\circ$  での  $v_i$  の分布を  $\kappa = 0.01, Re = 1000$  の場合  
について示したものである。逆転は  $\kappa x = 7.72^\circ$  と  $10.2^\circ$  の間で生じ

ている。この場合、式(3.62a)を満足する断面から逆転が始まるが、 $Re = 55.69$ より小さい $Re$ の場合には、式(3.62b)を満足する断面から始まる。この境の $Re = 55.69$ では式(3.62)の二つの式が同じ断面で満足され、逆転はその断面(たとえば $\kappa = 0.01$ の場合には $\kappa\alpha = 0.556^\circ$ )だけで完了する。また $\kappa = 0.01$ 、 $Re = 1$ の場合には、逆転は $\kappa\alpha = -1.14^\circ$ から $6.85^\circ$ の間で生じている。いずれの $Re$ の値においても $\kappa = 0.01$ のように $\kappa$ が小さい場合には図3.7(a)に示されるように逆転域内で二次流れは閉じた流線とはならず、軸方向流速の変化といっしょになつて連続の式を満たしている。次に $\kappa$ が大きい場合には、逆転域内の断面で二次流れは二つのうす水の流線を示すが、これらの流線もやはり等流量線とはならない。図3.7(b)は $\kappa = 1.0$ 、 $Re = 100$ の場合であり、逆転は $\kappa\alpha = 39.48^\circ$ と $75.25^\circ$ の間で生じている。

### 3.3 管軸に沿って曲率がゆっくり変化する曲りが1回および2回の曲管内層流

#### 3.3.1 曲りが1回の場合

§3.2.1と同じ座標系を用いると、管軸の形状は

$$y = a(1 + \kappa^2 x^2)^{1/2} \quad (3.63)$$

で与えられる(図3.8)、その曲率は

$$\kappa_c = \frac{\kappa^2 a}{(1 + \kappa^2 x^2)^{3/2} a^2} \quad (3.64)$$

となる。ただし

$$S = \{1 + \kappa^4 a^2 x^2 / (1 + \kappa^2 x^2)\}^{1/2}$$

である。直角座標と曲線座標は

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= x - \kappa^2 a x r \cos \varphi / \{(1 + \kappa^2 x^2)^{1/2} S\} \\ y_0 &= a(1 + \kappa^2 x^2)^{1/2} + r \cos \varphi / S \\ z_0 &= r \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (3.65)$$

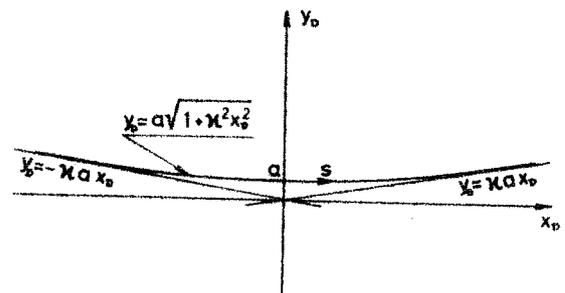


図3.8

で関係づけられ、

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = S^2 \left\{ 1 - \frac{\kappa^2 a r \cos \varphi}{(1 + \kappa^2 x^2)^{3/2} S^3} \right\}^2 \\ g^{ii} &= 1/g_{ii}, \quad (i=1, 2, 3) \\ g_{ij} &= g^{ij} = 0, \quad (i \neq j) \end{aligned} \right\} \quad (3.66)$$

となる。連続の式および運動方程式は式(3.7)~(3.10)で表現される。

ただし

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{33}^1 &= -S \kappa c \sqrt{g_{33}} \cos \varphi, \quad \Gamma_{33}^2 = \frac{S}{r} \kappa c \sqrt{g_{33}} \sin \varphi \\ \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 &= \frac{S}{\sqrt{g_{33}}} \kappa c \cos \varphi, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = -\frac{S}{\sqrt{g_{33}}} \kappa c r \sin \varphi \\ \Gamma_{33}^3 &= \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{g_{33}}) \end{aligned} \right\} \quad (3.67)$$

であり、他はだ行管の場合と同一である。なお式(3.67)の表現はだ行管の場合にも適用できる。

さてここでは管軸に沿って曲率がゆっくり変化する場合、すなわち  $\kappa \ll 1$  の場合について考え、直管内の流れからの擾動解を求めよ。式(3.7)~(3.10)を  $\kappa$  で展開し、

$$\left. \begin{aligned} p &= p_0 + \kappa^2 p_{.1} + \kappa^4 p_{.2} + \dots \\ u &= \kappa^2 u_{.1} + \kappa^4 u_{.2} + \dots \\ v &= \kappa^2 v_{.1} + \kappa^4 v_{.2} + \dots \\ w &= w_0 + \kappa^2 w_{.1} + \kappa^4 w_{.2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.68)$$

と置いて解を求めよ。

$\kappa^0$  のオーダーの流れは式(3.12)で示されるポアゾイユ流れとなる。

次に  $\kappa^2$  のオーダーの式は、 $x$  で微分するごとに  $\kappa$  の次数が1ずつ増すことを考慮すると

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r u_{.1})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{.1}}{\partial \varphi} = 0 \quad (3.69)$$

$$\frac{a w_0^2 \cos \varphi}{(1 + \kappa^2 x^2)^{3/2}} = -\frac{\partial p_{.1}}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_{.1}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_{.1}}{\partial r} - \frac{u_{.1}}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_{.1}}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_{.1}}{\partial \varphi} \quad (3.70)$$

$$\frac{a\omega_0^2 \sin \varphi}{(1+\kappa^2 x^2)^{5/2}} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \quad (3.71)$$

$$u_1 \frac{\partial \omega_0}{\partial r} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi^2} + \frac{6\text{Re} a r \cos \varphi}{(1+\kappa^2 x^2)^{5/2}} - \frac{2\text{Re} \kappa^2 a^2 x^2}{1+\kappa^2 x^2} \quad (3.72)$$

とす。上式の解は、行管の場合と全く同様にして求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -\frac{\text{Re}^2}{12} r(3-6r^2+2r^4) \frac{a \cos \varphi}{(1+\kappa^2 x^2)^{5/2}} - 2\text{Re} a^2 \left(x - \frac{1}{\kappa} \tan^{-1} \kappa x\right) \\ u_1 &= -\frac{\text{Re}^2}{288} (1-r^2)^2 (4-r^2) \frac{a \cos \varphi}{(1+\kappa^2 x^2)^{5/2}} \\ v_1 &= \frac{\text{Re}^2}{288} (1-r^2)(4-23r+7r^4) \frac{a \sin \varphi}{(1+\kappa^2 x^2)^{5/2}} \\ w_1 &= -\text{Re} r(1-r^2) \left\{ \frac{\text{Re}^2}{11520} (19-21r^2+9r^4-r^6) - \frac{\nu}{4} \right\} \frac{a \cos \varphi}{(1+\kappa^2 x^2)^{5/2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.73)$$

とす。

$\kappa^2$  のオ-ダの式は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r u_2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \quad (3.74)$$

$$\omega_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{\partial p_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{u_2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} - \frac{\nu \kappa a x \omega_0}{(1+\kappa^2 x^2)^{5/2}} \cos \varphi \quad (3.75)$$

$$\omega_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_2}{\partial r} - \frac{v_2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + \frac{\nu \kappa a x \omega_0}{(1+\kappa^2 x^2)^{5/2}} \sin \varphi \quad (3.76)$$

$$u_2 \frac{\partial \omega_0}{\partial r} + \omega_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial \varphi^2} \quad (3.77)$$

とす。その解は次式とす。

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= -\text{Re} \left\{ \frac{\text{Re}^2}{15966720} r(93324 - 11088r^2 + 83160r^4 - 27720r^6 \right. \\ &\quad \left. + 2772r^8) - \frac{1}{6} (1-3r^2) \right\} \frac{\nu \kappa a x \cos \varphi}{(1+\kappa^2 x^2)^{5/2}} \\ u_2 &= -\text{Re} (1-r^2) \left\{ \frac{\text{Re}^2}{15966720} (3003 - 3465r^2 + 1617r^4 - 231r^6) + \frac{1}{6} \right\} \frac{\nu \kappa a x \cos \varphi}{(1+\kappa^2 x^2)^{5/2}} \\ v_2 &= \text{Re} (1-r^2) \left\{ \frac{\text{Re}^2}{15966720} (3003 - 51744r^2 + 61446r^4 - 28644r^6 \right. \\ &\quad \left. + 3927r^8) + \frac{1}{12} (2-r^2) \right\} \frac{\nu \kappa a x \sin \varphi}{(1+\kappa^2 x^2)^{5/2}} \end{aligned} \right\}$$

$$\omega_2 = \frac{Re^2}{576} r(1-r^2) \left\{ \frac{Re^2}{554400} (32659 - 48191r^2 + 35739r^4 - 14311r^6) \right. \\ \left. + 3014r^8 - 220r^{10} - (7 - 5r^2 + 3r^4) \right\} \frac{3\kappa a \lambda \cos \varphi}{(1 + \kappa^2 x^2)^{5/2}} \quad (3.78)$$

二次流れ流線は式(3.73)および(3.78)の流速を用いて、式(3.27)と同様にして求めることができる。

### 3.3.2 曲りが2回の場合

管軸の形状は図3.9に示すように

$$y = a \tanh \kappa x \quad (3.79)$$

で表現され、その曲率は

$$\kappa_c = 2\kappa^2 a \operatorname{sech}^2 \kappa x \tanh \kappa x / S^3 \quad (3.80)$$

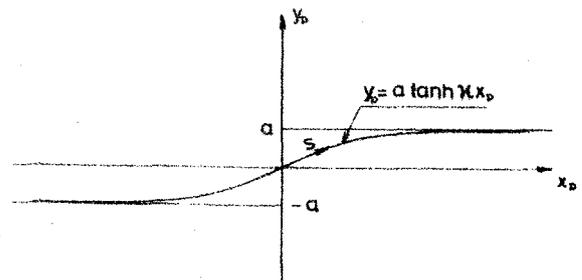


図3.9

となる。ここで

$$S = (1 + \kappa^2 a^2 \operatorname{sech}^4 \kappa x)^{1/2}$$

である。直角座標と曲線座標の間には

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= x - \kappa a r \cos \varphi \operatorname{sech}^2 \kappa x / S \\ y_0 &= a \tanh \kappa x + r \cos \varphi / S \\ z_0 &= r \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (3.81)$$

の関係があり、

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= 1, & g_{22} &= r^2 \\ g_{33} &= S^2 \left| 1 + \frac{2}{S^3} \kappa^2 a r \cos \varphi \operatorname{sech}^2 \kappa x \tanh \kappa x \right|^2 \\ g^{ii} &= 1/g_{ii} \quad (i=1, 2, 3) \\ g^{ij} &= g^{ji} = 0 \quad (i \neq j) \end{aligned} \right\} \quad (3.82)$$

となる。基礎式は式(3.7)~(3.10)において

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{33}^1 &= S \kappa_c \sqrt{g_{33}} \cos \varphi, & \Gamma_{33}^2 &= -\frac{S'}{r} \kappa_c \sqrt{g_{33}} \sin \varphi \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{12}^j &= \Gamma_{31}^j = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{g_{33}}} \kappa c \cos \varphi, & \Gamma_{23}^j &= \Gamma_{32}^j = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{g_{33}}} \kappa c r \sin \varphi \\ \Gamma_{33}^j &= \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{g_{33}}) \end{aligned} \right\} \quad (3.83)$$

とし、他は円行管と同一にして得られる。

ここでも  $\kappa \ll 1$  の場合を考え、§3.3.1と同様にして解を求め、 $\kappa^0$  のオーダーの流束はポアゾユ流束となる。 $\kappa^2$  のオーダーの連続の式は式(3.69)となり、運動方程式は式(3.70)~(3.72)において  $a/(1+\kappa^2 x^2)^{1/2}$  の代わりに  $-2a \operatorname{sech}^2 \kappa x \tanh \kappa x$ 、 $\kappa^2 a^2 x^2 / (1+\kappa^2 x^2)$  の代わりに  $a \operatorname{sech}^4 \kappa x$  と置き換えたものに等しい。解も  $p_1$  を除いて式(3.73)において  $a/(1+\kappa^2 x^2)^{1/2}$  の代わりに  $-2a \operatorname{sech}^2 \kappa x \tanh \kappa x$  と置き換えたものとなる。 $p_1$  は次式となる。

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{Re^2}{12} (\beta - 6\gamma^2 + 2\gamma^4) 2a \cos \varphi \operatorname{sech}^2 \kappa x \tanh \kappa x \\ &\quad - \frac{4}{3\kappa} Re a^2 \tanh \kappa x \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \kappa x\right) \end{aligned} \quad (3.84)$$

$\kappa^2$  のオーダーについては§3.3.1と全く同じであり、式(3.74)~(3.77)および式(3.78)において  $-\beta \kappa a x / (1+\kappa^2 x^2)^{1/2}$  の代わりに  $2a \operatorname{sech}^2 \kappa x (2 - \beta \operatorname{sech}^2 \kappa x)$  と置き換えることにより  $\kappa^2$  のオーダーの式および解が得られる。また二次流れ流線はこのようにして得られた流速を用いて、式(3.37)と同様にして求めることができる。

### 3.3.3 数値例および議論

以上のようにして得られた諸式を用いて計算した数値例を、まず双曲線管の場合から示す。図3.10は  $\kappa = 0.01$  の場合の軸流速度のポアゾユ流束からの偏差分  $w_0$  を示したものである。(a)は  $Re=1$ 、(b)は  $Re=100$  の場合であり、 $Re$  が小さいと流れは短いパスを流れ、 $Re$  の増加とともに遠心力の効果で曲りの外側に偏って流れる。また  $Re=100$  ではわずかながら遅れが生じている。

$\kappa x = 0$  においては  $-\beta \kappa a x / (1+\kappa^2 x^2)^{1/2} = 0$  となり、この断面

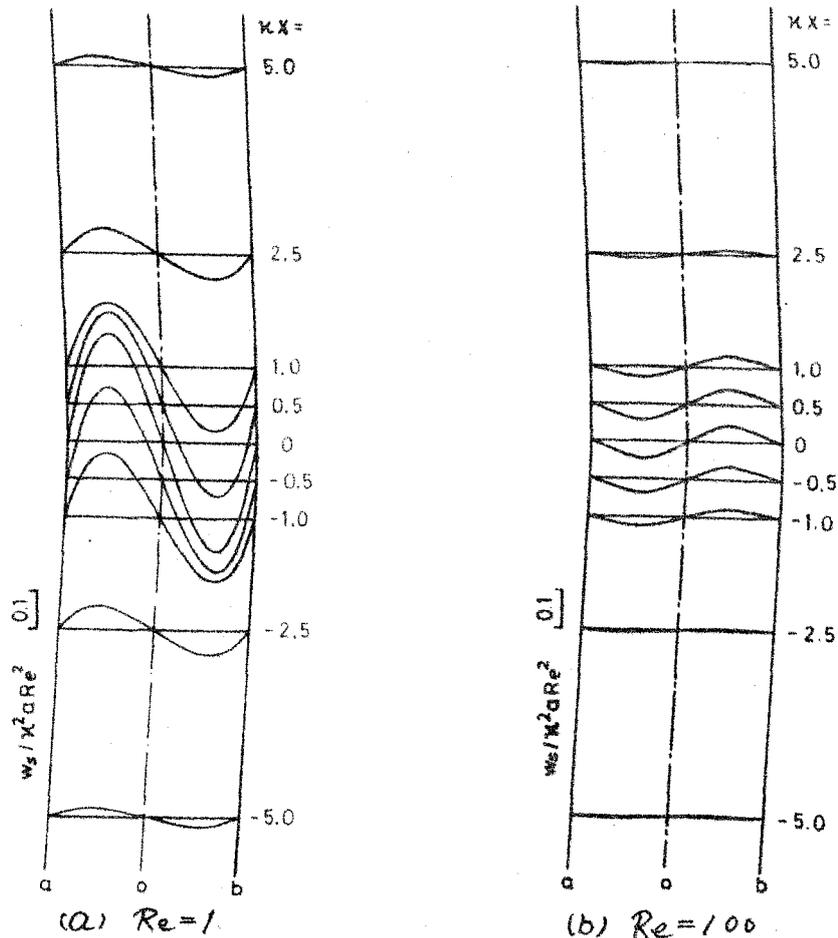


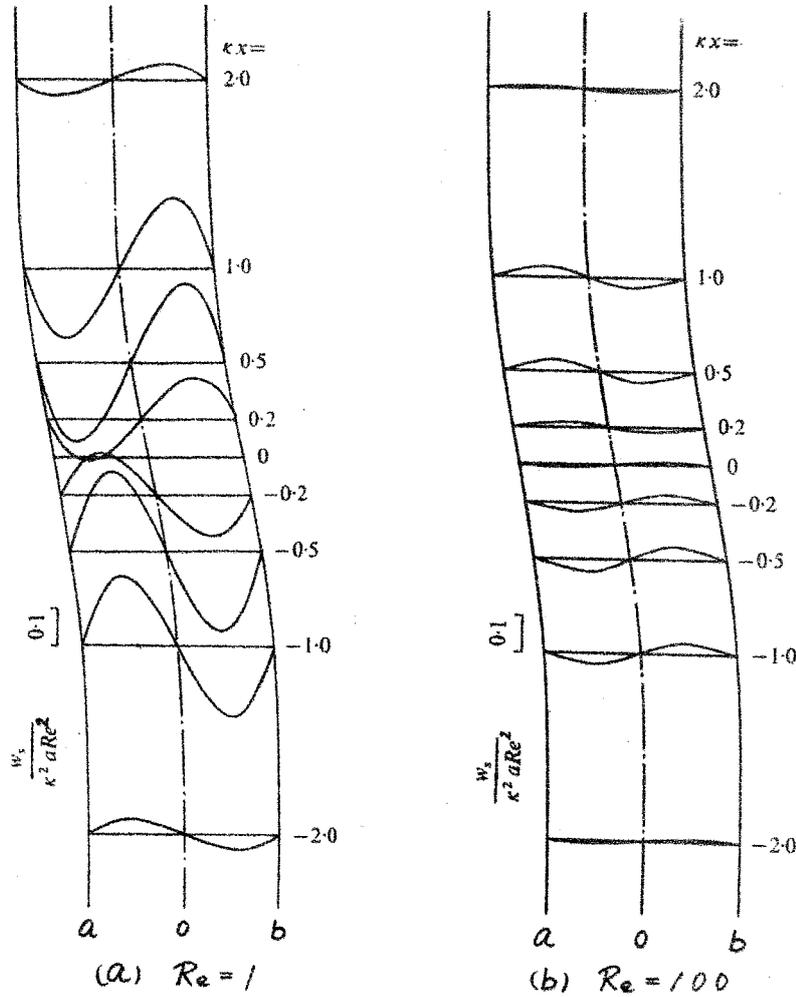
図3.10 軸流速度分布 ( $\kappa=0.01$ ,  $\sin\varphi=0$ )

での二次流れ流線は等流量線でもあり、図3.5 (a) において流れの向きを逆にしたものと同じとなる。他の断面では等流量線とはならないが、管軸に沿う曲率の変化が同じようにゆっくりしているため、軸方向位置が変わっても二次流れのパターンはあまり変化しない。

次に二次流れが消滅し、ポアズイユ流れにもどる距離について考えよう。二次流れ流速は  $r=0$  で最大となるので、そこでの値  $u_c = u / \kappa^2 a Re^2$  の大きさで調べよう。  $u_c$  の絶対値  $|u_c|$  の最大値  $|u_c|_{max}$  を与えよう。  $\kappa x$  は  $\partial u_c / \partial (\kappa x) = 0$  から定まり、それを  $(\kappa x)_{max}$  とする。いま  $|u_c| / |u_c|_{max} = 0.01$  で二次流れが実質上消滅したとみなし、そのときの  $\kappa x$  を  $(\kappa x)_{van}$  とすると、  $\kappa=0.01$  の場合には表3.1 のようになる。つまりポアズイユ流れにもどるのに要する軸方向距離は最大曲率位置から測って管の半径の約 450 倍である。このように長い距離を必要とするのは管軸に沿う曲率の変化が同じようにゆるやかなためである。

表 3.1

$Re$	$(\kappa\kappa)_{max}$	$ Uc _{max}$	$(\kappa\kappa)_{van}$
1	0.1126	0.01488	4.539
100	0.0147	0.01389	4.547

図 3.11 軸流速度分布 ( $\kappa = 0.01$ ,  $\sin \varphi = 0$ )

次に双曲線関数管の場合の  $w_z$  を図 3.11 に示す。図は  $\kappa = 0.01$  の場合であり、(a) は  $Re = 1$ 、(b) は  $Re = 100$  である。上述の場合と同様  $Re$  が小さい場合には曲りの内側の短いパスを流れ、 $Re$  が大きいと曲りの外側に偏って流れ、遅れが生じてくる。また  $\kappa x = 0$  では  $2\kappa^2 a \cdot \text{sech}^2 \kappa x \tanh \kappa x = 0$  となり、この断面における二次流れ流線は図 3.5 (b) に示されるものと同じとなり、等流量線にはならない。他の断面における二次流れ流線は図 3.5 (a) に示されるものと大差ないが、それらは一般に等流量線とはならない。

表 3.2

$Re$	$(\kappa x)_{max}$	$ U_{cl} _{max}$	$(\kappa x)_{van}$
1	-0.6585	0.01069	3.579
100	-0.6573	0.01257	3.391

この形の曲管でもだ行管と同様に曲りの向きが変わるため、二次流れの逆転が生じる。本節の解析は  $\kappa \ll 1$  の場合であるので、逆転の様子はだ行管における  $\kappa \ll 1$  の場合と同様である。逆転が生じる断面の位置およびそれらの長さは、たとえば  $\kappa = 0.01$ ,  $Re = 1$  の場合には  $\kappa x = -0.548$  と  $\kappa x = 0.116$  の間、 $\kappa = 0.01$ ,  $Re = 100$  の場合には  $\kappa x = 0.147$  と  $\kappa x = 0.538$  の間である。また二次流れが実質上消滅するのは、 $\kappa = 0.01$  について示された表 3.2 からわかるように管軸の変曲点から管の半径の約 350 倍下流である。この値は双曲線管の 450 倍に比べて小さく、曲りの向きが変わるため二次流れの消滅が早くなっていることがわかる。

### 3.4 管軸に沿う曲率の変化がゆるくしている場合の統一的取り扱いについて

これまで § 3.2 および § 3.3 において三種類の曲管内の流れの解析を行ったが、そのうち管軸に沿う曲率の変化がゆるくしている場合、すなわち  $\kappa \ll 1$  の場合については三種類の管に対する解析を以下のように統一することができる。また以下の表現は一般に管軸の形状がゆるやかに変化し、その曲率が小さい二次元曲線で表わされるすべての管に対して有効である。

いまの場合には解は  $\kappa$  を摂動パラメータとして式 (3.68) のように置くことができる。  $\kappa^0$  のオーダーの流れはポアソユ流れとなる。  $\kappa^2$  のオーダーの式は、管軸の形状を表わす関数を  $\psi$  として次式で示される。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_{\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \varphi} = 0 \quad (3.84)$$

$$\omega_0^2 \cos \varphi \frac{1}{\kappa^2} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{u_1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} \quad (3.85)$$

$$-\omega_0^2 \sin \varphi \frac{1}{\kappa^2} \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \quad (3.86)$$

$$u_1 \frac{\partial \omega_0}{\partial r} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi^2} + 6 Re r \cos \varphi \frac{1}{\kappa^2} \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 Re \left( \frac{1}{\kappa} \frac{dy}{dx} \right)^2 \quad (3.87)$$

上式の解は

$$u_1 = -\frac{Re^2}{288} (1-r^2)^2 (4-r^2) \cos \varphi \frac{1}{\kappa^2} \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$v_1 = \frac{Re^2}{288} (1-r^2) (4-23r^2+7r^4) \sin \varphi \frac{1}{\kappa^2} \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$w_1 = -Re r (1-r^2) \left\{ \frac{Re^2}{11520} (19-21r^2+9r^4-r^6) - \frac{y}{4} \right\} \cos \varphi \frac{1}{\kappa^2} \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$p_1 = -\frac{Re^2}{12} r (3-6r^2+2r^4) \cos \varphi \frac{1}{\kappa^2} \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 Re \int \left( \frac{1}{\kappa} \frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

(3.88)

と表現される。

次に  $\kappa^3$  のオ-ダの式は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \quad (3.89)$$

$$\omega_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{\partial p_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{u_2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + \omega_0 \cos \varphi \frac{1}{\kappa^3} \frac{d^3 y}{dx^3} \quad (3.90)$$

$$\omega_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_2}{\partial r} - \frac{v_2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} - \omega_0 \sin \varphi \frac{1}{\kappa^3} \frac{d^3 y}{dx^3} \quad (3.91)$$

$$u_2 \frac{\partial \omega_0}{\partial r} + \omega_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial \varphi^2} \quad (3.92)$$

つまり、その解は次式で示される。

$$u_2 = Re (1-r^2)^2 \left\{ \frac{Re^2}{15966720} (3003-3465r^2+1617r^4-231r^6) + \frac{1}{6} \right\} \cos \varphi \frac{1}{\kappa^3} \frac{d^3 y}{dx^3}$$

$$\begin{aligned}
 v_{z2} = & -Re(1-r^2) \left\{ \frac{Re^2}{15966720} (3003 - 51744r^2 + 61446r^4 - 28644r^6 \right. \\
 & \left. + 3927r^8) + \frac{1}{12} (2-r^2) \right\} \sin \varphi \frac{1}{K^3} \frac{d^3y}{dx^3} \\
 w_{z2} = & \frac{Re^2}{576} r(1-r^2) \left\{ \frac{Re^2}{554400} (32659 - 48191r^2 + 35739r^4 \right. \\
 & \left. - 14311r^6 + 3014r^8 - 220r^{10}) - (7 - 5r^2 + 3r^4) \right\} \cos \varphi \frac{1}{K^3} \frac{d^3y}{dx^3} \\
 p_{z2} = & Re \left\{ \frac{Re^2}{15966720} r(93324 - 11088r^2 + 83160r^4 - 27720r^6 \right. \\
 & \left. + 2772r^8) - \frac{1}{6} (1-3r^2) \right\} \cos \varphi \frac{1}{K^3} \frac{d^3y}{dx^3}
 \end{aligned}
 \tag{3.93}$$

だ行管においても式(3.68)のような展開形式を用いれば、ここに示した諸式によってその流れが求められる。

### 3.5 結 言

管軸に沿って曲率が変わる円形断面の二次元曲管内層流を、管軸の曲率が比較的小さい場合について解析を行い、以下の結果を得た。

(1)  $Re$  が小さい場合には流れは曲りの内側に偏って流れる。同様の理由により、曲管の管軸に沿う圧力こう配も直管のそれと同じにするとき、 $Re$  の小さい範囲では曲管の方が直管より流量が多い。逆にいえば、 $Re$  の小さいときには曲管の摩擦損失係数が直管のそれより小さくなる。

(2)  $Re$  が大きくなると、遠心力のため流体は曲りの外側に偏って流れる。それと同時に管軸の曲りが流体に与える影響が管軸の変化に対して遅れて現われる。

(3) だ行管で管軸に沿う曲率の変化がゆるやかでない場合、つまり  $K$  が小さくない場合には前述の遅れが顕著となる。

(4) 直行管および双曲線関数管では曲りの方向が変わり、遠心力の作用する向きが変わるため、二次流れの逆転現象が生じる。とくに  $R$  が小さくない場合には、直行管で示されたように、対称軸で二分される半円内に二つのうず状の二次流れが生じる。

(5) 双曲線管と双曲関数線管とも比べた場合、後者では二次流れの逆転現象が生じるため、前者に比べ曲りの影響の及ぶ軸方向の範囲が狭くなる。

(6) 管軸に沿う曲率の変化がゆるやかな平面的な曲りをもつ管内層流定常流れは統一的な取り扱いにより解析できる。

## 第4章 だ行管内を流れる非圧縮性流体の層流脈動流れ

### 4.1 緒言

現実によく見られる曲管の例として、コイル管およびベンド、二重ベンドとその繰り返しから成る管路モデルとしての双曲線管、双曲線関数管およびだ行管を考え、第2章および第3章においてそれらの管内を流れる層流定常流れについて解析を行った。管内流れにおいてはこのような定常流れだけでなく、脈動流れと成ることも多く、したがって脈動流れについて調べることも定常流れの場合と同様に重要であると考えられる。また層流脈動流れは近年バイオメカニクスの分野でも関心をもたれている。本章では、上述の各種曲管のうちだ行管を取り上げ、その管内脈動流れを平均流がない場合およびある場合について解析する。

円環状曲管内層流脈動流れに関する理論解析としては *Lyne*<sup>(56)</sup>, *Zalozek*<sup>(59)</sup> および *Smith*<sup>(84)</sup> がある。これらのうち *Smith* のものは対称性をもつ断面形一般に対して有効である。しかし管軸に沿って曲率が変化する曲管内脈動流れはこれら円環状曲管の場合とは異なる。まただ行管内層流脈動流れは曲りの多い管路内層流非定常流れの基礎的なモデルの一つとして重要であると考えられる。

解析にあたっては §1.3 の最後に述べた仮定を用いている外、次の仮定が採用されている。

- (i) 管軸の無次元振巾  $A$  が小さく、それによって管軸の曲率が小さい。
- (ii) パラメータ  $(A/\delta^2)$  が小さい。ただし  $A$  は脈動圧力こう配の無次元振巾、 $\delta$  は脈動流のレイノルズ数と考えられる無次元量で  $r_0^*$ ,  $\nu^*$ ,  $\omega^*$  をそれぞれ管の内半径、流体の動粘性係数、脈動の角振動数として  $\delta^2 = (\omega^*/\nu^*)r_0^{*2}$  により定義される。

## 4.2 解析

§3.2 と同一の無次元化を行い，同一の記号および座標系を用いる。非圧縮性流体を仮定しているので，連続の式は式(3.7)となる。運動方程式は式(3.8)~(3.10)の左辺にそれぞれ  $k^2(\partial u/\partial t)$ ,  $k^2(\partial v/\partial t)$ ,  $k^2(\partial w/\partial t)$  を加えることにより得られる。ただし  $k^2$  は脈動流のレイノルズ数と考えられる量で，脈動の角振動数を  $\omega^*$  として

$$k^2 = (\omega^*/\nu^*) r_0^{*2} \quad (4.1)$$

により定義され， $k$  は実数である。このようにして得られた式を管軸の方向の無次元振巾  $Q$  が  $Q \ll 1$  であるとして式(3.11)のように，すなわち次式のように入れて解を求めよう。

$$\left. \begin{aligned} p &= p_0 + Q p_1 + \dots, & u &= Q u_1 + \dots, \\ v &= Q v_1 + \dots, & w &= w_0 + Q w_1 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

$Q^0$  のオーダーの式は次式となる。

$$k^2 \frac{\partial w_0}{\partial t} = -\frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} \quad (4.3)$$

いまポアズイユ流れの最大速度を  $W_0^*$  とし，平均流のレイノルズ数  $Re$  を  $Re = W_0^* r_0^*/\nu^*$  で定義する。そして  $A$  を定数として圧力こう配が

$$-\frac{\partial p_0}{\partial x} = 4Re + A e^{i\omega^* t} \quad (4.4)$$

のように変化する場合を考えよう。式(4.4)を式(4.3)に代入して管壁で  $w_0 = 0$  という境界条件のもとに解くと，その解はよく知られた

$$w_0 = Re(1-r^2) + \frac{A}{\eta^2} \left\{ \frac{J_0(\eta r)}{J_0(\eta)} - 1 \right\} e^{i\omega^* t} \quad (4.5a)$$

となる。ここで  $J_0$  は第1種0次ベッセル関数であり，

$$\eta^2 = -i\omega^* r_0^{*2}/\nu^* = -ik^2 \quad (4.6)$$

である。いま

$$w_0 = w_{00} + (A/k^2) w_{01} e^{i\omega^* t} \quad (4.5b)$$

と表現すれば，式(4.5a)より

$$\left. \begin{aligned} w_{00} &= \operatorname{Re}(1-r^2) \\ w_{01} &= i \{ J_0(\eta r) / J_0(\eta) - 1 \} \end{aligned} \right\} \quad (4.5c)$$

となる。

次に  $Q'$  のオ-ダの流れを求めよ。このオ-ダの式は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_1)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} k^2 \frac{\partial u_1}{\partial t} + w_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \kappa^2 w_0^2 \cos \varphi \sin \kappa x &= -\frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{u_1}{r^2} \\ + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} - \kappa^2 w_0 \cos \varphi \cos \kappa x \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} k^2 \frac{\partial v_1}{\partial t} + w_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \kappa^2 w_0^2 \sin \varphi \sin \kappa x &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r^2} \\ + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + \kappa^2 w_0 \sin \varphi \cos \kappa x \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} k^2 \frac{\partial w_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial w_0}{\partial r} + w_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} &= -\frac{\partial p_1}{\partial x} + 2\kappa^2 r \frac{\partial p_0}{\partial x} \cos \varphi \sin \kappa x + \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} \\ + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \kappa^2 r \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \cos \varphi \sin \kappa x \end{aligned} \quad (4.10)$$

となる。式(4.8)~(4.10)には慣性対流項が存在するために、それらの解は  $e^{i\omega t}$  の高周波成分を含む形となる。そこでいま式(4.5b)の  $(A/k^2)$  が小さい場合を考えよと

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} (A/k^2)^n p_{1n} e^{i n t} \\ u_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} (A/k^2)^n u_{1n} e^{i n t} \\ v_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} (A/k^2)^n v_{1n} e^{i n t} \\ w_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} (A/k^2)^n w_{1n} e^{i n t} \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

のように変動周波数に対応した  $(A/\ell^2)$  のべき級数に展開でき、高周波成分の効果は小さくなる事がわかる。ただし式(4.11)において  $p_n$ ,  $u_n$ ,  $v_n$ ,  $w_n$  ( $n=0, 1, \dots$ ) は  $\varphi$  を含まない関数である。ここで関数  $\Psi_n$  を導入し、

$$\left. \begin{aligned} \Psi_n &= (f_{sn} \sin \kappa x + f_{cn} \cos \kappa x) \sin \varphi \\ w_n &= (g_{sn} \sin \kappa x + g_{cn} \cos \kappa x) \cos \varphi \\ u_n &= \partial \Psi_n / (r \partial \varphi) \\ v_n &= -\partial \Psi_n / \partial r - \kappa r (g_{sn} \cos \kappa x - g_{cn} \sin \kappa x) \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

$(n=0, 1, \dots)$

とすれば連続の式(4.7)は満足される。ここで  $f_{sn}$ ,  $f_{cn}$ ,  $g_{sn}$ ,  $g_{cn}$  は  $r$  のみの関数である。§3.2.3と同様にして式(4.8)と(4.9)からお互いに式(4.9)と(4.10)からそれぞれ  $\rho$  を消去し、式(4.11)を代入して整理する。 $(A/\ell^2)^0$  のオーダー、つまり  $n=0$  の場合に対する式は式(3.43)~(3.46)となり、これらの式中の  $f_0$ ,  $f_c$ ,  $g_s$ ,  $g_c$  に添字  $0$  を書き加えたものとする。

次に  $(A/\ell^2)^1$  のオーダー、つまり加えられる圧力こう配の脈動と同じ周波数成分の流れに対する式は次式となる。

$$\begin{aligned} & f_{s1}''' + \frac{1}{r} f_{s1}'' - \frac{1}{r^2} [2 + (\kappa^2 - \eta^2) r^2] f_{s1}' + \frac{2}{r^3} f_{s1} \\ & - \frac{1}{\kappa r} \left[ (1 + \kappa^2 r^2) g_{c1}'' + \frac{1}{r} (1 + \eta^2 \kappa^2 r^2) g_{c1}' - \frac{1}{r^2} (1 + \kappa^2 r^2) \{ 1 + (\kappa^2 - \eta^2) r^2 \} g_{c1} \right] \\ & + i \left\{ \frac{J_0(\eta r)}{J_0(\eta)} - 1 \right\} \left\{ \frac{1}{r} (1 + \kappa^2 r^2) g_{s0} + \kappa f_{c0}' \right\} - \frac{i \eta}{\kappa} \frac{J_1(\eta r)}{r^2 J_0(\eta)} f_{c0} \\ & + \kappa e \left[ (1 - r^2) \left\{ \frac{1}{r} (1 + \kappa^2 r^2) g_{s1} + \kappa f_{c1}' + 2i \kappa^2 \left\{ \frac{J_0(\eta r)}{J_0(\eta)} - 1 \right\} \right\} - \frac{2}{\kappa r} f_{c1} \right] \\ & = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

[注] 式(4.11)で用いられている  $p_n$ ,  $u_n$ ,  $v_n$ ,  $w_n$  などの表現は§3.2.2と同じ形ではあるが、本章で用いられる第2番目の添字は脈動の周波数を表す。

$$\begin{aligned}
& f_{c1}''' + \frac{1}{r} f_{c1}'' - \frac{1}{r^2} \{ 2 + (\kappa^2 - \eta^2) r^2 \} f_{c1}' + \frac{2}{r^3} f_{c1} \\
& + \frac{1}{\kappa r} \left[ (1 + \kappa^2 r^2) g_{s1}'' + \frac{1}{r} (1 + 3\kappa^2 r^2) g_{s1}' - \frac{1}{r^2} (1 + \kappa^2 r^2) \{ 1 + (\kappa^2 - \eta^2) r^2 \} g_{s1} \right] \\
& + i \left\{ \frac{J_0(\eta r)}{J_0(\eta)} - 1 \right\} \left\{ \frac{1}{r} (1 + \kappa^2 r^2) g_{c0} - \kappa f_{s0}' \right\} + \frac{i \eta}{\kappa} \frac{J_1(\eta r)}{r^2 J_0(\eta)} f_{s0} \\
& + \operatorname{Re} \left[ (1 - r^2) \left[ \frac{1}{r} (1 + \kappa^2 r^2) g_{c1} - \kappa f_{s1}' \right] + \frac{2}{\kappa r} f_{s1} \right] \\
& - i \kappa \left[ (\kappa^2 - \eta^2) \frac{J_0(\eta r)}{J_0(\eta)} + \frac{\eta J_1(\eta r)}{r J_0(\eta)} - \kappa^2 + 2\eta^2 \right] = 0 \tag{4.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& g_{s1}''' + \frac{1}{r} g_{s1}'' - \frac{1}{r^2} \{ 2 + (\kappa^2 - \eta^2) r^2 \} g_{s1}' + \frac{2}{r^3} (1 + \kappa^2 r^2) g_{s1} \\
& + \frac{\kappa}{r} \left[ f_{c1}'' + \frac{1}{r} f_{c1}' - \frac{1}{r^2} \{ 1 + (\kappa^2 - \eta^2) r^2 \} f_{c1} \right] \\
& - \operatorname{Re} \left[ -2 f_{s1}' + \frac{\kappa^2}{r} (1 - r^2) f_{s1} - \kappa \{ (1 - r^2) g_{c1}' - 2r g_{c1} \} \right] \\
& + i \left[ \frac{\eta J_1(\eta r)}{r J_0(\eta)} f_{s0}' - \frac{1}{r} \{ (\kappa^2 - \eta^2) \frac{J_0(\eta r)}{J_0(\eta)} + \frac{2\eta J_1(\eta r)}{r J_0(\eta)} - \kappa^2 \} f_{s0} \right. \\
& \left. + \kappa \left\{ \frac{J_0(\eta r)}{J_0(\eta)} - 1 \right\} g_{c0}' - \kappa \frac{\eta J_1(\eta r)}{J_0(\eta)} g_{c0} \right] \\
& + i \kappa^2 \left[ (1 - \eta^2 r^2) \frac{\eta J_1(\eta r)}{r J_0(\eta)} - \kappa^2 \left\{ \frac{J_0(\eta r)}{J_0(\eta)} - 1 \right\} - 2\eta^2 \right] = 0 \tag{4.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& g_{c1}''' + \frac{1}{r} g_{c1}'' - \frac{1}{r^2} \{ 2 + (\kappa^2 - \eta^2) r^2 \} g_{c1}' + \frac{2}{r^3} (1 + \kappa^2 r^2) g_{c1} \\
& - \frac{\kappa}{r} \left[ f_{s1}'' + \frac{1}{r} f_{s1}' - \frac{1}{r^2} \{ 1 + (\kappa^2 - \eta^2) r^2 \} f_{s1} \right] \\
& - \operatorname{Re} \left[ -2 f_{c1}' + \frac{\kappa^2}{r} (1 - r^2) f_{c1} + \kappa \{ (1 - r^2) g_{s1}' - 2r g_{s1} \} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2i\kappa^2(1-r^2) \left\{ \frac{J_0(\eta r)}{J_0(\eta)} - 1 \right\} \\
& + i \left[ \frac{\eta J_1(\eta r)}{r J_0(\eta)} f'_{co} - \frac{1}{r} \left\{ (\kappa^2 - \eta^2) \frac{J_0(\eta r)}{J_0(\eta)} + \frac{2\eta J_1(\eta r)}{r J_0(\eta)} - \kappa^2 \right\} f_{co} \right. \\
& \left. - \kappa \left\{ \frac{J_0(\eta r)}{J_0(\eta)} - 1 \right\} g'_{so} + \kappa \frac{\eta J_1(\eta r)}{J_0(\eta)} g_{so} \right] = 0 \quad (4.16)
\end{aligned}$$

ただし  $J_1$  は第1種1次ベッセル関数である。境界条件は

$$r=1; \quad f_{s1} = f'_{s1} = f_{c1} = f'_{c1} = g_{s1} = g_{c1} = 0 \quad (4.17)$$

である。式(4.13)~(4.16)を連立して式(4.17)の境界条件のもとに数値積分により解く。その際  $r=0$  の近傍では定常成分の場合と同様に

$$\left. \begin{aligned}
f_{s1} &= \sum_{m=1,3,5,\dots} a_{s1m} r^m, & f_{c1} &= \sum_{m=1,3,5,\dots} a_{c1m} r^m \\
g_{s1} &= \sum_{m=1,3,5,\dots} b_{s1m} r^m, & g_{c1} &= \sum_{m=1,3,5,\dots} b_{c1m} r^m
\end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

と  $r$  の奇数乗のべきから成る級数に展開できる。式(4.18)を式(4.13)~(4.16)に代入し、またベッセル関数も  $r$  で展開して整理すると  $a_{s11}$ ,  $a_{c11}$ ,  $b_{s11}$ ,  $b_{c11}$  の4個および  $a_{s13}$ ,  $a_{c13}$ ,  $b_{s13}$ ,  $b_{c13}$  のうちの任意の2個の計6個の係数が未定となり、残りの係数は順次これら6個によって表現できる。これら6個の係数は式(4.17)に示される管壁での6個の条件を満足するような組み合わせとして一義的に決まる。いま  $a_{s11}$ ,  $a_{c11}$ ,  $b_{s11}$ ,  $b_{c11}$ ,  $a_{s13}$ ,  $a_{c13}$  の6個を未定に選べば、式(4.18)の残りの係数は次式のようになる。

$a_{s11}$  : 未定

$a_{s13}$  : 未定

$$\begin{aligned}
a_{s15} &= \frac{\kappa}{192} \left[ 8\kappa \left( 1 - \frac{\eta^2}{\kappa^2} \right) a_{s13} + 2 \left( 20 + \frac{\eta^2}{\kappa^2} \right) b_{c13} - 3(\kappa^2 - \eta^2) b_{c11} \right. \\
& \left. + \operatorname{Re} \left\{ -8a_{c13} + 2a_{c11} - 3\kappa b_{s11} \right\} + \frac{2i\eta^2}{J_0(\eta)} (a_{c01} + 2\kappa R_e) \right]
\end{aligned}$$

$$a_{s17} = \frac{\kappa}{1152} \left[ 24\kappa \left(1 - \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right) a_{s15} + 4 \left(42 + \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right) b_{c15} - 5(\kappa^2 - \eta^2) b_{c13} \right]$$

$$+ \operatorname{Re} \left\{ -24a_{c15} + 14a_{c13} - 5\kappa(b_{s13} - b_{s11}) \right\} - 4i \left\{ \frac{1}{J_0(\eta)} - 1 \right\} (24a_{c05} + 5\kappa b_{s03})$$

$$- \frac{i\eta^2}{J_0(\eta)} \left\{ -14a_{c03} + \frac{\eta^2}{4} a_{c01} - 5\kappa b_{s01} + \kappa \operatorname{Re} \left( \rho + \frac{\eta^2}{2} \right) \right\}$$

$$a_{s19} = \frac{\kappa}{3840} \left[ 48\kappa \left(1 - \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right) a_{s17} + 6 \left(72 + \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right) b_{c17} - 7(\kappa^2 - \eta^2) b_{c15} \right]$$

$$+ \operatorname{Re} \left\{ -48a_{c17} + 34a_{c15} - 7\kappa(b_{s15} - b_{s13}) \right\}$$

$$- 4i \left\{ \frac{1}{J_0(\eta)} - 1 \right\} (48a_{c07} + 7\kappa b_{s05}) - \frac{i\eta^2}{J_0(\eta)} \left\{ -34a_{c05} + \frac{5}{4}\eta^2 a_{c03} \right.$$

$$\left. - \frac{\eta^4}{96} a_{c01} - 7\kappa b_{s03} + \frac{7}{16}\kappa\eta^2 b_{s01} - \frac{3}{4}\kappa \operatorname{Re} \eta^2 \left(1 + \frac{\eta^2}{36}\right) \right\}$$

(4.19a)

 $a_{c11}$  : 未定 $a_{c13}$  : 未定

$$a_{c15} = \frac{\kappa}{192} \left[ 8\kappa \left(1 - \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right) a_{c13} - 2 \left(20 + \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right) b_{s13} + 3(\kappa^2 - \eta^2) b_{s11} \right]$$

$$+ \operatorname{Re} \left\{ 8a_{s13} - 2a_{s11} - 3\kappa b_{c11} \right\} - \frac{2i\eta^2}{J_0(\eta)} (a_{s01} + \kappa^2)$$

$$- 4i \left\{ \frac{1}{J_0(\eta)} - 1 \right\} (-8a_{s03} + 3\kappa b_{c01})$$

$$a_{c17} = \frac{\kappa}{1152} \left[ 24\kappa \left(1 - \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right) a_{c15} - 4 \left(42 + \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right) b_{s15} + 5(\kappa^2 - \eta^2) b_{s13} \right]$$

$$+ \operatorname{Re} \left\{ 24a_{s15} - 14a_{s13} - 5\kappa(b_{c13} - b_{c11}) - 4i \left\{ \frac{1}{J_0(\eta)} - 1 \right\} (-24a_{s05} + 5\kappa b_{c03}) \right.$$

$$\left. - \frac{i\eta^2}{J_0(\eta)} \left\{ 14a_{s03} - \frac{\eta^2}{4} (a_{s01} + \kappa^2) - 5\kappa b_{c01} \right\} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 a_{c19} &= \frac{\kappa}{3840} \left[ 48\kappa \left(1 - \frac{\gamma^2}{\kappa^2}\right) a_{c17} - 6 \left(72 + \frac{\gamma^2}{\kappa^2}\right) b_{a17} + 7(\kappa^2 - \gamma^2) b_{a15} \right. \\
 &+ \operatorname{Re} \left\{ 48a_{a17} - 34a_{a15} - 7\kappa(b_{c15} - b_{c13}) \right\} - 4i \left\{ \frac{1}{J_0(\gamma)} - 1 \right\} (-48a_{a07} + 7\kappa b_{c05}) \\
 &\left. - \frac{i\gamma^2}{J_0(\gamma)} \left\{ 34a_{a05} - \frac{5}{4}\gamma^2 a_{a03} + \frac{\gamma^4}{96}(a_{a01} + \kappa^2) - 7\kappa b_{c03} + \frac{7}{16}\kappa\gamma^2 b_{c01} \right\} \right] \\
 &\hspace{15em} (4.19b)
 \end{aligned}$$

$b_{a11}$  : 未定

$$\begin{aligned}
 b_{a13} &= -\kappa a_{c13} + \frac{1}{8} \left[ \kappa(\kappa^2 - \gamma^2) a_{c11} - (\kappa^2 + \gamma^2) b_{c11} - \frac{2i\gamma^2}{J_0(\gamma)} a_{a01} \right. \\
 &+ \operatorname{Re} \left\{ (\kappa^2 - 2) a_{a11} - \kappa b_{c11} \right\} + 4i\kappa \left\{ \frac{1}{J_0(\gamma)} - 1 \right\} (\kappa a_{a01} - b_{c01}) \\
 &\left. + 4i\kappa^2 \left\{ (\kappa^2 - \frac{\gamma^2}{2}) \frac{1}{J_0(\gamma)} - (\kappa^2 - 2\gamma^2) \right\} \right] \\
 b_{a15} &= \frac{1}{192} \left[ 2(8\kappa^2 - \gamma^2) b_{a13} - \kappa^2(\kappa^2 - \gamma^2) b_{a11} - \frac{2i\kappa^2\gamma^2}{J_0(\gamma)} (\kappa^2 - 3\gamma^2) \right. \\
 &+ \operatorname{Re} \left\{ -16a_{a13} - 2\kappa^2 a_{a11} - 8\kappa b_{c13} + \kappa(\kappa^2 + 8) b_{c11} \right\} \\
 &\left. - 4i\kappa \left\{ \frac{1}{J_0(\gamma)} - 1 \right\} (8b_{c03} - \kappa^2 b_{c01}) - \frac{i\gamma^2}{J_0(\gamma)} \left\{ 16a_{a03} + 2(\kappa^2 - \gamma^2) a_{a01} - 8\kappa b_{c01} \right\} \right] \\
 b_{a17} &= \frac{1}{1152} \left[ 4(12\kappa^2 - \gamma^2) b_{a15} - \kappa^2(\kappa^2 - \gamma^2) b_{a13} + \frac{i\kappa^2\gamma^4}{4J_0(\gamma)} (\kappa^2 - 5\gamma^2) \right. \\
 &+ \operatorname{Re} \left\{ -48a_{a15} - 2\kappa^2 a_{a13} - 24\kappa b_{c15} + \kappa(\kappa^2 + 24) b_{c13} - \kappa^3 b_{c11} \right\} \\
 &\left. - 4i\kappa \left\{ \frac{1}{J_0(\gamma)} - 1 \right\} (24b_{c05} - \kappa^2 b_{c03}) - \frac{i\gamma^2}{J_0(\gamma)} \left\{ 48a_{a05} + 2(\kappa^2 - 3\gamma^2) a_{a03} \right. \right. \\
 &\left. \left. - \frac{\gamma^2}{4} (\kappa^2 - \gamma^2) a_{a01} - 24\kappa b_{c03} + \kappa(\kappa^2 + \frac{3}{2}\gamma^2) b_{c01} \right\} \right] \\
 b_{a19} &= \frac{1}{3840} \left[ 6(16\kappa^2 - \gamma^2) b_{a17} - \kappa^2(\kappa^2 - \gamma^2) b_{a15} - \frac{i\kappa^2\gamma^6}{96J_0(\gamma)} (\kappa^2 - 7\gamma^2) \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \operatorname{Re} \left\{ -96a_{117} - 2\kappa^2 a_{115} - 48\kappa b_{c17} + \kappa(\kappa^2 + 48) b_{c15} - \kappa^3 b_{c13} \right\} \\
& - 4i\kappa \left\{ \frac{1}{J_0(\eta)} - 1 \right\} (48b_{c07} - \kappa^2 b_{c05}) - \frac{i\eta^2}{J_0(\eta)} \left\{ 96a_{107} + 2(\kappa^2 - 6\eta^2) a_{105} \right. \\
& - \frac{\eta^2}{4} (\kappa^2 - 2\eta^2) a_{103} + \frac{\eta^4}{96} (\kappa^2 - \eta^2) a_{101} - 48\kappa b_{c05} + \kappa(\kappa^2 + 3\eta^2) b_{c03} \\
& \left. - \frac{\eta^2}{16} (\kappa^2 + \frac{4}{3}\eta^2) b_{c01} \right\}
\end{aligned}$$

(4.19c)

 $b_{c11}$  : 未定

$$\begin{aligned}
b_{c13} &= \kappa a_{113} + \frac{1}{8} \left[ -\kappa(\kappa^2 - \eta^2) a_{111} - (\kappa^2 + \eta^2) b_{c11} - \frac{2i\eta^2}{J_0(\eta)} a_{c01} \right. \\
& \left. + \operatorname{Re} \left\{ (\kappa^2 - 2) a_{c11} + \kappa b_{111} \right\} + 4i\kappa \left\{ \frac{1}{J_0(\eta)} - 1 \right\} (\kappa a_{c01} + b_{101} + 2\kappa^2 \operatorname{Re}) \right] \\
b_{c15} &= \frac{1}{192} \left[ 2(8\kappa^2 - \eta^2) b_{c13} - \kappa^2(\kappa^2 - \eta^2) b_{c11} \right. \\
& \left. + \operatorname{Re} \left\{ -16a_{c13} - 2\kappa^2 a_{c11} + 8\kappa b_{113} - \kappa(\kappa^2 + 8) b_{111} \right\} \right. \\
& \left. - 4i\kappa \left\{ \frac{1}{J_0(\eta)} - 1 \right\} \left\{ -8b_{103} + \kappa^2 (b_{101} + 4\operatorname{Re}) \right\} \right. \\
& \left. - \frac{i\eta^2}{J_0(\eta)} \left\{ 16a_{c03} + 2(\kappa^2 - \eta^2) a_{c01} + 8\kappa b_{101} + 4\kappa^3 \operatorname{Re} \right\} \right] \\
b_{c17} &= \frac{1}{1152} \left[ 4(12\kappa^2 - \eta^2) b_{c15} - \kappa^2(\kappa^2 - \eta^2) b_{c13} \right. \\
& \left. + \operatorname{Re} \left\{ -48a_{c15} - 2\kappa^2 a_{c13} + 24\kappa b_{115} - \kappa(\kappa^2 + 24) b_{113} + \kappa^3 b_{111} \right\} \right. \\
& \left. - 4i\kappa \left\{ \frac{1}{J_0(\eta)} - 1 \right\} \left\{ -24b_{105} + \kappa^2 b_{103} \right\} - \frac{i\eta^2}{J_0(\eta)} \left\{ 48a_{c05} + 2(\kappa^2 - 3\eta^2) a_{c03} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\eta^2}{4} (\kappa^2 - \eta^2) a_{c01} + 24\kappa b_{103} - \kappa(\kappa^2 + \frac{3}{2}\eta^2) b_{101} - \kappa^3 \operatorname{Re} \left( P + \frac{\eta^2}{2} \right) \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{c19} = & \frac{1}{384} \left[ 6(16\kappa^2 - \gamma^2) b_{c17} - \kappa^2(\kappa^2 - \gamma^2) b_{c15} \right. \\
& + \operatorname{Re} \left\{ -96 a_{c17} - 2\kappa^2 a_{c15} + 4PK b_{a17} - \kappa(\kappa^2 + 4P) b_{a15} + \kappa^3 b_{a13} \right\} \\
& - 4i\kappa \left\{ \frac{1}{J_0(\gamma)} - 1 \right\} (-4P b_{a07} + \kappa^2 b_{a05}) - \frac{i\gamma^2}{J_0(\gamma)} \left\{ 96 a_{c07} + 2(\kappa^2 - 6\gamma^2) a_{c05} \right. \\
& - \frac{\gamma^2}{4} (\kappa^2 - 2\gamma^2) a_{c03} + \frac{\gamma^4}{96} (\kappa^2 - \gamma^2) a_{c01} + 4PK b_{a07} - \kappa(\kappa^2 + \gamma^2) b_{a05} \\
& \left. + \frac{\kappa}{16} \gamma^2 (\kappa^2 + \frac{4}{3}\gamma^2) b_{a03} + \frac{\gamma}{4} \kappa^3 \operatorname{Re} \left\{ \gamma^2 \left( 1 + \frac{\gamma^2}{36} \right) \right\} \right\} \left. \right]
\end{aligned}$$

(4.19d)

に代し上式中の  $a_{com}$ ,  $a_{com}$ ,  $b_{com}$ ,  $b_{com}$  ( $m=1, 3, 5, \dots$ ) は式(3.49)により与えられる。

以上では平均流が存在する場合について解析をすすめてきたが、平均流がない場合の式は式(4.13)~(4.16)において  $Re=0$ ,  $Li$  によって  $f_{00}$ ,  $f_{c0}$ ,  $g_{00}$ ,  $g_{c0}$  も 0 と置いたものに等しい。そしてこの場合には式(4.13)~(4.16) から  $f_{c1}=0$ ,  $g_{c1}=0$  とわかる。したがって二次流れの脈動成分のうち、軸方向流速は軸方向には管軸の変化と同じ変化をし、他方半径方向および周方向流速の軸方向の変化は管軸の変化と  $90^\circ$  だけずれていることがわかる。

数値積分にあたっては前章と同様、 $r=0$  から  $r=0.05$  までを級数展開法で、 $r=0.05$  から  $r=1$  までは積分区間を  $0.005$  として Runge-Kutta-Gill 法で行った。また6個の未定係数の決定法は前章で述べたとおりである。

### 4.3 数値例および議論

圧力こう配が時間的に正弦波状に変化する場合の流速は式(4.13)~(4.16)を解いて得られる  $f_{c1}$ ,  $f_{c1}$ ,  $g_{c1}$ ,  $g_{c1}$  を式(4.12)に代入し、式(4.11)を考慮してその虚数部分をとりことにより求めることができる。

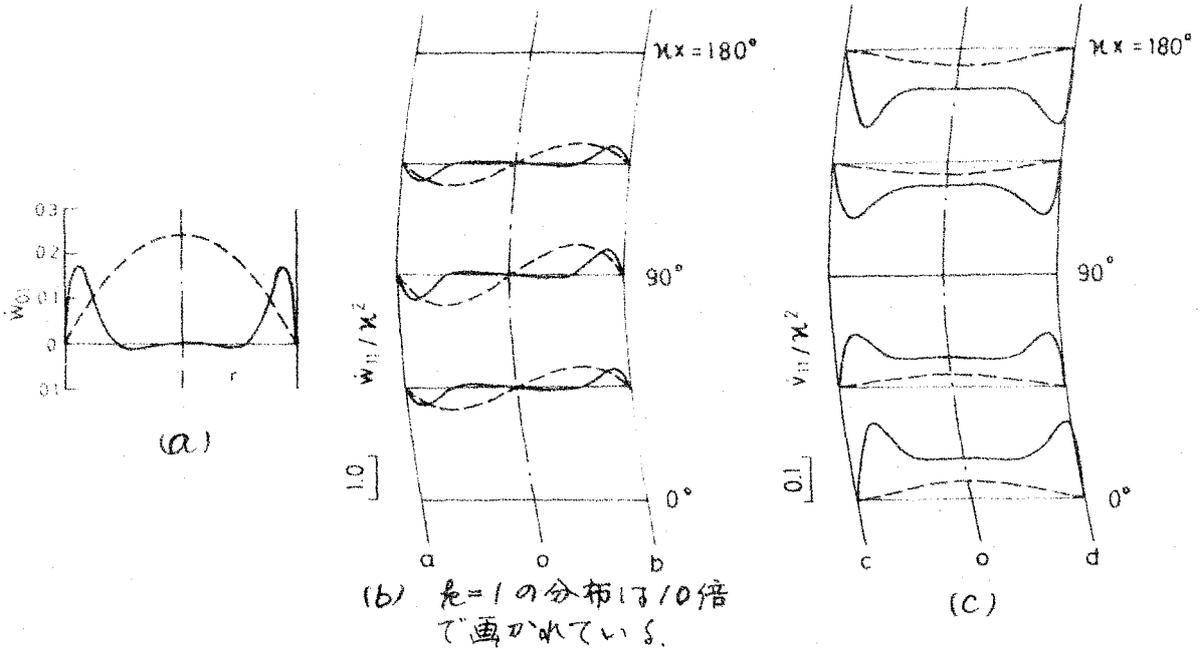


図4.1 二次流れ(脈動成分)速度分布の管軸方向の変化 ( $Re=0$ ,  $\kappa=1$ ,  $\tau=\pi/2$ , ---;  $\tau=0$ , —;  $\tau=10$ )

図4.1は平均流がない場合の二次流れ脈動成分の断面内速度分布を管軸方向の変化とともに示したものである。ただし管軸の変化はわかり易いように誇張して画いてあり、また流速分布は管軸に直交する断面内のものである。図で破線は  $\tau=1$ 、実線は  $\tau=10$  の場合であるが、いずれも  $\tau=\pi/2$  における分布である。また  $\hat{w}_{01} = \text{Im}\{\hat{w}_{01} e^{it}\}$  であり、 $\hat{w}_{11}$ 、 $\hat{v}_{11}$  についても同様に定義される。図4.1(a)は直管の場合で、(b)は加えられる脈動圧力こう配と同じ周波数で変動する軸流速度成分の直管の場合の分布からの偏差分  $\hat{w}_{11}$  を示したものである。図4.1(c)は同じ場合の周方向流速  $\hat{v}_{11}$  を図4.1(b)の c-o-d 断面に沿う分布で示している。前節の最後で述べたように  $\hat{w}_{11}$  の管軸方向の変化は管軸の曲率の大きさに比例し、 $\hat{v}_{11}$  の変化は曲率の変化とは  $90^\circ$  だけずれている。 $\hat{w}_{11}$  は  $\tau$  および  $\tau$  の値のいかんにかかわらず、曲りの外側で  $\hat{w}_{01}$  の絶対値  $|\hat{w}_{01}|$  を減じ、内側で増すように分布する。この場合には二次流れは粘性力によって生じ、基礎式からわかるように慣性対流項の入っていない、いわゆるストークス流れであり、流体は抵抗が最小になるような分布を示す。このような流れは円環状曲管および本論文でこれまで扱った各種

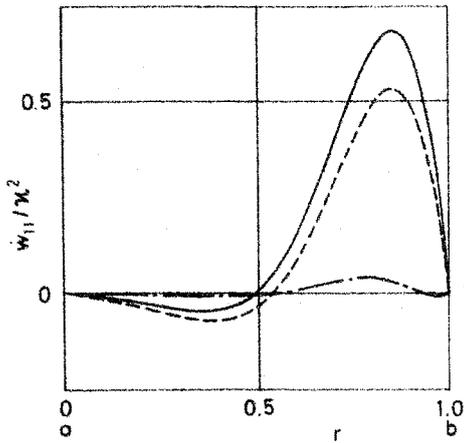


図 4.2  $w_{11}$  に及ぼす  $\kappa$  の影響 ( $Re=0$ ,  $t=10$ ,  $\tau=\pi/2$ , —;  $\kappa \leq 0.1$ , ---;  $\kappa=1$ , - - -;  $\kappa=10$ .)

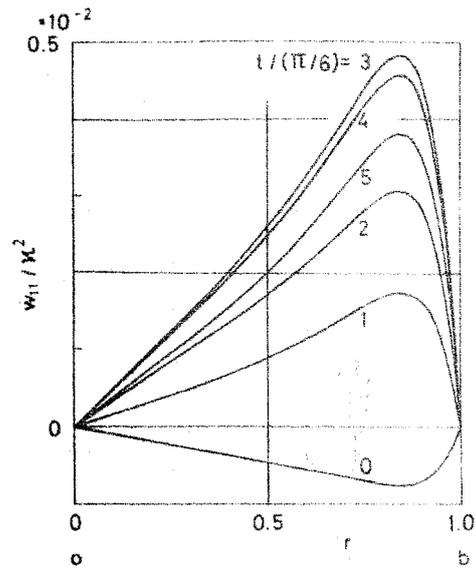
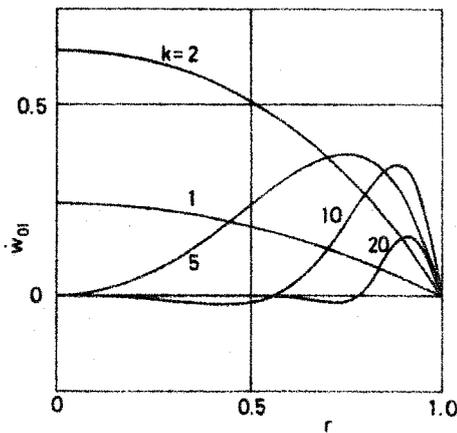
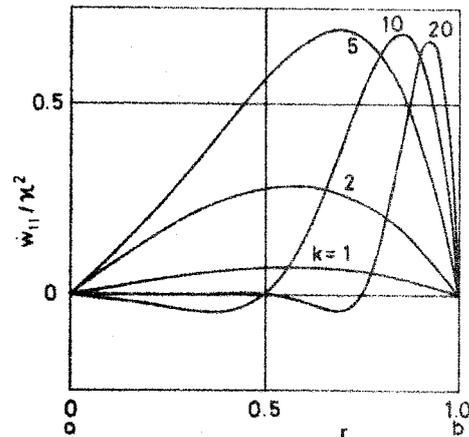


図 4.3  $\kappa$  が大きく,  $t$  が小さい場合の  $w_{11}$  の半周期内の变化 ( $\kappa=10$ ,  $t=1$ ,  $\kappa \lambda=90^\circ$ )



(a)



(b)

図 4.4  $w_{11}$  に及ぼす  $k$  の影響 ( $Re=0$ ,  $\kappa \lambda=90^\circ$ ,  $\kappa=0.01$ ,  $\tau=\pi/2$ )

曲管内の定常流れにおいても  $Re$  が小さい場合にみられる。しかし平均流のない円環状曲管内脈動流れの場合には、二次流れは遠心力によってひきおこされるため、このような流れはみられない。異なる  $\kappa$  の値に対しても図 4.2 からわかるように  $\kappa \leq 1$  では  $\kappa^2$  で除した値はだいたい同じ大きさとなる。しかし  $\kappa$  が極度に大きくなると二次流れの様子は異なる。  $\kappa$  が大きく,  $t$  が小さい場合には  $w_{11}$  の分布に与える曲率の影響

響は図4.3に示されるように管壁近くで大きく、管の中心近くの流体は管壁近くで変動する流体にひきずられて変化し、その部分での  $w_{11}$  の分布は直線状になっている。

図4.4は平均流がない場合の  $w_{11}$  に与える  $\tau$  の影響を示したものである。 $w_{11}$  の分布は  $w_{01}$  のそれと同様に  $\tau$  が小さいときには管断面全体にわたり、 $\tau$  が大きくなるにつれ管壁近くで鋭いピークをもつ、いわゆる表皮効果の厚さの薄い流れになっている。 $\tau$  の値が十分大きい場合には  $w_{11}$  は図4.5に示すようにおもに管壁近くで変化し、管の中心部の流体は粘性によって管壁近くの流体にひきずられて変化し、その部分での  $w_{11}$  の分布は図4.3のように直線的である。

以上のように平均流が存在しない場合には  $\tau$  および  $\tau_0$  のどのような値に対しても  $w_{11}$  は曲率最大の位置で最大となる。また断面内二次流れは断面内で閉じた流線を示さず、質量保存則から  $w_{11}$  が最小となる断面で  $w_{11}$  が最大となる。しかし平均流が存在する場合には  $w_{11}$  および  $w_{21}$  の分布は  $Re$ ,  $\tau$  および  $\tau_0$  の値によって種々に変化し、平均流がない場合にみられるような管軸方向に規則的に変化する二次流れとは異なったものとなる。脈動流れでは  $\tau$  が重要なパラメータであるので、まず  $\tau$  の値が小さい場合から考える。 $Re=1$  のように平均流速が小さい場合の流れは、容易に想像できるような、平均流がない場合とほとんど同じである。図4.6に  $\tau=1$ ,  $\tau_0=\pi/2$  の場合の  $w_{11}$  の断面内分布が管軸方向に変化する様子を  $Re=10$  および  $100$  について示す。図4.6(a)で  $\tau=1$  の場

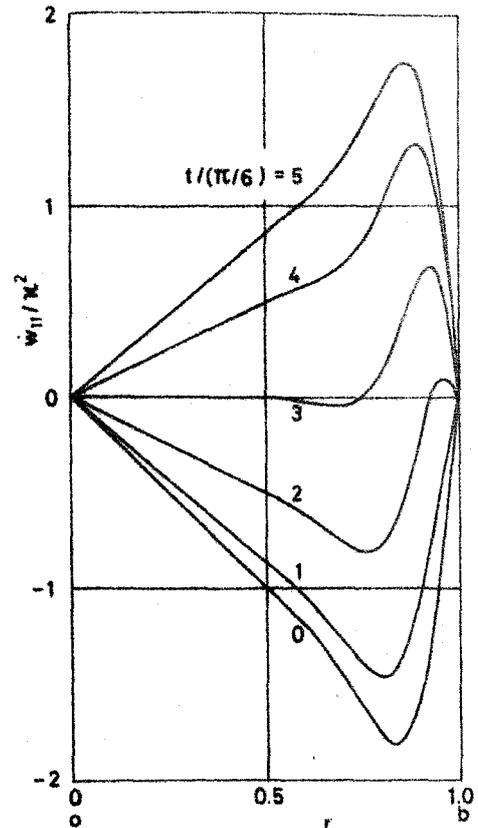


図4.5  $\tau$  が大きい場合の  $w_{11}$  の半周期内の变化 ( $Re=0$ ,  $\tau=0.01$ ,  $\tau_0=90^\circ$ ,  $\tau=20$ )

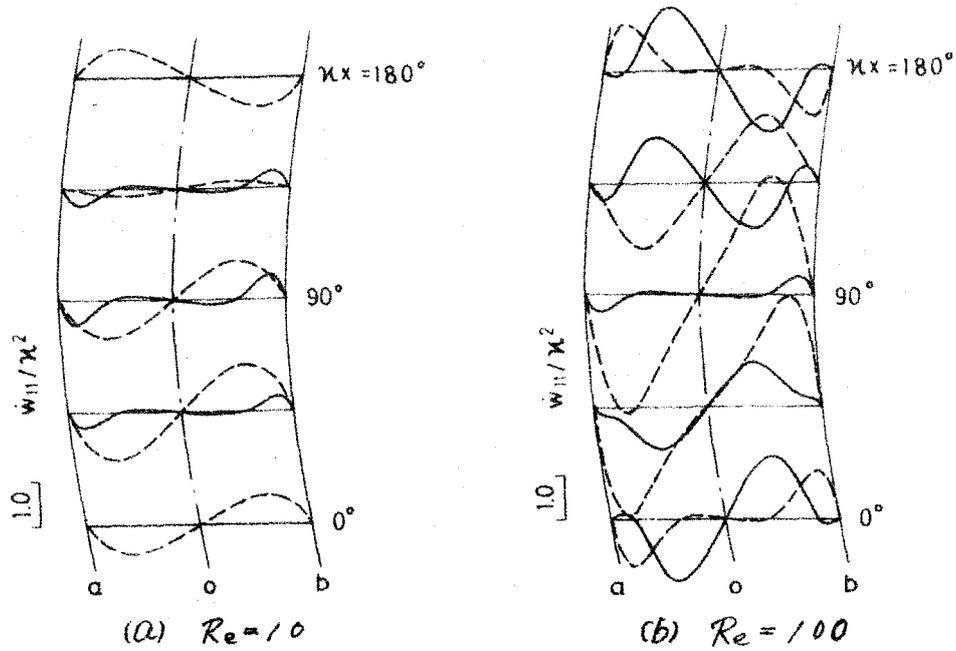


図4.6 平均流が  $w_{||}$  に与える影響 ( $\kappa=1$ ,  $\tau=\pi/2$ , ---;  $\kappa=1$  (10倍されている), ——;  $\kappa=10$ )

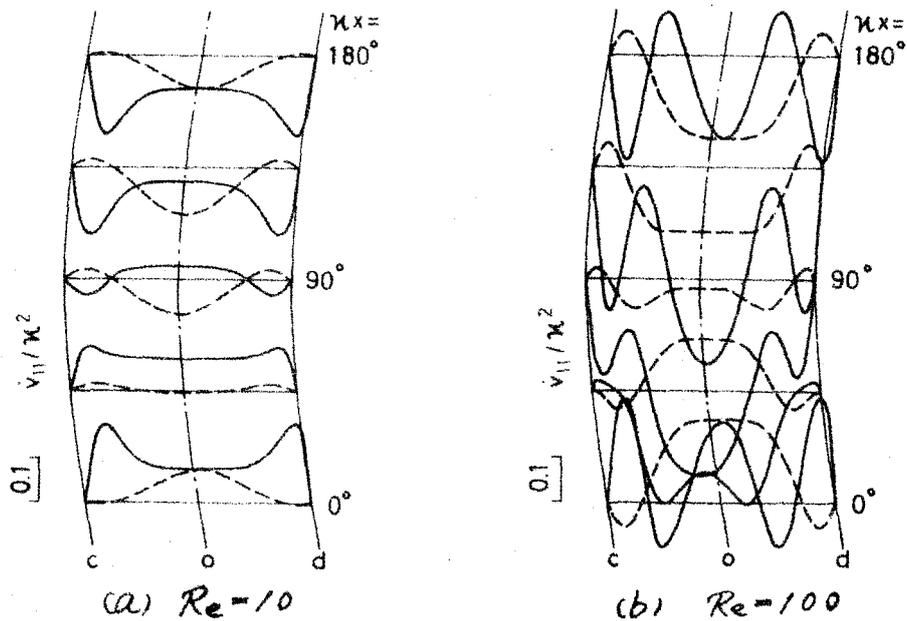


図4.7 平均流が  $v_{||}$  に与える影響 ( $\kappa=1$ ,  $\tau=\pi/2$ , ---;  $\kappa=1$ , ——;  $\kappa=10$ .)

合には  $w_{||}$  の最大値を与える断面は  $\kappa x < 90^\circ$  となっている。これは  $\kappa x$  が  $0^\circ \sim 90^\circ$  の範囲では二次流れのこの周波数成分の遠心力の作用する向きと、平均流がない場合について先に述べた粘性力の作用する向きが相反するに因りである。したがって遠心力によって引きおこされる二次

流れと粘性力によるそれとが互いに打ち消し合い、 $\kappa\alpha < 90^\circ$  の断面で  $\dot{w}_{||}$  が最小となる。一方この程度の大きさの  $Re$  の場合には  $\dot{w}_{||}$  が最小となる断面と  $\dot{w}_{\perp}$  が最大となる断面とがだいたい一致すると考えられるので、図のようは結果になる。この様子は図4.7 (a) から明らかとなる。このように  $Re$  の値が比較的小さい間は  $\dot{w}_{||}$  が最大となる断面は  $Re=0$  の場合の  $\kappa\alpha=90^\circ$  から、 $Re$  の値が増すにつれ、より小さい  $\kappa\alpha$  の断面へと移動する。ある程度  $Re$  が大きくなると遠心力が支配的となり、それと同時に管軸方向の慣性も大きくなり、管軸の曲率が二次流れに与える影響は管軸の変化に対して遅れて現われる。 $Re$  が大きく、 $\kappa$  が小さいときには定常成分の影響が大きく、曲率が脈動成分に与える影響の管軸の変化に対するずれ、すなわち  $\dot{w}_{||}$  および  $\dot{w}_{\perp}$  の最大値あるいは最小値を与える管断面の軸方向位置の最大曲率位置からのずれは  $w_{||0}$  および  $w_{\perp 0}$  の最大値あるいは最小値を与えるそれらとほぼ同一である。図4.6 (b) は  $Re=100$ 、 $\tau=\pi/2$  の場合の  $\dot{w}_{||}$  の分布を示したものである。 $\kappa=1$  の場合、 $\tau=\pi/2$  のときには遠心力は管の曲りの外側に向かって作用し、その大きさは曲率の大きさに比例するが、上述のように二次流れにはその影響が管軸の変化に対してずれて現われる(図4.7 (b))。したがって図4.6 (b) のように曲りの外側で軸流速度が速くならず、内側で速くなっている。この様子は図4.8 からよく知られる。図4.8 (a) は  $\kappa=0.01$  の場合であり、このように曲率が管軸方向にゆっくり変化する場合には、曲率の影響は流れに対して場所的な遅れをほとんど伴わず現われる。すなわち図で曲率が最大となる  $\kappa\alpha=90^\circ$  で  $\dot{w}_{||}$  が最大となり、遠心力の作用する方向に一致して  $\dot{w}_{\perp}$  の分布となっている。一方、 $\kappa=0.1$  (図4.8 (b)) となると  $\kappa\alpha=105^\circ$  近くで  $\dot{w}_{||}$  が最大となっている。そして  $\kappa=1$  (図4.6 (b)) で同じ分布形の最大値を与えるのは  $\kappa\alpha=255^\circ$  付近(図示されていないが、式(4.12)からわかるように  $(\dot{w}_{||})_{\kappa\alpha+180^\circ} = -(\dot{w}_{||})_{\kappa\alpha}$  の関係がある。) である。

このように  $\kappa$  が小さく  $Re$  が大きいと、平均流の影響が強くと現われ、

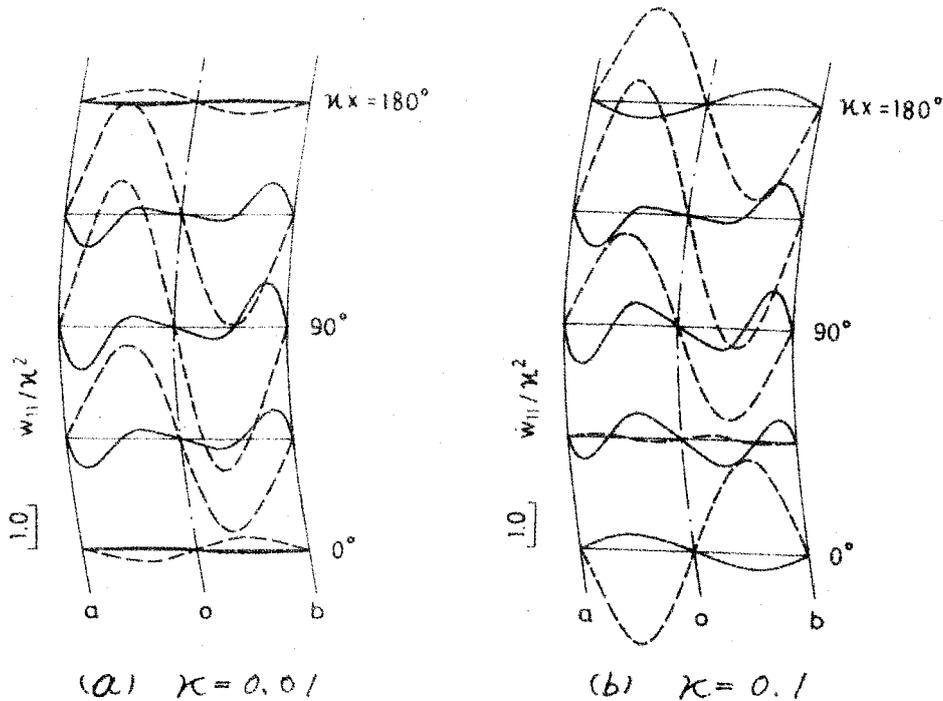
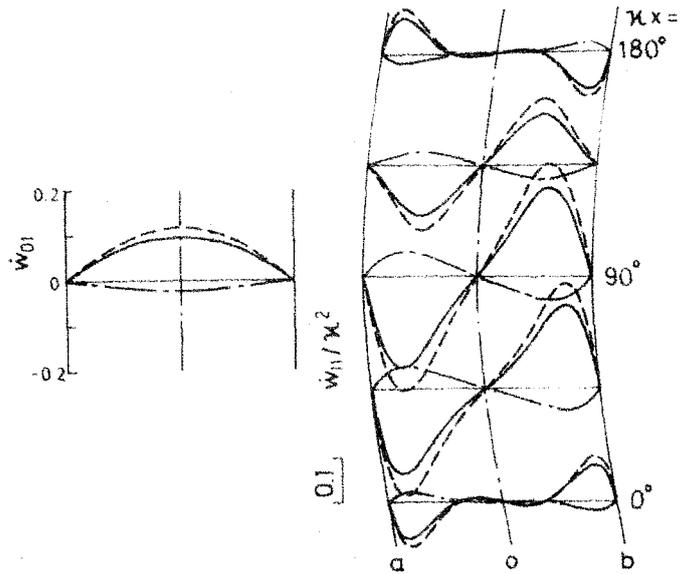
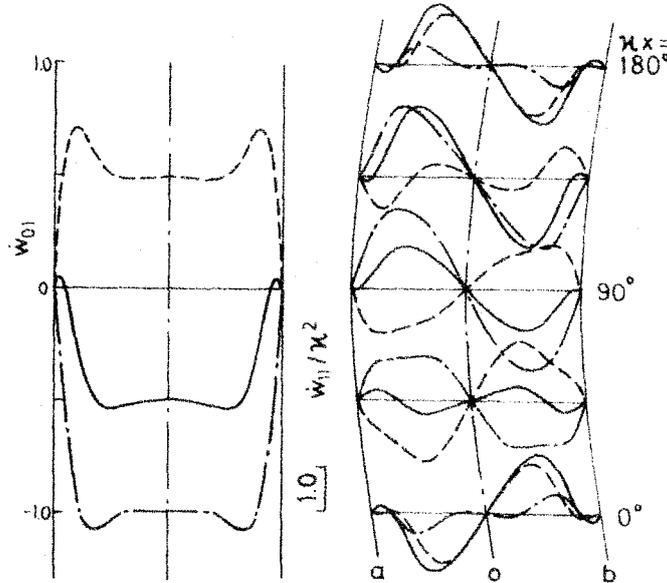


図4.8  $\kappa$ の影響 ( $Re=100$ ,  $t=\pi/2$ , ---;  $t_e=1$ , ———;  $t_e=10$ .)

$w_{11}$ で考えると図4.9 (a)に示すように時間的にどの瞬間をとっても、その最大値を与える管断面の軸方向位置はほとんど変化しない。一方  $t_e$  が大きくなるにつれ、同じ  $Re$  の値でも脈動流れの影響が次第に大きくなり、 $t_e=10$  の場合には図4.9 (b)に示すようになる。すなわち曲率が流体に与える影響の曲率の変化に対する遅れのうち、定常流によるものはつねに  $\kappa x$  の増す方向にあるが、脈動流れによるものの方向は時間的に変化する。 $t_e$  の値が小さいうちは後者が小さく無視し得る程度なので図4.9 (a) のようになるが、 $t_e$  が大きいと後者の影響も前者と同じ程度となる。図4.9 (b) で  $t=0$  および  $(1/3)\pi$  では遠心力は曲りの内側を向き、 $w_{11}$  は曲りの内側で  $w_{11}$  を増加させるように分布する。 $t=(1/2)\pi$  (図4.6 (b)) および  $(2/3)\pi$  では遠心力は曲りの外側を向き、 $w_{11}$  は曲りの外側で  $w_{11}$  を増加させるように分布する。そして  $t=0$  および  $(1/3)\pi$  のときには遅れの方法は  $\kappa x$  を減ずる向きにあり、その大きさは  $w_{11}$  に比例する。 $t=(1/2)\pi$  および  $(2/3)\pi$  のときには遅れの方法が逆となるが、その大きさについては上と同様である。定常流による遅れはほぼ一定と考えられるから、以上の観点から  $w_{11}$  の最大値を与え



(a)  $l = 1$



(b)  $l = 10$

図4.9 半周期内の  $w_{11}$  の軸方向変化 (---) ;  $t=0$ , (—) ;  $t=\frac{1}{3}\pi$ , (---) ;  $t=\frac{2}{3}\pi$ .)

$\alpha$   $\alpha$  は  $t=0 \sim (2/3)\pi$  では  $t$  とともに増加することが考えられる。実際、図4.9(b) および図4.6(b) からわかるように、 $t=0$ ,  $(1/3)\pi$ ,  $(1/2)\pi$  および  $(2/3)\pi$  のときの  $|w_{11}|$  の最大値を与える  $\alpha$  の値はそれぞれ  $\alpha = 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$  および  $225^\circ$  とともに増加している。

次に  $l$  が大きく、 $\alpha$  が小さい場合には、 $x$  方向の運動方程式において慣性項のうち、時間的加速度を表わす項は  $l^2$  に比例し、場所的加速度を表わす項は  $\alpha^2 R^2$  に比例するので、 $R_e$  が大きくても相対的に平均

流のない場合に近づき、図4.8の実線のようになる。また $\kappa$ が小さくなくても、 $Re$ が小さい場合には上と同じことがいえる(図4.6(a),  $\tau = 10$ )。

#### 4.4 結 言

管軸の最大曲率が比較的小さいで行管内層流脈動流れをパラメータ( $A/\tau^2$ )が小さいという仮定のもとに、平均流がない場合およびある場合について解析し、次の結果を得た。

(1) 平均流がない場合には $\kappa$ ,  $\tau$ ,  $\sigma$ の値のいかんにかかわらず $\omega_{\parallel}$ は軸方向に曲率の変化と同じ変化をし、断面内分布はつねに曲りの内側で $\omega_{\parallel}$ を増すようなものとなる。

(2) 平均流の流速が大きく、 $\kappa$ が小さくなく、 $\tau$ が小さい場合には、 $\omega_{\parallel}$ に及ぼす曲率の影響の管軸の変化に対する遅れはおもに平均流によって決まり、脈動流れの影響をあまり受けないが、 $\tau$ が大きくなるにつれ脈動流れの影響が大きくなっていく。

(3) 平均流の流速が大きく、 $\kappa$ が小さい場合、 $\tau$ が小さいうちは平均流の影響の方が大きいため(2)と同じことがいえるが、 $\tau$ が大きくなると平均流の影響は相対的に小さくなり、 $\omega_{\parallel}$ は平均流のない場合の分布に近づく。

## 第5章 圧縮性をわずかに考慮した場合の円管内非定常流れに及ぼす平均流の影響

### 5.1 緒言

各種曲管内層流に対して、これまで流体は非圧縮性のものであるとして解析をすすめてきた。しかし前章のような脈動流れでは流体の圧縮性による波動の伝ば遅れが問題となる場合もある。本章では流体の圧縮性を考慮に入れ、それが及ぼす影響を最も簡単な真直円管内の流れについて解析する。

平均流がない場合についてはすでにかなり詳しく研究されていて、たとえば § 1.2 で挙げにような論文が発表されているが、現実の管路流れでは平均流のある場合が多い。平均流を考慮したこれまでの研究では、平均流がない場合の変動流の解に平均流の解がたんに加えられているだけであり、平均流が変動流に及ぼす影響についての十分な議論がなされていない。本章ではこの点を明らかにし、平均流が変動成分の速度分布、伝ば定数、伝達関数などに及ぼす影響について述べる。解析にあたっては § 1.3 の最後で述べた仮定を用いるが、それらのうち管の長さに対する条件は以下のとおりである；管は助走部の影響が無視でき、かつ平均流の速度分布の管軸方向への変化が無視できる範囲で十分長いものとする。さらに変動流としては音響学的近似が成り立つ範囲のものも仮定している。

### 5.2 解析

管断面の半径方向座標を  $r^*$ 、管軸方向座標を  $x^*$  とし、速度ベクトル  $U^*$  のそれぞれの方向の成分を  $u^*$  および  $w^*$  とする。ベクトル表示された運動方程式および連続の式

$$\frac{\partial U^*}{\partial t^*} + (U^* \text{grad}) U^* = -\frac{1}{\rho^*} \text{grad } p^* + \frac{\nu^*}{J} \text{grad}(\text{div } U^*) + \nu^* \nabla^2 U^* \quad (5.1)$$

$$\partial p^* / \partial t^* + \text{div}(p^* u^*) = 0 \quad (5.2)$$

において圧力, 密度, 速度は定常成分  $\bar{p}^*$ ,  $\bar{\rho}^*$ ,  $\bar{u}^*$  と非定常な変動成分  $\tilde{p}^*$ ,  $\tilde{u}^*$  に分けることができる。すなわち次式で表現できる。

$$\left. \begin{aligned} p^* &= \bar{p}^* + \tilde{p}^* \\ \rho^* &= \bar{\rho}^* + \tilde{\rho}^* \\ u^* &= \bar{u}^* + \tilde{u}^* \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

また音速  $c^*$  は

$$c^* = \sqrt{\partial p^* / \partial \rho^*} \quad (5.4)$$

で与えられる。式(5.3)を式(5.1), (5.2)に代入し, 時間平均をとると平均流に対する式として

$$\left. \begin{aligned} (\bar{u}^* \text{grad}) \bar{u}^* &= - (1/\bar{\rho}^*) \text{grad} \bar{p}^* + (\nu^*/\beta) \text{grad}(\text{div} \bar{u}^*) + \nu^* \nabla^2 \bar{u}^* \\ \text{div}(\bar{\rho}^* \bar{u}^*) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

を得る。液体の場合には圧縮性が小さいので上式の解は非圧縮の場合の解から擾動展開して求めることができ, 第0近似はポアズイユ流れとなる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho}_0^* &= \bar{\rho}^* - K^* x^* \\ \bar{\omega}_0^* &= (K^*/4 \bar{\rho}_0^* \nu^*) (r_0^{*2} - r^{*2}) \\ \bar{u}_0^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

となる。ただし  $\bar{\rho}^*$  および  $K^*$  は定数であり, 添字0は第0近似であることを示す。

変動流については音響学的近似が成り立つという仮定のもとに微小項を省略し, さらに平均流の圧縮性を無視して次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}^*}{\partial t^*} + (\bar{u}_0^* \text{grad}) \tilde{u}^* + (\tilde{u}^* \text{grad}) \bar{u}_0^* &= - \frac{1}{\bar{\rho}_0^*} \text{grad} \tilde{p}^* \\ + \frac{\nu^*}{\beta} \text{grad}(\text{div} \tilde{u}^*) + \nu^* \nabla^2 \tilde{u}^* & \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}^*}{\partial t^*} + \bar{\rho}_0^* \text{div} \tilde{u}^* + \bar{u}_0^* \text{grad} \tilde{p}^* = 0 \quad (5.8)$$

ここで以下の無次元化を行う。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}^* &= c^* \tilde{u}, & \tilde{p}^* &= \bar{p}_0^* c^{*2} \tilde{p}, & \hat{p}^* &= \bar{p}_0^* \hat{p}, \\ K^*/\bar{p}_0^* &= c^{*2} K/r_0^*, & \nu^* &= r_0^* c^* \nu, \\ r^* &= r_0^* r, & x^* &= r_0^* x, & \lambda^* &= \lambda/r_0^*, \\ t^* &= r_0^* t/c^*, & \omega^* &= c^* \omega/r_0^*. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

さらに平均流のマッハ数としてポアソユ流れの最大流速  $W_0^*$  と音速との比を用いると

$$\bar{\omega}_0 = M(1-r^2) \quad (5.10)$$

となる。ただし  $M = W_0^*/c^*$  である。また式(5.4)より次式を得る。

$$\partial \tilde{p} / \partial \hat{p} = 1 \quad (5.11)$$

式(5.7), (5.8) を式(5.9)により無次元化し, 式(5.10), (5.11) を代入し, さらに初期値を0としてラプラス変換して次式を得る。

$$\lambda \hat{w} + M(1-r^2) \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} - 2Mr \hat{u} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}$$

$$+ \nu \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \hat{u})}{\partial r} \right] + \nu \left[ \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{w}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} \right] \quad (5.12)$$

$$\lambda \hat{u} + M(1-r^2) \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \nu \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \hat{u})}{\partial r} \right]$$

$$+ \nu \left[ \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} - \frac{\hat{u}}{r^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \right] \quad (5.13)$$

$$\lambda \hat{p} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \hat{u})}{\partial r} + M(1-r^2) \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = 0 \quad (5.14)$$

ここで  $\lambda$  はラプラス演算子であり,  $\hat{\phantom{x}}$  はラプラス変換された量であることを示す。上式より解は変数分離形で求められることがわかる。そこで

$A_0, B_0$  を定数として

$$\left. \begin{aligned} \hat{p} &= A_0 \hat{p}_r e^{\lambda x} + B_0 \hat{p}_r e^{-\lambda x} \\ \hat{w} &= A_0 \hat{w}_r e^{\lambda x} + B_0 \hat{w}_r e^{-\lambda x} \\ \hat{u} &= A_0 \hat{u}_r e^{\lambda x} + B_0 \hat{u}_r e^{-\lambda x} \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

と置いて解を求めら。ここで添字  $r$  は  $x$  を含まない関数であることを示す。固有値  $\lambda$  および  $\lambda'$  は無限に存在するが、第1番目のものが重要であるのでそれらについて考える。さらにいま考えているのは  $M \ll 1$  の場合についてであるので

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}_r &= \hat{p}_{r0} + M \hat{p}_{r1} + \dots, & \hat{p}'_r &= \hat{p}'_{r0} + M \hat{p}'_{r1} + \dots, \\ \hat{w}_r &= \hat{w}_{r0} + M \hat{w}_{r1} + \dots, & \hat{w}'_r &= \hat{w}'_{r0} + M \hat{w}'_{r1} + \dots, \\ \hat{u}_r &= \hat{u}_{r0} + M \hat{u}_{r1} + \dots, & \hat{u}'_r &= \hat{u}'_{r0} + M \hat{u}'_{r1} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

と展開することができら。式(5.15)で  $e^{\lambda x}$  の項と  $e^{\lambda' x}$  の項とはそれぞれ独立に式(5.12)~(5.14)を満足するらので、まず  $e^{\lambda x}$  の項について考えら。式(5.15), (5.16)を式(5.12)~(5.14)に代入し、 $M^0$  のオーダーの式を求めらと

$$\begin{aligned} \Delta \hat{w}_{r0} &= -\lambda_0 \hat{p}_{r0} + \frac{\nu}{j} \lambda_0 \left\{ \lambda_0 \hat{w}_{r0} + \frac{1}{r} \frac{d(r \hat{u}_{r0})}{dr} \right\} \\ &+ \nu \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \lambda_0^2 \right) \hat{w}_{r0} \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \Delta \hat{u}_{r0} &= -\frac{d \hat{p}_{r0}}{dr} + \frac{\nu}{j} \frac{d}{dr} \left\{ \lambda_0 \hat{w}_{r0} + \frac{1}{r} \frac{d(r \hat{u}_{r0})}{dr} \right\} \\ &+ \nu \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} + \lambda_0^2 \right) \hat{u}_{r0} \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\Delta \hat{p}_{r0} + \lambda_0 \hat{w}_{r0} + \frac{1}{r} \frac{d(r \hat{u}_{r0})}{dr} = 0 \quad (5.19)$$

とらら。上式の解は

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}_{r0} &= J_0(\xi r) \\ \hat{w}_{r0} &= \Gamma \lambda_0 \left\{ \frac{J_0(\xi)}{J_0(\eta)} J_0(\eta r) - J_0(\xi r) \right\} \\ \hat{u}_{r0} &= -\Gamma \xi \left\{ \frac{J_1(\xi)}{J_1(\eta)} J_1(\eta r) - J_1(\xi r) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

とらら。  $\Gamma$  は  $(94)$

$$\left. \begin{aligned} \xi^2 &= \lambda_0^2 - \frac{\nu^2}{1 + \frac{4}{3}\nu\lambda} \\ \eta^2 &= \lambda_0^2 - \frac{\nu}{\lambda} \\ \Gamma &= \frac{1 + \frac{4}{3}\nu\lambda}{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

である。固有値は

$$\lambda_0 = \beta\lambda, \quad \beta = \left\{ 1 - \frac{2J_1(\eta)}{2J_0(\eta)} \right\}^{-1/2} \quad (5.22)$$

となる。さらに次式の関係が得られる。

$$\hat{p}_{r0} = \hat{p}_{r1}, \quad \hat{w}_{r0} = -\hat{w}_{r1}, \quad \hat{u}_{r0} = \hat{u}_{r1}, \quad \lambda'_0 = \lambda_0 \quad (5.23)$$

次に  $M'$  のオーダーの式は、以上の  $M^0$  のオーダーの解を式(5.12)~(5.14)に代入し、整理すると

$$\begin{aligned} \nu \hat{w}_{r1} &= -\lambda_0 \hat{p}_{r1} + \frac{1}{3}\nu\lambda_0 \left\{ \lambda_0 \hat{w}_{r1} + \frac{1}{r} \frac{d(r\hat{u}_{r1})}{dr} \right\} \\ + \nu \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \lambda_0^2 \right) \hat{w}_{r1} &+ W_x(r) \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \nu \hat{u}_{r1} &= -\frac{d\hat{p}_{r1}}{dr} + \frac{\nu}{3} \frac{d}{dr} \left\{ \lambda_0 \hat{w}_{r1} + \frac{1}{r} \frac{d(r\hat{u}_{r1})}{dr} \right\} \\ + \nu \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} + \lambda_0^2 \right) \hat{u}_{r1} &+ W_r(r) \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\nu \hat{p}_{r1} + \lambda_0 \hat{w}_{r1} + \frac{1}{r} \frac{d(r\hat{u}_{r1})}{dr} + Z(r) = 0 \quad (5.26)$$

となる。これより

$$\left. \begin{aligned} W_x(r) &= \lambda_0 \left\{ \frac{\nu}{3}\nu\lambda_1 - (1-r^2) \right\} \hat{w}_{r0} + \left\{ 2 + \frac{\nu\lambda_1}{3} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right\} (r\hat{u}_{r0}) - \lambda_1 \hat{p}_{r0} \\ W_r(r) &= \frac{\nu\lambda_1}{3} \frac{d\hat{w}_{r0}}{dr} + \lambda_0 \left\{ 2\nu\lambda_1 - (1-r^2) \right\} \hat{u}_{r0} \\ Z(r) &= \lambda_1 \hat{w}_{r0} + \lambda_0 (1-r^2) \hat{p}_{r0} \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

である。(5.24)×λ₀ + d(5.25)/dr + (5.25)×(1/r) の操作を行い、連続の式(5.26)を代入して整理すると

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \lambda_0^2 - \frac{\nu^2}{1 + \frac{4}{3}\nu\lambda} \right\} \hat{P}_{r1} = \frac{1}{1 + \frac{4}{3}\nu\lambda} \left[ \lambda_0 W_x + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r W_r) + \nu Z - \frac{4}{3}\nu \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \lambda_0^2 \right) Z \right]$$

となる。上式右辺に式(5.27)を代入して計算し、整理すると次の形の微分方程式となる。

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \xi^2 \right) \hat{P}_{r1} = A_1 J_0(\xi r) + B_1 r J_1(\xi r) + C_1 r^2 J_0(\xi r) + D_1 r J_1(\eta r) \quad (5.28)$$

上式中の係数 A₁ ~ D₁ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -2\lambda_0 \lambda_1 + \frac{\lambda_0 \nu}{1 + \frac{4}{3}\nu\lambda} \left\{ \frac{\lambda}{\nu} + \frac{16}{3} \left( 1 + \frac{1}{3}\nu\lambda \right) \right\} + \frac{\lambda_0 \lambda}{\left( 1 + \frac{4}{3}\nu\lambda \right)^2} \\ B_1 &= \frac{4\lambda_0 \xi}{1 + \frac{4}{3}\nu\lambda} \left( \Gamma - \frac{4}{3}\nu \right) \\ C_1 &= \frac{-\lambda_0 \lambda}{1 + \frac{4}{3}\nu\lambda} \left\{ 1 + \frac{1}{1 + \frac{4}{3}\nu\lambda} \right\} \\ D_1 &= \frac{-4\Gamma \lambda_0 \xi}{1 + \frac{4}{3}\nu\lambda} \frac{J_1(\xi)}{J_1(\eta)} \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

式(5.28)の特解は

$$\hat{P}_{r1} = B_2 r J_1(\xi r) + C_2 r^2 J_0(\xi r) + D_2 r^3 J_1(\xi r) + E_2 J_0(\eta r) + F_2 r J_1(\eta r) \quad (5.30)$$

となり、各係数は式(5.29)の A₁ ~ D₁ を用いて次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= \frac{A_1}{2\xi} + \frac{B_1}{2\xi^2} - \frac{C_1}{3\xi^3} \\ C_2 &= -\frac{B_1}{4\xi} + \frac{C_1}{6\xi^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} D_2 &= \frac{C_1}{6\zeta} \\ E_2 &= -\frac{2\gamma D_1}{(\zeta^2 - \eta^2)^2} \\ F_2 &= \frac{D_1}{\zeta^2 - \eta^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

式(5.28)の斉次解は  $A_2 J_0(\zeta r)$  であるが、 $A_2 = 0$  としても一般性を失なわないので、 $\hat{p}_{r1}$  の解として式(5.30)を採用する。

次に  $\hat{w}_{r1}$  を求める。式(5.24)に式(5.26)を代入し整理すると

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \lambda_0^2 - \frac{1}{\nu}\right) \hat{w}_{r1} = \frac{\lambda_0}{\nu} \left(1 + \frac{1}{\nu} \nu_1\right) \hat{p}_{r1} - \frac{1}{\nu} W_x + \frac{1}{\nu} \lambda_0 Z$$

となる。上式に式(5.27)および(5.30)を代入し、整理すると次の形の微分方程式となる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \eta^2\right) \hat{w}_{r1} &= A_0 J_0(\zeta r) + B_0 r J_1(\zeta r) + C_0 r^2 J_0(\zeta r) + D_0 r^3 J_1(\zeta r) \\ &+ E_0 J_0(\eta r) + F_0 r J_1(\eta r) + G_0 r^2 J_0(\eta r) \end{aligned} \quad (5.32)$$

上式中の係数  $A_0 \sim G_0$  は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \lambda_0^2 \left(\frac{1}{\nu} - \frac{\Gamma}{\nu}\right) + \lambda_1 \left\{ 2\Gamma \lambda_0^2 + \frac{1}{\nu} \left(1 + \frac{1}{\nu} \nu_1\right) \right\} \\ B_0 &= \frac{\lambda_0}{\nu} \left(1 + \frac{1}{\nu} \nu_1\right) B_2 - \frac{2}{\nu} \Gamma \zeta \\ C_0 &= \frac{\lambda_0}{\nu} \left(1 + \frac{1}{\nu} \nu_1\right) C_2 + \lambda_0^2 \left(\frac{\Gamma}{\nu} - \frac{1}{\nu}\right) \\ D_0 &= \frac{\lambda_0}{\nu} \left(1 + \frac{1}{\nu} \nu_1\right) D_2 \\ E_0 &= \frac{\lambda_0}{\nu} \left(1 + \frac{1}{\nu} \nu_1\right) E_2 - \Gamma \lambda_0^2 \left(2\lambda_1 - \frac{1}{\nu}\right) \frac{J_0(\zeta)}{J_0(\eta)} \\ F_0 &= \frac{\lambda_0}{\nu} \left(1 + \frac{1}{\nu} \nu_1\right) F_2 + \frac{2}{\nu} \Gamma \zeta \frac{J_1(\zeta)}{J_1(\eta)} \\ G_0 &= -\frac{1}{\nu} \Gamma \lambda_0^2 \frac{J_0(\zeta)}{J_0(\eta)} \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

式(5.32)の解は

$$\begin{aligned}
 A_4 &= \frac{A_3}{\eta^2 - \xi^2} - \frac{2\xi B_3}{(\eta^2 - \xi^2)^2} - \frac{4C_3}{(\eta^2 - \xi^2)^2} \left(1 + \frac{2\xi^2}{\eta^2 - \xi^2}\right) + \frac{16\xi D_3}{(\eta^2 - \xi^2)^3} \left(2 + \frac{3\xi^2}{\eta^2 - \xi^2}\right) \\
 B_4 &= \frac{B_3}{\eta^2 - \xi^2} + \frac{4\xi C_3}{(\eta^2 - \xi^2)^2} - \frac{4D_3}{(\eta^2 - \xi^2)^2} \left(1 + \frac{6\xi^2}{\eta^2 - \xi^2}\right) \\
 C_4 &= \frac{C_3}{\eta^2 - \xi^2} - \frac{6\xi D_3}{(\eta^2 - \xi^2)^2} \\
 D_4 &= \frac{D_3}{\eta^2 - \xi^2} \\
 E_4 &= \frac{E_3}{2\eta} + \frac{F_3}{2\eta^2} - \frac{G_3}{3\eta^3} \\
 G_4 &= -\frac{F_3}{4\eta} + \frac{G_3}{6\eta^2} \\
 H_4 &= \frac{G_3}{6\eta}
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

の各係数を用いて次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
 \hat{w}_{r1} &= A_4 J_0(\xi r) + B_4 r J_1(\xi r) + C_4 r^2 J_0(\xi r) + D_4 r^3 J_1(\xi r) \\
 &+ E_4 J_0(\eta r) + F_4 r J_1(\eta r) + G_4 r^2 J_0(\eta r) + H_4 r^3 J_1(\eta r)
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

上式中  $E_4 J_0(\eta r)$  は斉次解であり、その係数  $E_4$  は管壁での境界条件、つまり  $r=1$  で  $\hat{w}_{r1}=0$  から定まり

$$E_4 = \frac{-1}{J_0(\eta)} \left\{ (A_4 + C_4) J_0(\xi) + (B_4 + D_4) J_1(\xi) + G_4 J_0(\eta) + (F_4 + H_4) J_1(\eta) \right\} \tag{5.36}$$

と定まる。

$\hat{w}_{r1}$  の場合と同様にして  $\hat{u}_{r1}$  に対して次の微分方程式を得る。

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} + \eta^2 \right) \hat{u}_{r1} &= A_5 J_1(\xi r) + B_5 r J_0(\xi r) + C_5 r^2 J_1(\xi r) \\
 &+ D_5 r^3 J_0(\xi r) + E_5 J_1(\eta r) + F_5 r J_0(\eta r) + G_5 r^2 J_1(\eta r)
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

次に

$$\begin{aligned}
 A_5 &= \lambda_0 \xi \left\{ -\frac{1}{3} + \frac{\Gamma}{\nu} (1 - 2\nu\lambda_1) \right\} \\
 B_5 &= \frac{1}{\nu} \left( 1 + \frac{1}{3}\nu\lambda_1 \right) (\xi B_2 + 2C_2) - \frac{2}{3}\lambda_0 \\
 C_5 &= \frac{1}{\nu} \left\{ \left( 1 + \frac{1}{3}\nu\lambda_1 \right) (-\xi C_2 + 2D_2) - \Gamma\lambda_0 \xi \right\} \\
 D_5 &= \frac{\xi}{\nu} \left( 1 + \frac{1}{3}\nu\lambda_1 \right) D_2 \\
 E_5 &= -\frac{1}{\nu} \left\{ \eta \left( 1 + \frac{1}{3}\nu\lambda_1 \right) E_2 + \Gamma\lambda_0 \xi (1 - 2\nu\lambda_1) \frac{J_1(\xi)}{J_1(\eta)} \right\} \\
 F_5 &= \frac{\eta}{\nu} \left( 1 + \frac{1}{3}\nu\lambda_1 \right) F_2 \\
 G_5 &= \frac{1}{\nu} \Gamma\lambda_0 \xi \frac{J_1(\xi)}{J_1(\eta)}
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

である。式(5.37)の解は

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_{r1} &= A_6 J_1(\xi r) + B_6 r J_0(\xi r) + C_6 r^2 J_1(\xi r) + D_6 r^3 J_0(\xi r) \\
 &+ E_6 J_1(\eta r) + F_6 r J_0(\eta r) + G_6 r^2 J_1(\eta r) + H_6 r^3 J_0(\eta r)
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

と表現でき、その係数は

$$\begin{aligned}
 A_6 &= \frac{A_5}{\eta^2 - \xi^2} + \frac{2\xi B_5}{(\eta^2 - \xi^2)^2} - \frac{8\xi^2 C_5}{(\eta^2 - \xi^2)^3} - \frac{16\xi D_5}{(\eta^2 - \xi^2)^3} \left( 1 + \frac{\eta^2}{\eta^2 - \xi^2} \right) \\
 B_6 &= \frac{B_5}{\eta^2 - \xi^2} - \frac{4\xi C_5}{(\eta^2 - \xi^2)^2} - \frac{8D_5}{(\eta^2 - \xi^2)^2} \left( 1 + \frac{\eta^2}{\eta^2 - \xi^2} \right) \\
 C_6 &= \frac{C_5}{\eta^2 - \xi^2} + \frac{6\xi D_5}{(\eta^2 - \xi^2)^2} \\
 D_6 &= \frac{D_5}{\eta^2 - \xi^2} \\
 F_6 &= -\frac{E_5}{2\eta} \\
 G_6 &= \frac{F_5}{4\eta} + \frac{G_5}{3\eta^2} \\
 H_6 &= -\frac{G_5}{6\eta}
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

となる。齊次解  $E_6 J_1(\eta r)$  の係数  $E_6$  は  $\bar{w}_{r1}$  の場合と同様にして定まり、

$$E_6 = \frac{\gamma}{J_1(\eta)} \{ (A_6 + C_6) J_1(\xi) + (B_6 + D_6) J_0(\xi) + G_6 J_1(\eta) + (F_6 + H_6) J_0(\eta) \} \quad (5.41)$$

となる。

次に固有値  $\lambda_1$  を求める。以上のようにして得られた  $\hat{p}_r$ ,  $\hat{w}_r$  および  $\hat{u}_r$  は連続の式を満足しなければならない。式(5.26)に式(5.30), (5.35) および (5.39) を代入して, 各  $r$  の関数ごとに整理すると,  $J_0(\eta r)$  の係数以外はすべて 0 となる。  $J_0(\eta r)$  の係数も 0 とならなければならないことから次式を得る。

$$-1E_2 + \lambda_0 E_4 + \gamma E_6 + 2F_6 + \Gamma \lambda_0 \lambda_1 \frac{J_0(\xi)}{J_0(\eta)} = 0 \quad (5.42)$$

上式に式(5.31), (5.36), (5.40) および (5.41) を代入して次の固有値方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_0}{J_0(\eta)} \{ (A_4 + C_4) J_0(\xi) + (B_4 + D_4) J_1(\xi) + G_4 J_0(\eta) + (F_4 + H_4) J_1(\eta) \} \\ & + \frac{\gamma}{J_1(\eta)} \{ (A_6 + C_6) J_1(\xi) + (B_6 + D_6) J_0(\xi) + G_6 J_1(\eta) + (F_6 + H_6) J_0(\eta) \} \\ & - 1E_2 - 2F_6 - \Gamma \lambda_0 \lambda_1 \frac{J_0(\xi)}{J_0(\eta)} = 0 \end{aligned} \quad (5.43)$$

上式の各係数を,  $\Gamma$  にたとえば  $A_4 = A_{40} + A_{41} \lambda_1$  などと,  $\lambda_1$  を含まない項と  $\lambda_1$  でくくれる項に分けて整理して次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} & \lambda_1 = \Lambda_{10} / \Lambda_{11} \\ & \Gamma \text{ に 対 し} \\ & \Lambda_{10} = \lambda_0 J_1(\eta) \{ (A_{40} + C_{40}) J_0(\xi) + (B_{40} + D_{40}) J_1(\xi) + G_{40} J_0(\eta) \\ & + (F_{40} + H_{40}) J_1(\eta) \} + \gamma J_0(\eta) \{ (A_{60} + C_{60}) J_1(\xi) + (B_{60} + D_{60}) J_0(\xi) \\ & + G_{60} J_1(\eta) + (F_{60} + H_{60}) J_0(\eta) - 2F_{60} J_1(\eta) \} - 1E_{20} J_0(\eta) J_1(\eta) \\ & \Lambda_{11} = \lambda_0 J_1(\eta) \{ A_{41} J_0(\xi) + B_{41} J_1(\xi) + F_{41} J_1(\eta) \} \\ & + \gamma J_0(\eta) \{ A_{61} J_1(\xi) + B_{61} J_0(\xi) + F_{61} [J_0(\eta) - 2J_1(\eta)] \} - \Gamma \lambda_0 J_0(\xi) J_1(\eta) \end{aligned} \right\} \quad (5.44)$$

次に  $e^{-\lambda x}$  の項について考える。各係数に ' をつけて示すと、これまでの諸式の各係数を ' のついたものに置き換えるだけでよいが、 $\lambda'_0 = \lambda_0$  を考慮すると次の関係のあることがわかる。

$$\left. \begin{aligned}
 B'_{20} &= -B_{20}, & B'_{21} &= B_{21}, & C'_{20} &= -C_{20} \\
 D'_{20} &= -D_{20}, & E'_{20} &= -E_{20}, & F'_{20} &= -F_{20} \\
 A'_{40} &= A_{40}, & A'_{41} &= -A_{41}, & B'_{40} &= B_{40} \\
 B'_{41} &= -B_{41}, & C'_{40} &= C_{40}, & D'_{40} &= D_{40} \\
 E'_{40} &= E_{40}, & E'_{41} &= -E_{41}, & F'_{40} &= F_{40} \\
 F'_{41} &= -F_{41}, & G'_{40} &= G_{40}, & H'_{40} &= H_{40} \\
 A'_{60} &= -A_{60}, & A'_{61} &= A_{61}, & B'_{60} &= -B_{60} \\
 B'_{61} &= B_{61}, & C'_{60} &= -C_{60}, & D'_{60} &= -D_{60} \\
 E'_{60} &= -E_{60}, & E'_{61} &= E_{61}, & F'_{60} &= -F_{60} \\
 F'_{61} &= F_{61}, & G'_{60} &= -G_{60}, & H'_{60} &= -H_{60}
 \end{aligned} \right\} \quad (5.45)$$

ただし第2番目の添字 1 のつく項がないのは  $\lambda_1$  を含まない項である。

式(5.45)を考慮して、前述の場合と同様にして  $\lambda_1$  を求めると

$$\lambda_1 = -\lambda_1 \quad (5.46)$$

となり、式(5.45)、(5.46)より

$$\hat{p}'_r = -\hat{p}_r, \quad \hat{w}'_r = \hat{w}_r, \quad \hat{u}'_r = -\hat{u}_r \quad (5.47)$$

の関係の存在することがわかる。

以上の結果をまとめると

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{p}_r &= \hat{p}_{r0} + M \hat{p}'_r, & \hat{p}'_r &= \hat{p}_{r0} - M \hat{p}_r \\
 \hat{w}_r &= \hat{w}_{r0} + M \hat{w}'_r, & \hat{w}'_r &= -\hat{w}_{r0} + M \hat{w}_r \\
 \hat{u}_r &= \hat{u}_{r0} + M \hat{u}'_r, & \hat{u}'_r &= \hat{u}_{r0} - M \hat{u}_r \\
 \lambda &= \lambda_0 + M \lambda_1, & \lambda' &= \lambda_0 - M \lambda_1
 \end{aligned} \right\} \quad (5.48)$$

となり、平均流が存在すると圧力、速度、固有値は進行波と後退波とで異なる。

以上で  $M'$  のオーダーまで考えに圧力、速度、固有値が求まった。だが、多くの場合  $M \ll 1$  であるので、音響学的近似が成り立ち、第1番目の固

有値を考えらる場合には

$$\xi^2 = \lambda_0^2 - \lambda^2, \quad \eta^2 = -\nu/\lambda, \quad \Gamma = 1/\lambda \quad (5.49)$$

となり, 式(5.20), (5.30), (5.35) および(5.39)の代りに微小項を省略した次の近似解を用いることが出来る.

$$\hat{p}_{r0} = 1$$

$$\hat{p}_{r1} = \beta \lambda^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{3\eta^2} - \frac{1}{2}\gamma \right) r^2 - \frac{1}{6} r^4 + \frac{8}{\eta^2} \beta^2 \frac{J_0(\eta r)}{J_0(\eta)} + \frac{2}{\eta^2} (\beta^2 - 1) \frac{r J_1(\eta r)}{J_1(\eta)} \right]$$

$$\hat{w}_{r0} = \beta \left\{ \frac{J_0(\eta r)}{J_0(\eta)} - 1 \right\}$$

$$\hat{w}_{r1} = \left( -\beta^2 - \frac{4}{\eta^2} + \gamma \right) \left\{ \frac{J_0(\eta r)}{J_0(\eta)} - 1 \right\} + \left\{ \frac{J_0(\eta r)}{J_0(\eta)} - r^2 \right\} - \frac{2}{3} \beta^2 (1 - r^2) \frac{J_0(\eta r)}{J_0(\eta)}$$

$$+ \frac{1}{4} (\beta^2 - 1) \left( \eta^2 + \frac{8}{3} \right) \left\{ \frac{J_0(\eta r)}{J_0(\eta)} - \frac{r J_1(\eta r)}{J_1(\eta)} \right\} - \frac{\eta^2}{12} (\beta^2 - 1) \left\{ \frac{J_0(\eta r)}{J_0(\eta)} - \frac{r^3 J_1(\eta r)}{J_1(\eta)} \right\}$$

$$\frac{\hat{u}_{r0}}{\nu} = \frac{\eta^2}{2} (\beta^2 - 1) \left\{ \frac{J_1(\eta r)}{J_1(\eta)} - r \right\}$$

$$\frac{\hat{u}_{r1}}{\nu} = \eta^2 \beta \left[ \left\{ \frac{1}{2} (\beta^2 + 1) + \frac{4}{\eta^2} - \gamma \right\} \left\{ \frac{J_1(\eta r)}{J_1(\eta)} - r \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{J_1(\eta r)}{J_1(\eta)} - r^3 \right\} \right]$$

$$+ \frac{\beta^2}{2} \left( 1 + \frac{8}{\eta^2} \right) \left\{ \frac{J_1(\eta r)}{J_1(\eta)} - \frac{r J_0(\eta r)}{J_0(\eta)} \right\} + \frac{2}{3} (\beta^2 - 1) (1 - r^2) \frac{J_1(\eta r)}{J_1(\eta)} - \frac{\beta^2}{6} \left\{ \frac{J_1(\eta r)}{J_1(\eta)} - \frac{r^3 J_0(\eta r)}{J_0(\eta)} \right\} \quad (5.50)$$

さらに  $\hat{p}_{r1}$  は  $\hat{p}_{r0}$  において無視しに  $\lambda^2$  のオーダーの微小量であるので

$$\hat{p}_{r1} = 0 \quad (5.51)$$

としてよい. したがって

$$\lambda_1 = r\lambda$$

$$r = \left( \frac{1}{2} + \frac{\eta^2}{12} \right) (\beta^2 - 1) + \left( \frac{3}{2} + \frac{4}{\eta^2} \right) (\beta^2 - 1) + \frac{5}{6} + \frac{6}{\eta^2} \quad (5.52)$$

である. これらの解は基礎式として微小項を省略した次式を用いて  $M$  により擾動展開して得られるものと一致する.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + M(1-r^2) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} - 2Mr\tilde{u} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r\tilde{u})}{\partial r} + M(1-r^2) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} (5.53)$$

さてここで式(5.7)および(5.8)を導くにあたって省略した各項のオーダーも検討してみよう。正弦波状に変動する場合について考えよと、 $\lambda^* \sim \omega^*/C^*$  である。式(5.7)において慣性項のうち  $(\partial^* \text{grad})u^*$  は  $\partial u^*/\partial t^*$  に比べ  $|\tilde{w}^*|/C^* \ll 1$  として無視されている。静圧項では  $\bar{p}^* = \bar{p}_0^*(1 + \Delta \bar{p})$ ,  $(\Delta \bar{p} \ll 1)$ ,  $\tilde{p}^* = \bar{p}_0^* \tilde{p}$  より

$$\frac{1}{\rho^*} = \frac{1}{\rho_0^*} \left\{ 1 - (\tilde{p} + \Delta \bar{p}) + (\tilde{p} + \Delta \bar{p})^2 - \dots \right\}$$

も考慮すると、変動成分については

$$\frac{1}{\rho^*} \text{grad } p^* = \frac{1}{\rho_0^*} \text{grad } \tilde{p}^* + \frac{\tilde{p}}{\rho_0^*} \text{grad } \tilde{p}^* + \frac{\tilde{p}}{\rho_0^*} \text{grad } \bar{p}^* + \frac{\Delta \bar{p}}{\rho_0^*} \text{grad } \tilde{p}^* - \dots$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ & & 1 & & \frac{|\tilde{w}^*|}{C^*} & & \frac{\nu^* |\bar{w}_0^*|}{r_0^{*2} \omega^* C^*} \quad \frac{\nu^* \ell^* |\bar{w}_0^*|}{r_0^{*2} C^* C^*} \end{array}$$

となり、各項のオーダーは  $\partial u^*/\partial t^*$  との比でそれぞれの項の下に示される通りである。したがって第2項は無視できる。 $\ell = \sqrt{\omega/\nu}$  とすると第3項は  $M \cdot (1/\ell^2)$  のオーダーであり、 $\ell^2 \gg 1$  の場合には無視することができよう。第4項は平均流の圧縮性の影響を示す項であり、 $\ell$  は管軸方向の無次元化のために長さも示すが、 $\omega \ell \ll \ell^2$  の範囲では  $\{\nu^* \ell^*/(r_0^{*2} C^*)\} \ll 1$  となり無視することができよう。連続の式では  $\text{div}(\bar{p}^* \tilde{u}^*)$  の項は各項のオーダーも  $\partial \tilde{p}^*/\partial t^*$  との比でその下に示すと

$$\text{div}(\bar{p}^* \tilde{u}^*) = \bar{p}_0^* \text{div } \tilde{u}^* + \bar{p}_0^* \Delta \bar{p} \text{div } \tilde{u}^* + \tilde{u}^* \bar{p}_0^* \text{grad}(\Delta \bar{p})$$

$$\begin{array}{ccc} & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ & 1 & \frac{\nu^* \ell^* |\bar{w}_0^*|}{r_0^{*2} C^* C^*} \quad \frac{\nu^* |\bar{w}_0^*|}{r_0^{*2} \omega^* C^*} \end{array}$$

となり、運動方程式と同じ範囲で第2項および第3項は無視できる。

$$\operatorname{div}(\hat{p}^* \tilde{u}^*) = \hat{p}^* \operatorname{div} \tilde{u}^* + \tilde{u}^* \operatorname{grad} \hat{p}^*$$

の項では第1項は  $M$  に関して高次の項となるので省略でき、第2項は  $\partial \hat{p}^* / \partial t^*$  に比し  $|\tilde{w}^*| / c^* = M \ll 1$  のオーダーとなり残る。最後に  $\operatorname{div}(\hat{p}^* \tilde{u}^*)$  は  $\partial \hat{p}^* / \partial t^*$  に比べると  $|\tilde{w}^*| / c^*$  のオーダーとなり省略できる。

### 5.3 伝達マトリクス

管の一端  $x=0$  における値に添字  $A$ 、他端  $x=l$  での値に  $B$  をつけて示す。管端での圧力および流速により式(5.15)の  $A_0$  および  $B_0$  が定まる。たとえば管の両端での圧力  $\hat{p}_A, \hat{p}_B$  から  $A_0, B_0$  を定めると、式(5.50), (5.51)を用い式(5.16)から

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}_A = \hat{p}_{x=0} &= A_0 + B_0 \\ \hat{p}_B = \hat{p}_{x=l} &= A_0 e^{\lambda l} + B_0 e^{-\lambda l} \end{aligned} \right\} \quad (5.54)$$

となる。これより

$$A_0 = \frac{-\hat{p}_A e^{-\lambda l} + \hat{p}_B}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}}, \quad B_0 = \frac{\hat{p}_A e^{\lambda l} - \hat{p}_B}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}} \quad (5.55)$$

となる。また  $L \rightarrow \infty$  として

$$\hat{p} = \frac{1}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}} \left[ (e^{\lambda l - \lambda x} - e^{-\lambda l + \lambda x}) \hat{p}_A + (e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}) \hat{p}_B \right] \quad (5.56)$$

となる。また式(5.48)の関係を考慮すると

$$\begin{aligned} \hat{w} = \frac{1}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}} & \left[ -\{(\hat{w}_{r0} + M \hat{w}_{r1}) e^{-\lambda l + \lambda x} + (\hat{w}_{r0} - M \hat{w}_{r1}) e^{\lambda l - \lambda x}\} \hat{p}_A \right. \\ & \left. + \{(\hat{w}_{r0} + M \hat{w}_{r1}) e^{\lambda x} + (\hat{w}_{r0} - M \hat{w}_{r1}) e^{-\lambda x}\} \hat{p}_B \right] \end{aligned} \quad (5.57)$$

となる。上式より  $\hat{w}_A = \hat{w}_{x=0}$ ,  $\hat{w}_B = \hat{w}_{x=l}$  を求め、整理すると伝達マトリクス  $\{G\}$  を用いて

$$\begin{pmatrix} \hat{p}_B \\ \hat{w}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p}_A \\ \hat{w}_A \end{pmatrix} \quad (5.58)$$

と表現でき、 $\hat{w}$  として断面内平均値

$$\hat{w}_m = A_0 (\hat{w}_{rom} + M \hat{w}_{rim}) e^{\lambda x} - B_0 (\hat{w}_{rom} - M \hat{w}_{rim}) e^{-\lambda x}$$

を用いると

$$\hat{w}_{rom} = -\frac{1}{\beta}, \quad \hat{w}_{rim} = -\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{\beta^2} \quad (5.59)$$

とより、このとき伝達マトリクス $G_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ )は $M^2$ 以上の微小量を無視して次式となる。

$$\left. \begin{aligned} G_{11} &= \frac{1}{2} [e^{\lambda l} + e^{-\lambda l} - M (\frac{1}{2} \beta - \frac{\gamma}{\beta}) (e^{\lambda l} - e^{-\lambda l})] \\ G_{12} &= -\frac{1}{2} \beta (e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}) \\ G_{21} &= -\frac{1}{2\beta} (e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}) \\ G_{22} &= \frac{1}{2} [e^{\lambda l} + e^{-\lambda l} + M (\frac{1}{2} \beta - \gamma) (e^{\lambda l} - e^{-\lambda l})] \end{aligned} \right\} \quad (5.60)$$

より

$$\det \{G\} = e^{(\lambda - \lambda)l}$$

とより、平均流がない場合の  $\det \{G\} = 1$  とは異なることがわかる。い

は  $M \ll 1$  の場合も考えているのであるから

$$e^{\lambda l} = e^{(\lambda_0 + M\lambda_1)l} = e^{\lambda_0 l} (1 + M\lambda_1 l)$$

$$e^{-\lambda l} = e^{-(\lambda_0 - M\lambda_1)l} = e^{-\lambda_0 l} (1 + M\lambda_1 l)$$

と展開して

$$G_{ij} = (G_{ij})_0 + M (G_{ij})_1 \quad (5.61)$$

の形で表わすと

$$\left. \begin{aligned} G_{11} &= \cosh(\beta s l) [1 + M \{ \gamma s l - (\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{\beta}) \tanh(\beta s l) \}] \\ G_{12} &= -\beta \sinh(\beta s l) [1 + M \gamma s l] \end{aligned} \right\} \quad (5.62)$$

$$\left. \begin{aligned} G_{21} &= -\frac{1}{\beta} \sinh(\beta sl) [1 + M \gamma sl] \\ G_{22} &= \cosh(\beta sl) \left[ 1 + M \left\{ \gamma sl + \left( \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{\beta} \right) \tanh(\beta sl) \right\} \right] \end{aligned} \right\}$$

となる。式(5.61)の表示法を用いるとゲイン、位相とも  $M^0$  と  $M^1$  のオーダに分離でき、

$$\left. \begin{aligned} |G_{ij}| &= |G_{ij}^0| [1 + M \operatorname{Re}\{(G_{ij}^1)/(G_{ij}^0)\}] \\ \angle G_{ij} &= (\angle G_{ij}^0) + M \operatorname{Im}\{(G_{ij}^1)/(G_{ij}^0)\} \end{aligned} \right\} \quad (5.63)$$

となる。したがって式(5.62)から直接  $M^0$  および  $M^1$  のオーダのゲイン、位相が計算できる。

次に非粘性の場合には  $\nu \rightarrow 0$  となるので  $|q| \rightarrow \infty$  とすればよい。<sup>(94)</sup>  $|q|$  が大きいとき

$$\frac{2J_1(q)}{qJ_0(q)} = \frac{2i}{q} + \frac{1}{q^2}$$

であることを考慮すると

$$\beta \rightarrow 1, \quad \gamma \rightarrow 1/2, \quad \hat{w}_{rim} \rightarrow 0; \quad |q| \rightarrow \infty \quad (5.64)$$

となる。正弦波状変化を考えた場合には  $s = i\omega$  とおけばよく、このとき  $s$  は純虚数となり減衰がなくなるこがわかる。またこの場合伝達マトリクスは

$$\{G\} = \left( 1 + \frac{1}{2} M i\omega l \right) \begin{pmatrix} \cos \omega l & -i \sin \omega l \\ -i \sin \omega l & \cos \omega l \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

に近づく。上式より非粘性の場合には  $M^1$  のオーダまででは平均流はゲインに影響せず、位相にのみ影響を与えることがわかる。

#### 5.4 数値例および議論

変動流が正弦波状に変化する場合について計算した結果を以下に示す。 $s = i\omega$  と置き、 $l = \sqrt{\omega/\nu}$  とすれば  $q^2 = -i l^2$  と表現できる。図5.1は  $l$  の変化に対する  $\beta, \gamma$  の挙動を複素平面上に示したものである。 $l \rightarrow \infty$  では式(5.64)で述べたように  $\beta \rightarrow 1, \gamma \rightarrow 1/2$  となることが

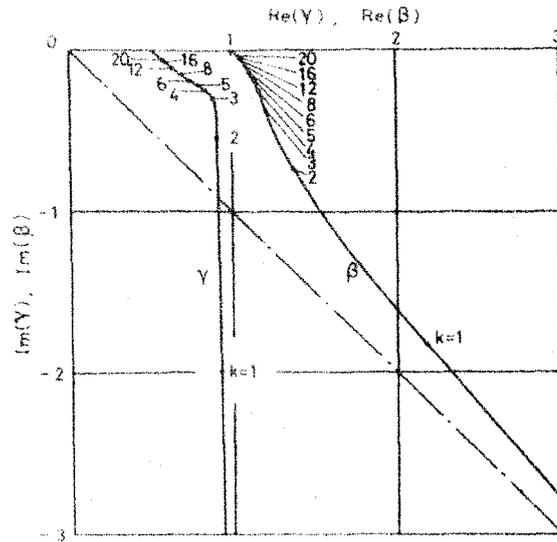
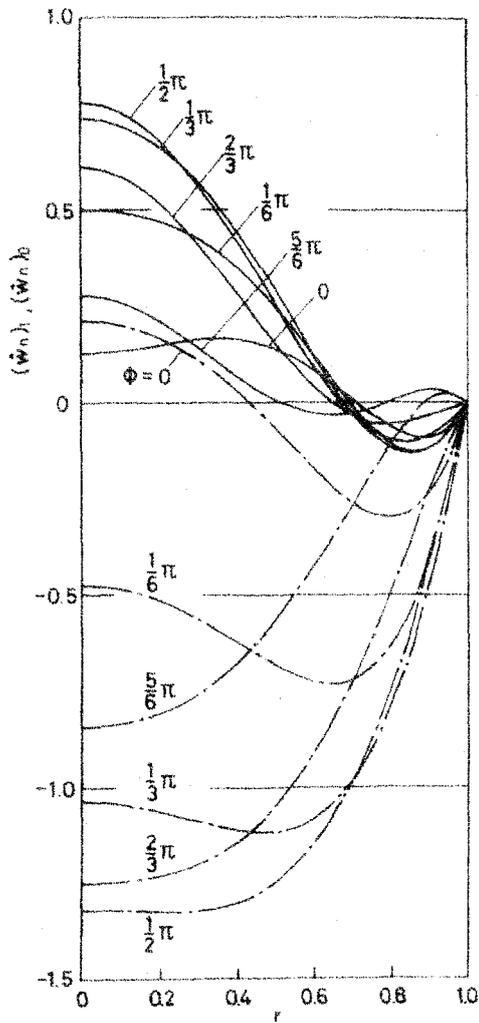
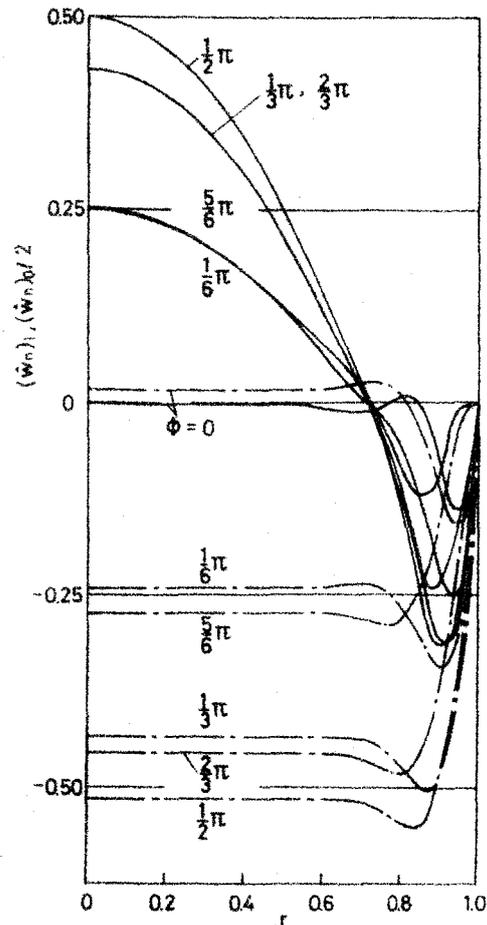


図5.1  $\beta, \gamma$  の  $k$  に対する変化



(a)  $k=5$



(b)  $k=20$

図5.2 軸方向流速分布 (—:  $(\hat{w}_n)_i = \text{Im}\{\hat{w}_{ri} e^{i\phi}\}$ , - - -:  $(\hat{w}_n)_o = \text{Im}\{\hat{w}_{ro} e^{i\phi}\}$ )

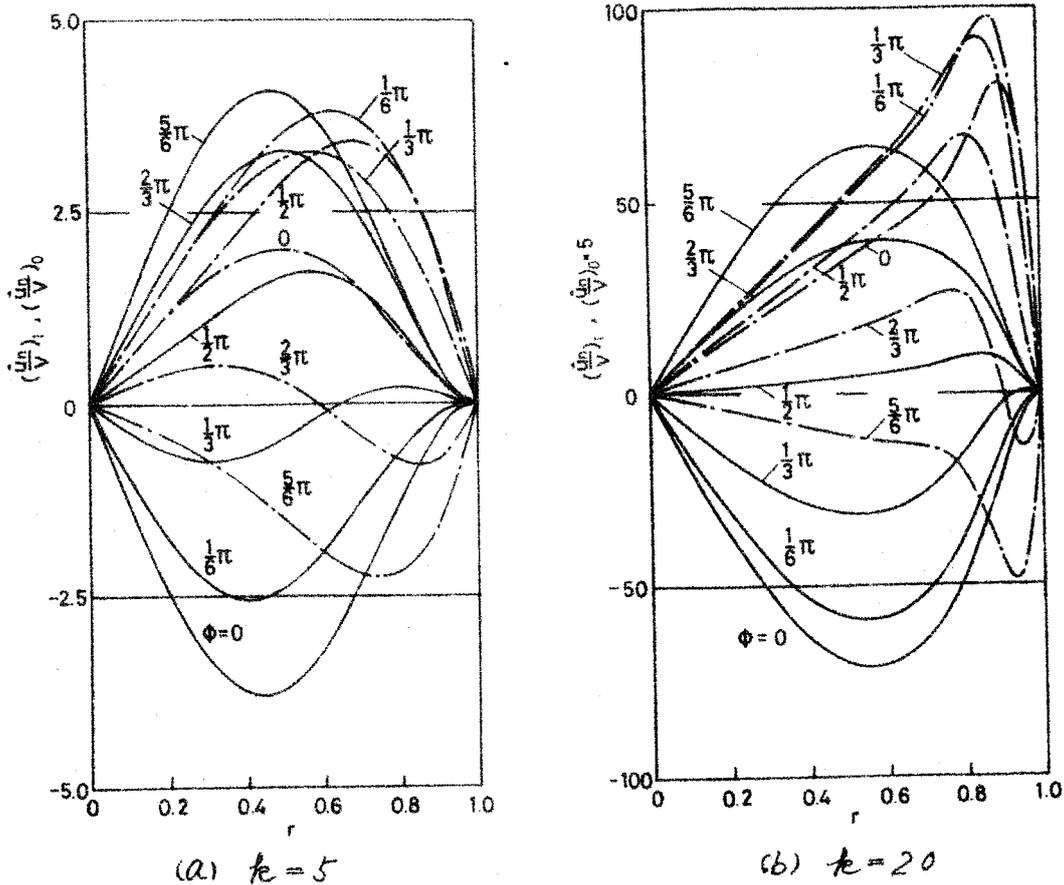


図5.3 半径方向流速分布 (——;  $(\frac{u_n}{v})_1 = \int_m \{ (\frac{\hat{u}_{r1}}{v}) e^{i\phi} \}$ , - - -;  $(\frac{u_n}{v})_0 = \int_m \{ (\frac{\hat{u}_{r0}}{v}) e^{i\phi} \}$ )  
 わかす。

図5.2は式(5.50)を用い  $\hat{w}_{r0} e^{i\phi}$ ,  $\hat{w}_{r1} e^{i\phi}$  の虚数部を示したもので、式(5.15)の表現において  $\alpha=0$ ,  $A_0=e^{i\phi}$ ,  $B_0=0$  として計算した  $M^0$  および  $M^1$  のオーダーの値であり、直接それぞれのオーダーの軸方向流速分布を示している。このうち  $M^0$  のオーダーの分布は非圧縮性の場合と同一である。図5.3は同様にして計算した半径方向流速分布であり、 $(\hat{u}_n/v)_1$  の分布のパターンは  $(\hat{u}_n/v)_0$  のそれに比べ  $l$  による変化が少ない。

図5.4は式(5.62)で  $\alpha=i\omega$  として計算した  $|G_{11}|_0$  および  $|G_{11}|_1$  である。図5.5は  $(LG_{11})_0$  および  $(LG_{11})_1$  であり、 $(LG_{11})_1$  は  $\omega l$  の小さい部分を除くとほとんど直線的に変化する。これは式(5.62)の  $M^1$  のオーダーの項のうち、 $\omega l$  の小さい部分では第2項の方が大きく、 $\omega l$  が大きくなるにつれ第1項の  $\gamma \omega l$  が支配的となるためである。このよう

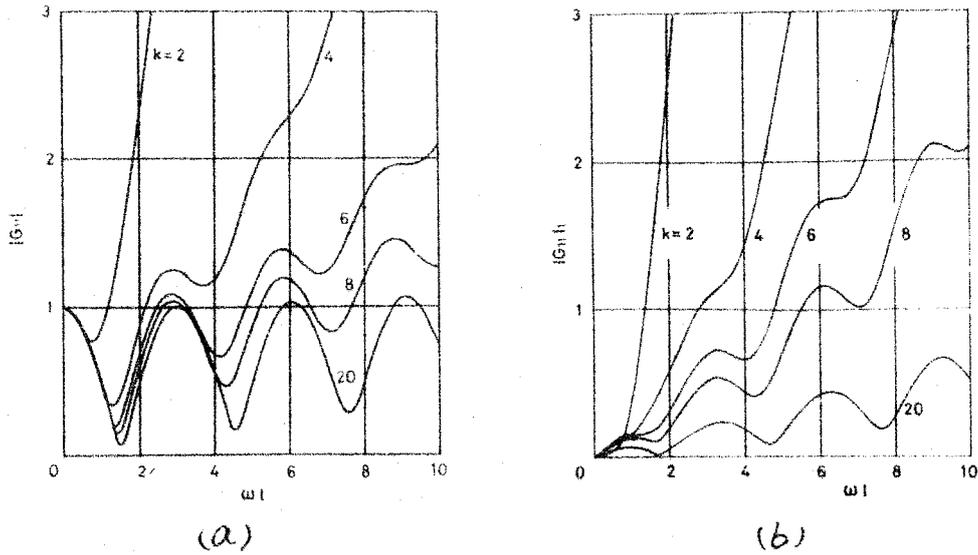


図 5. 4

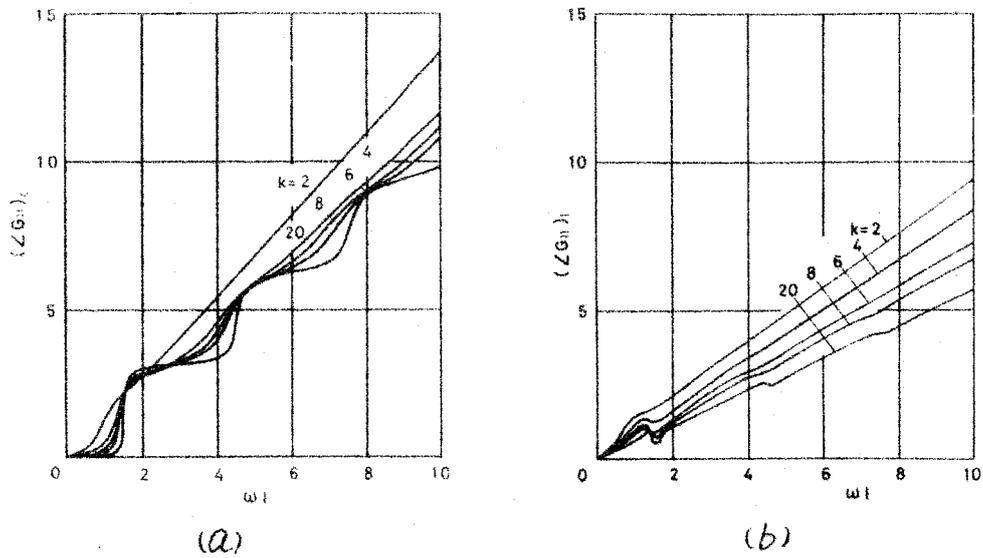
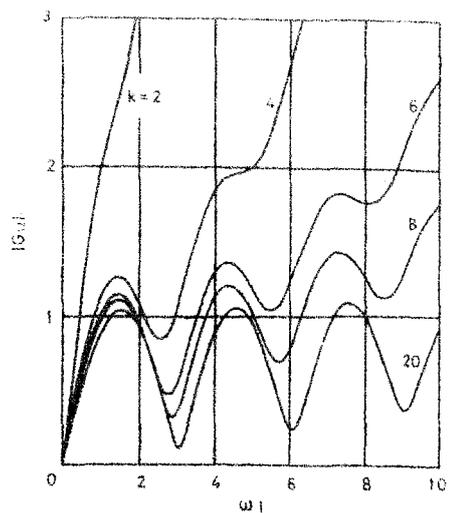
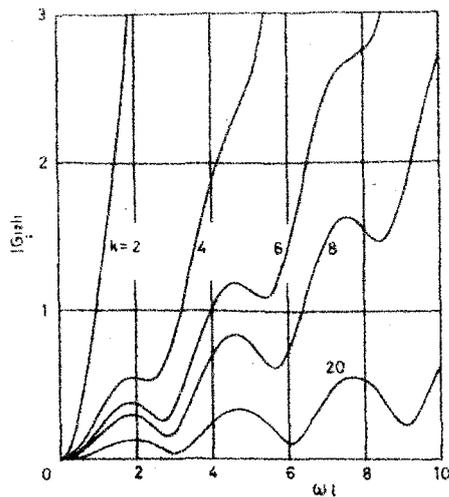


図 5. 5

に  $\hat{\omega}_{rim}$  は  $\omega_l$  の小さい部分で大きく現われ、 $\omega_l$  が大きくなると固有値  $\lambda_1$  の影響だけが現われ、図 5.6 は  $|G_{12}|_0$  および  $|G_{12}|_1$  であり、図 5.7 は  $|G_{21}|_0$  および  $|G_{21}|_1$  である。 $(LG_{12})_0$  および  $(LG_{21})_0$  は図 5.8 に示すようである。 $(LG_{12})_1$  および  $(LG_{21})_1$  は同一となり、図 5.9 に示すように直線となる。式 (5.62) からわかるように  $G_{12}$  (図 5.6 (b), 図 5.9) および  $G_{21}$  (図 5.7 (b), 図 5.9) には  $\hat{\omega}_{rim}$  の影響は入らず、 $\lambda_1$  のみが関係している。 $(G_{22})_0$  は式 (5.62) からわかるように  $(G_{11})_0$  に等しい。次に図 5.10 に  $|G_{22}|_1$  および  $(LG_{22})_1$  を示す。上述のように平均流がは

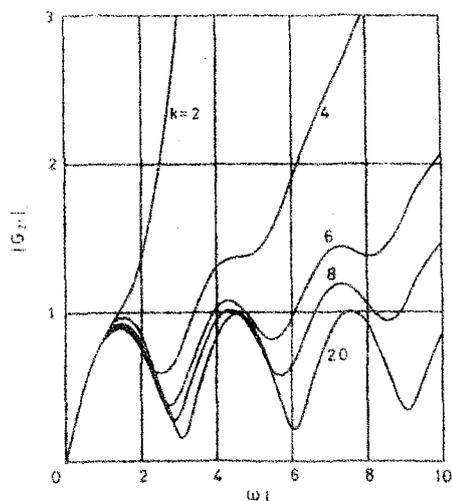


(a)

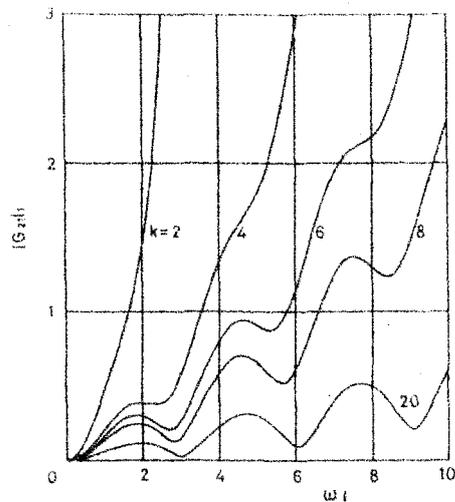


(b)

图 5.6

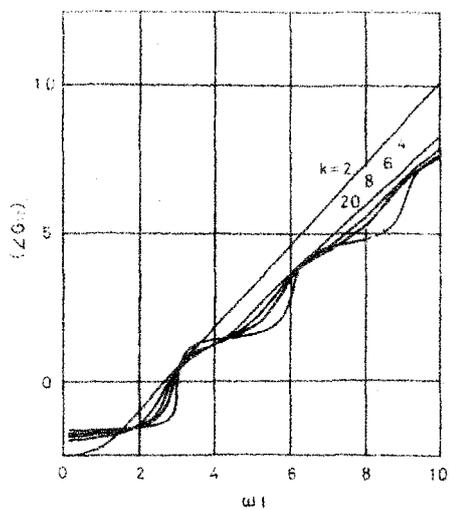


(a)

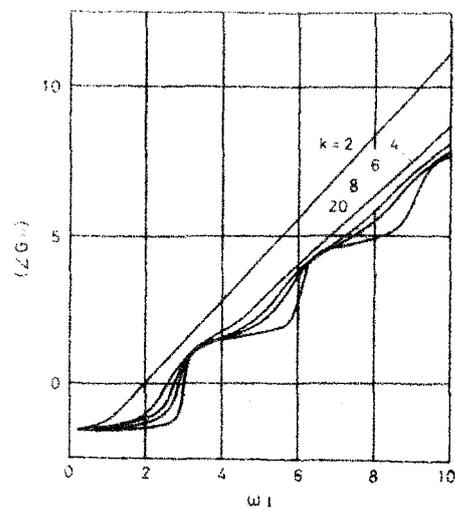


(b)

图 5.7



(a)



(b)

图 5.8

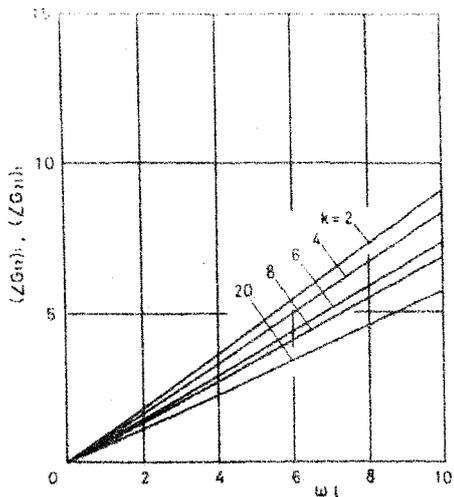
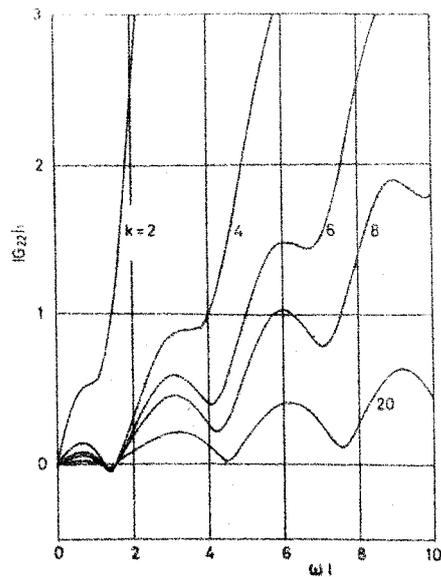


图 5.9



(a)

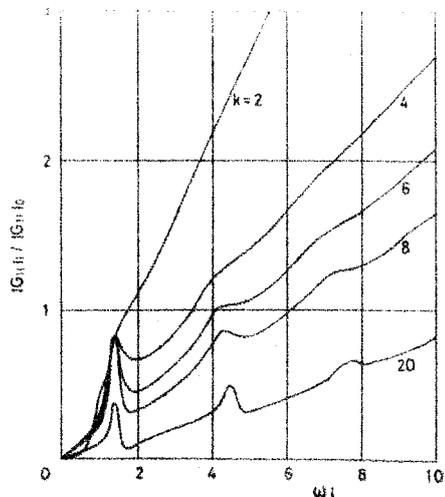
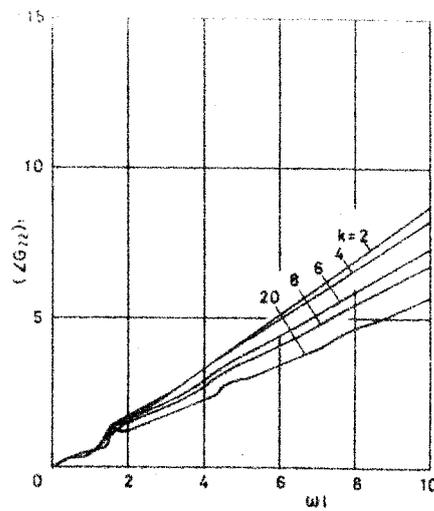


图 5.11



(b)

图 5.10

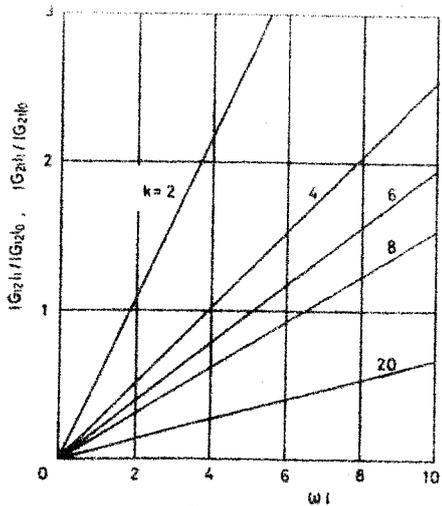


图 5.12

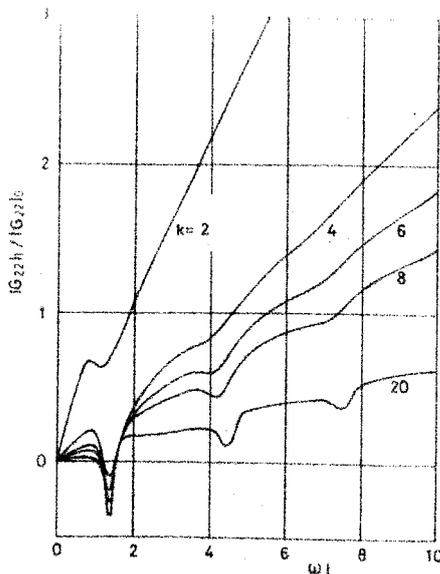


图 5.13

い場合には  $G_{22} = G_{11}$  であるが、平均流があると  $M'$  のオーダーで  $G_{22}$  と  $G_{11}$  とに差がでる、その差は  $\hat{\omega}_{rim}$  によるものである。したがって  $(G_{11})_1$  と  $(G_{22})_1$  とは  $\omega l$  の小さい部分でその差が顕著である。式(5.62)および(5.63)の第1式からわかるように  $|G_{ij1}|$  は  $|G_{ij0}|$  との比としても表現でき、このようにすると  $|G_{121}|/|G_{120}|$  と  $|G_{211}|/|G_{210}|$  とは図5.12のように同一の直線で表わされる。図5.11と図5.13を比べると  $\hat{\omega}_{rim}$  の影響がよくわかる。

## 5.5 結 言

平均流が存在する円管内非定常流れを液体の場合について解析した。これは平均流のマッハ数  $M$  が1に比べ十分小さい場合にあたり、 $M$  を摂動パラメータとする展開が可能である。そのようにして求めた結果

- (1) 平均流は断面内圧力分布には影響を与えない。
  - (2)  $M'$  のオーダーまで考えると、平均流のために進行波と後退波として伝ば定数および流速分布に差が生じる。
  - (3) 非粘性の場合には平均流は伝達マトリクスゲインには影響を与えず、位相にのみ影響する。
- などがわかった。

液体の流れの場合には一般に  $M \ll 1$  であり、 $\tau^2 \gg 1$  かつ  $\omega l \ll \tau^2$  の範囲では本章の解析が有効であり、平均流の影響は  $M'$  のオーダーである。これは慣性対流項を無視した解析による結果を用いてなされていた従来の議論と同じ結果であるが、本章の解析によりその詳細が明らかにされた。

## 第6章 結 論

管内流れは基礎流れとして、またその工学的重要性から古くから関心  
がもたれている。とくに曲管内流れにおいては管の曲りにより生じる二  
次流れのため、多くの研究者の工学的あるいは数学的興味をよび、円環  
状曲管内層流を中心にこれまで解析が行われてきている。しかし現実の  
管路で見られる曲管は必ずしもこのような円環状のものではなく、もし  
ろ管軸の曲率が変化したり、あるいはコイル管のように曲率の外にれい  
率をもっていたりすることが多い。このような管内の流れは円環状の場  
合とは異なる。また曲管内非定常流れは近年バイオメカニクス分野で  
も関心がたかく、これまで行われている円環状曲管の外に本論文でとり  
あげた曲管内の非定常流れはその意味からも興味深いものと考えられる。  
以上の観点から本論文では三次元的な曲りをもつコイル管、管軸の曲率  
が軸方向に変化する曲りが1回、2回および周期的な管としての双曲線  
管、双曲線関数管およびだ行管をとりあげ、液体の場合を想定し、これ  
ら曲管内層流定常流れおよびだ行管内層流脈動流れをいずれも管軸の曲  
率が比較的小さい場合について解析した。

コイル管内層流定常流れにおいては、流れの性質を決める特性数とし  
て管軸に沿う圧力こう配と曲率とから成る  $D_c$  とれい率から成る  $D_\tau$  が  
あるが、コイル管の圧力損失には  $D_c$  だけが影響を与え、さらに円環  
状曲管の管摩擦損失の式がコイル管の場合にも用いることができる。一  
方内部流れに関しては  $D_c$  が小さいときには管断面内に生じる二つのう  
ず状二次流れ流線が非対称となる。  $D_c$  が大きくなると上述の二次流れ  
の非対称性と同時に二次流れ流線および軸方向流速分布に傾斜が生じて  
くる。  $D_c$  の値の増加とともに二次流れの非対称性が小さくなり傾斜だ  
けが顕著となるが、さらに  $D_c$  が大きくなると傾斜も小さくなり円環状  
曲管の場合の流れに近づく。

次にだ行管内層流定常流れではレイノルズ数が大きくなると遠心力に

より一般に曲りの外側で軸方向流速が大になるが、だ行の波数が大きくなると軸方向の慣性のため管軸の曲りの影響は管軸の変化より遅れて流速分布に現われる。そのために曲りの内側で軸方向流速が大になることがある。また曲りの向きが変わるため二次流れの逆転が生じ、だ行の波数が大きいときには逆転域で管断面の半円内に二つのうず状の二次流れを生じる。双曲線管および双曲線関数管でもレイノルズ数の大きいときには上述の遅れを生じる。また後者では二次流れの逆転現象のため、前者に比べ曲りの影響の及ぶ軸方向距離が短い。さらに管軸に沿う曲率の変化がゆるやかな場合には、管軸の形状が二次元曲線で表わされる曲管内層流は統一的な手法で解析できる。

だ行管内層流脈動流れでは、平均流がない場合には軸方向流速はつねに曲りの内側で大になる。平均流があってもだ行の波数が小さく、脈動周波数が高い場合には軸方向流速の分布は上述の平均流のない場合に近いものとなる。一方平均流速が大きいときには、脈動周波数が小さいと軸方向流速に及ぼす曲りの影響の管軸の変化に対する遅れはおもに平均流によって決まり、脈動流れの影響をあまり受けない。しかし脈動周波数が大きくなると脈動流れの影響が大きくなる。

最後に、これまで流体を非圧縮性のものとして解析をすすめてきたが、そのような仮定が成立する範囲を平均流がある直管内層流非定常流れについて液体に対して確かめた。その結果、流体の圧縮性の影響は流体中を伝わる音速の $-1$ 乗に比例し、一般に無視することができると、平均流が存在すると上述のオーダで進行波と後退波とで流速分布および固有値に差が生じる。

## 謝 辞

本研究を遂行するにあたって終始懇切、丁寧な御指導を賜わった村田暹教授ならびに三宅裕助教授に深く感謝致します。

また大阪大学工学部機械工学科水力実験室の諸氏からは多大のご援助をいただいた。とくに小川博史、橋本正孝の両氏には格別のご協力を賜わった。さらに本論文の作成にあたって北田義一技官から特別のご援助もいただいた。あわせて厚く感謝致します。

## 参考文献

- (1) Adler, M., Z. AMM, 14(1934), 257.
- (2) Akiyama, M. & Cheng, K.C., Int. J. Heat Mass Transfer, 14(1971), 1659.
- (3) Akiyama, M. & Cheng, K.C., Appl. Sci. Res., 29(1974), 401.
- (4) Austin, L.R. & Seader, J.D., AIChE J., 19(1973), 85.
- (5) Austin, L.R. & Seader, J.D., AIChE J., 20(1974), 820.
- (6) Barua, S.N., Quart. J. Mech. Appl. Math., 16(1963), 61.
- (7) Becker, E., Z. AMM, Sonderheft(1956), 3.
- (8) Bertelsen, A.F., J. Fluid Mech., 70(1975), 519.
- (9) Betchov, R. & Criminale Jr., W.O., Stability of Parallel Flows, (1967), 99, Academic Press.
- (10) Brown, F.T., J. Basic Engg.(Trans. ASME), 84(1962), 547.
- (11) Cheng, K.C. & Akiyama, M., Int. J. Heat Mass Transfer, 13(1970), 471.
- (12) Collins, W.M. & Dennis, S.C.R., Quart. J. Mech. Appl. Math., 28(1975), 133.
- (13) Cuming, H.G., Rep. & Mem., Aeron. Res. Council, No. 2880(1955).
- (14) Dean, W.R., Phil. Mag., 4(1927), 208.
- (15) Dean, W.R., Phil. Mag., 5(1928), 673.
- (16) Dean, W.R. & Hurst, J.M., Mathematika, 6(1959), 77.
- (17) DeArmond, R.P. & Rouleau, W.T., J. Basic Engg.(Trans. ASME), 94(1972), 811.
- (18) Dravid, A.N., Smith, K.A., Merrill, E.W. & Brain, P.L.T., AIChE J., 17(1971), 1114.
- (19) Drinker, P.A., Bartlett, R.H., Bialer, R.M. & Noyes Jr., B.S., Surgery, 66(1969), 775.
- (20) D'souza, A.F. & Oldenburger, R., J. Basic Engg.(Trans. ASME), 86(1964), 589.

- (21) Eichenberger, H.P., J. Math. Phys., 32(1953), 34.
- (22) Erdogan, M.E. & Chatwin, P.C., J. Fluid Mech., 29(1967), 465.
- (23) Eskinazi, S. & Yeh, H., J. Aeron. Sci., 23(1956), 23.
- (24) Eustice, J., Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A, 84(1910), 107.
- (25) Eustice, J., Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A, 85(1911), 119.
- (26) Gerlach, C.R. & Parker, J.D., J. Basic Engg. (Trans. ASME), 89(1967), 782.
- (27) Goodson, R.E. & Leonard, R.G., J. Basic Engg. (Trans. ASME), 94(1972), 474.
- (28) Greenspan, D., J. Fluid Mech., 57(1973), 167.
- (29) Hawthorne, W.R., Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A, 206(1951), 374.
- (30) Horlock, J.H., Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A, 234(1956), 335.
- (31) 伊藤, 東北大学速研報告, 3(昭25), 1.
- (32) 伊藤, 機論, 17(昭26), 99.
- (33) 伊藤, 東北大学速研報告, 4(昭26), 95.
- (34) 伊藤, 東北大学速研報告, 7(昭27), 2.
- (35) 伊藤, 東北大学速研報告, 11(昭30), 97.
- (36) 伊藤, 東北大学速研報告, 14(昭34), 137. / Ito, H., J. Basic Engg. (Trans. ASME), 81(1959), 123.
- (37) 伊藤, 東北大学速研報告, 15(昭34-35), 1.
- (38) Ito, H., J. Basic Engg. (Trans. ASME), 82(1960), 131.
- (39) 伊藤, 東北大学速研報告, 26(昭45), 157. / Ito, H., Z. AMM, 49(1969), 635.
- (40) 伊藤・麿, 東北大学速研報告, 31(昭47), 23. / Ito, H., & Motai, T., Rep. Inst. High Speed Mech., Tohoku Univ., 29(1974), 33.
- (41) Jeschke, D., Z. V.D.I., 69(1925), 1526.
- (42) Jeschke, D., Z. V.D.I. Ergänzungsheft, 24(1925), 1.
- (43) Kantola, R., J. Basic Engg. (Trans. ASME), 93(1971), 274.

- (44) Kapur, J.N., Tyagi, V.R. & Srivastava, R.C., Appl. Sci. Res. Sec. A, 14(1964), 253.
- (45) Kawaguti, M., Phys. Fluids Suppl. II, 12(1969), II-101.
- (46) Keulegan, G.H. & Beij, K.H., J. Res. Nat. Bur. Stand., 18(1937), 89.
- (47) Klab, C.E. & Seader, J.D., Int. J. Heat Mass Transfer, 15(1972), 801.
- (48) Koutsky, J.A. & Adler, R.J., Can. J. Chem. Eng., 42(1964), 239.
- (49) Kreith, F., Trans. ASME., 77(1955), 1247.
- (50) Kubair, V. & Kuloor, N.R., Indian J. Technol., 1(1963), 333.
- (51) Kubair, V. & Kuloor, N.R., Indian J. Technol., 1(1963), 336.
- (52) 草間, 機論, 17(昭26), 57.
- (53) 草間, 機論, 17(昭26), 62.
- (54) 草間, 機論, 18(昭27), 27.
- (55) Larrain, J. & Bonilla, C.F., Trans. Soc. Rheol., 14(1970), 135.
- (56) Lyne, W.H., J. Fluid Mech., 45(1970), 13.
- (57) McConalogue, D.J. & Srivastava, R.S., Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A, 307(1968), 37.
- (58) McConalogue, D.J., Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A, 315(1970), 99.
- (59) 森・中山, 機論, 30(昭39), 977.
- (60) Mori, Y. & Nakayama, W., Int. J. Heat Mass Transfer, 10(1967), 37.
- (61) Mori, Y., Uchida, Y. & Ukon, T. Int. J. Heat Mass Transfer, 14(1971), 1787.
- (62) Munson, B.R., Phys. Fluids, 18(1975), 1607.
- (63) 村上・森・佐野, 機論, 37(昭46), 717.
- (64) 村上・清水, 機論, 38(昭47), 2600.
- (65) 村上・末広・大野, 機論, 39(昭48), 2546.
- (66) Nippert, H., Forsch. Geb. Ing.-wes., H.320(1929).
- (67) Nunge, R.J., Lin, T.-S. & Gill, W.N., J. Fluid Mech., 51(1972), 363.
- (68) Nunge, R.J. & Lin, T.-S., AIChE J., 19(1973), 1280.

- (69) 近江・碓井, 機論, 41(昭50), 546.
- (70) Özisik, M.N. & Topakoglu, H.C., J. Heat Transfer(Trans. ASME), 90(1968), 313.
- (71) Patankar, S.V., Prapat, V.S. & Spalding, D.B., J. Fluid Mech., 62(1974), 539.
- (72) Patankar, S.V., Prapat, V.S. & Spalding, D.B., J. Fluid Mech., 67(1975), 583.
- (73) Prapat, V.S. & Spalding, D.B., Aeron. Quart., 26(1975), 219.
- (74) Richardson, E.G., Proc. Phys. Soc. Lond., 40(1928), 206.
- (75) Richardson, E.G. & Tyler, E., Proc. Phys. Soc. Lond., 42(1929), 1.
- (76) Richter, H., Forsch. Geb. Ing.-wes., H.338(1930).
- (77) Rieger, F. & Šesták, J., Appl. Sci. Res., 28(1973), 89.
- (78) Rogers, G.F.C. & Mayhew, Y.R., Int. J. Heat Mass Transfer, 7(1964), 1207.
- (79) Rowe, M., J. Fluid Mech., 43(1970), 771.
- (80) Sankarajah, M. & Rao, Y.V.N., J. Fluid Engg.(Trans. ASME), 95(1973), 75.
- (81) Saph, A.V. & Schoder, E.W., Trans. Amer. Soc. Civ. Eng., 47(1902), 295.
- (82) Seban, R.A. & McLaughlin, E.F., Int. J. Heat Mass Transfer, 6(1963), 387.
- (83) Sexl, Th., Z. Phys., 61(1930), 349.
- (84) Smith, F.T., J. Fluid Mech., 71(1975), 15.
- (85) Smith, F.T., Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A, 347(1976), 345.
- (86) Squire, H.B. & Winter, K.G., J. Aeron. Sci., 18(1951), 271.
- (87) Squire, H.B., Rep. & Mem., Aeron. Res. Council, No. 16601(1954).
- (88) Taylor, G.I., Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A, 124(1929), 243.
- (89) Thomson, J., Proc. Roy. Soc. Lond., 25(1876), 5.
- (90) Thomson, J., Proc. Roy. Soc. Lond., 26(1877), 353.
- (91) Topakoglu, H.C., J. Math. Mech., 16(1967), 1321.

- (92) Truesdell, L.C. & Adler, R.J., *AIChE J.*, 16(1970), 1010.
- (93) Uchida, S., *Z. AMP.*, 7(1956), 403.
- (94) 浦田, 機論, 36(昭45), 957.
- (95) 浦田, 機論, 37(昭46), 487.
- (96) Wattendorf, F.L., *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A*, 148(1935), 565.
- (97) Weske, J.R., *J. Appl. Mech. (Trans. ASME)*, 15(1948), 344.
- (98) White, C.M., *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A*, 123(1929), 645.
- (99) Zalosh, R.G. & Nelson, W.G., *J. Fluid Mech.*, 59(1973), 693.
- (100) Маэуров, Д.Я. & Захаров, Г.В., *Тепроэнергетика*, 14(1967), 39.