OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	ディジタル信号処理回路における量子化雑音の解析と対策に関する研究
Author(s)	宮田, 昌近
Citation	大阪大学, 1984, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/1299
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

ディジタル信号処理回路における
量子化雑音の解析と対策に関する研究

昭和58年10月

宮田昌近

目　次

内容梗概

本文で用いられる記号

第１章　　序論　1

第２章　　量子化雑音の解析　9
２．１　緒言　9
２．２　諸定義ならびに公式　10
２．２．１　記法に関する考察　10
２．２．２　主要な作用素の定義と公式　14
２．２．３　非線形作用素のノルム　16
２．３　雑音解析のための等価変換　20
２．４　量子化雑音の波形とスペクトル　33
２．４．１　振幅の上界　33
２．４．２　スペクトル密度の上界　40
２．５　結言　43

第３章　　量子化雑音の制御　45
３．１　緒言　45
３．２　周波数領域における制御　46
３．２．１　原理および基本的性質　46
３．２．２　ディジタルフィルタの雑音低減　54
３．２．３　密度変調回路の特性改善　61
３．２．４　ランダム量子化方式との比較　65
３．３　時間領域における制御　70
３．３．１　原理および基本的性質　70
３．３．２　リミットサイクルの抑制　79
３．３．３　正弦波発振器の安定化　85
３．４　結言　94

第４章　音声の符号化復号化への応用　９７
４．１　緒言　９７
４．２　システムの基本構成　９９
４．３　特性の解析および改善　１０５
４．３．１　２重積分デルタ変調形符号器の特性　１０５
４．３．２　送信側符号変換回路の簡単化　１０７
４．３．３　受信側符号変換回路の特性改善　１１１
４．４　シミュレーション結果　１１７
４．５　結言　１１９

第５章　結論　１２０

謝辞　１２２

参考文献　１２３

内容梗概

本研究は，筆者が（株）日立製作所中央研究所で行なった「ディジタル信号処理回路における量子化雑音の解析と対策に関する研究」をもとに，大阪大学工学部滑川研究室でその体系化を図った成果をまとめたものである．すなわち，ディジタルフィル等の，いわゆるディジタル信号処理回路に対して，量子化によって生じる特性の劣化について解析し，その対策を検討しており，全体は次の５章から構成される．

第１章では，研究の背景と目的を明らかにする．

すなわち，ディジタル信号処理回路では，特殊な場合を除いて，演算結果の量子化が不可避であること，およびこれによって，微小入力時には，著しい特性の劣化が生じ得ることを説明する．また，微小入力時は線形近似が不可能であり，特性の厳密な解析が極めて困難であることを述べる．

つづいて，量子化雑音の解析および量子化方式の改良に関する研究を展望し，本研究の位置付けを行なう．本研究で対象としているのは，主として直線量子化を行なう固定小数点演算の回路である．

第２章では，量子化によって生じる誤差（一般に量子化雑音と呼ばれている）を厳密に解析するための，記法ならびに手法について考察する．

まず，量子化が行なわれる回路の構成を厳密かつ簡潔に記述できるように，若干の非線形作用素を定義し，基本的性質を示す．また，これに関連して，関数と関数値の区別等，慣用的な記法のもつ難点を指摘し，記法の修正案を示す．本文は，修正案に沿った表現をとっている．

次に，非線形作用素のパラメータ付きノルムを定義する．量子化を表わす作用素は，通常のノルムが発散する．したがって，量子化雑音の電力あるいは振幅の上界を求めるには，新しいノルムが必要である．このため，新たにパラメータｐを導入し，振幅がパラメータｐ以下である入力に対する出力の振幅の上限をパラメータｐで正規化した値をノルムとする．線形作用素に対しては通常の定義に帰着することは云うまでもない．

回路の入出力関係を表わす非線形方程式を解くことは，一般に至難である．しかし，方程式は解けなくても，与えられた回路を適当に等価変換して，上記の作用素やノルムに関する公式を用いれば，解の性質をある程度知ることができる．比較的一般性のある具体例として，伝達関数 $H_2 \cdot (1-H_1)^{-1}$ を近似する作用素 $T_2 (1-T1)^{-1}$ を実現する回路について，このような等価変換の方法を示し，この方法

をさらに一般化するときの方針を付言する．なお，ここで言う等価回路とは，単に伝達関数が等しいだけでなく，入出力関係を完全に保存する変換を意味する．この等価回路の一部をランダム雑音源で置換すると，通常の線形モデルが得られる．

最後に，上記の等価回路を用いて，出力に現れる量子化雑音成分の振幅の上界を求めて，スペクトルの計算法について述べる．さきに定義したパラメータ付きノルムが，デルタ変調器のような非線形性の強い回路の解析にも有効であることが本章で示される．

第３章では，フーリエ解析的な手法による周波数領域での処理，あるいは状態変数解析的な手法による時間領域での処理によって量子化雑音を制御する方式について，基礎的な考察を行ない，二，三の応用例を示す．

周波数領域における処理では，整係数ディジタルフィルタを介して量子化雑音を帰還し，雑音スペクトルを制御する方式について，詳しく検討する．雑音帰還用のフィルタを整係数のものに限定したのは，経済性だけでなく，この回路自体から量子化雑音が発生することはないという性質にも基づいている．

雑音帰還という手法は，予測符号器等で古くから用いられているが，特性の解析は専ら線形近似したモデルによっている．また，この場合は，雑音帰還のための回路はアナログ的に構成されるため，完全な整係数は実現不可能であり，詳しく検討されていなかった．ここでは，整係数フィルタで雑音帰還を行なう場合，第２章で述べた等価回路をさらに変形して，出力に現れる量子化雑音が，より解析しやすい形で表現できることを示す．また，通常の丸め（四捨五入）やランダム量子化との比較を行ない，雑音スペクトルを制御することによって，少ない語長で効果的な雑音低減が可能であることを述べる．この手法は，各種のディジタル信号処理回路に適用できるが，具体例として，直線量子化を行なうディジタルフィルタと，極端な非直線量子化である密度変調を行なう回路に対する特性改善法を示す．

一方，時間領域における処理では，回路の内部状態に応じて，複数の量子化方式，例えば切捨てと切上げを切換えることにより蓄積エネルギーを制御する方式（controlled rounding：本文では量子化切換えと訳している）について検討する．状態変数から回路の蓄積エネルギーを求め，これが減少するように切捨てと切上げを切換えれば，ディジタルフィルタのリミットサイクルを除くことができる．このような方法が提案されたのは比較的新しく，未検討の事項が多い．ここでは，蓄積エネルギーと量子化雑音の関係を詳細に検討し，これまでに提案されているリミットサイクル抑制法は一般に最適であるとは言えないことを指摘し，最適な量子化切換え法を示す．また，単位円上に極をもつ共振回路に対して，蓄積エネルギーが一定になるように量子化を切換え，発振出力を安定化するための回路構成について述べ，振幅の偏差と位相ジッタの一つの上界を示す．

周波数領域での処理と時間領域での処理は，相補うものである．例えば，量子化雑音の直流成分を遮断することは後者では難しく，発振器の出力を安定化させることは前者では難しい．

第４章では，第３章の理論の具体的な応用例として，デルタ変調を利用した，音声の符号化復号化方式について述べる．この方式は，アナログ信号である電話音声を交換するディジタル交換機用の経済的な符号化復号化方式として，主としてベル研究所で検討されていたものである．

よく知られているように，デルタ変調器は，回路は簡単であるが，信号帯域幅に比べて非常に高い周波数で標本化しなければならない．ベル研究所では，パルス符号変調（ＰＣＭ）の伝送規格を満足するために，帯域幅４ｋＨｚの音声信号を８．１９２ＭＨｚで標本化している．このような高速のクロックで動作する回路は，集積化しても，消費電力の点で実用化は難しい．本章で提案する方式は，低消費電力化を図り，２．０４８ＭＨｚで動作する回路に，同等の性能をもたせたものである．標本化周波数を１／４にするには，まず単一積分形デルタ変調器を，２重積分形のもので置換しなければならない．この結果，デルタ変調された２値信号とＰＣＭ信号の相互変換が，単一積分形の場合に比べて，著しく難しくなる．

２重積分形デルタ変調器を用いる場合，その特徴を活かすためには，各折返し周波数の近傍に２次以上の零点をもつフィルタ，あるいはこれと類似の機能をもつ回路が必要である．ここでは，送信側に対しては，本質的にあふれが生じるが，それが出力に影響しないような整係数の時変回路を，受信側に対しては，高次の雑音帰還を用いた量子化回路と，バイモードＢＲＭと名付けた密度変調回路の縦続接続による構成を提案する．前者の時変回路は，理論的に１２８次の整係数低域通過フィルタと等価であることが証明できるので，後者についてのみシュミレーションを行なった．その結果を章末に示す．

上記の方式は，簡単な回路構成で国際標準規格を満足する特性が得られるため，実用価値が高い．

第５章では，本研究の結論として，前章までの成果を総括し，本研究を通じて，第２章で述べた非線形作用素代数的な手法が極めて効果的に活かされていることを付言する．なお，本研究を構成する研究資料の内容はすべて電子通信学会論文誌，同技術報告，同全国大会，同総合全国大会，国際通信会議（International Conferrence on Communications）ですでに発表したものである．

本文で用いられる記号

$\Sigma_{k=m,n}$	$m \leqq k \leqq n$での総和
Σ_{k}	$0 \leqq k < \infty$での総和
$\int d\omega$	$0 \leqq \omega \leqq \infty$での積分
$X(z)$	$X(z) = \Sigma_{k} x_k z^{-k}$ （実数列$\{x_k\}$のz変換．）
T' X	関数Xを作用素Tで変換して得られる関数
T' X (z)	関数T' Xの点zにおける関数値
T (H)	関数Hをパラメータとする作用素
T (H)' X	関数Xを作用素T (H) で変換して得られる関数
T (H)' X (z)	関数T (H)' Xの点zにおける関数値
H⊗X	$(H \otimes X)(z) = \Sigma_{k} h_k x_k z^{-k}$
	$(H(z) = \Sigma_{k} h_k z^{-k},\ X(z) = \Sigma_{k} x_k z^{-k})$
(H+)	(H+)' =H+Xで定義される作用素
(H・)	(H・)' で定義される作用素
(H⊗)	(H⊗)' X=H⊗Xで定義される作用素
$U_{k,m}$	$U_{k,m}(z) = z^{-k} / (1 - z^{-m})$
U_k	$U_k = U_{k,1}$

U	$U=U_0$
Γ	$\Gamma' X(z)=\sum_k \Gamma(x_k)\cdot z^{-k}$
	（$\Gamma(x_k)$はx_kをこえない最大の整数）
Δ	$\Delta=1-\Gamma$
B	$B=(2^{-1}U+)$
Θ	$\Theta' X(z)=\sum_k \Theta(x_k)\cdot z^{-k}$
	（$\Theta(x_k)$は，$x_k<0$のときは1，$x_k\geqq 0$のとき0）
$\|X\|$	$\|X\|=\sup_k \|x_k\|$
	$(X(z)=\sum_i x_i z^{-i},\quad 0\leqq k<\infty)$
$\|T\|(p)$	$\|T\|(p)=\sup_X p^{-1}\|T' pX\|$
	（Tは作用素，　$\|X\|\leqq 1$）

第１章　序論

一般にディジタル信号処理回路とは，音声，画像等のアナログ信号をディジタル的に処理する回路である．その代表例がディジタルフィルタであり，ディジタル変復調器や高速フーリエ変換を応用した回路も，これに属する．

アナログ信号をディジタル化して伝送，記録することは古くから行なわれている．このようなディジタル化された信号を入出力とする場合，ディジタル信号処理回路が適していることは言うまでもない．アナログ入出力の場合でも，高精度の演算や複雑な処理を必要とする機器では，内部演算をディジタル的に行なうことにより，特性の向上あるいは経済化が実現されることが多い．これは，ディジタル処理には，

（１）素子偏差がなく，所望の精度で演算できる．

（２）適応制御，多重処理等も容易に実現できる．

等の特長があること，およびディジタル半導体技術の急速な発展による素子の小型化，高性能化（動作速度，消費電力等），低価格化によるものである．

ディジタル信号処理回路は，元来，アナログ回路の機能をディジタル的に実現したものである．このため，回路設計の大半はアナログの場合に準じて行なえばよい．本研究の対象は，ディジタル固有の問題である演算結果の量子化による特性の劣化と，その対策である．本章では，研究の背景と本研究の位置付けについて，簡単に述べる．

Ｉ．量子化の影響について

ディジタル信号処理回路では，通常，直線量子化が用いられる．次章以降でも，主として直線量子化について検討する．伝送の場合，伝送効率の向上のため非直線量子化が行なわれることが多く，さらに適応制御が用いられることもある．また，電子計算機等の汎用装置で広く用いられている浮動小数点表示も，一種の非直線量子化である．しかし，ディジタルフィルタ等の内部で非直線量子化が行なわれることはほとんどない．これは，伝送や記録の場合のような語長に対する強い制約がないこと，扱う信号の変動幅が汎用装置ほど広くないこと等から，回路の簡単な直線量子化（固定小数点表示）の方が適していることによる．

量子化の影響（または有限語長による影響：finite word length effect）としては，係数量子化による周波数特性の変化と，演算結果の量子化による信号対雑音電

力比（ＳＮ比）の低下がある．前者は，回路設計を複雑にするが，設計された回路の周波数特性は，入力に依存せず，線形モデルによって容易解析できる．また，アナログ回路のように素子偏差や経年変化がないため，理論値と実験値に不一致が生じることもない．これに対して，後者の演算結果の量子化の影響は，入力に依存した複雑な非線形現象であり，これを厳密に解析することは極めて難しい．

演算結果の量子化に起因する誤差は，回路内で発生する一種の雑音として扱われ，量子化雑音と呼ばれる．信号が微小でなければ，量子化雑音はほぼ一様分布に従がうランダム雑音であるとみなし得る．この場合は，回路の特性は，ランダム雑音源を内蔵する線形モデルを用いて，近似的に解析することができる．しかし，信号が微小になると，このような近似は成立せず，線形モデルによる解析結果に比べて，著しい特性の劣化が生じる．典型的な例が，後述する共振回路（２次の巡回形ディジタルフィルタ）の零入力リミットサイクルである．この場合，出力に現れる雑音の電力の実測値と線形モデルによる理論値の比は，共振回路の利得の周波数軸上での最大値と平均値の比と同程度となり[41]，実測値と理論値が１桁異なることも少なくない．また，量子化雑音がランダムでなく，入力によってスペクトルが変化するということは，単にＳＮ比の低下だけでなく，周波数特性も変化することを意味している．

量子化雑音の影響を軽減する最も単純な方法は，内部演算の語長を大きくすること，すなわち入出力信号の量子化ステップ幅に比べて演算結果の量子化ステップ幅を十分に小さくすることである．この方法は，古くから用いられており，現在でも主流をなしているが，後に述べる新しい手法に比べて，特性改善の効果が少ない，換言すれば，与えられた仕様を満足する回路構成は冗長であり，経済性が損われる．すなわち，内部演算の語長を大きくすることにより，下記ように，所要素子数が増大する．

（１）各ビットを並列に計算するビット並列演算形の回路では，乗算器の規模は演算語長の２乗にほぼ比例して増大する．

（２）下位ビットから逐次計算するビット直列演算形の回路では，タイミングの関係から，回路全体を最大の語長で演算するように構成しなければならない．

これに対して，新しい手法では，若干の付加回路を必要とするが，内部演算の語長を短かくできるため，総合的にみれば経済的である．

Ⅱ．量子化雑音の解析と対策に関する歴史的展望

量子化雑音による特性の劣化が問題となるのは，主として，帰還ループ内で量子化が行なわれる巡回形の回路である．類似の回路として，帰還ループ内で量子化を行ない，アナログ入力をディジタル出力に変換する予測符号器がある[52]．予測符号器は

古くから実用化されているため，量子化雑音についても多くの検討がなされている．デルタ変調器が de Jagerによって提案されたのは１９５２年であり，１９６２年には，H．A．Spang，Ⅲ[39]によって，雑音帰還を用いた符号化に関する一般的考察が行なわれている．ただし，検討のほとんどは，量子化雑音をランダムとみなした線形モデルによるもので，非線形モデルによる厳密な解析は，デルタ変調器の無通話時雑音[59]のような，特殊な場合しか行なわれていない．

ディジタル信号処理については，１９６０年代後半に，マサチュセッツ工科大学（ＭＩＴ）やベル研究所を中心として検討が始められたが，注目を浴びるようになったのは１９７０年代になってからである．これは，ディジタル半導体技術の進歩によるところが大きい．ディジタル信号処理回路には，ディジタルフィルタの他にも，高速フーリエ変換の応用回路のような大規模なもの，ディジタル変復調器のような非線形の処理を行なうもの，ディジタル自動等化器のようなパラメータを適応的に制御するもの等，多種多様な回路がある．これらの回路は，帰還ループの有無によって，巡回形と非巡回形に大別される．量子化雑音による特性の劣化が大きいのは，単位円の近傍に極をもつ巡回形の回路である．代表的なディジタル信号処理回路であるディジタルフィルタには，このような回路が多い，以下でも，主として巡回形ディジタルフィルタの量子化雑音について述べる．

１９７０年に，L．B．Jackson[6],[7] は，量子化雑音をランダム雑音で近似した線形モデルにより，出力に現れる量子化雑音成分と回路構成の関係について検討を行ない，ペアリング（pairing ：ディジタルフィルタの構成要素である２次／２次セクションの選びかた）やオーダリング（ordering：２次／２次セクションの縦続接続の順序）の重要性を指摘して，ディジタルフィルタの設計の指針を与えた．与えられた伝達関数を実現するディジタルフィルタをどのように構成するのが好ましいかという問題については，状態変数によって回路の構成を記述し，正則行列で変換される等価回路について検討することが多い[10],[15]-[17]．ただし，標準形の回路を等価変換することによって，係数乗算器は著しく（ほぼ次数の２乗に比例して）増加するため，経済性を重視する場合には適しない．また，線形モデルによる解析であるため，前記のような非線形現象による特性の劣化について比較評価することは難しい．

微小入力の場合，量子化雑音をランダム雑音で近似できず，非線形モデルによる解析が必要となることはさきにも述べたが，一般的な解析は極めて困難である．共振回路の零入力リミットサイクルについては，１９６９年のL．B．Jackson[20]の解析以来，S．R．Parker ら[22]，T．Kaneko [23]，G．A．Mariaら[24]，　T－Thongら[25]，石井ら[26]の検討から，最近の久保田ら[27]の検討に至るまで，多数の検討が行なわれているが，今だ部分的な性質（存在領域，振幅の上界，周期等）が明らかにされているにすぎない．　したがって，一般の微小入力に対する厳密な解析（例えば，入力の電力スペクトルと出力に現れる量子化雑音成分の電力スペクトルと

の関係を明らかにすること）は，ほとんど不可能であると云える．

しかし，微小入力に対する特性の劣化を考慮して最悪値設計を行なう場合，出力に現れる量子化雑音の振幅や電力スペクトル密度の上限がわかれば十分である．これらの上限を求めるには厳密な解析が必要であるが，上界は比較的容易に求まる．なお，上限とは最大値あるいは最大値に相当する極限値を云い，上界とは上限より小さくない値（無数にある）を云う．なるべく上限に近い上界を求めることが望ましいのは言うまでもない．

零入力リミットサイクルの上界としては，１９７２年に発表されたＩ．Ｗ．Sandbergら[28]の上界が有名であり，より上限に近い上界が，最近，久保田ら[30]によって求められている．また，上界の計算に関連して，筆者[82]は非線形作用素に対するパラメータ付きノルムを定義した．このノルムは，２値量子化のような強い非線形処理を行なう場合でも，回路が安定ならば発散することはないため，特性の解析に有効である．つぎに，リミットサイクルの抑制について述べる．端緒となったのは１９７３年に発表されたＴ．Ａ．Ｃ．Ｍ．Ｃlaasen ら[31)-(33)] の考察である．これは，個々の乗算器出力に対して丸め（１０進数の四捨五入に相当する処理，round-off ）を行なう代りに，遅延素子の出力を荷重加算した後，絶対値切捨てを行なうと零入力リミットサイクルを抑制できることを述べたものである．１９７５年には，別種の構成のディジタルフィルタ（wave digital filter とよばれるもの）に対しても絶対値切捨てが有効であることが，Ａ．Ｆettweis ら[43]によって示されたが，同年，Ｈ．Ｊ．Butterweck [45]は，定数入力のリミットサイクルの抑制には絶対値切捨ては効果がないことを指摘し，出力波形の勾配に応じて切捨てと切上げを切換える方式を提案した．これがいわゆるcontrolled rounding 方式であり，以下では「量子化切換え」とよぶ．Butterweck は，翌年，Ｇ．Ｖerkroostとともに[46]，定数入力のwave digital filterにも量子化切換えが有効であることを示している．この年，筆者[40]も類似の方式を提案し，量子化切換えが，リミットサイクルの抑制だけでなく，発振器の安定化にも有効であることを述べた．

量子化切換えについては，その後も Ｇ．Ｖerkroost[47]やＶ．Ｂ．Ｌawrence ら[48]によって検討されてきたが，筆者の提案も含め，いずれも一般性，必然性等に難がある．例えば，定数入力に対するリミットサイクルの抑制法は，零入力の場合に帰着するように差分をとるもので，一般の微小入力の場合に拡張することは困難である．定数以外の入力にも適用できる方法として，出力波形の勾配に応じて後述のランダム量子化と絶対値切捨てを切換える方式が提案されているが，効果は予想されるものの，最適とは云い難い（入力の影響を直接的に考慮する方が，はるかに効果的である．）また出力波形の勾配に応じて切捨てと切上げ等を切換えることにより蓄積エネルギーを制御できるというのは，$z=\pm 1$の近傍に極をもつ共振回路に対して，近似的に成立するにすぎない．

１９８０年に，筆者(49)は量子化切換え方式に関する一般的かつ厳密な考察を行ない，高次の巡回形ディジタルフィルタにも適用可能なリミットサイクルの抑制法や，ディジタル発振器の安定化法を示した．同年，川又ら[50]は近代制御理論に基づくリミットサイクルのないディジタルフィルターの一般的構成法を示している．この方法は，C．W．Barnes　ら[80]やW．L．Millsら[81]の理論を発展させたもので量子化切換えではないが，座標変換の結果，蓄積エネルギーがつねに減少するように量子化が行なわれる．

遡って，１９７６年頃に，いわゆるランダム量子化方式が周波数特性の改善やリミットサイクルの抑制に有効であることが，A．C．Callahan [34]，R．B．Kieburtz ら[35]，M．Buttner[36]によって示された．この方式は，ランダム雑音を加算して量子化することにより量子化雑音のスペクトルをランダム化するもので，効果には本質的な限界があるが，簡単な回路（擬似ランダム雑音源）を付加するだけで実現できるため，実用価値が高い．

上記のランダム量子化は，符号化の分野でディザリング（dithering ）と呼ばれ，古くから用いられてきた手法を応用したものである．同様に，予測符号器等で広く用いられている雑音帰還を用いてディジタルフィルタの特性を改善することが考えられるが，意外に検討されていなかった．１９８０年になって，筆者[41]は整係数フィルタで雑音帰還を行なった場合について，量子化雑音のスペクトルや電力の上界に関する基本的な性質を示した．翌年，類似の方式を　Ｔ－Ｌ　Changら[42]も検討しているが，構成に不要な拘束条件があり，伝達関数の係数が整数に近くないと効果が低下するという難点をもっている．

上記のような経緯の結果，量子化雑音に関する研究の現状は，次のように要約される．

（１）量子化雑音の解析については，電力の上界が求められている程度で，，電力スペクトルの厳密解等を求めることは不可能に近い．

（２）量子化雑音の対策としては，語長を大きくするという単純な方法の他に，雑音帰還，量子化切換え，ランダム量子化等，いくつかの方法が提案されている（これらの方式には一長一短があるため，仕様に応じて選択することが望ましい）

なお，上記の展望における論文は，，主要学会誌に掲載されたものを引用している．このため，ＩＥＥＥ　Transactions や電子通信学会論文誌に記載されたものを引用している場合，前年の国際会議（ＩＳＣＡＳ，ＩＣＡＳＳＰ等）や国内の研究会（電子通信学会技術報告のＣＡＳ等）で発表されているものが多い．発表年代は目安であることを承知されたい．

Ⅲ．ディジタル信号処理を利用した音声の符号化復号化に関する歴史的展望

ディジタル信号処理の応用分野の一つに，公衆通信用の音声の符号化復号化がある．現在，各国が採用している規格は，国際電信電話諮問委員会（ＣＣＩＴＴ）の勧告Ｇ．７１２に準拠している．この規格を満足するには，アナログ音声信号と，高次のフィルタ（例えば６次の連立チェビシェフ型フィルタ）で帯域制限された，１３ビット相当のＳＮ比を有する直線ＰＣＭ信号との相互変換が必要である．一方，通信網のディジタル化に対処するため，従来のような幹線となる伝送路のみならず，交換器の加入者回路に至るまで符号器復号器が必要となり，経済性が一層重視されるようになってきた．

ベル研究所では，早くから，ディジタル信号処理技術を導入することによって符号化復号化を経済化することを検討しており，１９６９年にはD．Ｊ．Goodman[61]がデルタ変調を利用する方式を提案している．この方式が注目を集めるようになったのは，大規模集積回路（ＬＳＩ）による実現が期待できるようになった１９７０年代中頃からであり，１９７４年のH．Ｓ．McDonald [65]の方式提案を契機として，これまでに多数の方式検討，試作が行なわれている[66]-[79]．

これらの方式は，いずれも，アナログ回路部分を極力簡単化するために，標本値当り１ビットの量子化を行なっている．このため，所望のＳＮ比を得るためには，信号帯域幅に比べて著しく高い周波数で標本化する（oversampling）必要がある．例えば，最も単純な単一積分形デルタ変調方式を用いて量子化すると，標本化周波数を２倍にしてもＳＮ比は３ｄＢしか改善されず，規格を満足するＰＣＭ信号（信号帯域幅：４ｋＨｚ）を得るためには，１０ＭＨｚ近い周波数で標本化しなければならない．したがって，この信号を処理するディジタル回路にも，高速動作が要求される．

半導体素子には，ゲート遅延時間と消費電力の積はほぼ一定であるという性質があり，高速で動作させようとすると，消費電力が増加する．一方，ディジタル交換機には莫大な数の加入者回路が実装されるため，運用経費の点から，消費電力は極力低くしたいという要求がある．比較的低い周波数で標本化できる１ビット量子化方式として，２重積分形直線デルタ変調方式，圧伸デルタ変調方式等が知られているが，符号変換を行なうディジタル信号処理部分が複雑になることは避けられない．すなわち，oversamplingされた１ビットの信号と圧伸ＰＣＭ信号との相互変換を行なう場合，送信側での間引きや，受信側での補間および１ビット量子化によって生じるＳＮ比の低下を防ぐために，高次のディジタルフィルタ，あるいはこれと等価な回路が必要となる．したがって，標本化周波数の低下による素子当りの消費電力の削減と，処理の複雑化による素子数の増加の両面を考慮して，符号変換回路を設計しなければならない．

符号変換の方法としては，リセット機能付きのカウンタを用いた間引き[61]や，binary rate multiplierとよばれる密度変調回路による補間[63],[64]が有名であ

るが，これらは単一積分形直線デルタ変調用のもので，標本化周波数が低い場合には，ＳＮ比が著しく低下する．瞬時圧伸デルタ変調用の符号変換の一つの方式は１９７５年にＬ．Ｄ．Ｊ．Ｅggermont[67]によって提案された．また，翌年には，瞬時圧伸デルタ・シグマ変調を用いた符号化復号化がＪ．Ｃ．Candyら[73]によって提案され，試作結果が報告された．瞬時圧伸は，標本化周波数を低くするための有力な手法であるが，特性の理論的な解析は不可能に近く，設計が難しい．筆者ら[68],[73]は，線形近似による解析が可能な直線デルタ変調を利用する方式について検討を行ない，１９７９年に[78]構成が簡単で良好な特性が得られる２重積分形直線デルタ変調用符号変換方式を提案した．

現時点では，各社とも試作の段階にあり，いずれも実用化には至っていない．また，最近はスイッチトキャパシタ・フィルタを用いるアナログ信号処理方式も注目されており，どの方式が実用化されるかは予断を許さない情勢にある．

Ⅳ．本研究の位置付け

本研究は，上記の展望で言及した筆者らの成果を整理し，体系化したものである．研究の経過からみれば，まず応用としてのデルタ変調を利用した音声の符号化復号化に関する検討に始まって，ディジタルフィルタ等の量子化雑音の制御に関する考察として一般化を行ない，さらに解析モデルの表現の合理化，新しいノルムの導入へと発展したものである．すなわち，応用から基礎へと遡ってきたわけであるが，これらの検討を一貫して流れているのは，非線形現象の解析に作用素代数的な手法を導入し，厳密なモデルで，見通しのよい理論展開を図りたいという願望である．直線量子化という非線形演算に対して，この願望を多少なりとも具体化することが，本研究の目標であると云える．

与えられた回路の特性の解析や方式の提案という面での個々の成果，意義については，前記の展望で引用しているため省略し，ここでは手法的な面での寄与について述べる．表面には現れないが，理論的な検討を行なう上で，記法の与える影響は非常に大きい．例えば，ｆ（ｔ）の微係数を　ｆ´（ｔ）のように現わしてしたのでは，演算子法へと発展しなかったと思われる．本研究では，慣用の記法に比べてあいまいさが少なく，かつ簡潔で拡張性に富む作用素代数系の記法を導入することにより，厳密な理論展開を見通しよく，統一的に行なうことに成功した．この記法は慣用記法と親和性があり，例えば非線形素子や非零の初期値の遅延素子を含む回路の作用素も，伝達関数と類似の形で現わすことができる．

本研究をまとめるに当り，まず第２章で量子化雑音の解析のための公式，手法を整理し，つづいて第３章に雑音帰還や量子化切換えによる量子化雑音の対策を，第４章に音声の符号化復号化への応用に関する考察を示した．第４章の内容は，間引きや補間をともなう場合の，ディジタルフィルタと等価な，あるいは類似の機能をもつ簡単な時変回路の設計に関する検討が中心である．

第２章　　量子化雑音の解析

２．１　緒言

直線量子化には，微視的にみると極めて非線形性が強く（例えば，Lipschitzノルムは発散する），巨視的にみると線形に近いという二面性がある．量子化雑音の一般解が求まれば，このような二面性はとくに意識する必要はなく，解の性質に必然的に現れているはずである．しかし，任意の入力に対する量子化雑音の一般解を求めることは至難である．本章においても一般解を求めることには成功していないが，量子化雑音の解析に有効な等価変換の方法やパラメータ付きノルムについて述べ，量子化雑音の基本的な性質と若干の解析例を示す．

量子化雑音については，これまで，零入力や定数入力のような特殊な場合に対する固有値問題的な手法による厳密な解析と，大振幅入力に対する線形モデルによる近似的な解析は多数行なわれているが，前記の二面性を同時に考慮して検討することはあまり試みられていない．これに対して，本章で述べる雑音解析用の等価回路やパラメータ付きノルムでは，このような二面性を併せて検討できるように配慮されている．すなわち，等価回路自体は任意の入力に対して適用でき，厳密な解析を可能にするとともに，その一部をランダム雑音源で近似すると線形モデルとなる．また，ノルムのパラメータを無限大としたときの極限値は線形近似した作用素のノルムと等しい．

なお，本章以降では，慣用の記法を若干修正し，拡張したものを使用している．この点について，まず説明する．

2．2　諸定義ならびに公式

2．2．1　記法に関する考察

ディジタル信号処理回路の入出力関係は差分方程式で表わされるため，特性の解析にはZ変換が広く用いられている．以下でも，信号空間として，有界な実数列をZ変換したものの集合を考える．量子化の影響は非線形作用素を用いることにより，厳密かつ簡潔に表現できるが，作用素を含む式では関数と関数値を混同しないように注意しなければならない．ここでは，慣用記法の問題点を指摘し，記法の改良案を示す．

簡単のため，入力X（z）と出力Y（z）の関係が

$$Y(z) = \hat{Q}\{(1 - a z^{-1}) \cdot X(z)\} \qquad (2.1)$$

$$\hat{Q}\{\Sigma_k w_k z^{-k}\} = \Sigma_k Q(w_k) \cdot z^{-k} \qquad (2.2)$$

で表わされる回路を例にとって述べる．ここで，Qは標本値w_kをQ（w_k）に量子化する非線形の関数である．$\hat{Q}$は信号の各標本値をQによって量子化するという非線形作用素であるが，上式のような慣用記法に従った表現では，次のような誤りを犯し易い．

『Y（z）の直流成分は，Y（1）＝$\hat{Q}$｛（1－a）・X（1）｝である．』

この誤りは，関数$\hat{Q}$｛（$1 - a z^{-1}$）・X（z）｝のz＝1における値と，　関数｛（$1 - a z^{-1}$）・（z）｝のz＝1における値をQで量子化したQ｛（1－a）・X（1）｝を混同したものである．これに対して，数学で一般に用いられている記法によれば，式（2．1）は

$$Y(z) = (\hat{Q}W)(z) \qquad (W(z) = (1 - a z^{-1}) \cdot X(z))$$

のように表わされ，関数X，Y，$\hat{Q}$Wと関数値X（z），Y（z），（$\hat{Q}$W）（z）は明確に区別されるため，この種の混同が生じることはほとんどない．ただし，上式のWのような補助的な関数を必要とすることが多い．また，パラメータ付き作用素では，パラメータを添字で表示するため，複雑な式を代入すると見にくくなる等，若干不便な点が見られる．

これらの点を考慮し，以下では，次のような記法を用いる．まず，関数Xの点zに

おける関数値をX（z）で表わし，逆に点zにおける関数値がX（z）である関数を

$$X=[X(z)]_z \quad (=[X(u)]_u) \qquad (2.3)$$

のように，添字付きの括孤で表わす．

また，関数Xを作用素Tで変換して得られる関数をT’Xのように表わし，関数値（T’X）（z）をT’X（z）と略記する．　関数Hをパラメータとする作用素はT（H）のように表わし，とくにHとの加算，乗算，たたみ込み積分については，

$$\begin{aligned}(H+)'X(z)&=(H+X)(z)\\&=H(z)+X(z) \qquad (2.4)\\(H\cdot)'X(z)&=(H\cdot X)(z)\\&=H(z)\cdot X(z) \qquad (2.5)\\(H\otimes)'X(z)&=(H\otimes X)(z)\\&=\Sigma_k h_k x_k z^{-k} \qquad (2.6)\end{aligned}$$

と定める．　また，（$[H(z)]_z$+），（$[H(z)]_z$・）は，それぞれ$[H(z)+]_z$，$[H(z)\cdot]_z$と略し，H（z）が定数aに縮退しているときは，それぞれ（a+），aと書く．さらに，任意の実関数fに対して，

$$f'[\Sigma_k x_k\cdot v^{-k}]_v(z)=\Sigma_k f(x_k)\cdot z^{-k} \qquad (2.7)$$

により，作用素fを定義する．f（x_k）のfは関数，f’Xのfは作用素である．

関数の積H・Xが合成写像ではないことに注意されたい．これは，使用頻度からみて，式（2．5）の定義の方がはるかに有効であることによる．作用素については，合成写像の使用頻度が高いため，

$$(T_1T_2)'X=T_1'(T_2'X) \qquad (2.8)$$

と定義する．関数や作用素のべき乗については，積の定義から必然的に，

$$X^n=X\cdot X^{n-1},\quad T^n=TT^{n-1}$$

で定められる．

上記の記法によれば，式（2．1）は

$$Y(z)=Q([1-av^{-1}]_v\cdot)'X(z) \qquad (2.9)$$

となり，Yのz＝1における値Y（1）＝Q（［1－av^{-1}］$_v$・）’X（1）と，Y（1）をQで変換したQ｛［1－av^{-1}］$_v$（1）・X（1）｝を混同する恐れはなくなる．なお，式（2．9）の右辺のvをzで置換することは許されない．これは，例えば，

$$L'x(s)=\int x(t)\cdot\exp(-st)\,dt$$

において，tにsを代入できないのと同様の理由による．したがって，

$$Y=Q([1-az^{-1}]_z\cdot)'X$$

と表わすことは差支えない．

入出力関係が式（2．9）で定められる回路の機能は，作用素

$$\begin{aligned}T0&=Q([1-az^{-1}]_z\cdot)\\&=Q(1-a[z^{-1}\cdot]_z)\end{aligned} \qquad (2.11)$$

で表わされる．T_0は，伝達関数がH（z）＝1－az^{-1}である線形回路の作用素．

$$(H\cdot)=1-a[z^{-1}\cdot]_z$$

を近似的に実現したものであり，近似によって出力にあらわる雑音は，次式で求められる．

$$\begin{aligned}N&=\{T_0-(H\cdot)\}'X\\&=(Q-1)(1-a[z^{-1}\cdot]_z)'X\end{aligned}$$

なお，（2．10）では遅延素子の初期値を0としているが，初期値がqである場合には，［z^{-1}・］$_z$の代りに（q＋）［z^{-1}・］$_z$を用いて

$$T=Q\{1-a(q+)[z^{-1}\cdot]_z\} \qquad (2.12)$$

とすればよい．

上式のa，（q＋）は，さきに述べた略記法［a・］$_Z$＝a，［q＋］$_Z$＝（q＋）を適用したもので，いずれも作用素である．［a・］$_Z$を単にaで表わすことは，慣用の記法にも近く（通常は，作用素の定数倍として（aT）’X＝a・（T’X）が定義されるが，aも作用素とみれば式（2．8）の一例にすぎない），かつ表現が簡潔になるという利点をもっている．　懸念される表現のあいまいさについては，定数（関数値），関数および作用素の間での四則演算を禁止することによって，避けることができる．例えば，

（1＋T2）’X（z）＝3・Y（z）

における1，2は作用素で，3は定数でなければならない．　3・Y（z）が3’Y（z）であれば，この3は作用素である．行列の場合，　（A－λ）x（A：行列，λ：スカラ，x：ベクトル）のような表現は許されないが，これは演算A－λが定義されていないためであり，（A－λ）x＝Ax－λxと定義すると矛盾が生じるからではない．

定数，関数，作用素間の四則演算を禁じることにより，関数値が定数aに縮退している関数自体をもaで表わしても混乱を招くことはない．a（z）＝aと定義することは，一見無意味にみえるが，前記の［a＋］$_Z$＝（a＋）を特例とする必要がなくなり，また（1＋T2）’X＝3・Yのような表現が許される（この場合の3は関数）等の利点がある．

最後に，上記の記法を補足する若干の規約を示す．以後の数式の表現は，この規約に従っている．

（1）括孤（　），｛　｝，［　］は慣用に反しない範囲で，同等に扱う．
　例．［az^{-1}・］$_Z$＝（az^{-1}・）$_Z$

（2）積を表わす・は，因数に括孤が含まれていない場合限り，これを省略してもよい．
　例．　2・π・f・（t＋1）・g（t）
　　＝2πf・（t＋1）・g（t）　　（g：関数）

（3）括孤の省略の順序（結合の強さ）は，べき乗，作用素とそのパラメータ，作用素と関数，関数と変数，積または商，和または差の順とする．ただし，・を省略した積は，作用素と関数の結合より上位におく．
　例．（T’X）・Y＝T’X・Y≠T’XY＝T’（XY）

（4）関数，関数値の負のべき乗は，関数値の外に指数を付ける．
　例・sin（ωt）$^{-1}$＝［sin（ωt）］$^{-1}$≠sin^{-1}（ωt）

（5）とくに説明のない事項については，慣用の記法に準じる．

例. $X_1 = X_2 <==> \forall z,\quad X_1(z) = X_2(z)$

$(T_1 + T_2)' X = T'_1 X + T'_2 X$

また規約ではないが，概して括弧の少ない表現をとることがの望ましい．例えば

$$Y = [(1-T)^{-1}]' X$$

の代りに，これと等価な

$$Y = (1-T)^{-1} 1' X \qquad (2.13)$$

を用いることにより，式が簡潔になる．

2．2．2　主要な作用素の定義と公式

まず，任意の実数aに対して，aをこえない最大の整数を$\Gamma(a)$で表わし，また$\Theta(a)$を

$$\Theta(a) = \begin{cases} 1 & (a<0) \\ 0 & (a \geq 0) \end{cases} \qquad (2.14)$$

で定める．式（2．7）により，実関数Γ，Θから，作用素Γ，Θが定義される．つぎに，関数$U_{k,m}$，U_k，Uおよび作用素Δ，Bを

$$U_{k,m}(z) = z^{-k} \cdot (1 - z^{-m})^{-1} \qquad (2.15)$$

$$U_k = U_{k,1} \qquad (2.16)$$

$$U = U_0 \qquad (2.17)$$

$$\Delta = 1 - \Gamma \qquad (2.18)$$

$$B \qquad = (2^{-1} \cdot U+) \qquad (2.19)$$

と定義する．

実数値の信号Xに対して丸め，補数表示の切捨ておよび絶対値切捨てを行なって得られる整数値の信号は，それぞれ$\Gamma_B' X$，$\Gamma' X$および$\Gamma_{(\Theta' X+)}' X$で表わされる．また，区間［0，1）で一様分布するランダム雑音Rを加算して切捨てを行なうランダム量子化では，$\Gamma_{(R+)}' X$に量子化される．これらは，下記のように，いずれも$\Gamma_{(W+)}' X$の形で表現できる．

丸め　　：$\Gamma_{(2^{-1}U+)}' X$
切捨て（補数）　：$\Gamma_{(0+)}' X$
切捨て（絶対値）：$\Gamma_{(\Theta' X+)}' X$
ランダム量子化　：$\Gamma_{(R+)}' X$

前記の作用素Γ，Δ，Θ，Bに関して，つぎの公式が成立する．

$$\Gamma [z^{-1} \cdot]_z = [z^{-1} \cdot]_z \Gamma \qquad (2.20)$$
$$\Delta [z^{-1} \cdot]_z = [z^{-1} \cdot]_z \Delta \qquad (2.21)$$
$$\Theta [z^{-1} \cdot]_z = [z^{-1} \cdot]_z \Theta \qquad (2.22)$$
$$\Gamma' X = X - \Delta' X \qquad (2.23)$$
$$\Gamma' (X + \Delta' Y) = \Gamma' X \qquad (2.24)$$
$$\Delta' (X + \Gamma' Y) = \Delta' X \qquad (2.25)$$
$$\Delta' (X \cdot \Gamma' Y) = \Delta' (\Delta' X \cdot \Gamma' Y) \qquad (2.26)$$
$$\Delta' (X / \Gamma' Y) = \Delta' (\Delta' X / \Gamma' Y) \quad (\Gamma' Y = 1 - [z^{-1}]_z \Gamma' W) \qquad (2.27)$$
$$B' X + Y = X + B' Y \qquad (2.28)$$
$$\Gamma_B' X = X - B^{-1} \Delta B' X \qquad (2.29)$$

また，たたみ込み積分について，次の公式が成立する．

$$[z^{-1} \cdot]_z (H \otimes) = ([z^{-1} \cdot]_z' H \otimes) [z^{-1} \cdot]_z \qquad (2.30)$$
$$(H \otimes)' (X + Y) = (H \otimes)' X + (H \otimes)' Y \qquad (2.31)$$

$$[\Sigma_k h_k z^{-k}]_z \otimes [\Sigma_k x_k z^{-k}]_z = [\Sigma_k h_k x_k z^{-k}]_z \qquad (2.32)$$

最後に，信号の変動幅を評価するための二項関係≲を，次式で定義する．

$$[\Sigma_k x_k z^{-k}]_z \lesssim [\Sigma_k y_k z^{-k}]_z \quad <==> \forall k,\ x_k \leq y_k , \qquad (2.33)$$

関係≲は半順序と呼ばれるもので，大小関係が定まらない（X≲Y，Y≲Xのいずれも成立しない）ことがあるが，通常の順序と同様に，例えば次の性質をもっている．

［補題2．1］　0≲H　かつ　X≲Y　ならば，HX≲HY．

（証明）定義から直ちに，X≲Yと0≲Y－Xが等しいことがわかる．そして0≲H，0≲Y－Xであれば，H，Y－Xはいずれも正係数のべき級数であるから，H・（Y－X）＝HY－HXも正係数のべき級数となり，HX≲HYが成立する．

2．2．3　非線形作用素のノルム

ここでは，量子化雑音の振幅の上界を求めるための非線形作用素のノルムを定義し，その基本的性質を示す．まず，信号のノルムとして，

$$\| [\Sigma_k x_k z^{-k}]_z \| = \sup_k | x_k | \qquad (2.34)$$

を採用する．この定義は，有限エネルギーでない信号にも，そのまま適用できる．また，リミッタのような非線形素子を含む回路の特性をはじめ，非線形現象の解析には，電力よりも振幅でノルムを定義する方が有効なことが多い．

通常，作用素Tのノルムは

$$\| T \| = \sup_X \{ \| T' X \| / \| X \| \} \qquad (2.35)$$

あるいは

$$\| T \| = \sup_{X,Y} \{ \| T' X - T' Y \| / \| X - Y \| \} \qquad (2.36)$$

で定義される．式（２．３６）のノルムをＬipschitzノルムとよび，この式の右辺が有界であるとき，Ｔをリプシッツ作用素という．

作用素T_0のＬipschitzノルムが

$$\| T_0 \| < 1$$

であるとき，次の命題が成立することが知られている．[3]

（１）$(1-T_0)^{-1}$が存在し，

$$\| (1-T_0)^{-1} \| \leq (1-\| T_0 \|)^{-1}$$

（２）$T(k)=1+T_0\ T(k-1)$，$T(0)=$で定義される$T(k)$は，

$$\lim_{k\to\infty} T(k)'X = (1-T_0)^{-1}1'X$$

および

$$\| (1-T_0)^{-1}1'X - T(k)'X \| \leq \| T_0 \|^k \cdot \| T_0'X \| \cdot (1-\| T_0 \|)^{-1}$$

を満足する．

しかし，さきに定義した作用素Γ，Δ，Θ等は非線形性が強く，式（２．３５），（２．３６）の右辺が発散する．また，これらをＬipschitz作用素で近似しても，ノルムが１以上となると，上記のような性質は期待できない．
そこで，パラメータ付きノルム（parametric norm）を

$$\| T \| (p) = \sup_X p^{-1} \cdot \| T'pX \| \quad (\| X \| \leq 1,\ p>0) \qquad (2.37)$$

で定義し，

$$\| T \| = \sup_p \| T \| (p) \qquad (2.38)$$

とおく．上式の$\| T \|$は式（２．３５）で定められる$\| T \|$と等しい．パラメータ付

きノルム‖T‖(p)を用いることの利点は，‖X‖→0のとき‖T‖→∞となり，‖T'X‖が小さいにもかかわらず，この上界‖T‖・‖X‖が求まらない場合（量子化でしばしば現れる）に対しても，上界‖T‖(p)・p(p→0)を計算できることである．

線形作用素の場合は，任意のpに対して‖T‖=‖T‖(p)となり，このようにして定義された‖T‖は従来の線形作用素のノルムの定義，記法と一致する．作用素(H・)のノルムは

$$\| [\Sigma_k h_k z^{-k} \cdot]_z \| = \Sigma_k | h_k | \qquad (2.39)$$

である．これを

$$\| [\Sigma_k h_k z^{-k}]_z \| = \sup_k | h_k |$$

と混同しないように注意されたい．

式(2.37)の定義から，ただちに次の公式が得られる．

$$\| T'X \| \leq \| T \| (\| X \|) \cdot \| X \| \qquad (2.40)$$

$$\| T \| (p) \cdot p \leq \| T \| (q) \cdot q \quad (0<p<q) \qquad (2.41)$$

$$\| T_1 + T_2 \| (p) \leq \| T_1 \| (p) + \| T_2 \| (p) \qquad (2.42)$$

$$\| T_1 T_2 \| (p) \leq \| T_1 \| (\| T_2 \| (p) \cdot p) \cdot \| T_2 \| (p) \cdot p \qquad (2.43)$$

また，記憶のない作用素について，次の補題が成立する．

［補題2.2］ 式(2.7)で定められる作用素fのパラメータ付きノルムは，

$$\| f \| (p) = p^{-1} \cdot \sup_q | f(q) | \quad (|q| < p)$$

で与えられる．

（証明） 略．

上記の補題において，とくにf(q)がqに関して単調非減少であるとすると，

$$\| f \| (p) = p^{-1} \cdot \max \{ | f(p) |, | f(-p) | \}$$

である．例えば，mid-tread 形直線量子化ΓB，mid-riser 形直線量子化$B\Gamma$の場合，パラメータ付きノルムは，それぞれ

$$\begin{aligned} \| \Gamma B \| (p) &= p^{-1} \cdot \Gamma (p + 2^{-1}) \\ &= 1 + (2p)^{-1} - p^{-1} \cdot \Delta (p + 2^{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \| B\Gamma \| (p) &= p^{-1} \cdot \{ \Gamma (p) + 2^{-1} \} \\ &= 1 + (2p)^{-1} - p^{-1} \cdot \Delta (p) \end{aligned}$$

と表わされる．$\| \Gamma B \| (p)$は有界であるが，$\| B\Gamma \| (p)$は$p \to 0$の極限で発散する．しかし，

$$\| B\Gamma' X \| \leq \| B\Gamma \| (p) \cdot p \qquad (\| X \| \leq p)$$

であるから，Xに依存することなく，$\| B\Gamma' X \|$の上界$\| B\Gamma \| (p) \cdot p$について考察できる．これに対して，式（２．３５）あるいは式（２．３６）の定義では，$\| B\Gamma' X \|$の上界を与えることは不可能である．なお，$\| \Gamma B \|$は式（２．３５）の定義でも有界になるが，$\| \Gamma B' X \|$（$\| X \| \gg 1$）の上界としては，$\| \Gamma B \| \cdot \| X \| = 2 \cdot \| X \|$は過大である．

2．3　雑音解析のための等価変換

一般に，T，Δ，Θ等を含む非線形方程式を解くことは非常に困難である．しかし，方程式（回路構成）を適当に等価変換することにより，解の性質をある程度知ることができる．本節では，まず与えられた伝達関数

$$H=H_2\cdot(1-H_1)^{-1} \qquad (2.44)$$

を近似的に実現する図２．２の回路について，等価変換を行ない，量子化雑音の性質を解析する方法を示す．なお，以下では，回路の表現に図２．１の記号を用いる．図のT_1，T_2はそれぞれ（$H_1\cdot$），（$H_2\cdot$）を近似する作用素である．

図２．２の回路の入出力関係は

$$W=X+T_1\,'\,W \qquad (2.45)$$
$$Y=T_2\,'\,W \qquad (2.46)$$

で表わされ，近似によって出力に現われる雑音成分

$$N=Y-H_2\cdot(1-H_1)^{-1}\cdot X \qquad (2.47)$$

は，次のように変形できる．

［定理２．１］式（２．４５），（２．４６），（２．４７）で定められる出力の雑音成分Ｎは

$$N=[T_2-(H_2\cdot)]\,'\,W + H_2\cdot(1-H_1)^{-1}\cdot[T_1-(H_1\cdot)]\,'\,W$$

と表わすことができる．

（証明）式（２．４７）からＸ，Ｙを消去して変形すると，

$$N=T_2\,'\,W-[H_2\cdot(1-H_1)^{-1}\cdot](1-T_1)\,'\,W$$
$$=T_2\,'\,W-H_2\cdot(1-H_1)^{-1}\cdot\{[(1-H_1)\cdot]+(H_1\cdot)-T_1\}\,'\,W$$

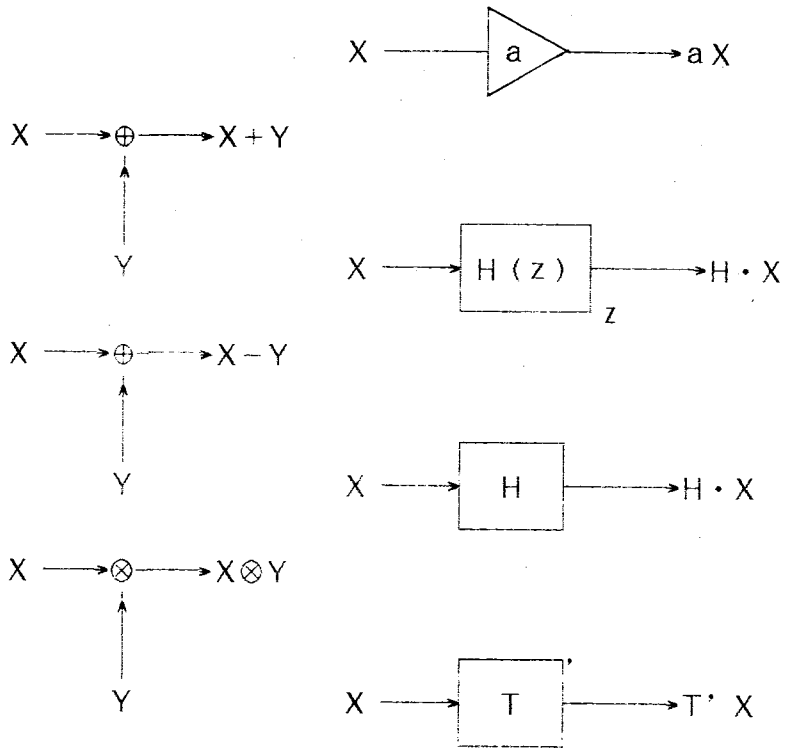


図２．１　素子および部分回路の記法

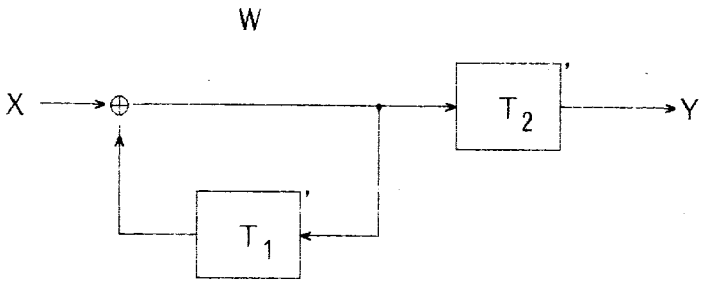


図２．２　$H_2 \cdot (1-H_1)^{-1}$を実現する回路

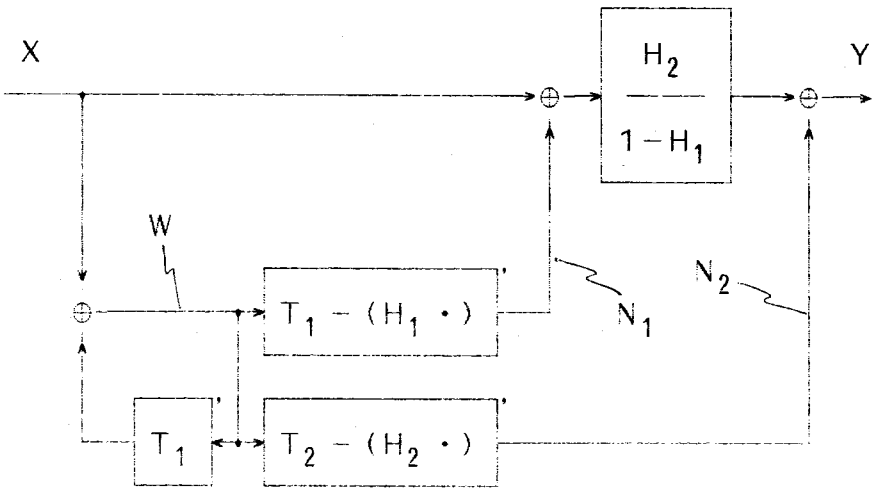


図２．３　雑音解析用の図２．２の等価回路

となる．

この定理は，図２．２の回路が図２．３のように等価変換できることを意味している．雑音成分Ｎの性質を検討するには，明らかに図２．３の等価回路の方が扱い易い．図のN_1，N_2はそれぞれH_1，H_2をT_1，T_2で近似したことによって生じる雑音であり，線形モデルではランダム雑音で近似されることが多い．しかし，後述するように，微小なＸに対してはこのような近似は成立しない．

以下に，図２．２のように表わされる簡単な回路に対する解析例を示す．

［例２．１］　図２．２で，$T_1 = \Gamma B [a z^{-1} \cdot]_z$（$0 < 1-a \ll 1$），$T_2 = 1$とおいて得られる積分器の場合，定理２．１のＮは

$$N(z) = (1 - a z^{-1})^{-1} \cdot N_1(z)$$
$$N_1 = (\Gamma B - 1)[a z^{-1} \cdot]_z \Delta' W$$

となる．$\Gamma B - 1 = B^{-1} \Delta B$であるから，Ｗが大きいときは，$N_1$は区間$[-2^{-1}, 2^{-1})$で一様分布するランダム雑音で近似できる．

一方，Ｗが微小なときの有名な非線形現象として，$z = 1$に極をもつ線形回路と同様の動作をする（$z = 1$にeffective　poleをもつという）ことがある．これは，Ｗが

$$\Gamma B [a z^{-1} \cdot]_z ' W = [z^{-1} \cdot]_z ' W$$

を満足する場合に他ならない．上式は$\Gamma B a' W = W$と等価である．

$\Delta' W = \Delta \Gamma B a' W = 0$であるから，

$$W = \Gamma' W = \Gamma B a T' W = \Gamma B' [\Gamma' W + (1-a) \cdot \Gamma' W]$$
$$= \Gamma' W + \Gamma B (1-a)' W$$

となり

$$\Gamma B (1-a)' W = 0$$

が成立する．したがって

$$0 \lesssim 2^{-1}U + (1-a) \cdot W \lesssim U$$

$$-b \cdot U \lesssim W = \Gamma' W \lesssim b \cdot U \qquad (\ b^{-1} = 2 \cdot (1-a)\ )$$

であることがわかる．

［例2．2］ 図2．2で$T_1 = \Gamma B [z^{-1} \cdot]_z$ $(V\otimes)$，$T_2 = 1$とおき，$V = U - 2^{-1} \cdot U_{0,m}$とすると伝達関数が

$$H(z) = (1 - a z^{-1})^{-1} \qquad (a^m = 1/2)$$

である積分器が近似的に実現できる．回路構成を図2．4（a）に示す．

この回路は，m標本化周期ごとに積算値を半減させる線形時変回路で，定理2．1のNは

$$N(z) = z^{-1} \cdot H(z) \cdot \{\Gamma B (V\otimes) - a\}' Y(z)$$

となり，

$$N(z) = z^{-1} \cdot H(z) \cdot \{N_C(z) + N_Q(z)\}$$
$$N_C = (V - aU) \otimes Y$$
$$N_Q = -B^{-1} \Delta B' (V \otimes Y)$$

と表わされる．N_Cは係数が時変であることによって生じる雑音を，N_Qは量子化雑音を表わす．大振幅動作（$\| X \| \gg 1$）のときは，$\| N_Q \| 2^{-1} \ll \| N_C \|$であり，SN比はほぼ$N_C$で定まる．

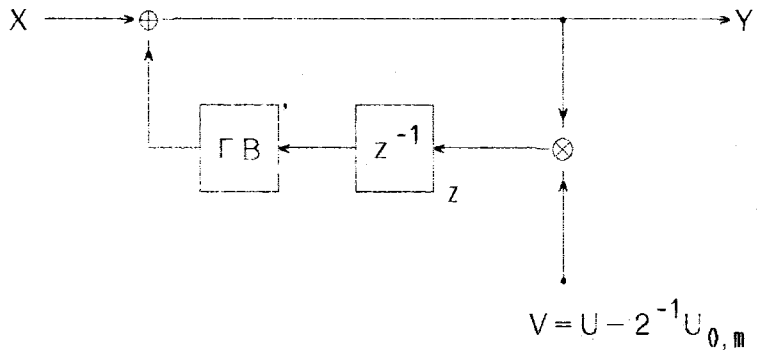
N_Cの振幅はほぼ入力の振幅に比例する．大振幅動作を想定して，T_1を

$$\tilde{T}_1 \simeq [z^{-1} \cdot]_z \quad (V\otimes)$$

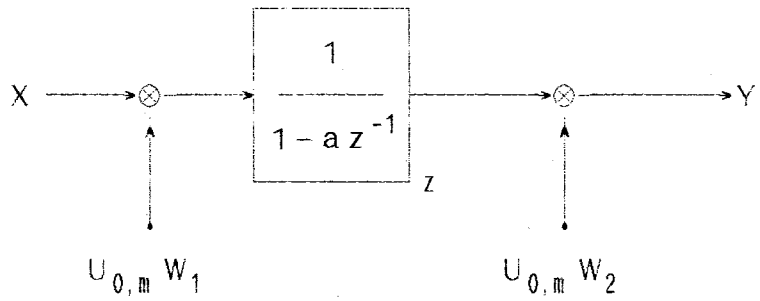
と近似すると$\tilde{T}_1$は線形で，Vは周期関数であるから，Yは

$$Y \simeq (1 - \tilde{T}_1)^{-1} 1' X = \Sigma_{k=0,m-1} H_k \cdot (U_{k,m} \otimes X)$$

によって近似的に求められる．ここで，Hkは$U_{k,m}$で間引きされた信号に対するイ



（ａ）　回路構成



（ｂ）　大振幅動作時の等価回路

図２．４　時変係数積分器

ンパルス応答である．この種の変形は，一般の周期的時変係数を含む線形回路の解析にも有効である．

より解析の容易な形でYを表現するには，個々の回路に応じて変形するしかない．本例の場合は，

$$X(z) = \Sigma_k x_k z^{-k}$$

$$W_1(z) = \Sigma_{k=0,m-1} a_k z^{-k}$$

$$= (1 - a^m z^{-m}) \cdot (1 - a z^{-1})^{-1}$$

$$W_2(z) = \Sigma_{k=0,m-1} a^{-k} z^{-k}$$

$$= (1 - a^{-m} z^{-m}) \cdot (1 - a^{-1} z^{-1})^{-1}$$

$$H_k = (U_{-k,m} W_2 \otimes H) \cdot a^k$$

とおくと，

$$H_k \cdot (U_{k,m} \otimes X)$$

$$= (U_{-k,m} W_2 \otimes H) \cdot a^k \cdot \Sigma_i [x_{k+mi} z^{-k-mi}]_z$$

$$= \Sigma_i \{U_{mi,m} W_2 \otimes H \cdot [a^k x_{k+mi} z^{-k-mi}]_z\}$$

$$= U_{0,m} W_2 \otimes H \cdot \{[\Sigma_i a^k z^{-k-mi}]_z$$

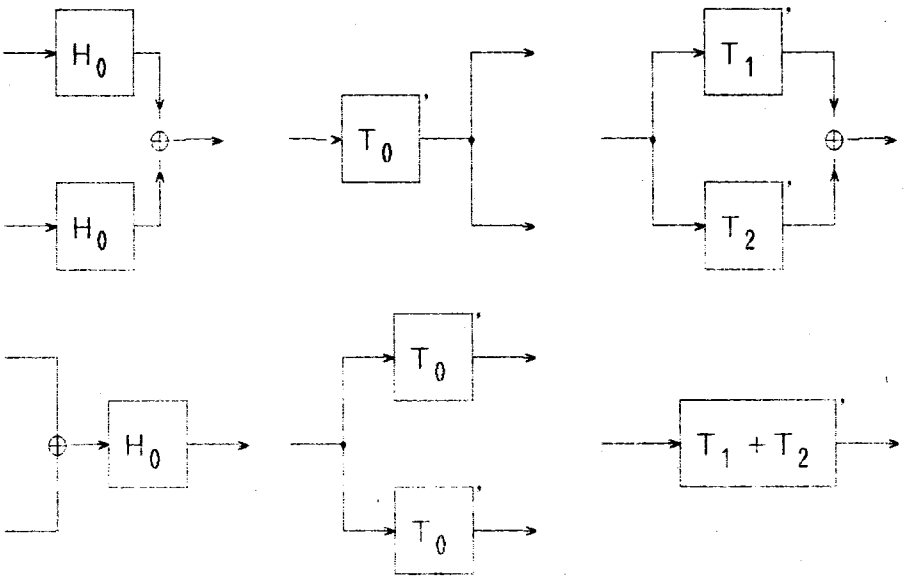
$$\otimes [\Sigma_i x_{k+mi} z^{-k-mi}]_z\}$$

となるから，

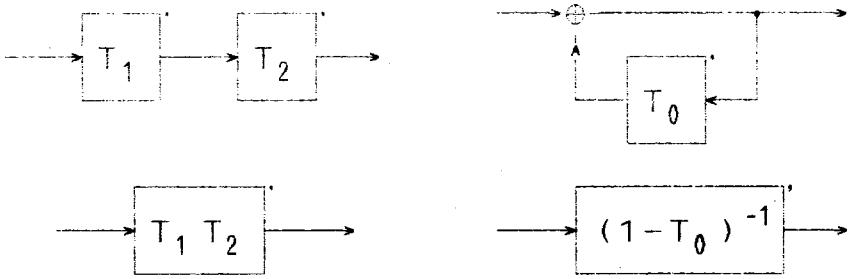
$$(1 - T_1) = (U_{0,m} W_2 \otimes)(H \cdot)(U_{0,m} W_1 \otimes)$$

と表わすことができ，図２．４（ｂ）の等価回路が得られる．

図２．２以外の構成の回路に対しても，図２．３と同様の等価回路を求めることが



（a） 共用　　（b） 分岐　　（c） 並列接続



（d） 縦続接続　　（e） 帰還

図2．5　等価変換の基本形

できる．すなわち，$(H_k \cdot)$ $(1 \leq k \leq m)$ を T_k で近似することによって出力に現れる雑音Nが

$$N = \Sigma_{k=1,m} G_k \cdot [T_k - (H_k \cdot)] \, ' \, W_k \qquad (2.48)$$

と表わされるように等価変換することにより，W_k が求まらなくても，Nの性質をある程度知ることができる．ここで，G_k，W_k はそれぞれ適当な伝達関数および信号である．

図2．5に等価変換の基本形を示す．図の（a）は，$T_0 = (H_0 \cdot)$ と表わされる場合以外は必らずしも成立するとは限らない．また，（e）については 逆作用素 $(1 - T_0)^{-1}$ の存在が問題となるが，T_0 としてはループ遅延が0でないこと，すなわち

$$T_0 \, ' \, X = (T_0 \, ' \, X) \otimes U_1 \qquad (2.49)$$

を満足することを前提とすると，任意のXに対して，$Y = X + T_0 \, ' \, Y$ を満足するYが求められる．このことは，回路が安定か否かにかかわらず，$(1 - T_0)^{-1}$ が定まることを意味する．

簡単な等価変換の例を図2．6に示す． 図の（a）の回路に対して，図2．5の（a）（b），（d）の等価変換を行なうことにより，同図（b）の等価回路が得られる．これは，下記のような方程式の変形に対応する．

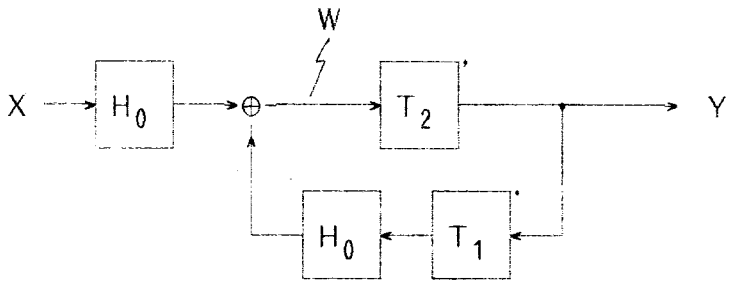
（1） $W = H_0 \cdot X + H_0 \cdot T_1 \, ' \, Y, \quad Y = T_2 \, ' \, W$
（2） $W = H_0 \cdot (X + T_1 \, ' \, Y), \quad Y = T_2 \, ' \, W$
（3） $W = H_0 \cdot (X + T_1 \, T_2 \, ' \, W), \; Y = T_2 \, ' \, W$

最後に，図2．7（a）に示される2次のディジタルフィルタについて述べる．高次のフィルタは，通常，2次のフィルタの縦続接続で実現され，2次のフィルタはこの図のような回路（第2直接形）で構成されることが多い．図の

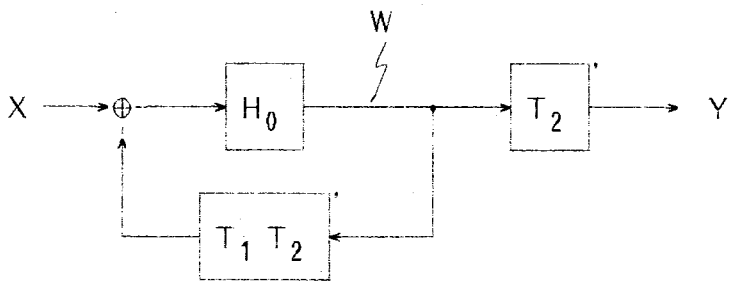
$$C_{ij} = \Gamma B a_{ij} \qquad (2.50)$$
$$D_k = (q_k +) \, [z^{-1} \cdot]_z \qquad (2.51)$$

は，それぞれ係数乗算器および遅延素子を表わす．このフィルタの入出力関係は

$$W = X + T1 \, ' \, W \qquad (2.52)$$

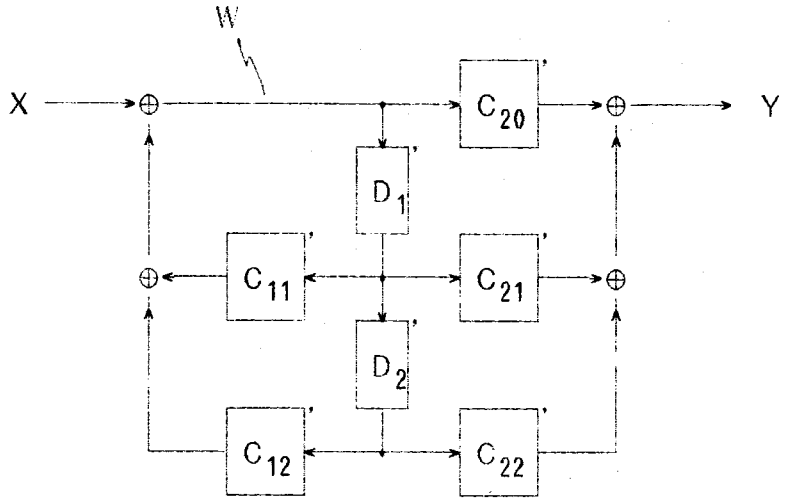


（a）　原回路

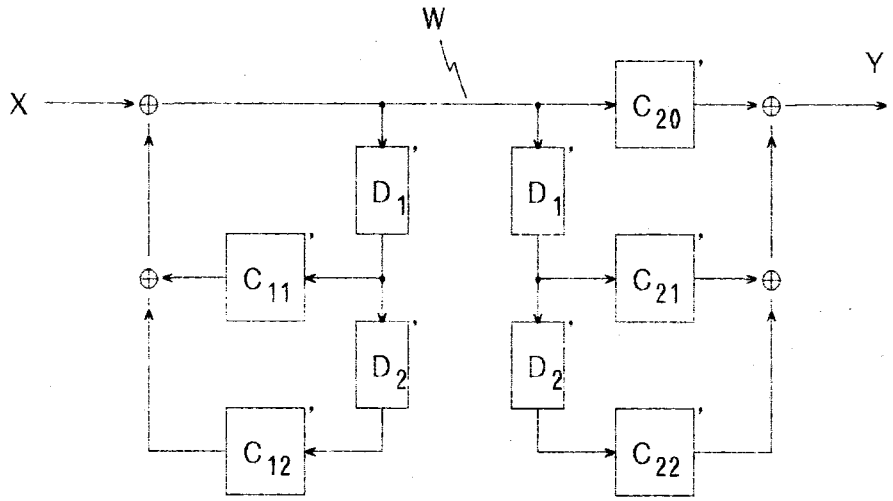


（b）　等価回路

図2．6　等価変換の例



（ａ）　原回路



（ｂ）　等価回路

図２．７　第２直接形で構成された
ディジタルフィルタの等価変換

$$Y = T_2 \,' W \qquad (2.53)$$
$$T_1 = (C_{11} + C_{12} D_2) D_1 \qquad (2.54)$$
$$T_2 = C_{20} + (C_{21} + C_{22} D_2) D_1 \qquad (2.55)$$

で与えられ，図2．7（b）のように等価変換できる．T_1，T_2 はそれぞれ

$$H_1(z) = (a_{11} + a_{12} z^{-1}) \cdot z^{-1} \qquad (2.56)$$
$$H_2(z) = a_{20} + (a_{21} + a_{22} z^{-1}) \cdot z^{-1} \qquad (2.57)$$

で定められる（H_1 ・），（H_2 ・）を近似的に実現する非線形作用素である．

式（2．52），（2．53）は式（2．45），（2．46）と同一であるから，図2．3の回路を用いて量子化雑音を解析することができる．式（2．50），（2．51），（2．54）から，任意の因果関数Wに対して，

$$\begin{aligned} & T_1 \,' W \\ &= \{\Gamma B a_{11} + \Gamma B a_{12} (q_2 +) [z^{-1} \cdot]_z \} \\ & \quad (q_1 +) [z^{-1} \cdot]_z \,' W \\ &= \Gamma B a_{11} \,' \{q_1 + [z^{-1} \cdot]_z \,' W\} \\ & \quad + \Gamma B a_{12} \,' \{[q_2 + q_1 z^{-1}]_z + [z^{-2} \cdot]_z \,' W\} \end{aligned}$$

が成立する．上式のΓBは記憶のない作用素で，Wは因果関数であると仮定しているから，

$$\begin{aligned} & \Gamma B a_{11} \,' \{q_1 + [z^{-1} \cdot]_z \,' W\} \\ &= \Gamma B \,' a_{11} q_1 + \Gamma B [a_{11} z^{-1} \cdot]_z \,' W \end{aligned}$$

となる．$\Gamma B a_{12} \,' \{[q_2 + q_1 z^{-1}]_z + [z^{-2} \cdot]_z \,' W\}$ も同様に変形でき，作用素T_1は

$$T_1 = (V+) \tilde{T}_1 \qquad (2.58)$$
$$\tilde{T}_1 = \Gamma B [a_{11} z^{-1} \cdot]_z + \Gamma B [a_{12} z^{-2} \cdot]_z \qquad (2.59)$$
$$V(z) = \Gamma B (a_{11} q_1) + \Gamma B (a_{12} q_2) + \Gamma B (a_{12} q_1) \cdot z^{-1} \qquad (2.60)$$

と表わされる．T_1 を式（2．58）のように分解することにより，式（2．52）は

$$W=(X+V)+\tilde{T}_1\,'\,W \qquad (2.61)$$

となる．Vは遅延素子の初期値q_1，q_2の影響を考慮するための仮想的な過渡入力，$\tilde{T}_1$はT_1から遅延素子の非零の初期値の影響を除いたものである．

図2．3の$T_1-(H_1\cdot)$は，この場合，

$$T_1-(H_1\cdot)=(V+)\{B^{-1}\Delta B[a_{11}z^{-1}\cdot]_z + B^{-1}\Delta B[a_{12}z^{-1}\cdot]_z\} \qquad (2.26)$$

となる．ここで，公式（2．29）が用いられている．同様にして，

$$T_2-(H_2\cdot)=(V+)[B^{-1}\Delta B a_{20}+B^{-1}\Delta B[a_{21}z^{-1}\cdot]_z + B^{-1}\Delta B[a_{22}z^{-1}\cdot]_z\} \qquad (2.63)$$

が得られるが，

$$\|\{H_2\cdot(1-H_1)^{-1}\}\cdot\| \gg 1$$

のときは，図のN_2の影響は，N_1の影響に比べて，無視できる．N_1は

$$N_1=\{T_1-(H_1\cdot)\}\,'\,W=V+N_{11}+N_{12}$$
$$N_{11}=B^{-1}\Delta B[a_{11}z^{-1}\cdot]_z\,'\,W$$
$$N_{12}=B^{-1}\Delta B[a_{12}z^{-2}\cdot]_z\,'\,W$$

と表わされ，Wの値にかかわらず

$$-U\leqq N_{11}+N_{12}\leqq U$$

が成立する．

出力に現れる量子化雑音成分は，Wが微小でなければ，N_{11}，N_{12}を区間$[-2^{-1},2^{-1})$で一様分布するランダム雑音とみなした線形モデルで近似的に解析できる．一方，零入力リミットサイクルは，式（2．52）に対してX＝0とおいた式，$W=T_1\,'\,W$の解であり，これから求められるN_{11}，N_{12}は輝線スペクトルをもつ．X≠0のときの式（2．52）の解については，次節で考察する．

2．4　量子化雑音の波形とスペクトル

2．4．1　振幅の上界

出力に現れる量子化雑音成分Nを定理2．1あるいは式（2．48）のように表わすことにより，WやW$_k$が求まらなくても，ある程度Nの性質について考察できることを前節で述べた．ここでは，最悪値設計のための‖N‖の上界の計算法を示す．簡単のため，定理2．1の場合（図2．3の回路）について説明するが，式（2．48）の場合も同様である．

定理2．1のNに対して，つねに

$$\|N\| \leqq \varepsilon_2(\|W\|) + \|\{H_2 \cdot (1-H_1)^{-1}\} \cdot \| \cdot \varepsilon_1(\|W\|) \quad (2.64)$$

$$\varepsilon_k(p) = \|T_k - (H_k \cdot)\|(p) \cdot p \quad (p>0) \quad (2.65)$$

$$W = X + T_1' W \quad (2.66)$$

が成立する．式（2．65）で定義される$\varepsilon_k(p)$（k＝1，2）はpに関して単調非減少である．　したがって，$\varepsilon_k(\infty)$が有界であれば，式（2．64）の$\varepsilon_k(\|W\|)$を$\varepsilon_k(\infty)$で置換することにより，‖N‖の一つの上界が得られる．$\varepsilon_k(p)$は近似誤差のノルムの上界であるから，多くの場合，pの増加にともなって速やかに収束する．

［例2．3］　式（2．62），すなわち

$$T_1 - (H_1 \cdot) = (V+)\{B^{-1}\Delta B[a_{11}z^{-1}\cdot]_z + B^{-1}\Delta B[a_{12}z^{-2}\cdot]_z\}$$

の場合，

$$\forall p, \quad \varepsilon_1(p) - \varepsilon_1(0) \leqq \varepsilon_1(\infty) - \varepsilon_1(0) = 1$$

となる．すなわち，$\varepsilon_1(p)$を$\varepsilon_1(\infty)$で近似することの誤差は，$B^{-1}\Delta B$による量子化ステップ幅1をこえることはない．また，

$$q1 = 2^{-1} \cdot \max\{|a11|^{-1}, |a12|^{-1}\}$$

とおくと，$\|W\| \geq q_1$ に対して，$\varepsilon_1(\|W\|) = \varepsilon_1(\infty)$ が成立する．

$X=0$のときの式（2．61）の解W（共振回路の零入力リミットサイクル）の振幅，周期，波形等について，これまで多数の検討が行なわれているが，一般的な解析は成功していない．特殊な場合であるが，$X=0$における式（2．61）の解が

$$W = V + (\Gamma B' H_1) \cdot W \qquad (H_1(z) = a_{11}z^{-1} + a_{12}z^{-2})$$

の解に一致する場合は，$(1-\Gamma B' H_1)^{-1}$の極にeffective poleをもつといい，Wを容易に求めることができる．定常状態では$\Delta' W=0$であるから，時刻0ですでに定常状態になっているような初期値に対しては，$\Delta' V=0$でなければならない．このとき，effective poleをもつための条件は，

$$\begin{aligned}
&(\Gamma B' H_1) \cdot \Gamma' W \\
&= \{\Gamma B[a_{11}z^{-1}\cdot]_z + \Gamma B[a_{12}z^{-2}\cdot]_z\}\Gamma' W \\
&= (\Gamma B' H_1) \cdot \Gamma' W + \Gamma B[b_{11}z^{-1}\cdot]_z \Gamma' W \\
&\quad + \Gamma B[b_{12}z^{-2}\cdot]_z \Gamma' W
\end{aligned}$$

となる．ここで，$b_{1k} = B^{-1}\Delta B' a_{1k}$である．したがって．Wが $\Gamma B^{-1}\Delta' W = \Gamma B^{-1}\Delta' W = 0$を満足すればeffective poleが存在することがわかる．

大振幅のリミットサイクルが発生するのは $0 < 1 - a_{12} \ll 1$ の場合であり，このとき$b_{12} \simeq 0$となるが，$b_{11} \simeq 0$であることは期待できない．Wが

$$2b_{12} \cdot \|W\| < 1$$

を満足するとき，式（2．61）は

$$W = X + V + \Gamma B[a_{11}z^{-1}\cdot]_z' W + [z^{-2}\cdot]_z' W$$

と等しい．上式を解くことは，式（2．61）を解くことよりも容易である．

$p \to \infty$に対する$\varepsilon_k(p)$の収束が遅い場合，あるいは発散する場合は，$\|W\|$の上界の計算が必要となる．これには，次の定理が有力である．

［定理２．２］　式（２．６６）において，適当な整数ｑが存在し，ｐ＞ｑである任意のｐに対して，

$$p > \| X \cdot (1 - H_1)^{-1} \| \\ \| \{ (1 - H_1)^{-1} \cdot \} \{ T_1 - (H_1 \cdot) \} \| (p) \cdot p$$

が成立するならば，$\| W \| \leq q$でなければならない．

（証明）　式（２．６６）を変形すると

$$(1 - H_1) \cdot W = X + \{ T_1 - (H_1 \cdot) \}' W$$

が得られ，つねに

$$\| W \| \leq \| X \cdot (1 - H_1)^{-1} \| \\ + \| \{ (1 - H_1)^{-1} \cdot \} \{ T_1 - (H_1 \cdot) \} \| (\| W \|) \cdot \| W \|$$

が成立する．したがって，$\| W \| > q$とすると仮定に反する．

上記の定理は，形式的に$H_1 = 0$とおいても成立するが，このときの条件

$$\forall p > q, \quad p > \| X \| + \| T_1 \| (p) \cdot p \qquad (2.67)$$

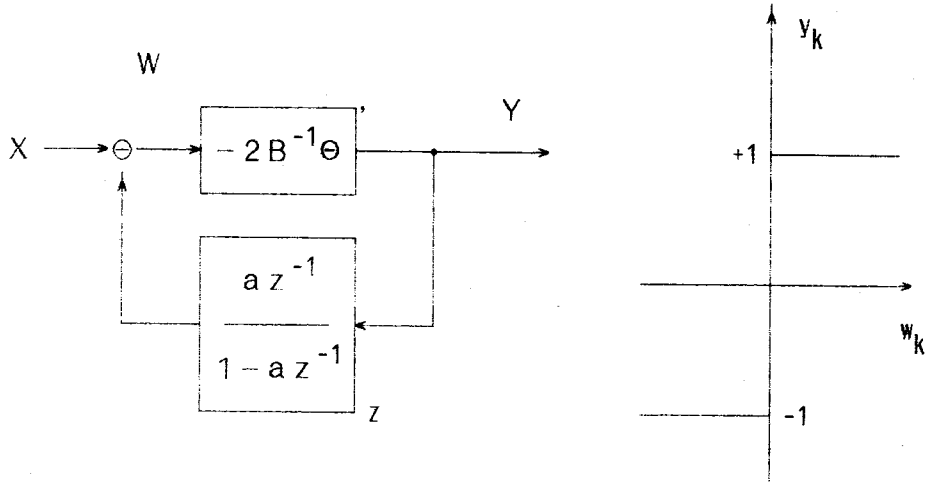
を満足するｑが存在しない場合，すなわち$\| T_1 \| (\infty) > 1$となる場合も少なくない．これ対して，近似誤差に対応する$T_1 - (H_1 \cdot)$では，通常，

$$\| T_1 - (H_1 \cdot) \| (\infty) = 0$$

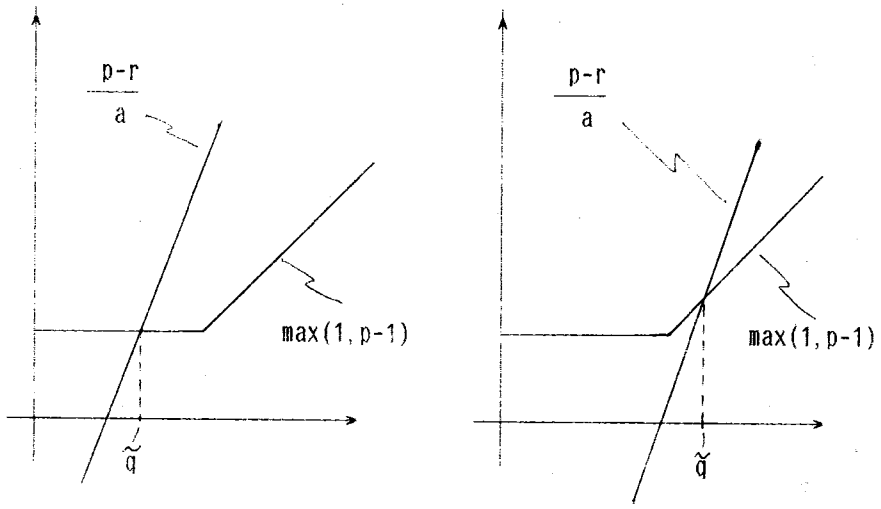
となる．また，つねに

$$\| X \cdot (1 - H_1)^{-1} \| \leq \| (1 - H_1)^{-1} \cdot \| \cdot \| X \| \qquad (2.68)$$

$$\| \{ (1 - H_1)^{-1} \cdot \} \{ T_1 - (H_1 \cdot) \} \| (\| W \|) \\ \leq \| (1 - H_1)^{-1} \cdot \| \\ \cdot \| T1 - (H1 \cdot) \| (\| W \|) \qquad (2.69)$$



（a） 回路構成　　（b） 量子化特性



（c） 正常動作　　（d） 過負荷状態

図2．8　デルタ変調器の特性解析

であるが，これらの不等式の左辺の代りに右辺を用いて‖W‖の上界を求めると，その値が著しく大きくなる場合があり，注意を要する．

［例2．4］ 図2．8（a）は単一積分形デルタ変調器とよばれる2値量子化回路の非線形モデルである．これを等価変換すると，図2．2で$T_1=(H_1\cdot)T_2$，$T_2=-2B^{-1}\Theta$．$H_2=1$とおいた回路が得られる．ここで，H_1は

$$H_1(z)=-az^{-1}\cdot(1-az^{-1})^{-1}\qquad(0<1-a\ll1)$$

で定められるアナログ積分器の伝達関数である．図の信号Wは予測誤差とよばれ，作用素$-2B^{-1}\Theta$によって，±1の2値に量子化される．（図2．8（b）参照）

この回路では，式（2．65）の$\varepsilon_1(p)$は

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(p)&=\|(H_1\cdot)\{2B^{-1}\Theta+1\}\|(p)\cdot p\\&=a\cdot(1-a)^{-1}\cdot\|2B^{-1}\Theta+1\|(p)\cdot p\end{aligned}$$

となり．補題2．2から

$$\|2B^{-1}\Theta+1\|(p)\cdot p=\max\{1,\ p-1\}$$

が成立する．したがって，$p\to\infty$のとき$\varepsilon_1(p)\to\infty$となり，$\varepsilon_1(\|W\|)$の上界を得るためには，‖W‖の上界を求めねばならない．この場合，

$$\{1-H_1(z)\}^{-1}=1-az^{-1}$$

$$\begin{aligned}\{(1-H_1)^{-1}\cdot\}\{T_1-(H_1\cdot)\}&=\{-H_1\cdot(1-H_1)^{-1}\cdot\}(2B^{-1}\Theta+1)\\&=[az^{-1}\cdot]_z(2B^{-1}\Theta+1]\end{aligned}$$

であるから，定理2．2の条件は，

$$\forall p>q,\quad p>\|[1-az^{-1}]_z\cdot X\|+a\cdot\max\{1,\ p-1\}$$

となる．$\|[1-az^{-1}]z\cdot X\|=r$とおいて，上式を満足するqの下限$\bar{q}$を図2．

8（c），（d）に示す．図の（c）はrの増加に対して$\tilde{\alpha}$が緩やかに増加する正常動作の場合，図の（d）はrの増加に対して$\tilde{\alpha}$が著しく増加する過負荷状態に対応する．過負荷点は$\tilde{\alpha}=2$であり，過負荷が生じないためには，

$$(2-r)/a \geqq 1$$

であること，すなわち$r \leqq 2-a$であることが必要である．

なお，係数aを$a>1$とすると，H1 の極は単位円外に移動し，動作が不安定となるが，このとき定理2．2の条件を満足するqは存在しない．このことは，図2．8（c）あるいは（d）において，直線の勾配が1より小さくなることから，ただちにわかる．

［例2．5］　上例の回路に対して，定理2．2の代りに，式（2．67），（2．68），（2．69）等を用いた場合に得られる$\|W\|$の上界を以下に示す．まず，式（2．67）を用いた場合，

$$\|T_1\|(p)\cdot p = \|(1-H_1)^{-1}\cdot\|\cdot 2B^{-1}\Theta\|(p)\cdot p$$
$$= a\cdot(1-a)^{-1}$$

であるため，$q>a\cdot(1-a)^{-1}\gg 1$でなければならない．この上界の値は，上例の場合に比べて，著しく大きい．

次に，式（2．68）の両辺を比較する．これらは

$$\|X\cdot(1-H_1)^{-1}\| = \|[1-az^{-1}]_z\cdot X\|$$
$$\|(1-H_1)^{-1}\cdot\|\cdot\|X\| = a\cdot(1-a)^{-1}\cdot\|X\|$$

と表わされるが，デルタ変調器では信号帯域幅に比べて非常に高い周波数で標本化するため，

$$\|[1-az^{-1}]_z\cdot X\| \ll \|X\|$$

となる．式（2．68）の右辺ではこのようなXの性質を考慮できず，逆に$\|X\|$より非常に大きな値$a\cdot(1-a)^{-1}\cdot\|X\|$が上界の計算に用いられる．

式（2．69）についても，

$$\{(1-H1)^{-1}\cdot\}\{T1-(H1\cdot)\}$$

$$= \{ -H_1 \cdot (1-H_1)^{-1} \cdot \} (2B-1\Theta+1)$$

$$\| H_1 \cdot (1-H_1)^{-1} \cdot \| = a$$
$$\ll a \cdot (1-a)^{-1} = \| (1-H_1)^{-1} \cdot \|$$

という性質を活かせないため，式（２．６９）の右辺を用いたのでは，左辺を用いる場合に比べて，著しく大きい上界しか得られない．

例２．４の場合，式（２．６７）を用いても$\| W \|$の上界が得られるが（ただし，例２．５に示したように，その値は非常に大きい），上界が得られない場合も少なくない．例えば，例２．３のT_1は

$$T_1 = (V+) \{ \Gamma B [a_{11} z^{-1} \cdot]_z + \Gamma B [a_{12} z^{-2} \cdot]_z \}$$

であるが，

$$| a_{11} | + | a_{12} | > 1$$

のときは，式（２．６７）を満足するqは存在しない．

最後に，正負非対称な量子化を行なったときの量子化雑音の振幅の上界について述べる．正負対称な量子化である丸めの場合，例えば

$$(H \cdot) \Gamma B - (H \cdot) = (H \cdot) B^{-1} \Delta B$$

のパラメータ付きノルムは

$$\| (H \cdot) B^{-1} \Delta B \| (p) = \| (H \cdot) \| \cdot \min \{ 1, (2p)^{-1} \}$$

であるが正負非対称な量子化では，このような等号が成立するとは限らない．補数表示の切捨ての場合に対しては，つぎの補題が成立する．

［補題２．３］　伝達関数Hの時刻kにおける標本値をh_kとおき，$h_k > 0$であるようなkの集合をP，$h_k < 0$であるようなkの集合をMで表わす．このとき，作用素$(H \cdot) \Gamma - (H \cdot) = - (H \cdot) \Delta$のパラメータ付きノルムは

$$\| (H\cdot)\Delta \| (p)$$
$$= \max \{ \Sigma_{k \text{ in } P} h_k , -\Sigma_{k \text{ in } M} h_k \} \cdot \min \{1, p^{-1}\}$$

で与えられる．

（証明　$\| W \| \leq p$である信号Wの時刻kにおける標本値をw_kとすると，

$$\| (H\cdot)\Delta' W \|$$
$$= \sup_m | \Sigma_k h_k \cdot \Delta (w_{k-m}) |$$
$$= \sup_m | \Sigma_{k \text{ in } P} h_k \cdot \Delta (w_{m-k}) - \Sigma_{k \text{ in } M} h_k \cdot \Delta (w_{m-k}) |$$

が成立する．P，Mの一方において$\Delta (w_{m-k})$を0，他方において$\Delta (w_{m-k})$を$\min \{1, p\}$とすると，$\| (H\cdot)\Delta' W \|$の上限が得られる．

他の量子化についても，同様にして上界が求められる．ただし，記憶のない作用素Tに対して，一般に，

$$2^{-1} \cdot \| (H\cdot) \| \cdot \| T-1 \| (p) \leq \| (H\cdot) T - (H\cdot) \| \leq \| (H\cdot) \| \cdot \| T-1 \| (p) \qquad (2.70)$$

が成立するから，通常は上式右辺の上界で十分である．

2．4．2　スペクトル密度の上界

量子化雑音スペクトルを，厳密かつ見通しのよい形で表わすことは非常に難しい．ここでは，最悪値設計のための量子化雑音のスペクトル密度の上界と，初等関数の無限級数による量子化雑音スペクトルの表現法を紹介する．

簡単のため，まず有限エネルギーの場合について述べる．以下，いわゆるL_2ノルムを$\| N \| 2$のように表わす．すなわち，

$$\| N \|_2 = \sqrt{(N \otimes N)}\ (1) \qquad (2.71)$$

と定める．出力に現れる雑音成分が$N = N_1 + N_2$と表わされるとき，そのエネルギーは

$$\| N_1 + N_2 \|_2^2 = \| N_1 \|_2^2 + 2 \cdot (N_1 \otimes N_2)\ (1) + \| N_2 \|_2^2$$

となる．一般に

$$\| N_1 - N_2 \|_2^2 = \| N_1 \|_2^2 - 2 \cdot (N_1 \otimes N_2)\ (1) + \| N_2 \|_2^2 \geqq 0$$

が成立するから，

$$\| N_1 + N_2 \|_2^2 \leqq 2 \cdot (\| N_1 \|_2^2 + \| N_2 \|_2^2) \qquad (2.72)$$

でなければならない．また，$N = H_0\ N_0$と表わされる場合，そのエネルギーは

$$\| H_0\ N_0 \|_2^2 = (2\pi)^{-1} \cdot \int | H_0\ (\exp[j\omega]) \cdot N_0\ (\exp[j\omega]) |^2\, d\omega$$

となり，

$$\| H_0\ N_0 \|_2^2 \leqq \| H_0 \|_2^2 \cdot \sup_{\omega} | N_0\ (\exp[j\omega]) |^2 \qquad (2.73)$$

$$\| H_0\ N_0 \|_2^2 \leqq \| N_0 \|_2^2 \cdot \sup_{\omega} | H_0\ (\exp[j\omega]) |^2 \qquad (2.74)$$

が成立する．有限電力の場合，$\| N_k \|_2^2$および$| N_k\ (\exp[j\omega]) |^2$をそれぞれ$N_k$の電力および電力スペクトル密度とみなせば，式（２．７２），（２．７３），（２．７４）等がそのまま成立する．　N_0がランダムに近ければ式（２．７３）が有効であり，リミットサイクルのように｜H0（exp［jω］）｜のピーク

の近傍にN_0の電力が集中するときは式（２．７４）が有効である．

$N_0 = B^{-1}\Delta B' W$と表わされる場合，そのスペクトルは次のように無限級数で表現できる．(59)

［補題２．４］　信号Wの時刻ｔにおける標本値をw_tとおくと，$B^{-1}\Delta B' W$は

$$B^{-1}\Delta B' W(\exp[j\omega]) = \Sigma_t \{ \Sigma_{k\neq 0} (j2\pi k w_t)^{-1} \cdot \exp(j2\pi k w_t) \} \cdot \exp[-jt\omega]$$

と表わされる．

（証明）　$B^{-1}\Delta B' W$の時刻ｔにおける標本値$(B^{-1}\Delta B)(w_t)$は，w_tの増加に対して周期的に変化するため，

$$(B^{-1}\Delta B)(w_t) = -2^{-1} + \Delta(w_t + 2^{-1}) = \Sigma_{k\neq 0} (j2\pi k)^{-1} \cdot \exp(j2\pi k w_t)$$

とフーリエ級数に展開できる．

この補題から，例えばWが正弦波であれば，$B^{-1}\Delta B' W$のスペクトルはベッセル関数で表わされる多数の輝線スペクトルの和で表わされることが分かる．一般にWに対しては，必ずしも見通しのよい表現であるとは言えないが，少数の項の和で近似計算することができる．$B^{-1}\Delta B' W$のスペクトルから，$\Delta' W$等のスペクトルを求めることは，極めて容易である．

2．5　結言

量子化の影響は，非線形作用素を用いることにより，厳密かつ簡潔に表現することができるが，慣用の記法には紛らわしい点がある．２．２節では，この点を指摘し，記法の改良案を示した．提案した記法は，慣用の記法と親和性があり，かつ拡張性に富んでいる．例えば，S，R，Parker ら[22]，T，A，C，M，Claasenら[31]の論文をはじめ，広く用いられている記法では，式（２．９）の入出力関係は $y_n = [x_n - a x_{n-1}]_Q$ のような時間領域の差分方程式でしか表わせないが，本研究で提案した作用素を用いると，遅延素子の初期値等の考慮も含め，式（２．１２）のような伝達関数を一般化した表現が得られる．

また，非線形作用素に対して，パラメータ付きノルムを式（２．３７）で定義し，その基本的性質を述べた．パラメータは非線形素子の入力レベルの上限を意味し，大振幅の入力に対してはノルムはほぼ１となる．このことは，直線量子化の性質をよく反映している．このノルムは，予測符号器のような非直線量子化を行なう回路に対して，量子化雑音の入力レベル依存性を考察することをも可能にした．２．４節に示した例２．４は，このような場合についての一つの解析例である．これに対して，通常用いられる式（２．３６）のノルムは，量子化の場合，つねに発散する．　式（２．３５）のノルムは，丸め等に対しては有界となり，状態変数解析的な考察で多用されているが，切捨て等に対しては発散し，一般に大振幅の信号を直線量子化した結果はもとの信号にほぼ等しいという性質を反映していない．

２．３節では，量子化雑音の解析のための等価変換の方法を示した．伝達関数のみを保存するという意味での等価変換については，　S．Y．Hwang[10]，　C．T．Mullis ら[11]，小野[15]，石井[17]らによって検討されているが，入出力関係を完全に保存するという雑音解析用の等価変換についてはあまり考察されていなかった．伝達関数 $H_2 \cdot (1 - H_1)^{-1}$ を作用素 $T_2 \cdot (1 - T_1)^{-1}$ で近似的に実現した回路に対する定理２．１および図２．３の等価変換，これを一般化した式（２．４８）の等価変換は，入出力関係を完全に保存しつつ，かつ回路内の適当な節点に量子化雑音が単独で（信号に重畳されずに）現れるように変換したものである．これにより，非線形方程式の解である量子化雑音を解析的に求めることができなくても，その性質をある程度考察できる．また，上記の節点への出力を作成する部分をランダム雑音源で置換することにより，大振幅動作を近似的に解析するための線形モデルが得られる．

２．４節では，最悪値設計に必要な，量子化雑音の振幅およびスペクトル密度の上界について述べた．主要な成果は，巡回型回路の作用素 $(1 - T_1)^{-1}$ のパラメータ付きノルムの一つの上界を与える定理２．２であり，この導出には前節の等価変換が用いられている．$\| T1 \|(p) < 1$ ならば，級数展開により，$\| (1 - T1)^{-1} \|$

（ｐ）＜｛１－‖T_1‖（ｐ）｝-1であることが分かるが，共振回路のような簡単なものでも，条件‖T_1‖（ｐ）＜１は期待できない．また，この条件が成立する場合でも，上限に比べて著しく大きな上界しか得られないことが多い．

スペクトル密度の上界，近似計算等に関する公式，補題は次章以降の準備として示したもので，既知の事項を整理したにすぎない．例えば，補題２．３は，　Ｊ．Ｅ．Ｉwersen[59]がデルタ変調器の無通話時雑音の解析に用いた式を，表現を変えて紹介したものである．特殊な場合については，より詳細な検討が行なわれており，とくに共振回路の零入力リミットサイクルに関するＩ．Ｗ．Ｓandberg ら[28]の電力の上界が有名である．これは，式（２．７４）の上限を求めるｗの値を，零入力リミットサイクルの周期性を考慮して，離散値に限定したものである．　しかし，利得のピーク近傍にリミットサイクルの電力が集中することが経験的に知られており，実用上は式（２．７４）で十分であると思われるため，比較検討は省略した．

第３章　　量子化雑音の対策

３．１　緒言

量子化雑音の影響を軽減するための最も単純な方法は，演算語長を大きくすることであるが，経済性が損なわれる．またアナログ回路への出力のように，語長の増加が許されない場合もある．本章では，量子化雑音の対策として，３．２節でフーリエ解析的な手法による周波数領域での処理について，また，３．３節で状態変数解析的な手法による時間領域での処理について述べる．

周波数領域での処理としては，整係数ディジタルフィルタを介して量子化雑音を帰還し，雑音のスペクトルを制御する方式の基本的性質と二，三の応用例を示し，他の量子化方式との比較を行なう．雑音帰還用のフィルタを整係数のものに限定したのは，経済性だけでなく，この回路自体からは量子化雑音が発生することがないという性質にもよっている．雑音帰還という手法は，予測符号器等で古くから用いられているが，特性の解析は線形近似したモデルによるものがほとんどである．また，この場合は，雑音帰還のための回路はアナログ的に構成されるため，完全な整係数は不可能であり，詳しく検討されていなかった．リークのない積分や雑音の特定周波数成分の完全な除去法等，整係数であることを活かした処理の検討は，ディジタル信号処理回路固有の課題である．

時間領域での処理としては，いわゆるcontrolled rounding方式について詳しく検討する．これは，回路の内部状態に応じて，複数の量子化方式，例えば切捨てと切上げを適応的に切換えるものであり，以下では「量子化切換え」とよぶ．この方式が提案されたのは比較的新しく，理論の一般性等に難のあるものが少なくない．本章では，回路の内部状態を表わす状態多項式を定義し，これから求められる蓄積エネルギーを量子化切換えによって制御することにより，ディジタルフィルタのリミットサイクルの抑制や発振器の出力の安定化を行なう方法を示す．

上記の周波数領域での処理と時間領域での処理は相補うものである．例えば，量子化雑音の直流成分を遮断することは後者では難しく，発振出力を安定化することは前者では難しい．

3．2　周波数領域における制御

3．2．1　原理および基本的性質

前章では，伝達関数$H_2 \cdot (1-H_1)^{-1}$を近似的に実現する図2．2の回路を中心に考察したが，帰還ループの外部で生じる量子化雑音は出力への影響が単純である．$H_2 \neq 1$とすることはいたずらに式を煩雑にするだけであるから，以下では主として$H_2 = 1$の回路について，雑音帰還によって量子化雑音のスペクトルを制御する方法を説明する．

まず，量子化雑音のスペクトルを制御しない図3．1（a）の回路について，出力に現れる量子化雑音成分を求める．図のH1 は実係数の多項式，Qは量子化の作用素であり，Γ' X，Γ' Yは入出力信号が整数値をとることを明示したものである．Qによって生じる量子化雑音N_0 を回路図上に明示すると同図（b）のようになり，これを等価変換すると同図（c）の回路が得られる．この図から，出力に現れる量子化雑音成分Nは

$$N = (1-H_1)^{-1} \cdot N_0 \qquad (3.1)$$

$$N_0 = (Q-1)\{H_1 \cdot (1-H_1)^{-1} \cdot\}' (\Gamma' X + N_0) \qquad (3.2)$$

と表わされることが分かる．式（3．2）はN_0 に関して再帰的な表現となっているが，図2．3の特殊な場合である図3．1（d）の等価回路を用いると，非再帰的な表現

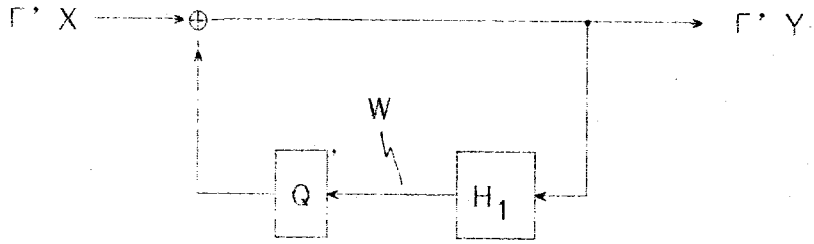
$$N_0 = (Q-1)(H_1 \cdot)\{1-Q(H_1 \cdot)\}^{-1}\Gamma' X \qquad (3.3)$$

が得られる．

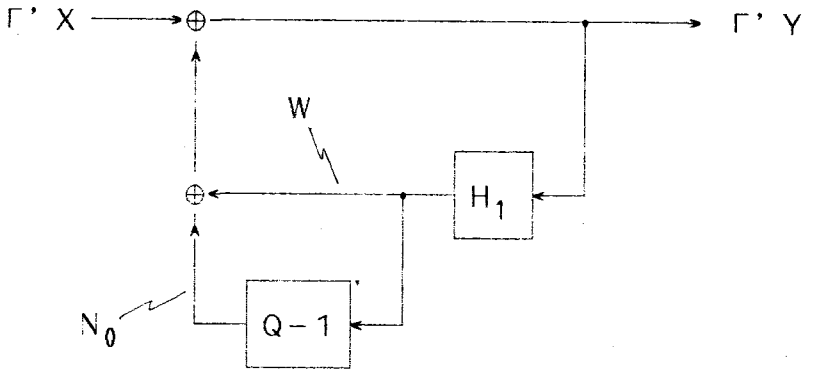
通常の丸めを用いる場合，$Q = \Gamma B$，$N_0 = (Q-1)' W = -B^{-1}\Delta B' W$となり，Wが微小でない限り$N_0$ はランダムに近い．このとき，

$$\| N \| \simeq \| (1-H_1)\text{-}1 \| \cdot \| N_0 \|$$

となり$(1-H_1)^{-1}$が単位円の近傍に極をもてば，$\| N \| \gg \| N_0 \|$となる．周波数領域での量子化雑音の制御の最も単純なものは，個々の部分回路において，出力に含まれる量子化雑音成分の電力をなるべく小さくすることである．　この場合は，$(1-H1)^{-1}$の利得の高いところでN0 のスペクトル密度が小さくなるように構成

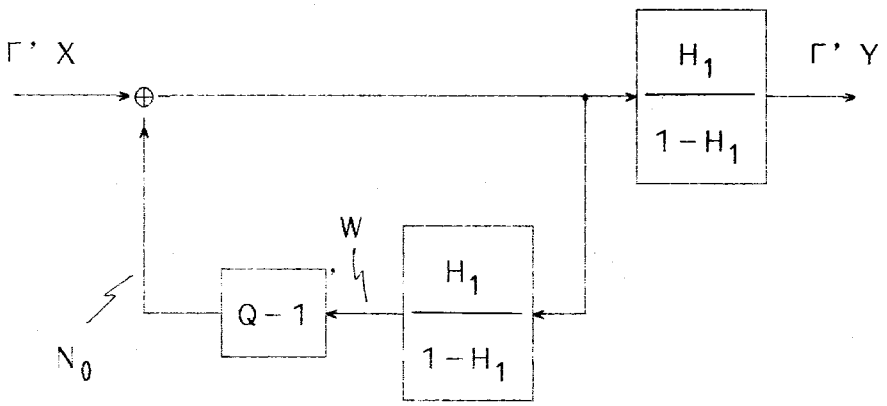


（a） 回路構成

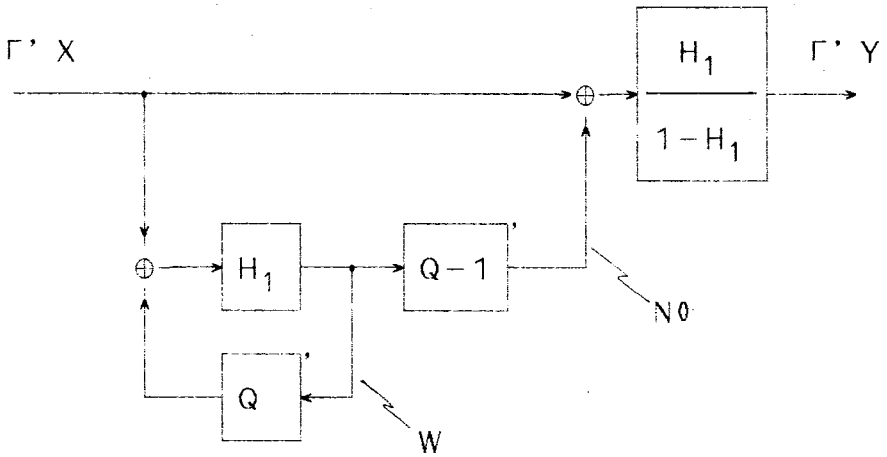


（b） 量子化雑音N_0の分離

図３．１ 荷重加算後に量子化を行なう
全極形フィルタの等価変換



（ｃ）　等価回路（N_0 ：再帰的表現）



（ｄ）　等価回路（N_0 ：非再帰的表現）

図３．１　荷重加算後に量子化を行なう
全極形フィルタの等価変換（つづき）

すればよい．

丸めや切捨てのような記憶のない量子化器に対して，適当な回路を付加し，量子化雑音のスペクトルを制御できるようにする方法として，図３．２（ａ）のような雑音帰還形のものと，同図（ｂ）のような雑音フィードフォーワード形のものが考えられる．前者の場合，Ｇを整係数の多項式とすれば，帰還ループ内で新しく量子化が必要となることはない．これに対して，後者の場合は，Ｇが整係数か否かにかかわらず，出力を整数値とするための何らかの量子化（図のように，必らずしもＷに対する量子化と等しくなくてもよい）が必要となる．この量子化によって生じた雑音は，図のような回路構成では補正できず，全体として不完全なスペクトルの制御しかできない．Ｇの出力を量子化することによって生じる雑音を図３．２（ａ）のような回路で補正することが考えられるが，これは本質的には雑音帰還形であると云える（後述の図３．４（ａ）の回路はその一例である）．また，非直線量子化に対してはこの図の方法は適用でない．

上記のことから，以下では雑音帰還によるスペクトルの制御について述べる．図３．２（ａ）において，Ｇを整係数多項式（Ｇ＝Γ’Ｇ）とし，Ｑとして最も回路が簡単になる切捨て（補数表示）を用いると，図３．３（ａ）の回路となる．この回路の入出力関係を定める作用素T_0は

$$T_0 = \Gamma \{1 - (\Gamma' G \cdot) \Delta\}^{-1} \qquad (3.4)$$

と表わされ，これは次のように変形できる．

［定理３．１］　式（３．４）は，逆作用素を用いない表現

$$T_0 = 1 - \{(1 - \Gamma' G) \cdot\} \Delta \{(1 - \Gamma' G)^{-1} \cdot\}$$

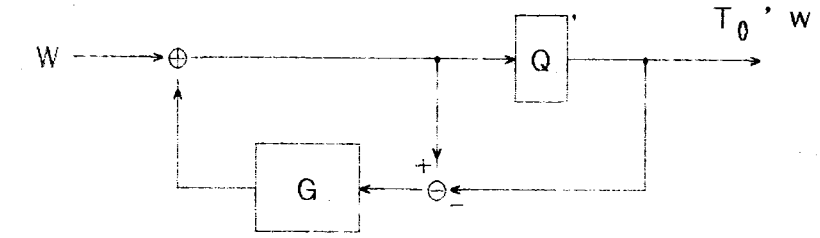
と等価である．

（証明）　$V = \{1 - (\Gamma' G \cdot) \Delta\}^{-1} 1' W$とおくと

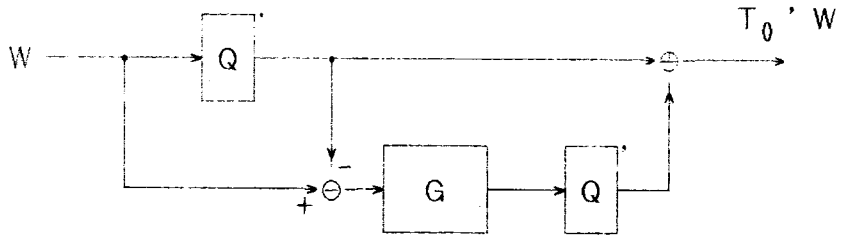
$$V = W + (\Gamma' G) \cdot \Delta' V$$

となり，$T_0 W = \Gamma' V = V - \Delta' V$であるから，

$$T_0' W = W - (1 - \Gamma' G) \cdot \Delta' V$$

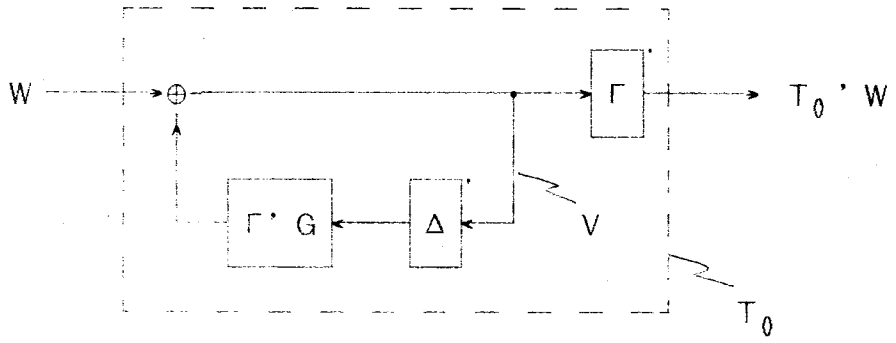


（a） 雑音帰還形

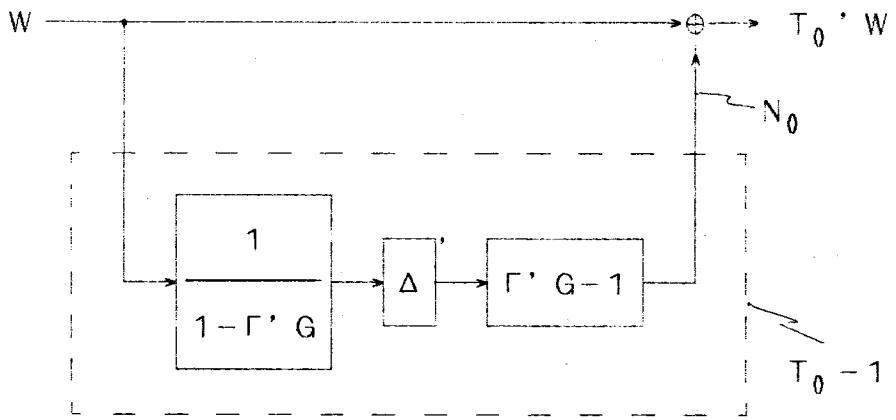


（b） 雑音フィードフォワード形

図3．2 雑音スペクトルの補正回路
を付加した量子化回路



（ａ）　回路構成



（ｂ）　雑音解析用の等価回路

図３．３　整係数フィルタで雑音帰還
を行なった切捨て回路

が得られる．上式のΔ’Vは

$$\Delta' V = (W - \Gamma' V) \cdot (1 - \Gamma' G)^{-1}$$

$$\begin{aligned}\Delta' V &= \Delta' (\Delta' V) \\ &= \Delta' \{W \cdot (1 - \Gamma' G)^{-1} - \Gamma' V \cdot (1 - \Gamma' G)^{-1}\} \\ &= \Delta' \{W \cdot (1 - \Gamma' G)^{-1}\}\end{aligned}$$

表わされ，これを上記のT_0’Wを与える式に代入すれば，求める結果が得られる．

なお，上記の定理を，一般の

$$T_0 = Q\{1 - (G \cdot)(1 - Q)\}^{-1}$$

に拡張しようとしても，次のような変型しかできない．

$$\begin{aligned}V &= \{1 - (G \cdot)(1 - Q)\}^{-1} 1' W \\ Q' V &= W - (1 - G) \cdot (1 - G)' V \\ (1 - Q)' V &= (W - Q' V) \cdot (1 - G)^{-1}\end{aligned}$$

すなわち，（1－Q）’をVや逆作用素を用いないで表現しなければ，定理を拡張できないが，このような表現が得られるとは限らない．G＝Q’G等に限定しなかったのは，アナログ的に雑音帰還を行なう予測符号器等への適用をも配慮したものであるが，G＝Q’Gに限定しても，Qが非直線量子化であれば，やはり定理の拡張は不可能である．

定理３．１は，図３．３（ａ）の回路が同図（ａ）のように等価変換できることを意味している．WをT_0’Wに量子化することによって生じる量子化雑音N_0は

$$\begin{aligned}N_0 &= (T_0 - 1)' W \\ &= -(1 - \Gamma' G) \cdot \Delta' \{W \cdot (1 - \Gamma' G)^{-1}\} \qquad (3.5)\end{aligned}$$

で与えられる．図３．１（ａ）の回路のQを図３．３（ａ）のT_0で置換しても，図３．１（ｂ），（ｃ），（ｄ）のように等価変換することができ，出力に現れる量子化雑音成分は，

$$N=-(1-\Gamma' G)^{-1}\cdot(1-H_1)^{-1}\cdot\Delta'\{W\cdot(1-\Gamma' G)^{-1}\}$$
$$(W=H_1\cdot\Gamma' Y) \qquad (3.6)$$

となる．上式から，出力を観測することにより，その中に含まれている量子化雑音成分Nを知ることができる．このことは，量子化を行なわないときの出力$\Gamma' Y-N$が求められることを意味し，一見奇異に感じられるが，量子化は$H_1\cdot\Gamma' Y$に対してのみ行なわれるという図３．１の回路の特殊性によるものである．したがって，例えば図２．６の回路では，このような性質は期待できず，量子化を行なわないときの出力を求めるには，図のX，Wのいずれかを知る必要がある．

式（３．６）から分かるように，量子化雑音の影響を軽減するには$(1-H_1)^{-1}$の極の近傍に$(1-\Gamma' G)$の零点をおけばよい．

［例３．１］　図３．１（ａ）の回路に対して，$H_1(z)=az^{-1}$とおき，Qを図３．３（ａ）の回路で置換する．$\Gamma' G(z)=z^{-1}$とおけば，式（３．６）のNのノルムは

$$\begin{aligned}\|N\| &= \|[(1-z^{-1})\cdot(1-az^{-1})^{-1}]_z\| \\ &\quad\cdot\|\Delta'\{W\cdot(1-z^{-1})^{-1}\}\| \\ &= 2\cdot(1+a)^{-1}\end{aligned}$$

となる．$0<1-a\ll 1$とすると，上式の値は，$\Gamma' G=0$の場合のNのノルム

$$\begin{aligned}\|N\| &= \|[(1-az^{-1})^{-1}]_z\|\cdot\|\Delta' W\| \\ &= (1-a)^{-1}\end{aligned}$$

に比べて非常に小さくなっている．

最後に回路内のm個の点で量子化を行なう場合について述べる．　k番目の量子化を行なう点での被量子化信号をW_k，この点から出力までの伝達関数をH_kとおき，$\Gamma' G_k$にによって雑音帰還を行なうと，出力に現れる量子化雑音成分は，

$$N=\sum_{k=1,m} H_k\cdot(1-\Gamma' G_k)\cdot\Delta'\{Wk\cdot(1-\Gamma' Gk)^{-1}\} \qquad (3.7)$$

となる．$\|N\|$を小さくするには，$\tilde{H}_k$ の利得が高い周波数付近に（$1-\Gamma' G_k$）が零点をもつように$\Gamma' G_k$ を定めればよい．

例えば，伝達関数が$H_{2,k} \cdot (1-H_{1,k})^{-1}$である図２．２のような構成の部分フィルタを縦続接続して高次のフィルタを作成する場合，

$$\tilde{H}_k = \prod_{i=k,m} H_{2,i} \cdot (1-H_{1,i})^{-1}$$

であり，雑音帰還用の関数$\Gamma' G_k$ を定める場合，k番目の部分フィルタの伝達関数$H_{2,k} \cdot (1-H_{1,k})^{-1}$だけでなく，後段の部分フィルタの伝達関数をも考慮しなければならない．アナログフィルタを併用する場合，すなわちディジタル信号処理した結果に対して，標本化周波数の半分以下の周波数領域でも利得が平坦でないアナログフィルタで帯域制限する場合には，その伝達関数をも含める必要がある．

雑音帰還によれば，上記のように$\|N\|$を小さくするだけでなく，各角周波数成分ごとに量子化雑音の電力密度を所望の値$P(\omega)$以下にすることができる．最悪値設計を行なうには

$$\sum_{k=1,m} \left| \tilde{H}_k (\exp[j\omega]) \cdot (1-\Gamma' G_k)(\exp[j\omega]) \right| \leq \sqrt{P(\omega)} \qquad (3.8)$$

を満足するように，式（３．７）の$\Gamma' G_k$ を定めればよいが，過剰品質となることが多い．通常は，$\Delta' \{(1-\Gamma' G_k)^{-1} \cdot W_k\}$（k＝１，…，m）は互いに独立であるとみなしたときの条件

$$\sum_{k=1,m} \left| \tilde{H}_k (\exp[j\omega]) \cdot (1-\Gamma' G_k)(\exp[j\omega]) \right|^2 \leq P(\omega) \qquad (3.9)$$

で十分であると思われる．

３．２．２　ディジタルフィルタの雑音低減

ここでは，雑音帰還によってディジタルフィルタの出力に現れる量子化雑音成分を低減するための具体的な回路構成について述べる．図３．３（ａ）は基本構成を示したものであり，より経済的な回路構成が可能である．以下に二，三の具体例を示す．

図３．４（ａ）は，伝達関数が

$$H = H_2 \cdot (1 - H_1)^{-1}$$

であるフィルタを第１直接形[4]で実現したものである．量子化を行なうのは，Ｗを「’Ｙに変換する部分のみである．この量子化は，一見するとフィールドフォワード形にみえるが，本質的には雑音帰還形で，図３．３の回路と等価である．すなわち，図３．３（ａ）の回路において，帰還ループには関係のないＷの整数部分「’Ｗを分離し，雑音帰還部の演算語長を短縮して経済化を図ったものが，図３．４（ａ）の回路の量子化部分に他ならない．「’Ｇは多項式であるから前章の補題２．２を用いるまでもなく，Ｖの変動幅は容易に求められる．

ビット直列演算形回路の場合，この部分はいわゆる組合せ理論形ディジタルフィルタ[14]で実現できる．H_1，H_2 がともに２次の多項式である場合の構成ブロック図を図３．４（ｂ）に示す．ここで，ＳＲ，ＲＯＭ，ＡＣＣ，ＣＭＰは，それぞれシフトレジスタ，読み出し専用メモリ，積算器，補正回路を表わす．詳細なタイミングは図３．４（ａ）の構成と若干異るが，機能的にはほとんど変らない．まず，補正回路のない通常の構成について，動作原理を簡単に説明する．

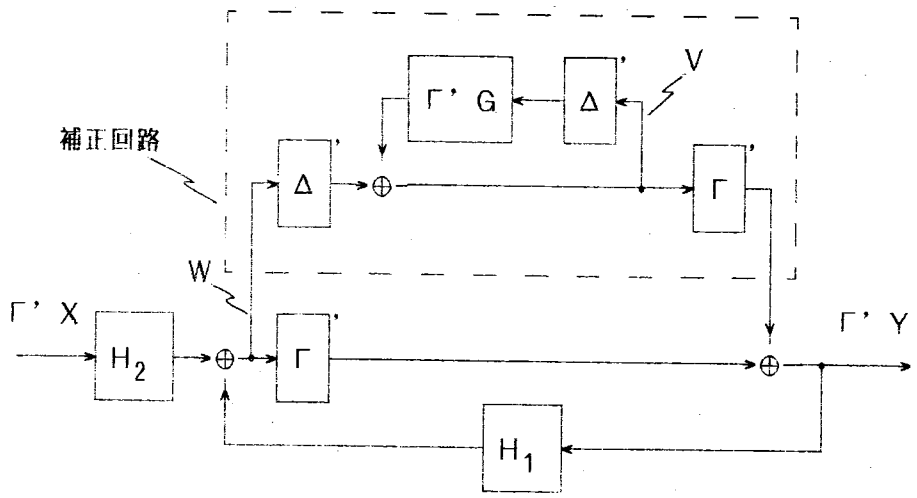
$H_1(z) = a_{11}z^{-1} + a_{12}z^{-2}$，$H_2(z) = a_{20} + a_{21}z^{-1} + a_{22}z^{-2}$とおき，「’Ｘ，「’Ｙの時刻ｋにおける標本値をそれぞれ$\Gamma(x_k)$，$\Gamma(y_k)$とおく．「’Ｘ，「’Ｙの各標本値はｍビットで表示されているとすると，０または１をとる適当な定数b_{ij}（$1 \leqq i \leqq m$，$1 \leqq j \leqq 5$）が存在して，

$$(\Gamma(y_{k-1}), \Gamma(y_{k-2}), \Gamma(x_k), \Gamma(x_{k-1}), \Gamma(x_{k-2}))$$

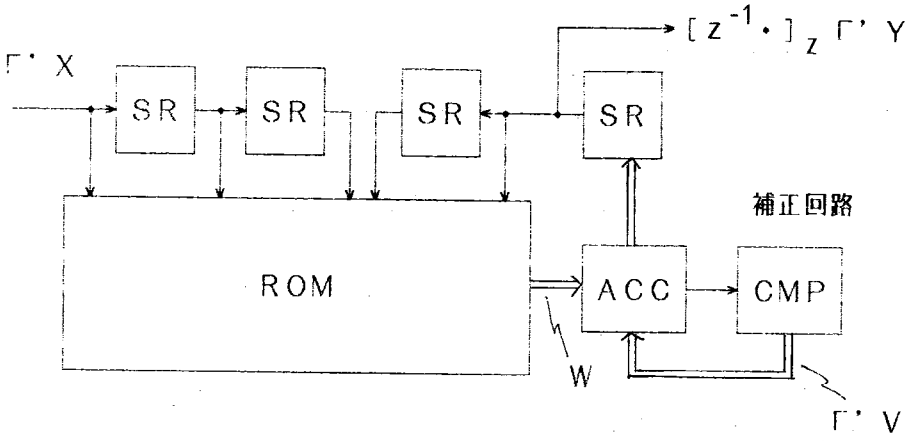
$$= (-2^{m-1}, 2^{m-2}, \cdots\cdots, 2^0) \begin{pmatrix} b_{11}, \cdots\cdots, b_{15} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ b_{m1}, \cdots\cdots, b_{m5} \end{pmatrix}$$

と表わすことができる．したがって，$\Gamma(y_k)$は

$$\Gamma(yk) = (-2^{m-1}, 2^{m-2}, \cdots\cdots, 2^0)$$



（a） 回路構成



（b） 組合せ論理形フィルタによる実現

図3．4 荷重加算後に量子化を行なう
巡回形フィルタの出力の補正

$$\begin{pmatrix} b_{11}, \cdots\cdots, b_{15} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ b_{m1}, \cdots\cdots, b_{m5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{20} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

から求められる．

図３．４（ａ）のＳＲは，ＲＯＭのアドレスとして $b_{i1}, \cdots\cdots, b_{i5}$ を与え，ＲＯＭはこのアドレスに記憶されているデータ $b_{i1} \cdot a_{11} + \cdots\cdots + b_{i5} \cdot a_{22}$ を出力する．すべてのｉに対してＲＯＭのデータが共用できることが，この回路の大きな特長である．ＡＣＣは積算結果を１ビットずつ下位にシフトしながらＲＯＭの出力を加算（最上位ビットは減算）することにより，2^{m-i} や -2^{m-1} を荷重とする $b_{i1} \cdot a_{11} + \cdots\cdots + b_{i5} \cdot a_{22}$ の荷重加算を行なう．

通常の構成ではＡＣＣの値は標本値ごとに丸めや切捨てが行なわれるが，図３．４（ｂ）に示すように，ＡＣＣの値の小数部をＣＭＰに入力し，ＣＭＰからの補正信号 $\Gamma' V$ を 2^{m-1} 倍した信号でＡＣＣを初期設定する（ＡＣＣではｍ－１回下位にシフトされるため）ことにより，著しく特性を改善することができる．ＣＭＰの構成例を以下に示す．

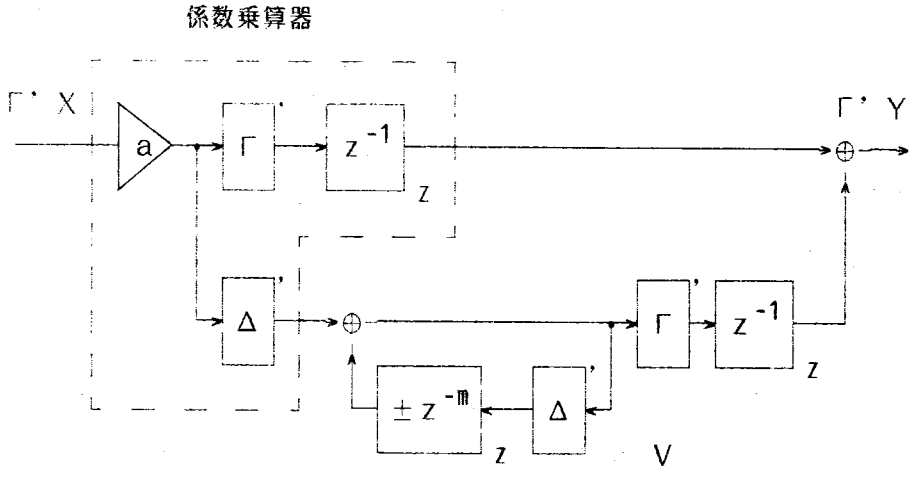
［例３．２］　図３．４の回路が狭帯域の低域通過フィルタである場合，

$$\| H_2 \cdot (1 - H_1)^{-1} \cdot [(1 - z^{-1})^m]_z \| \ll \| H_2 \cdot (1 - H_1)^{-1} \cdot \|$$

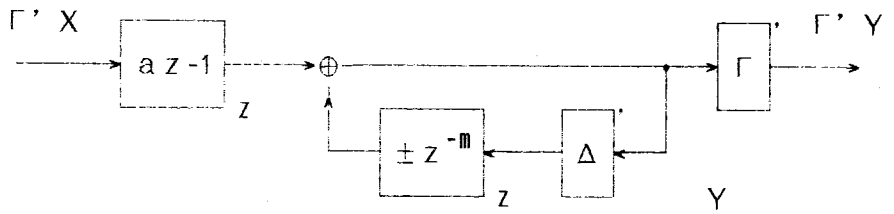
が成立する．したがって，$1 - \Gamma' G(z) = (1 - z^{-1})^m$ とすれば，出力に現れる量子化雑音の成分は大幅に減少する．とくに，ｍ＝１の場合は，ＣＭＰはΔ’Ｗの積算器となるから，2^{m-1} ＶをＡＣＣに初期設定するとにより，Δ’Ｗの積算をこのＡＣＣで行なわせ，ＣＭＰ自体は単なるシフトレジスタで構成することができる．

ｍ＞１の場合は，このような簡単化は不可能である．例えば，ｍ＝２の場合には，$\Gamma' G(z) = 2 \cdot z^{-1} - z^{-2}$ として，$2^{m-1} \cdot \Gamma' V$ でＡＣＣを初期設定しなければならない．

［例３．３］図３．４の回路の伝達関数が $z = r \cdot \exp(\pm j\omega_0)$ （$0 < 1 - r \ll 1$）に極をもつ共振回路があるとする．このとき，$1 - \Gamma' G(z) = 1 - z^{-m}$ と



（a） 回路構成



（b） 等価回路

図3．5 ビット直列演算形
係数乗算器の雑音の補正

おき，その零点の一つが共振周波数の近傍にくるようにmを定めれば，出力に現れる量子化雑音成分を抑制することができる．上例と同様に，Δ’Wの積算をＡＣＣで行なわせることができるが，ＣＭＰとして少なくともm段のシフトレジスタが必要である．

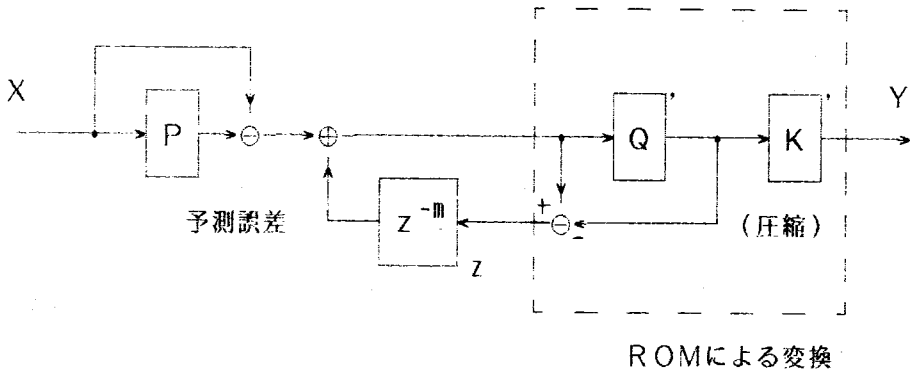
図３．４（ｂ）の構成は概して経済性が優れているが，微分器や積分器のような非常に単純なもの，あるいは係数を適応的に制御するようなものには適さない．このような場合，係数乗算器ごとに量子化を行なうという伝統的な構成によることが望ましい．図３．５（ａ）に，ビット直列形の演算を行なう係数乗算器に対して，雑音帰還による補正を施した場合の回路構成例を示す．ここで，信号Γ’Ｘの標本値，実係数ａの整数部，小数部はいずれもmビットであるとする（小数部にmビットの精度が不用でも，タイミングの都合上，mビット設ける）．
破線内の係数乗算器はΓ’Ｘの最下位ビットが入力された時点で直ちに計算が開始され，Γ’Ｘの最上位ビットが入力された時点で小数部の計算が終了する．引き続き整数部の計算が行なわれるが，その出力はΓ’Ｘの最下位ビットが入力されてからmビット後に現れる．これが，乗算結果の整数部がz^{-1}で遅延されている所以である．

乗算結果の小数部Δ’（ａΓ’Ｘ）は通常は利用されないが，これを図３．５（ａ）のように雑音帰還を行なう回路に入力することにより，乗算結果に現れる量子化雑音のスペクトルを制御できる．雑音帰還用フィルタの伝達関数を図のようにz^{-m}あるいは$-z^{-m}$とすれば回路は非常に簡単になる．この場合，補正信号$[z^{-1}\cdot]_Z$Γ’Ｖは１ビットの信号であるから，Γ’Ｙが加算器の入力となっているときは，この加算器の桁上げ入力端子にこの補正信号を入力し，図のΓ’Ｙを作成する加算器を省略することができる．

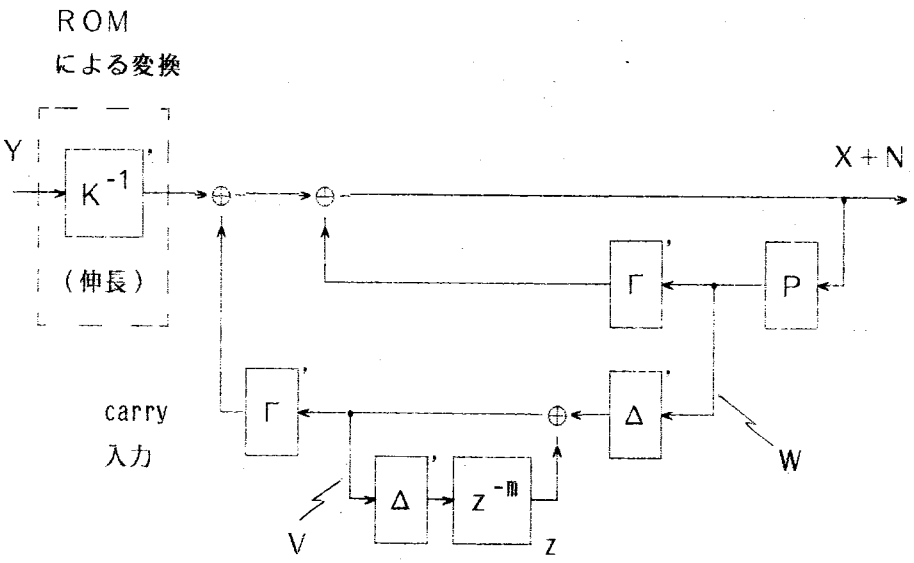
最後に，非直線量子化を行なう場合への一つの応用例を示す．図３．６（ａ）は，信号Ｘの各標本値を，伝達関数がＰである非巡回形フィルタを用いて予測し，予測誤差（１－Ｐ）・Ｘを符号化して伝送するという予測符号器の構成例である．

図のＱは非直線量子化器，Ｋは圧縮器を表わす．通常の予測符号器では，予測誤差の累積を防ぐため，復号器と同じ回路（局部復号器）を符号器内に設け，復号結果を確かめながら符号化を行なっているが，回路が複雑になる．図の復号器は，伝達関数が１－Ｐの利得の小さい周期数領域では，Ｑによって生じる量子化雑音の電力密度も小さくなるように雑音帰還を行ない，ＳＮ比の低下を防ぐように設計される．多くの場合m＝１でよいが，色副搬送波の４倍で標本化されたカラーテレビジョン信号の符号化の場合はm＝４が望ましい等，信号に応じた配慮が必要である．

この符号器に対する復号器の構成例を図３．６（ｂ）に示す．非巡回形フィルタＰ



(a) 符号器



(b) 復号器

図3．6 局部復号器を用いない簡易形
予測符号器とその復号器

は帰還ループ内に存在するため，その出力を量子化しなければならないが，符号器と同様の雑音帰還を行なうことにより，特性の劣化を防ぐことができる．ただし，復号器で生じる量子化雑音は符号器で知ることはできないため，局部復号器を用いて符号化する方式に比べて，若干ＳＮ比が低下する．

［例３．４］　図３．６において，　$P(z)=az^{-1}$　$(0<1-a\ll 1)$，$m=1$とする．局部復号器を用いないことによるＳＮ比低下量の目安を得るために$Q=k\Gamma k^{-1}$とおくと，図３．１および３．３の等価変換により，復号器の出力に現れる量子化雑音成分Ｎは，

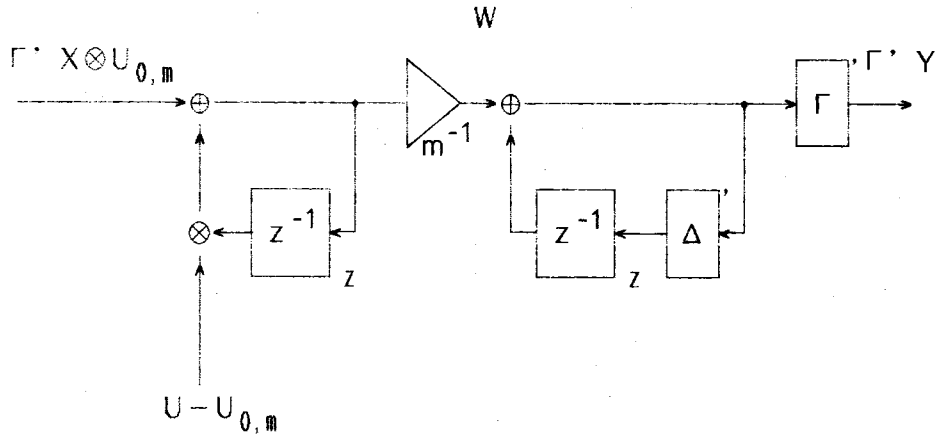
$$N=-\left[(1-z^{-1})\cdot(1-az^{-1})^{-1}\cdot\right]_z \cdot\{k\Delta\left[(1-az^{-1})\cdot k^{-1}\cdot(1-z^{-1})^{-1}\cdot\right]_z \cdot X + \Delta\left[az^{-1}\cdot(1-z^{-1})^{-1}\cdot\right]_z \cdot W\}$$

と表わされることが分かる．この場合のＳＮ比低下量は　$10\cdot\log_{10}(1+k^{-2})$　ｄＢ程度である．

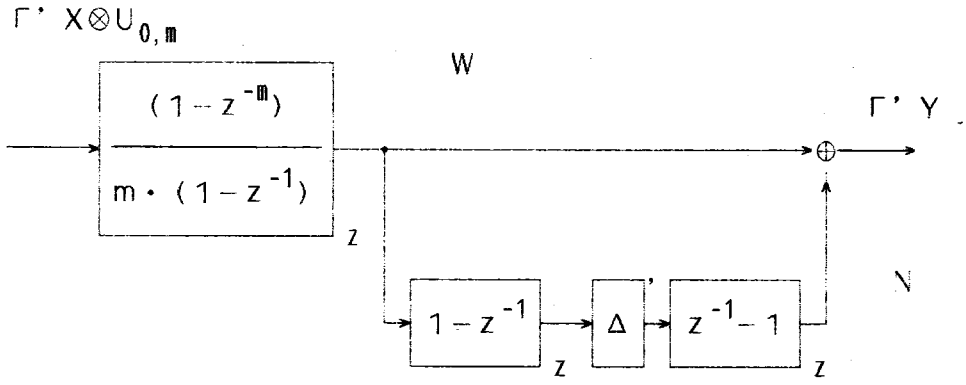
Ｑによって非直線量子化を行なう場合，Ｑの入力の変動範囲内での最大量子化ステップ幅（入力Ｘに依存する）をｋとすると，この場合の量子化雑音は，上例のようにステップ幅ｋで直線量子化を行なったときの量子化雑音と同程度以下である．

３．２．３　密度変調回路の特性改善

ディジタル信号処理回路で発生する量子化雑音には再現性があり，雑音の生成過程を詳細に検討することによって，画期的な特性改善法が得られることがある．ここでは，その一例として，Δ－Σ変調器とよばれる一種の密度変調回路に対するＳＮ比改善の方法を示す．対象は密度変調回路という特殊なものであるが，ｍ倍の標本化周波数で補間される信号の標本値をｍと互いに素な整数にするというアナログ信号処理技術の延長では予想もできない手法を用いており，ディジタル信号処理技術の幅の広さを示すために，あえて詳述する．



（ａ）　回路構成



（ｂ）　等価回路

図３．７　ディジタルΔ－Σ変調器
を用いた補間回路

図３．７（ａ）にディジタルΔ－Σ変調器を用いた補間回路の構成を示す．図のUおよび$U_{0,m}$は，前章の式（２．１５），（２．１６），（２．１７）で定められる関数であり，Uは単位ステップ関数を，$U_{0,m}$はUをm倍の周期で間引き（subsampling）した信号を表わす．また，Γ’ Xは

$$0 \preceq \Gamma' X \preceq m \cdot U \qquad (3.10)$$

を満足するものとする．上式の$\preceq$は，前章の式（２．３３）で定義される半順序である．

図の信号Wは，間引きされている信号$\Gamma' X \otimes U_{0,m}$を保持したもので，式（３．１０）の仮定より$0 \preceq W \preceq U$となるから，出力Γ’ Yの標本値は０，１の２値しかとり得ない．すなわち，この回路は多値の信号をm倍の標本化周波数で密度変調して補間するためのもので，図３．７（ｂ）のように等価変換される．等価回路からもわかるように，補間そのものは$\Gamma' X \otimes U_{0,m}$からWへの変換で終っており，Wから Γ’ Yへの変換は２値信号で表示するための処理である．出力Γ’ Yは

$$\begin{aligned}\Gamma' Y(z) &= m^{-1} \cdot (1-z^{-m}) \cdot (1-z^{-1})^{-1} \\ &\quad \cdot (\Gamma' X \otimes U_{0,m})(z) + N(z) \qquad (3.11)\\ N &= -[1-z^{-1}]_z \\ &\quad \cdot \Delta' [m^{-1} \cdot (1-z^{-m}) \cdot (1-z^{-1})^{-1} \\ &\quad \cdot (\Gamma' X \otimes U_{0,m})(z)]_z \qquad (3.12)\end{aligned}$$

と表わされ，$\Gamma' X \otimes U_{0,m}$に対して０次の補間（保持）を行なったものになっている．ここで，

$$\begin{aligned}(\Gamma' X \otimes U_{0,m})(z) &= (1-z^{-m}) \cdot (\Gamma' \tilde{X} \otimes U_{0,m})(z)\\ \Gamma' \tilde{Y}(z) &= m^{-1} \cdot (1-z^{-1})^{-1} \cdot \Gamma' Y(z)\end{aligned}$$

とおいて，上式に代入すると

$$\begin{aligned}\Gamma' \tilde{Y}(z) &= \{m^{-1} \cdot (1-z^{-m}) \cdot (1-z^{-1})^{-1}\}^2 \\ &\quad \cdot (\Gamma' \tilde{X} \otimes U_{0,m})(z) \\ &\quad + m^{-1} \cdot (1-z^{-1})^{-1} \cdot N(z) \qquad (3.13)\end{aligned}$$

が得られる．Γ’ $\tilde{Y}$は$\Gamma' \tilde{X} \otimes U_{0,m}$に対して１次の補間（直線補間）を行なった信号である．密度変調された信号Γ’ Yを，アナログ積分器で帯域制限することによっ

て，Γ' $\tilde{X}\otimes U_{0,m}$ の階調をアナログ的に再現することができる．なお，Γ' Ｙから Γ' $X\otimes U_{0,m}$ の階調をアナログ的に再現する場合は，遮断周波数が標本化周波数の１／２m程度である低域通過フィルタで帯域を制限する．

一般に，０次の補間に比べて，１次の補間の方が補間雑音（帯域制限の不完全さによる歪）が小さいが，上記のように密度変調を利用する場合は，量子化雑音が問題となる．Γ' $\tilde{X}\otimes U_{0,m}$ の階調を再現するにはN（１）＝０でよいが，Γ' $X\otimes U_{0,m}$ の階調を再現するためには，

$$[N(z)\cdot(1-z^{-1})^{-1}-b\cdot U(z)]_z\ (1)=0$$

となるように回路を設計しなければならない．ここで，ｂは適当な定数である．必らずしもｂ＝０でなくてもよいということは，Γ' Ｙに直流バイアスｂ・Ｕを加えて補正できることによっている． Γ' $\tilde{Y}$ を２値に制限しなければ，上式を満足させることは容易であるが（例えば，図３．７のＷをΓ' Ｙに量子化する部分を，図３．３で $1-G(z)=(1-z^{-1})^2$ とおいた回路で置換すればよい），２値のΓ' Ｙに対して上式を満足させる方法を以下に述べる．

任意の整数ｒに対して

$$\Delta'[rm^{-1}\cdot(1-z^{-m})\cdot(1-z^{-1})^{-2}]_z$$
$$=\Sigma_{i=1,m}\Delta(ri/m)\cdot[z^{-i+1}]_z$$

が成立して，ｒとｍが互いに素であれば

$$\Sigma_{i=1,m}\Delta(ri/m)=\Sigma_{i=1,m}\Delta(i/m)$$
$$=(m-1)/2$$

が成立する．したがって

$$(\Gamma' X\otimes U_{0,m})(z)=\Sigma_k x_{km}z^{-km}$$

とおくと，

$$[(1-z^{-1})^{-1}\cdot N(z)]_z$$
$$=-\Delta'[\Sigma_k z^{-km}\cdot x_{km}\cdot m^{-1}\cdot(1-z^{-m})\cdot(1-z^{-1})^{-2}]_z$$
$$=-[\Sigma_k z^{-km}\Sigma_{i=1,m}\Delta(x_{km}\cdot i/m)\cdot z^{-i+1}]_z$$

となり，すべてのx_{km}がmと互いに素であれば，Nは

$$[(1-z^{-1})^{-1}\cdot N(z)-p\cdot U(z)]Z(1)=0$$
$$(p=(m-1)/2m) \qquad (3.14)$$

を満足することがわかる．

mが2のべき乗で表わされ，$\Gamma'\tilde{X}\otimes U_{0,m}$が条件

$$-2^{-1}m\cdot U\leqq[1-z^{-m}]_z\cdot(\Gamma'\tilde{X}\otimes U_{0,m})\leqq 2^{-1}m\cdot U \qquad (3.15)$$

$$\Delta'\{m\cdot[1-z^{-m}]_z\cdot(\Gamma'\tilde{X}\otimes U_{0,m})\}=0 \qquad (3.16)$$

を満足する場合は，$\Gamma'X\otimes U_{0,m}$を

$$(\Gamma'X\otimes U_{0_m m})(z)=2\cdot(1-z^{-m})\cdot(\Gamma'\tilde{X}\otimes U_{0,m})(z)+(1+z^{-m})^{-1} \qquad (3.17)$$

とおくことによって，$\Gamma'X\otimes U_{0,m}$の各標本値をmと互いに素な整数（奇数）にすることができる．上式の右辺第2項は，高い周波数に輝線スペクトルをもつ信号であり，アナログ低域通過フィルタによって除去される．$\Gamma'\tilde{X}\otimes U_{0,m}$が式（3．16）を満足しない場合は，図3．3で

$$1-\Gamma'G(z)=(1-z^{-1})^2$$

とおいた回路を用いて，$m\cdot[1-z^{-m}]_z\cdot(\Gamma'\tilde{X}\otimes U_{0,m})$を整数値の信号に量子化し，全体を1／m倍すればよい．　このような量子化によって生じる雑音は，$(1-z^{-1})^{-2}$で2重積分を行なっても電力は有界となり，階調再現性を損わない．

3．2．4　ランダム量子化方程式との比較

量子化雑音の一つの対策として，ランダム量子化とよばれる方法がある[34)-36)]．

これは，量子化ステップ幅と同程度の最大振幅をもつランダム信号を加算して丸めを行なうもので，量子化雑音の波形は不問であり，電力スペクトルの平坦化を意図した方式であるから．一種の周波数領域における処理である．ここでは，前記の雑音帰還による量子化とランダム量子化の比較評価を行なう．

まず，ランダム量子化の効果について簡単に述べる．ランダム量子化を用いることにより，微小な入力に対しても，特定の周波数に量子化雑音電力が集中することによるSN比の低下や，入力と強い相関をもつことによる周波数特性の劣化を防ぐことができる．例えば，共振回路のリミットサイクルの抑制効果は，次のように説明できる．

通常の丸めおよびランダム量子化を行なったときの量子化雑音を，それぞれN_0，N_1とおき，量子化を行なう点から出力点まで伝達関数Hは，$r \cdot \exp(\pm j\omega_0)$（$0<1-r\ll 1$）に極をもつとする．微小な入力のとき，$N_0$の電力は$\pm\omega_0$の近傍に集中することが経験的に知られており（典型的な場合，いわゆるeffective poleをもつ），HN_0の電力はN_0の電力のほぼ$|H(\exp[j\omega_0])|^2$倍となる．一方，N_1の電力スペクトルは平坦であるから，HN_1の電力はN_1の電力に

$$\pi^{-1} \cdot \int |H(\exp[j\omega])|^2 \, d\omega$$

をかけたものに等しい．N_0とN_1の電力スペクトルは非常に異なるが，全電力は大差なく，HN_0とHN_1の電力の比は$|H(\exp[j\omega])|^2$の最大値と平均値の比で概算できる．

以下，図3．1の回路について，Qをランダム量子化器で置換した場合と，図3．3の雑音帰還を用いた量子化器で置換した場合の出力に現れる量子化雑音成分の電力の比較を行なう．前者の場合，出力に現れる量子化雑音成分の電力P_1は

$$P_1 \simeq 3^{-1} \cdot \| (1-H_1)^{-1} \|_2^{\,2}$$

となる．上式右辺では，式（2．71）で定義される記号を用いている．これに対して，雑音帰還を用いて，出力に現れる量子化雑音を式（3．6）のように制御すると，その電力P_2は，作用素Δの性質と式（2．74）から，

$$P_2 < \sup_{\omega} | (1-\Delta' G(\exp[j\omega])) \cdot (1-H_1(\exp[j\omega]))^{-1} |^2$$

を満足することがわかる．さらに詳しく云えば，P_2の最大値について，次の定理が成立する．

［定理３．２］ $\Delta' 2^{m} W=0$（m；整数）を満足するWの集合において，式（３．６）で定められるNの電力の最大値$P_{2,max}$は，次式を満足する．

$$2^{-1}\cdot\{2\pi^{-1}\cdot(1-2^{-m})\}^{2}\cdot r \leq P_{2,max} \leq (1-2^{-m})^{2}\cdot r$$

$$r=|(1-\Gamma' G(\exp[j\omega_0]))\cdot(1-H_1(\exp[j\omega_0]))^{-1}|^{2}$$

ここで，ω_0は伝達関数$(1-\Gamma' G)\cdot(1-H_1)^{-1}$の利得を最大にする角周波数の一つであり，$\omega_0=0$のとき，等号が成立する．

（証明）量子化雑音$\Delta'\{(1-\Gamma' G)^{-1}\cdot W\}$は，各々の標本値が区間$[0, 1-2^{-m}]$の値をとるから，電力は$(1-2^{-m})^{2}$以下である．したがって，最大電力$P_{2,max}$は$(1-2^{-m})^{2}\cdot r$をこえることはない．

次に，ω_0の近傍に，$2\pi/\omega_1$が無理数となる角周波数ω_1をとり，$V(z)$を

$$V(z)=\Sigma_k\, v(k)\cdot z^{-k}$$

$$v(t)=\begin{cases}0 & (\Delta(\omega_1 t/2\pi)<2^{-1})\\ 1 & (\Delta(\omega_1 t/2\pi)\geq 2^{-1})\end{cases}$$

で定義する．$v(t)$は周期$2\pi/\omega_1$の方形波に直流を重畳した信号であり，$2\pi/\omega_1$が無理数であるから，これを標本化しても，フーリエ級数展開した各項の輝線スペクトル成分が折返しによって重なることはない．$\Delta'\{(1-\Gamma' G)^{-1}\cdot W\}=V$となるようにWを定めることはつねに可能であり，$2\pi/\omega_1$を無理数としたまま$\omega_1$を限りなく$\omega_0$に近づけると，伝達関数は連続であるから，出力に現れるVの基本波の成分は限りなく

$$2^{-1}\cdot\{2\pi^{-1}\cdot(1-2^{-m})\}^{2}\cdot r$$

に近づく．また，伝達関数はzに関する有理式であるから，Vのすべての高調波成分が除去されるように定めることは不可能である．ゆえに，$P_{2,max}$は上記の基本波成分の極限値より大きい．

この証明からわかるように，いくつかの高調波成分の電力を考慮することにより，より$P_{2,max}$に近い下界が得られるが，定理に示した下界でも上界の約1／5（振幅で$1/\sqrt{5}$；1ビット程度）である．また，入力は微小でなく，量子化はランダムに近いとすると，P_2は

$$P_2 \simeq 3^{-1} \cdot \| (1-\Gamma' G) \cdot (1-H_1)^{-1} \|_2^{\,2}$$

と近似できる．微小入力の場合も，雑音帰還によって量子化雑音がランダム化されると思われるが，定量的な考察は難しい．

上記の式から，

$$2^{-2r} = \{ \sup_{\omega} | [1-\Gamma' G(\exp[j\omega])] \cdot (1-H_1(\exp[j\omega])) |^2 \} \cdot \{ 3^{-1} \cdot \| (1-H_1)^{-1} \|_2^{\,2} \}^{-1} \qquad (3.18)$$

$$2^{-2s} = \| (1-\Gamma' G) \cdot (1-H_1)^{-1} \|_2^{\,2} \cdot \{ \| (1-H_1)^{-1} \|_2^{\,2} \}^{-1} \qquad (3.19)$$

で定められる実数r，sによって，ランダム量子化の場合と雑音帰還を用いる場合のSN比あるいは所要演算語長を比較することができる．すなわち，雑音帰還の場合の演算語調をランダム量子化の場合に比べてrビット短縮しても，つねに同程度以上のSN比が保証され，微小でない入力に対しては6・（s－r）dB程度SN比が高い．

［例3．5］$H_1(z) = az^{-1}$　$(0<1-a\ll 1)$，$\Gamma' G(z) = z^{-1}$とおくと，上記のr，sは

$$2^{-2r} = \{2 \cdot (1+a)^{-1}\}^2 \cdot \{3^{-1} \cdot \Sigma_k a^{2k}\}^{-1} = 12 \cdot (1-a) \cdot (1+a)^{-1}$$

$$2^{-2s} = \{1+(1-a)^2 \cdot \Sigma_k a^{2k}\} \cdot \{\Sigma_k a^{2k}\}^{-1} = 2 \cdot (1-a)$$

で与えられ，$a > 11/13 \simeq 0.85$のときに$r>0$，　$a > 7/8 = 0.875$のときに$s>1$となる．

丸めを行なった場合は，例2．1で述べたように，零入力のときでも振幅が2^{-1}・

（１－ａ）である直流のリミットサイクルが生じる．このリミットサイクルの電力

$$P_0 = 4^{-1} \cdot (1-a)^{-2}$$

は前記のP_1，P_2に比べて非常に大きく，ランダム量子化や雑音帰還を用いた量子化の効果が顕著に現れている．

上記のように，雑音帰還を行なうことによって，演算語長の短縮を図ることができる．語長短縮は次のような場合，とくに効果がある．

（１）演算部分を共用して，多数の信号を時分割で多重処理する場合

（２）使用部品やタイミングの点から，通常の量子化では必要精度以上に語長が増加する場合

例えば，ビット直列演算形の回路では，語長は８ビットの倍数であることが望ましい．したがって，語長を１５ビットから１２ビットに短縮してもあまり経済性は向上しないが，１８ビットを１５ビットに短縮できれば，効果が大きい．

また，ディジタル・アナログ変換器への入力のように，語長が予め制限されている場合，ランダム量子化等で所望のＳＮ比が得られなければ，雑音帰還を用いることが必須となる．図３．７に示したディジタルΔ－Σ変調器では，量子化雑音の電力スペクトルを高域に偏らせることにより，２値の出力でも高いＳＮ比（信号対帯域内量子化雑音電力比）を実現しているが，丸めやランダム量子化ではこのような特性を得ることは不可能である．

3．3　時間領域における制御

3．3．1　原理および基本的性質

前節の量子化雑音の電力スペクトルを制御する雑音帰還方式に対して，ここでは，回路の内部状態に応じて切捨てと切上げを適応的に切換える量子化切換え方式について考察する．以下，

$$1-H(z)=1-\sum_{k=1,m} h_k z^{-k} \qquad (3.20)$$

を伝達関数の分母多項式とする図3．8の回路について述べる．この回路の入出力関係は，

$$Y=\Gamma'(\Theta' W+)'(HY+X) \qquad (3.21)$$

で表わされ，HY＋Xが，作用素Γ（Θ’W＋）によって，整数値の信号Y＝Γ’Yに量子化される．ここで，Θは式（2．14）で定義される2値量子化の作用素，Wは入力および回路の内部状態から求められる信号であり，任意の時刻kにおけるWの標本値w_kに対して，

i）　$w_k \geqq 0$ならば，切捨て

ii）　$w_k <$ならば，切上げ

が行われる．したがって，例えばW＝HY＋Xとおくと，図3．9の絶対値切捨てを行なう回路が得られる．また，Wをランダム雑音とすると，ランダム量子化が行なわれる．

量子化切換えに関して，これまで主に検討されているのは，共振回路のリミットサイクルの抑制法である．当初，図3．9に示すような絶対値切捨てが共振回路の零入力リミットサイクルの抑制に有効であることが注目され[32]，後に，より効果的な方法として，出力波形の勾配に応じて量子化切換えを行なうことにより，蓄積エネルギーを減少させる方法が提案された[45),(48]．しかし，後述するように，これらの方法は必らずしも最適な量子化切換えになっていない．ここでは，任意入力の高次の巡回形フィルタに対して，各時刻における蓄積エネルギーの値を厳密に求め，これにより量子化を切換える方式について述べる．蓄積エネルギーがつねに減少するように量子化切換えを行なえば，リミットサイクルを抑制できる．また，単位円上に極をもつ零入力の共振回路に対して，蓄積エネルギーが一定となるように量子化切換えを行なえば，安定な正弦波発振器が得られる（位相ジッタについては，別途考察が必要である．）

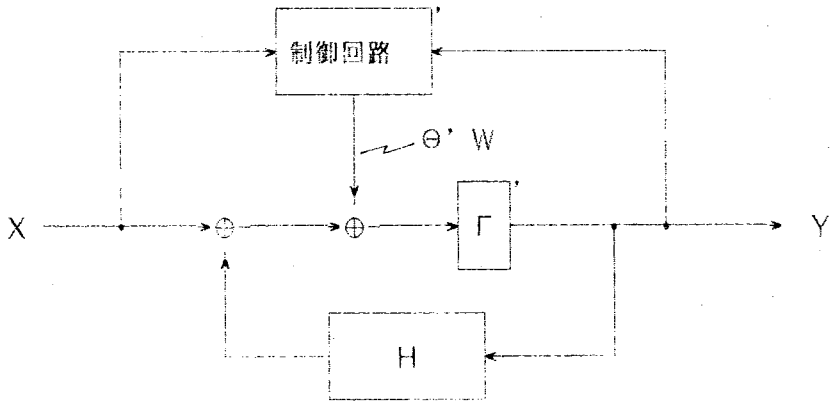


図3．8　量子化切換えを行なう
全極形フィルタ

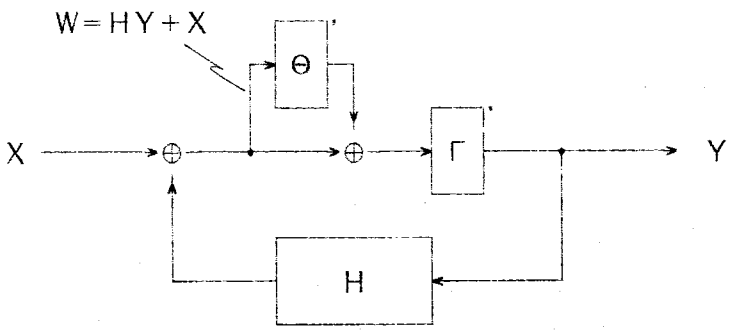


図3．9　絶対値切捨てを行なう
全極形フィルタ

まず，任意の時刻tにおいて，蓄積エネルギー，すなわち以後の入力および量子化雑音を0としたときの出力のエネルギーを求める．図3．8の回路では，量子化によって生じる雑音Nは，

$$N=\Gamma'(HY+X)+\Theta' W-(HY+X) \qquad (3.22)$$

となり，

$$-U\leqq N=\Theta' W-\Delta'(HY+X)\leqq U \qquad (3.23)$$

を満足する．これを用いて，時刻t以後の入出力関係を表わすと，

$$Y\otimes U_t=(HY+X+N)\otimes U_t \qquad (3.24)$$

が得られる．ここで，U_t は式（2．16）で定義される関数である．X，H，Yの時刻tにおける標本値を，それぞれ

$$x_t,\ n_t,\ y_t$$

とおくと，出力$Y\otimes U_t$ は次のように分解できる．

［定理3．3］ 式（3．24）の$Y\otimes U_t$ は

$$Y\otimes U_t=[z^{-t}\cdot]_z\,\Delta' V_t+\{(X+N)\otimes U_{t+1}\}\cdot(1-H)^{-1}$$

$$V_t=\{Q_t+x_t+n_t\}\cdot(1-H)^{-1}$$

$$Q_t(z)=\sum_{k=1,m} h_k \sum_{i=0,k-1} y_{t-k+i}\, z^{-i}$$

と表わされる．

（証明）$HY\otimes U_t$ から$Y\otimes U_t$ を分離するために

$$HY\otimes U_t=H\cdot(Y\otimes U_t)+[z^{-t}\cdot]_z' Q_t$$

によってQt を定義し，式（3．23）に代入すると，

$$Y \otimes U_t = (X+N) \otimes U_t + [z^{-t} \cdot]_z \cdot Q_t + H \cdot (Y \otimes U_t)$$

となり，

$$Y \otimes U_t = \{ [z^{-t}]_z \cdot Q_t + (X+N) \otimes U_t \} \cdot (1-H)^{-1}$$

が得られる．また，$HY \otimes U_t$ は

$$\begin{aligned} & HY \otimes U_t \\ &= [\Sigma_{k=1,m} h_k z^{-k} \cdot Y(z)]_z \otimes U_t \\ &= \Sigma_{k=1,m} h_k \cdot [z^{-k}]_z \cdot (Y \otimes U_{t-k}) \\ &= \Sigma_{k=1,m} h_k \cdot [z^{-k}]_z \cdot \{Y \otimes U_t + Y \otimes (U_{t-k} - U_t) \} \\ &= H \cdot (Y \otimes U_t) \\ &\quad + [z^{-t}]_z \cdot \Sigma_{k=1,m} h_k \{ [z^{t-k} \cdot]_z \cdot Y \otimes (U - U_k) \} \end{aligned}$$

と表わされる．上式と前記のQ_t の定義式を比較することにより

$$Q_t(z) = \Sigma_{k=1,m} h_k \Sigma_{i=0,k-1} y_{t-k+i} z^{-i}$$

であることが示される．

Q_t はYの時刻t－m，t－m＋1，……，t－1の標本値から求まるm－1次の多項式であり，時刻tより前の入力および量子化雑音の影響を表わしている．時刻tにおける回路の内部状態はQ_t によって一意に定められ，Q_t の係数から成るベクトルと，回路内の遅延素子の出力から成るベクトルは，行列によって相互に変換できる．また，$[z^{-t} \cdot]_z \cdot V_t$ は，Q_t と時刻tにおける入力および量子化雑音によって定まる時刻t以後の出力$Y \otimes U_t$ の成分である．時刻tでは$(X+N) \otimes U_{t+1}$ は未知であり，式（3．21）の制御信号Wの時刻tにおける標本値は，$[z^{-t} \cdot]_z \cdot V_t$ から決定せざるを得ない．以下，Q_t を時刻tにおける状態多項式，V_t のエネルギーを時刻tで回路に蓄積されている蓄積エネルギーとよぶ．

［例3．6］ 図3．8の回路において，$H(z) = h_1 z^{-1}$ $(|h_1| < 1)$ とすると，

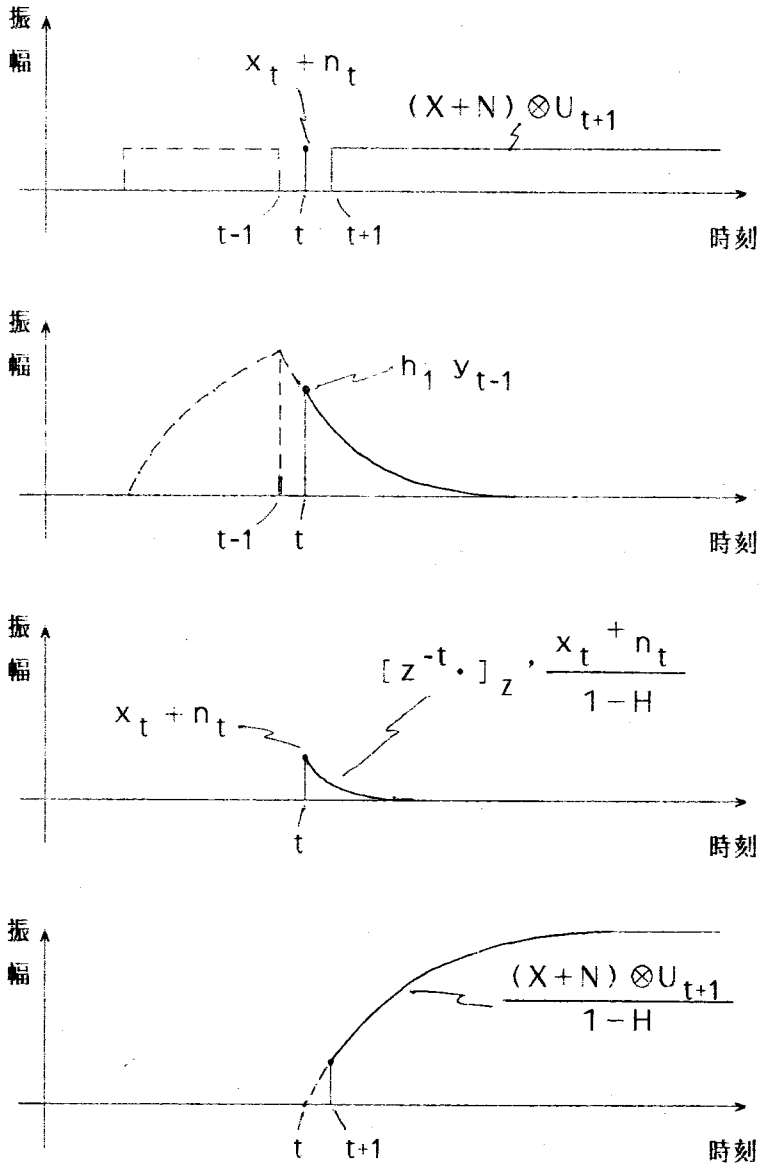


図3．10　時刻t以後の出力$Y \otimes U_t$の分解

$$Q_t(z) = h_1 y_{t-1}$$
$$V_t(z) = \{h_1 y_{t-1} + x_t + n_t\} \cdot (1 - h_1 z^{-1})^{-1}$$

となり，過去の入力の影響がy_{t-1}に集約されていることが確められる．また，V_tのエネルギーは

$$E_t = \| (1-H)^{-1} \|_2^2 \cdot (h_1 y_{t-1} + x_t + n_t)^2$$

と表わされ，$h_1 y_{t-1} + x_t$に対して図３．９のような絶対値切捨てを行なえば，$n_t = 0$の場合に比べて，蓄積エネルギーがつねに減少することが分かる．

図３．１０に，ステップ入力する出力の時刻ｔ以後の波形を，Q_tによるもの，$x_t + n_t$によるもの，$(X+N) \otimes U_{t-1}$によるものに分解して表示する．□

［例３．７］図３．８の回路において，$H(z) = h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3}$とおくと，

$$Q_t(z) = h_1 y_{t-1} + h_2 \cdot (y_{t-2} + y_{t-1} z^{-1}) + h_3 \cdot (y_{t-3} + y_{t-2} z^{-1} + y_{t-1} z^{-2})$$

となる．回路の遅延素子はy_{t-1}，y_{t-2}，y_{t-3}を記憶するように構成されているとすると，これらの出力からQ_tの係数は

h_1	h_2	h_3	y_{t-1}
h_2	h_3	0	y_{t-2}
h_3	0	0	y_{t-3}

で求められる．

一般に，V_tのエネルギーE_tは，$x_t + n_t$に関する次のような２次式となる．

［定理３．４］　定理３．３で定義されるV_tのエネルギーE_tは

$$Et = a \cdot (\sum_{k=1,m} bk\ yt-k + xt + nt)^2 + pt \qquad (a>0)$$

と表わされる．ここで，a，b_k はHから求められる実数，p_t はQ_t とHで定まる実数である．

（証明）定理３．３のV_t，Q_t から，E_t は

$$E_t = \pi^{-1} \cdot \int | \{ Q_t (\exp [j\omega]) + x_{t-1} + n_t \} \cdot \{ 1 - H(\exp [j\omega]) \}^{-1} |^2 d\omega$$

$$\begin{aligned} Q_t(z) &= \sum_{k=1,m} \sum_{i=0,k-1} h_k y_{t-k+i} z^{-i} \\ &= \sum_{k=1,m} \sum_{k-1=0,k-1} h_k y_{t-(k-i)} z^{-(i-k)-k} \\ &= \sum_{k=1,m} \sum_{i=1,k} h_k y_{t-i} z^{-k+i} \\ &= \sum_{i=1,m} y_{t-i} \sum_{k=i,m} h_k z^{-k+i} \end{aligned}$$

と表わされるこがわかる．

y_{t-m}，……，y_{t-1}，$x_t + n_t$ は積分に関しては定数として扱われるから，E_t は実関数の積分値を係数とするy_{t-m}，……，y_{t-1}，$x_t + n_t$ の実２次形式となり，

$$E_t = \sum_{i=1,m} \sum_{k=1,m} c_{i,k} y_{t-i} y_{t-k} + (x_t + n_t) \cdot \sum_{k=1,m} c_k y_{t-k} + c_0 \cdot (x_t + n_t)^2$$

のように表わされる．とくに，c_0 は

$$c_0 = \| (1-H)^{-1} \|_2^2$$

で与えられるから，つねに正である．したがって，

$$\begin{aligned} a &= c_0 \\ b_k &= c_k / 2c_0 \\ p_t &= \sum_{i=1,m} \sum_{k=1,m} c_{i,k} y_{t-i} y_{t-k} - \left(\sum_{i=1,m} b_k \cdot y_{t-k} \right)^2 \end{aligned}$$

とおけば，所望の式が得られる．

式（３．２３）から分かるように，Nの標本値は区間（－１，１］の値をとるから，

上記の定理により，

$$| \Sigma_{k=1,m} b_k y_{t-k} + x_t | \geq 1 \qquad (3.25)$$

であれば，

$$n_t \cdot (\Sigma_{k=1,m} b_k y_{t-k} + x_t) \leq 0 \qquad (3.26)$$

となるように切捨てあるいは切上げを行なうことにより，$n_t = 0$の場合よりもE_tを減少させることができる．式（3．25）が成立しない場合は，切捨て，切上げのいずれを行なってもE_tが増加する可能性がある．これに対して，切捨てあるいは切上げを選択することによって，$n_t = 0$の場合よりもE_tを増加させることはつねに可能である．

式（3．25）が成立しない確率は，蓄積エネルギーE_tが増加すると0に近づく，この点ついて，若干付言する．（y_{t-m}，……，y_{t-1}，x_t）を点とするm＋1次元空間で，式（3．25）が成立しない領域D_tは，原点を通る超平面を±1だけ平行移動した2枚の超平面で挟まれる領域になっている．

一方，原点を通る直線上では，原点からの距離の2乗に比例してE_tが増加する．したがって，E_tが大きくなると，これに対応する点（y_{t-m}，……，y_{t-1}，x_t）がD_t内に存在する確率は0に近づく．また，内部状態が変化して，D_tがD_{t+1}（$\neq D_t$）に変れば，$D_t \cap D_{t+1}$は有界な領域となり，E_tがある程度以上になれば，連続して式（3．25）が成立しないということはなくなる．

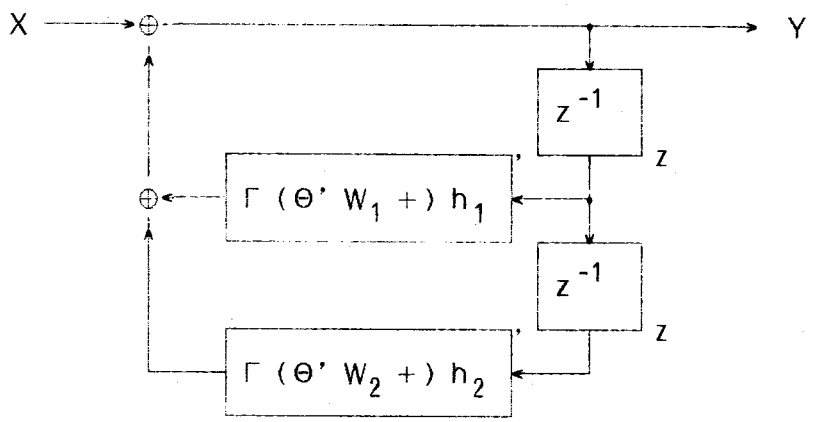
最後に，図3．8以外の回路に対する量子化切換えについて述べる．前節で述べた組合せ論理形フィルタ（図3．4参照）のように，入出力関係が

$$Y = \Gamma (\Theta' W +)' (H_1 Y + H_2 X)$$

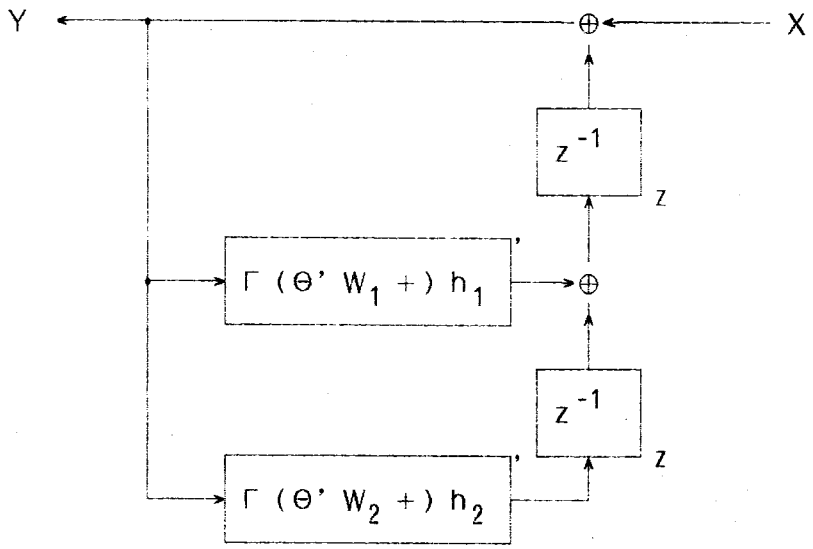
で表わされる回路については，上記の考察において，単にHをH_1，XをH_2 Xで置換すればよい．係数乗算器ごとに量子化を行なう場合の例を以下に示す．

［例3．8］　図3．11（a）の回路は，直接形で構成された共振回路に対して，係数乗算器ごとに量子化切換えを行なったものである．$\Gamma (\Theta' W_k +)$（k＝1，2）によって生じる量子化雑音を

$$Nk = \{ \Gamma (\Theta' Wk +) - 1 \} [hk z^{-k} \cdot] z' Y \qquad (k = 1, 2)$$



（a） 直接形



（b） 直接形の転置

図3．11 係数ごとに量子化切換え
を行なう共振回路

とおくと，入出力関係は

$$Y=[h_1 z^{-1}+h_2 z^{-2}]_z \cdot Y+X+(N_1+N_2)$$

と表わされる．量子化雑音N_1+N_2の蓄積エネルギーに対する影響は図３．８の場合と同様であるから，$W_1=W_2$とおき，前記と同様の量子化切換えを行なうことによって，蓄積エネルギーを制御することができる．

［例３．９］図３．１１（ｂ）の回路は，同図（ａ）の回路を転置したものである．この場合，

$$N_k=\{\Gamma(\Theta' W_k+)-1\} h_k' Y \qquad (k=1, 2)$$

とおくと，入出力関係は

$$Y=[h_1 z^{-1}+h_2 z^{-2}]_z \cdot Y + X+([z^{-1}\cdot]_z' N_1+[z^{-2}\cdot]_z' N_2$$

となる．したがって前例のように，図３．８の場合と同様の量子化切換えを行なうことは不可能である．

より一般的に云えば，複数個の量子化された信号が，すべて同一時間遅延されて加算される場合は図３．８と同様の量子化切換えによって蓄積エネルギーを制御することができるが，そうでなければ複雑な制御が必要となることがある．

３．３．２　リミットサイクルの抑制

量子化切換えを用いてディジタルフィルタのリミットサイクルを抑制する方法が，これまでにいくつか提案されているが，$z=\pm 1$の近傍に極をもつ零入力あるいは定数入力の共振回路に関するものが大部分である[45)-(48)]．ここでは，定理３．４に

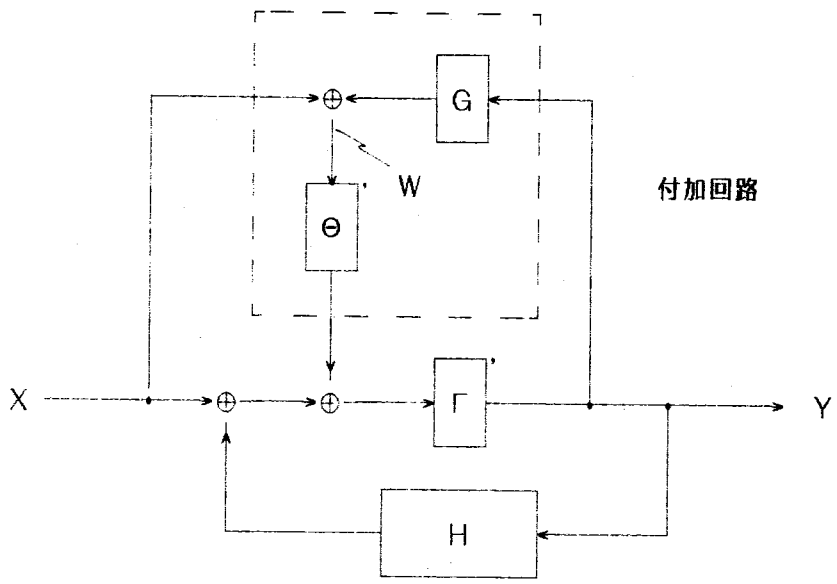


図３．１２　リミットサイクル抑制回路を
付加した高次全極形フィルタ

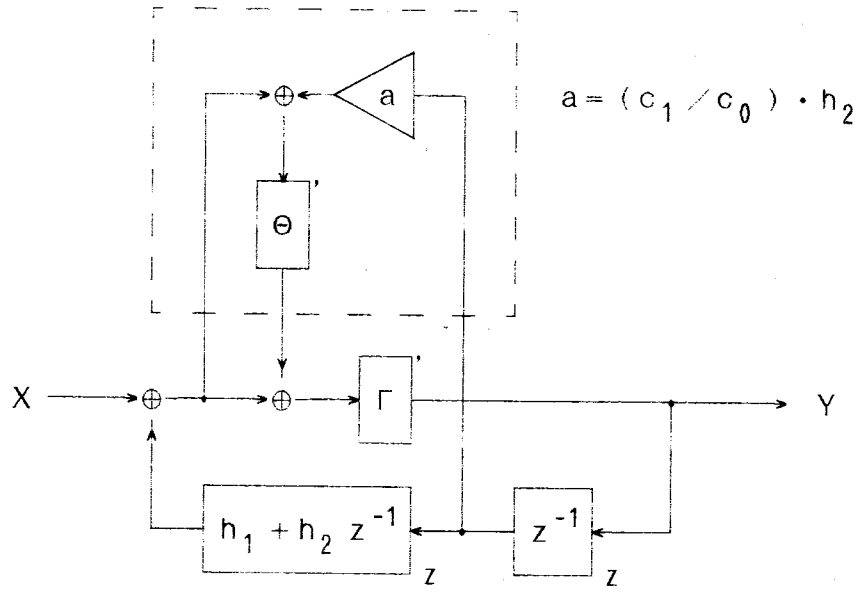


図３．１３　リミットサイクル抑制回路を
付加えた共振回路

基づく一般的なリミットサイクルの抑制法について述べ，他の方法と比較する．

図３．８の回路に対して，リミットサイクルを抑制するように，制御信号Wを

$$W = X + GY \tag{3.27}$$

$$G(z) = \sum_{k=1,m} b_k z^{-k} \tag{3.28}$$

と定めたときの構成を図３．１２に示す．ここで，b_k は定理３．４で用いられた定数であり，Wの標本値が正または０ならば切捨て，負ならば切上げが行なわれるため，量子化雑音は式（３．２６）を満足する．実用上重要な共振回路の場合，Gは次のようになる．

共振回路の場合，式（３．２０）のH（ｚ）は

$$\begin{aligned} &h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} \\ &= 2\exp(-\alpha)\cdot\cos(\beta)\cdot z^{-1} - \exp(-2\alpha)\cdot z^{-2} \\ &\qquad (\alpha > 0,\ |\beta| \leq \pi) \end{aligned} \tag{3.29}$$

のように表わされる．この場合，定理３．３で述べた状態多項式は

$$Q_t(z) = q_{0,t} + q_{1,t} z^{-1} \tag{3.30}$$

$$q_{0,t} = 2\exp(-\alpha)\cdot\cos(\beta)\cdot y_{t-1} - \exp(-\alpha)\cdot y_{t-2} \tag{3.31}$$

$$q_{1,t} = -\exp(-\alpha)\cdot y_{t-1} \tag{3.32}$$

となり，V_t のエネルギー

$$E_t = (2\pi)^{-1}\cdot\int |\{q_{0,t} + x_t + n_t + q_{1,t}\cdot\exp[-j\omega]\} \cdot\{1 - H(\exp[j\omega])\}^{-1}|^2 d\omega$$

は，次のように表わされる．

$$E_t = C_0\cdot\{q_{0,t} + (c_1/c_0)\cdot q_{1,t} + x_t + n_t\}^2 + \{c_0 - (c_1/c_0)\cdot c_1\}\cdot q_{1,t}^2 \tag{3.33}$$

$$c_k = (2\pi)^{-1}\cdot\int |\cos(\omega)|^{2k} \cdot |1 - H(\exp[j\omega])|^{-2} d\omega \tag{3.34}$$

したがって，式（３．２８）のGは

$$G(z)=H(z)+(c_1/c_0)\cdot h_2 z^{-1} \qquad (3.35)$$

となる．これを用いて図３．１２のような量子化切換えを行なうと，可能な限り

$$n_t\cdot\{q_{0,t}+(c_1/c_0)\cdot q_{1,t}+x_t\}\leqq 0 \qquad (3.36)$$

を満足するように量子化が行なわれ，リミットサイクルが抑制される．これは，量子化切換えを一ケ所で行なう場合の，最適な構成である．なお，図３．１２は基本構成を示したものであり，多くの場合，簡単化が可能である．例えば，式（３．３５）の場合，図３．１３のような等価回路が得られる．

共振回路のリミットサイクル抑制法としてよく知られている絶対値切捨てや，出力波形の勾配による量子化切換えは，次のように，式（３．３６）を近似的に実現したものであるとみなし得る．

［例３．１０］[32] 式（３．２９）のHに対して図３．９の絶対値切捨てを用いる場合は，Gとして，式（３．３５）の代りに，Hを用いたことに相当する．この場合，

$$n_t\cdot(q_{0,t}+x_t)\leqq 0$$

となるように量子化が行なわれ，

$$(q_{0,t}+x_t)\cdot\{q_{0,t}+(c_1/c_0)\cdot q_{1,t}+x_t\}<0$$

のとき，量子化によって蓄積エネルギーが増加する．しかし，一般に上式が成立する確率は低く，絶対値切捨てにもリミットサイクルを抑制する効果がある．図３．１４に，定数入力に対して上記の不等式が成立する領域を示す．

［例３．１１］[40),(45)] 図３．１２の回路において，Hは式（３．２９）で与えられるものとし，

$$G(z)=r\cdot(z^{-1}-z^{-2}) \qquad (r;\text{定数})$$

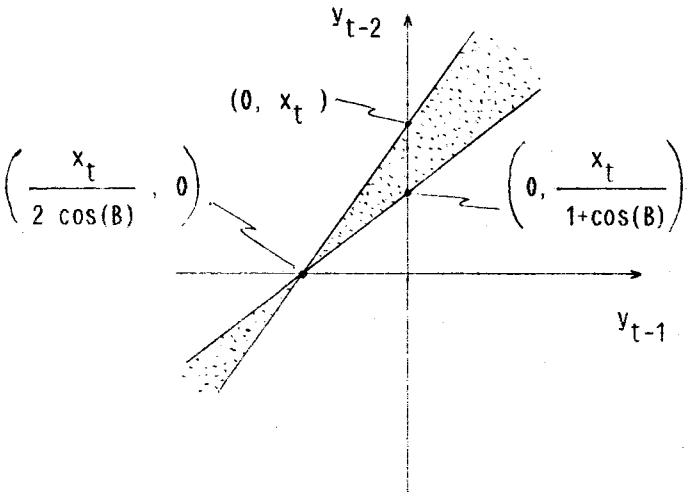


図３．１４　絶対値切捨てによって蓄積エネルギーが増加する領域（定数入力）

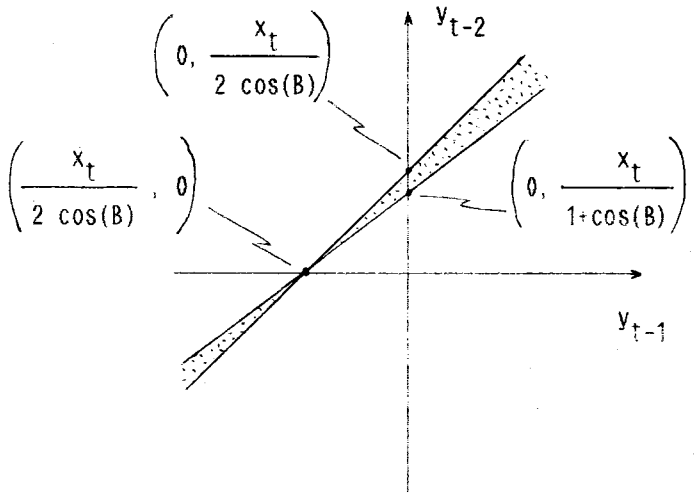


図３．１５　出力の勾配による量子化切換えで蓄積エネルギーが増加する領域（定数入力）

とおくと，

$$n_t \cdot (r y_{t-1} - r y_{t-2} + x_t) \leq 0$$

を満足するように量子化切換えが行なわれる．出力波形の勾配によって量子化切換えを行ない，零入力リミットサイクルを抑制するという方法は，　上式で$r \to \infty$とし，x_tの影響を無視した場合に相当する．大振幅のリミットサイクルが生じるのは$\alpha \simeq 0$の場合である．簡単のため，この場合について，上式のGを用いたときと，式（３．３５）のGを用いたときの効果を比較する．

$\alpha \simeq 0$の場合，式（３．３６）は

$$n_t \cdot \{2 \cdot \cos(\beta) \cdot y_{t-1} - [1+\cos(\beta)] \cdot y_{t-2} + x_t\} \leq 0$$

と近似される．したがって，$\beta \simeq 0$のときは，$G(z) = 2 \cdot (z^{-1} - z^{-2})$とおいても，入力$x_t$の影響を考慮した最適に近い量子化切換えが行なわれる．この場合は，実係数の係数乗算器を必要としないから，図３．１３の回路よりも経済的である．しかし，βが増加すると，rを実数としても，リミットサイクル抑制の効果が減少し，$\beta \simeq \pi/2$では無効に近くなる．図３．１５に，定数入力に対して

$$G(z) = 2 \cdot \cos(\beta) \cdot (z^{-1} - z^{-2})$$

を用いて量子化切換えを行ったときの蓄積エネルギーが増加する領域を示す．

［例３．１２］[48]　例３．８に示した複数個の量子化器を用いる回路の場合，式（３．３３）に相当する蓄積エネルギーは

$$E_t = c_0 \cdot \{q_{0,t} + (c_1/c_0) \cdot q_{1,t} + x_t + n_{1,t} + n_{2,t}\}^2 + \{c_0 - (c_1/c_0) \cdot c_1\} \cdot q_{1,t}^2$$

となる．ここで，$n_{1,t}$，$n_{2,t}$はそれぞれN_1，N_2の時刻tにおける標本値である．　例３．８のように単純に$W_1 = W_2$とせず，なるべくE_tが小さくなるようにW_1，W_2を定めることも可能である．しかし，自由度を増しても，空らずしも図３．１の場合よりもリミットサイクル抑制効果が大きいとは云えず，入力が大振幅でN_1，N2がランダムに近いときは，逆にＳＮ比が３ｄＢ低下する．

なお，類似の構成として，「（Θ' W_1 +）の代りに丸めを用い，「（Θ' W_2 +）の代りに出力波形の勾配に応じて絶対値切捨てとランダム量子化を切換える方法も考えられているが，例３．１１の場合と同様に，共振回路の極が原点から遠ざかるとともに，リミットサイクル抑制の効果が減少する．

上記の諸例と比較してもわかるように，図３．１３の付加回路は非常に簡単であり，単一量子化器という条件のもとでの最適な処理を行なっている．確率は非常に小さいが，式（３．２５）が成立しないときは蓄積エネルギーが増加する可能性がある．この増加量の上界を求めることが，残された課題である．

３．３．３　正弦波発振器の安定化

量子化切換えによって回路の蓄積エネルギーを制御できるということは，正弦波発振器のように蓄積エネルギーを一定にしたい場合にも量子化切換えが有効であることを意味している．ただし，正弦波発振器としての用途に耐え得るためには，位相ジッタが少ないことが必須の条件となる．また，伝達関数が単位円上に極をもつ場合，これまで計算してきたような蓄積エネルギーの値は発散する．ここでは，まず正規化された蓄積エネルギーを定義し，これを一定に保つように量子化切換えを行なったときの発振出力の相対振幅および位相ジッタの変動幅に対する一つの上界を示す．

図３．８の回路の入出力関係は，一般に

$$Y = HY + X + N \qquad (3.37)$$

$$N = \Theta' W - \Delta' (HY + X) \qquad (3.38)$$

で与えられ，

$$H(z) = h_1 z^{-1} - z^{-2} = 2 \cdot \cos(\beta) \cdot z^{-1} - z^{-2} \qquad (3.39)$$

$$X(z) = x_1 z^{-1} = M \cdot \sin(\beta) \cdot z^{-1} \quad (M > 0,\ 0 < \beta < \pi) \qquad (3.40)$$

とおくと，振幅Mの正弦波が得られる．式（３．３９）は，式（２．２９）に対して$\alpha \to 0$の極限をとったものであり，このとき式（３．３３）の蓄積エネルギーE_tは発散する．しかし，E_tをインパルス応答のエネルギーc_0で正規化した値は，$\alpha \to 0$の極限においても有界となり，下記の値に収束する．

［補題３．１］式（３．３１），（３．３２），（３．３３）で定められるE_t / C_0は$t \geqq 1$に対して，$\alpha \to 0$で極限で

$$\varepsilon_t = y_t^{\,2} - h_1 \cdot y_t\, y_{t-1} + y_{t-1}^{\,2}$$

に収束する．とくに，$\varepsilon_1 = x_1^{\,2}$である．

（証明）　$y_t = q_{0,t} + x_t + n_t$であり，$\alpha \to 0$に対して，$c_1 / c_0 \to \cos(\beta)$となるから，

$$\begin{aligned} &\lim_{\alpha \to 0} E_t / c_0 \\ &= \{ y_t - \cos(\beta) \cdot y_{t-1} \}^2 + \{ \sin(\beta) \cdot y_{t-1} \}^2 \\ &= y_t^{\,2} - 2 \cdot \cos(\beta) \cdot y_t\, y^{t-1} + y_{t-1}^{\,2} \end{aligned}$$

が成立する．$y_0 = 0$，$y_1 = x_1$であるから，$t = 1$のとき上式の値は$x_1^{\,2}$となる．

ε_tは発振出力の時刻tの近傍における電力を表わし，量子化雑音によるε_tの変化に関して，つぎの補題が成立する．

［補題３．２］　補題３．１で定められるε_t（$t > 1$）は

$$\begin{aligned} &\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} = (y_t - y_{t-2}) \cdot n_t \\ &y_t = h_1\, y_{t-1} - y_{t-2} + n_t \end{aligned}$$

を満足する．

（証明）　$t > 1$のとき，$x_t = 0$であるから，$y_t = h_1\, y_{t-1} - y_{t-2} + n_t$が成立し，$\varepsilon_t$は

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_t \\
&= y_t \cdot (y_t - h_1 y_{t-1}) + y_{t-1}^2 \\
&= y_t \cdot (n_t - y_{t-2}) + y_{t-1}^2 \\
&= y_t \cdot n_t - (h_1 y_{t-1} - y_{t-2} + n_t) \cdot y_{t-2} + y_{t-1}^2 \\
&= (y_t - y_{t-2}) \cdot n_t + (y_{t-2}^2 - h_1 y_{t-2} y_{t-1} + y_{t-1}^2) \\
&= (y_t - y_{t-2}) \cdot n_t + \varepsilon_{t-1}
\end{aligned}
$$

と表わされる．

出力振幅を一定値Mに保つには，

$$(\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_1) \cdot (y_t - y_{t-2}) \cdot n_t \leqq 0 \qquad (3.41)$$

が成立するように量子化を切換えることが望ましいが，

$$|(h_1 y_{t-1} - y_{t-2}) - y_{t-1}| < 1 \qquad (3.42)$$

のときは，切捨て，切上げのいずれに対しても$\varepsilon_{t-1} > \varepsilon_1$となる可能性がある．しかし，$x_1 \gg 1$とすると，上式が成立する確立は非常に小さく，かつこのときはε_tはほとんど変化しないから，

$$(\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_1) \cdot \{(h_1 y_{t-1} - y_{t-2}) - y_{t-2}\} \cdot n_t \leqq 0 \qquad (3.43)$$

を満足するような量子化で十分である．ε_{t-1}は

$$\varepsilon_{t-1} = y_{t-1}^2 - (h_1 y_{t-1} - y_{t-2}) \cdot y_{t-2}$$

と表わされるから，式（3．43）を満足するためには，式（3．38）のWを

$$
\begin{aligned}
&W = W_1 \otimes W_2 \\
&W_1 = [z^{-1} \cdot]_{z_2}' (Y \otimes Y) - HY \otimes [z^{-2} \cdot]_z' Y - \varepsilon_1 U \\
&W_2 = HY - [z^{-2} \cdot]_z' Y
\end{aligned}
$$

と定めればよい．ただし，実際には，Θ' W1 とΘ' W2 の排他的論理和によって，

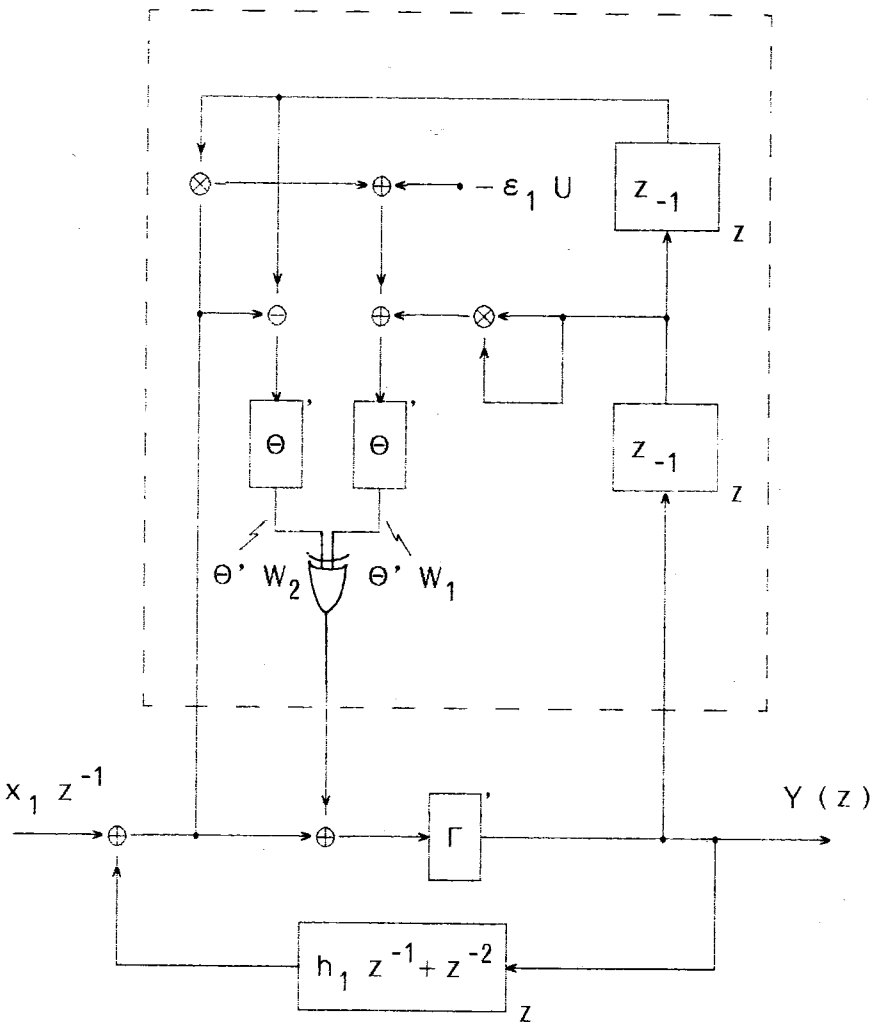


図3．16　ディジタル正弦波発振器

直接Θ' Wを作成する方が経済的である．このような構成（HYの変りにHY＋Xを使用）を図3．16に示す．

つぎに，式（3．43）によって量子化切換えを行なう場合の発振出力の相対振幅の偏差と位相ジッタの上界について述べる．

［補題3．3］ 図3．16の正弦波発振器において，$x_1 \gg 1$とすると，

$$\varepsilon_t = \rho_t^{\,2}\,\varepsilon_1 \qquad (\rho_t \geqq 0)$$

で定義される相対振幅ρ_tは

$$|1-\rho_t| \lesssim 1/x_1$$

を満足する．

（略証） $x_1 \gg 1$とすると，$\rho_t \simeq 1$，$|y_t - y_{t-2}| \lesssim 2x_1$となるから，近似的に

$$|\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}| = |y_t - y_{t-2}| \cdot |n_t| \lesssim 2x_1$$

が成立する．また，式（3．43）は，ほとんどの場合，式（3．41）と等価である．後者の条件がつねに成立すると近似すると，数学的帰納法により，

$$|\varepsilon_t - \varepsilon_1| \lesssim 2x_1$$

であることが導かれる．式（3．43）が式（3．41）と等価でない場合，前者では$\varepsilon_t \leqq \varepsilon_{t-1}$となり，後者では$\varepsilon_t \geqq \varepsilon_{t-1}$となるが，その差は僅少であり，速やかに等価な場合に復帰する．したがって，近似的に

$$\begin{aligned} &|1-\rho_t| \cdot 2x_1^{\,2} \\ \simeq\ &|\rho_t^{\,2} - 1| \cdot \varepsilon_1 \\ =\ &|\varepsilon_t - \varepsilon_1| \\ \lesssim\ &2x_1 \end{aligned}$$

が成立する．

［補題３．４］図３．１６の正弦波発振器に対して，補題３．３のρ_tを用い，

$$y_t = M\rho_t \cdot \sin(\theta_t)$$
$$\theta_t - \theta_{t-1} = \beta + \delta_t$$

によってδ_tを定義すると，$x_1 \gg 1$のとき，

$$|\delta_t| \lesssim 1/x_1$$

が成立する．

（略証）量子化雑音n_tによって生じる位相ジッタを求めるため，仮想的に$n_{t+k} = 0$（$k \geqq 1$）とおくと，

$$\begin{aligned} y_{t+k-1} &= M\rho_{t-1} \cdot \sin(k\beta + \theta_{t-1}) \\ &\quad + n_t \cdot \sin(\beta)^{-1} \cdot \sin(k\beta) \\ &= \{M\rho_{t-1} + n_t \cdot \sin(\beta)^{-1} \cdot \cos(\theta_{t-1})\} \\ &\quad \cdot \sin(k\beta + \theta_{t-1}) \\ &\quad - \{n_t \cdot \sin(\beta)^{-1} \cdot \sin(\theta_{t-1})\} \\ &\quad \cdot \cos(k\beta + \theta_{t-1}) \end{aligned}$$

となる．一方，定義から，y_{t+k-1}は

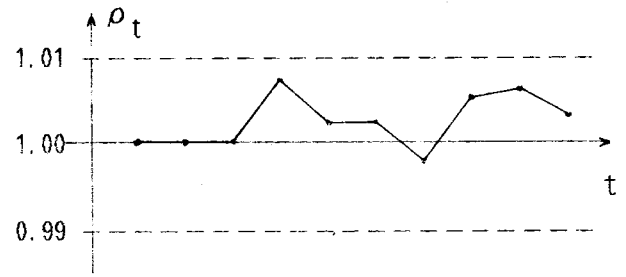
$$y_{t+k-1} = M\rho_t \cdot \sin(k\beta + \theta_{t-1} + \delta_t)$$

と表わされる．$\sin(\theta_{t-1}) = 1$，$|n_t| = 1$のときに位相ジッタδtの絶対値が最大になり，

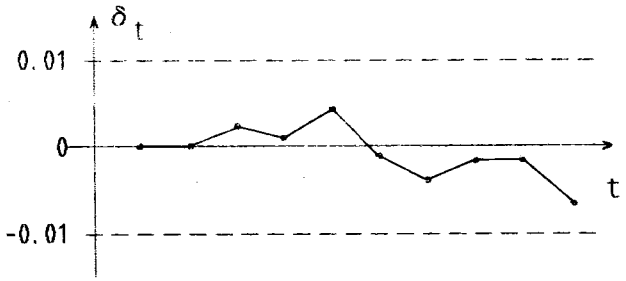
$$|\delta_t| \simeq |\tan(\delta_t)| \lesssim 1/x_1$$

となる．

［定理３．５］　入出力関係が式（３．３７）乃至（３．４０）で表わされる正弦波発振器に対して，式（３．４４）乃至（３．４６）で定められるWによって量子化切換えを行なうものとする．このとき，$x_1 \gg 1$であれば，相対振幅の偏差および標本化周期当りの位相ジッタ（単位：ラジアン）がいずれも$1/x_1$程度以下である正弦波出力が得られる．



（ａ）　相対振幅



（ｂ）　位相ジッタ

図３．１７　正弦波発振器の出力の変動

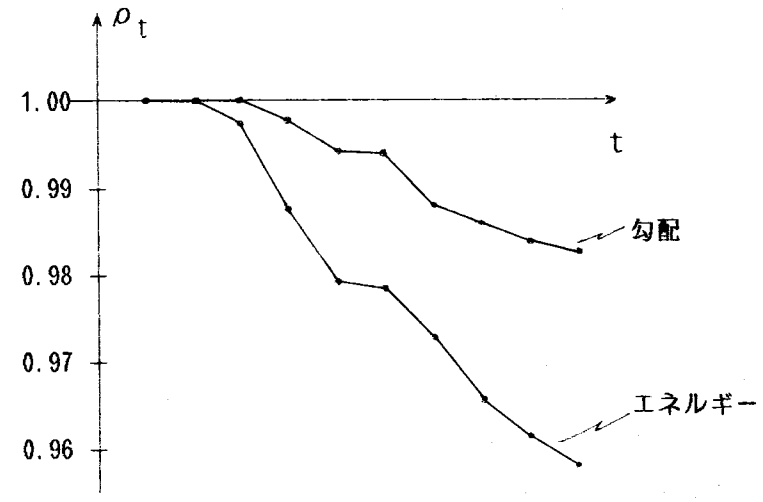


図３．１８　正弦波発振器に対して出力が減衰する
ように量子化したときの相対振幅

（証明）　省略（補題３．３および３．４参照）．

最後に，簡単な数値例を示す．

［例３．１３］　補題３．４で，$x_1 = M \cdot \sin(\beta) \gg 1$，$|\beta| \ll 1$とすると，出力正弦波の１周期当りのジッタの上限は

$$2\pi\beta^{-1} \cdot \{M \cdot \sin(\beta)\}^{-1} \simeq 2\pi / M\beta^2$$

と同程度以下の値となる．例えば，$\beta = 10^{-1}$，$M = 2^{30}$のときは

$$2\pi / M\beta^2 \simeq 6 \times 10^{-7}$$

である．

［例３．１４］図３．１６の回路において，

$$h_1 = 2 \cdot \cos(\beta) = 1.2$$
$$x_1 = M \cdot \sin(\beta) = 100$$

とおいたときの相対振幅ρ_t，位相ジッタδ_t（単位；ラジアン）を図３．１７に示す．図の破線は定理３．５で述べた$|1-\rho_t|$，$|\delta_t|$の変動幅の上界$1/x_1$である．

参考までに，図３．１６の回路の破線部分を，リミットサイクル抑制用の量子化切換え回路で置換したときの出力相対振幅の変化を図３．１８に示す．図の「エネルギー」および「勾配」と記した折線は，それぞれ式（３．３５）および例３．１１のGに対応する．この場合，$\beta \simeq 0$と近似できないから，両者には顕著な差が現われている．

上記の発振器では，振幅が一定になるように量子化切換えを行なっており，位相ジッタの累積に関する対策は行なわれていない．このため，位相ジッタを軽減するには，演算語長を増さざるを得ない．発振器の出力を

$$y_t = M\rho_t \cdot \sin(\theta_t)$$

と表わしたとき，量子化雑音は，$\theta_t \simeq 0$，πでは主として振幅に，$\theta_t \simeq \pm\pi/2$では主として位相に影響する．この性質を利用し，振幅の制御と位相の制御を交互に行なう方法が考えられるが，回路が複雑になる．より実用的な方法として，θ_tがπの整数倍に近いときに量子化切換えを行ない，その他のときは丸めを用いることが考えられる（丸めを用いたときの位相ジッタの平均値0であると考えられる）．なお，掃引発振器や位相変調器のように，伝達関数の係数が緩やかに変化する回路では，位相ジッタの累積はあまり問題にならないから，演算語長は比較的小さくてもよい．

３．４　結言

量子化雑音の対策として，３．２節で雑音帰還によって量子化雑音のスペクトルを制御する周波数領域での処理について，また，３．３節で回路の内部状態に応じて量子化を適応的に切換える時間領域での処理について考察し，それぞれ次の結果を得た．

周波数領域での処理に関する主要な成果は，定理３．１である．これにより，整係数ディジタルフィルタで雑音帰還を行なったときの出力に現われる量子化雑音成分は，式（３．６）や式（３．７）のように表わされる．雑音帰還については，１９６２年のH．A．Spang Ⅲ[39]による提案以来，主として符号化の分野で多数の検討が行なわれてきた．しかし，大部分は非直線量子化を用いているため解析は至難であり，デルタ変調器の無通話時雑音等の特殊なものを除くと，量子化雑音をランダムとみなした近似的な解析しか行なわれていない．これに対して，対象は限定されているが，式（３．６）では，出力を観測することにより，それに含まれる量子化雑音成分を正確に求めることができる．

代表的なディジタル信号処理回路であるディジタルフィルタでは，これまで雑音帰還による量子化はあまり採用されていなかった．ディジタルフィルタの場合，演算語長には特別な制約がなく，雑音帰還の採否は，これによる語長短縮の効果と雑音帰還のための回路の付加に関する経済的な優劣で定められることが多い．係数乗算器ごとに量子化を行なう伝統的な回路構成では，雑音帰還を用いるとかえって経済性が損われる場合が少なくない．一方，A．Croisier ら，A．Peledら[14]によって提案，検討され，最近注目を浴びている組合せ倫理形の回路構成では，荷重加算後に一括して量子化を行なうため，雑音帰還を用いることによって経済化を図ることができる．これを具体化したものが図３．４のフィルタである．　類似のものが，最近Ｔ－Ｌ Changら[42]によって独立に発表されたが，雑音帰還用のフィルタの伝達関数に不要な条件が付加されているため，効果が期待できない場合が少なくない．

ディジタル信号処理回路の出力が，アナログ信号に変換される場合や，伝送あるいは記録される場合，通常，語長が制限される．短い語長で高いＳＮ比を得るには，雑音帰還の採用はほぼ必須である．出力語長が１ビットに制限された極端な例が図３．７の回路であり，量子化雑音のスペクトルを帯域外に偏在させることにより，高いＳＮ比を実現している．ここでは，補間の周波数比と入力標本値を互いに素な整数にすることによりＳＮ比を改善するという，ディジタル信号処理ならではの手法が用いられている．

雑音帰還を行なったときの出力に現れ得る量子化雑音電力の最大値の上界と下界を，定理３．２に示した．この上界と下界の比は７ｄＢ程度であり，最大値の代りに上界を用いて最悪値設計を行なっても，演算語長は高々１ビット程度しか増加しない．雑

音帰還とは別に，周波数領域での処理として，ランダム量子化がA．C．Callahan[34]，R．B．Kieburtzら[35]，M．Buttner[36]らによって提案，検討されている．微小入力に対しては，例3．5にみられるように，いずれの量子化も顕著な効果があるが，微小でない入力に対してはランダム量子化は特別な効果はない．これらの量子化に対する所要演算語長の比は式（3．18）で与えられる．

一方，時間領域での処理である量子化切換えについては，定理3．3および定理3．4によって回路の蓄積エネルギーと量子化雑音の関係を明らかにし，その応用として，式（3．26）によるディジタルフィルタのリミットサイクルの抑制法と，式（3．43）による正弦波発振器の安定化の方法を示した．定理3．3および定理3．4は，量子化切換えの場合に限らず，一般に成立する．内部状態は通常ベクトルで表わされるが，定理3．3で導入した状態多項式Q_tを用いることにより，スカラ表示が可能となった．Q_tは，時刻t以後の出力の過去の入力による成分を与える．仮想的な入力である．

共振回路のリミットサイクルの抑制については，T．A．C．M．Claasenら[31]-[33]の零入力の場合に対する荷重加算後の絶対値切捨て，H．J．Butterweck，G．Verkroostら[45]-[47]の，出力波形の勾配に応じたランダム量子化と絶対値切捨ての切換え等の提案がある．しかし，いずれの方法も，式（3．26）のような高次のフィルタにも適用できる一般性はもっていない．最初に蓄積エネルギーに着目したのはButterweckであるが[45]，対象は定数入力の共振回路に限られており，この考察を一般化することは難しい．例えば，定数でない入力に対しては，零入力のときの差分方程式に帰着させることはできない．解析は難解であるが，蓄積エネルギーを減少させる方法として出力波形の勾配による量子化切換えを用いていることや，単位円上に極をもち，かつ量子化を行なわない場合にも消費電力を表わす項が0にならないこと等から，かなりの近似が行なわれている
と思われる．また，Lawrenceらが部分的なランダム量子化を採用したのは，定数以外の入力に対してもリミットサイクルを抑制することを意図したものであるが，式（3．26）のように入力の影響を直接考慮する方がはるかに効果がある．さらに，図3．12，図3．15からも分かるように，出力波形の勾配による量子化切換えは，絶対値切捨てよりは有効であるが，定数入力に限定しても最適であるとは云えない．

これらの方法に対して，式（3．26）によれば，可能な限り蓄積エネルギーが減少するように量子化切換えが行なわれる．式（3．36）は共振回路の場合に対する式（3．26）の具体例で，この条件を満足する量子化は図3．14のような簡単な回路で実現される．式（3．25）の条件が成立しない場合は，切捨て，切上げのいずれを行なっても蓄積エネルギーが増加する可能性があるが，蓄積エネルギー大きくなると，この条件が成立しない確率は0に近づく．一方，川又ら[50]は，標準形のデ

ィジタルフィルタを適当に等価変換することにより，リミットサイクルを完全に除去する方法を示しているが，係数乗算器数が次数の２乗にほぼ比例して増加する．

式（３．４３）による正弦波発振器の安定化は，対象は特殊な回路であるが，理論的に興味のある結果である．発振周波数を限定すれば，予め読出し専用メモリに記憶された正弦波の標本値を適当に間引き，補間して出力することも可能であるが[51]，多数の周波数で高精度の発振出力を得るためには，莫大なメモリが必要となる．図３．１６の回路は，比較的簡単な構成で，任意周波数の発振出力が得られることが特長であり，係数h_1および定数入力$-\varepsilon_1 U$を緩やかに変化させることによって，掃引発振器として動作させることもできる．発振器の場合，振動の変動だけでなく，位相ジッタも問題となるが，定理３．５によって，これらの近似的な上界が与えられる．図３．１６の回路では位相ジッタの累積に関する対策は行なっていないが，例３．１３にみられるように，４バイト程度で振幅を表現すれば，位相ジッタを標本化周波数（水晶発振器出力であるクロックの周波数）と同程度以下にすることができる．

残された課題としては

（１）雑音帰還を行なったとき，量子化雑音がどの程度ランダム化されるか．

（２）量子化切換えで蓄積エネルギーを制御できないとき，蓄積エネルギーがどの程度まで増加し得るか．

等の問題に関する定量的考察がある．前者は，入力の電力スペクトルが与えられたとき，出力に現れる量子化雑音成分の電力を求めようとするものである．これにより，ランダム量子化の場合に対するＳＮ比の改善度が，式（３．１８），（３．１９）のいずれに近いかを知ることができる．後者は，与えられた状態多項式および入力標本値が式（３．２５）を満足しない場合の，定理３．４のE_tの増分に関する検討である．量子化器を１個に限定すれば，回路構成上の改良の余地はないが，最悪値を把握するために，E_tの増分の上界を求めることが望まれる．

第４章　　音声の符号化復号化への応用

４．１　緒言

ディジタルフィルタにおける語長の短縮は，単に経済性だけの問題であることが多いが，限られた語長で所望のＳＮ比を得ることが必須の条件となることも少なくない．このような場合，前章で述べた雑音帰還は非常に有効である．ここでは，実際の通信装置への雑音帰還を用いた量子化の応用例として，デルタ変調（Ｄｅｌｔａ　Ｍｏｄｕｌａｔｉｏｎ．　以下，ＤＭと略す）を利用した音声の符号化複号化方式について述べる．

ディジタル交換機を交換網に導入する場合，アナログ音声信号と圧伸ＰＣＭ信号の相互変換を行なう音声－ＰＣＭインターフェースを，いかに経済的に実現するかということが問題となる．このための一つの方式として，ＤＭによる符号化複号化とＤＭ－ＰＣＭ相互変換を組合せる構成が，１９７０年頃からベル研究所を中心に検討されていたが[61)-(64)]，集積化に適した方式として最近注目を浴びている[65)-(79)]．これは，高精度のアナログ素子を多数必要とする伝統的な方式に比べて，アナログ回路が非常に簡単で，信号処理の大部分がディジタル的に行なわれることによる．

ＤＭ方式は，単一積分や２重積分によって，一定の量子化ステップ幅で符号化復号化を行なう直線ＤＭと，瞬時圧伸やシラブル圧伸を用いて，量子化ステップ幅を変化させる圧伸ＤＭに大別される．前者は，後者に比べて，回路構成ははるかに簡単であるが，数十倍の標本化周波数を必要とする．例えば，回路構成の最も単純な単一積分形直線ＤＭによって，国際標準規格を満足する品質を得ようとすると，所要標本化周波数は８ＭＨｚ程度なる．一方，半導体素子の性質から，ＤＭ－ＰＣＭ符号変換を行なうＬＳＩのゲート当り消費電力は，標本化周波数にほぼ比例して増加する．したがって，符号変換用ＬＳＩの消費電力を削減するには，標本化周波数とゲート数の積を小さくしなければならない．

本章では，符号器復号器として，単一積分形直線ＤＭの場合より若干複雑であるが，圧伸ＤＭの場合よりはるかに簡単な構成で，かつ２ＭＨｚ程度の標本化周波数で国際標準規格の品質が得られる２重積分形直線ＤＭを用いる場合について，ＤＭ－ＰＣＭ相互変換方式の検討を行なう．この方式における主な技術的課題は，受信側で１ビットに量子化してＤＭ信号を作成するときに生じる量子化雑音の対策であるが，この他にも，送信側では間引きのときの帯域制限の不完全さによる折返し雑音が，受信側では補間の不完全さによる補間雑音が発生する．これらの雑音の影響を少なくしたシス

テムの基本構成を４．２節に示し，回路の簡単化および特性改善のための一案を４．３節で，また，シミュレーション結果を４．４節で述べる．

４．２　システムの基本構成

音声の符号化に関する国際標準規格は，国際電信電話諮問委員会（ＣＣＩＴＴ）勧告Ｇ－７１２で詳細に述べられている．図４．１はその一部を示したものである．この規格を満足するために，通常，高次のアナログフィルタ（例えば６次の連立チェビシェフ形フィルタ）で音声信号を帯域制限して，８ｋＨｚで標本化保持し，これを８ビットの圧伸ＰＣＭ信号に変換することが行なわれている．ＤＭ符号器復号器を用い，ディジタル信号処理によってこれと等価な機能を実現しようとすると，ＤＭ信号の標本化周波数は非常に高くなる．このため，すべての処理をＤＭ信号の標本化周期で行なうよりも，図４．２のような構成をとる方がよいと思われる．

符号変換回路は，ＤＭ信号と直線ＤＰＣＭ（Ｄｉｆｆｅｒｅｎｔｉａｌ　ＰＣＭ）信号の相互変換を行ない，ディジタルフィルタおよび圧縮，伸長回路は，時分割多重処理によって，直線ＤＰＣＭ信号と圧伸ＰＣＭ信号の相互変換を行なう．この装置の線形モデル（１回線分）を図４．３に示す．ここで，$U_{i,k}$ は式（２．１５）で定義される関数であり，

$H_{\pm 3}$　；ＤＭ符号器，復号器の伝達関数
$H_{\pm 2}$　；符号変換回路の伝達関数
$H_{\pm 1}$　；ディジタルフィルタの伝達関数（$H_{\pm 1}=H_{\pm 1}\otimes U_{0,m}$）
$X_{\pm 3}$　；アナログ音声信号
$X_{\pm 2}$　；ＤＭ信号
$X_{\pm 1}$　；ＤＰＣＭ信号（$X_{+1}=X_{+1}\otimes U_{0,m}$）
X_{0}　；圧伸ＰＣＭ信号（$X_{0}=X_{0}\otimes U_{0,n}$）
N_{-3}　；ＤＭ符号器で生じる量子化雑音
$N_{\pm 2}$　；符号変換回路で生じる量子化雑音
$N_{\pm 1}$　；ディジタルフィルタで生じる量子化雑音（$N_{\pm 1}=N_{\pm 1}\otimes U_{0,m}$）
$U_{0,m}$　；直線ＤＰＣＭ信号のサブサンプリング・パルス列
$U_{0,n}$　；圧伸ＰＣＭ信号のサブサンプリング・パルス列（ｎ：ｍの倍数）

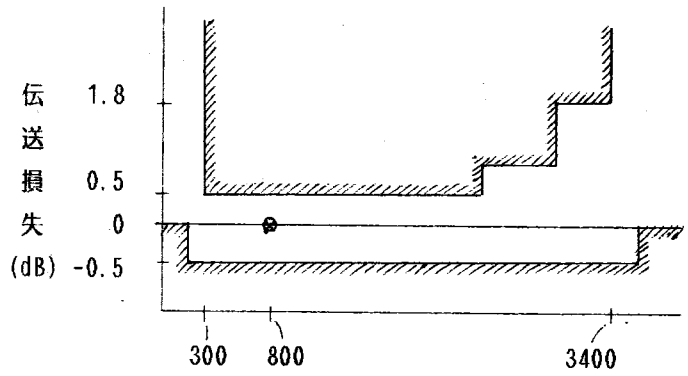
を表わす．また，

τ　；ＤＭ信号の標本化周期

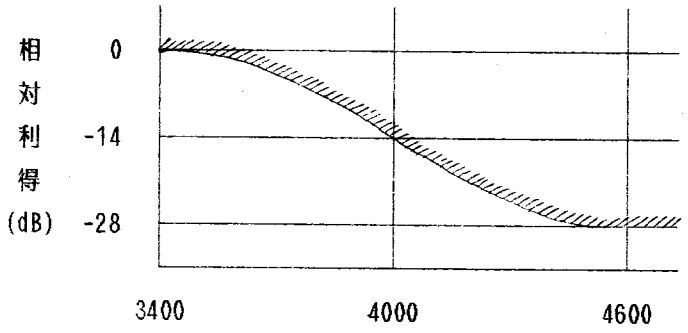
とおく．任意のサブサンプリング・パルス列は　$U_{i,m}$（$0\leq i<m$），$U_{k,n}$（$0\leq k<n$）であるが特性を解析する場合，ｉ＝ｋ＝０とおいても一般性は失わない．

以下，ＤＭ信号の標本値を±１とする．このように正規化とすると，２重積分形直線ＤＭ符号器，復号器の作用素 T_{-3}，T_{3} は

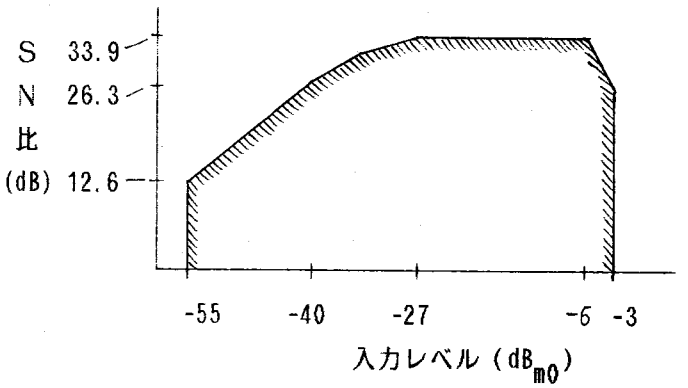
$$T_{-3}=(1+T_{3}Q)^{-1}Q \qquad (Q=-2B^{-1}\Theta) \qquad (4.1)$$



（ａ）　帯域内伝送特性



（ｂ）　帯域内伝送特性



（ｃ）　総合ＳＮ比

図４．１　国際標準規格（抄）

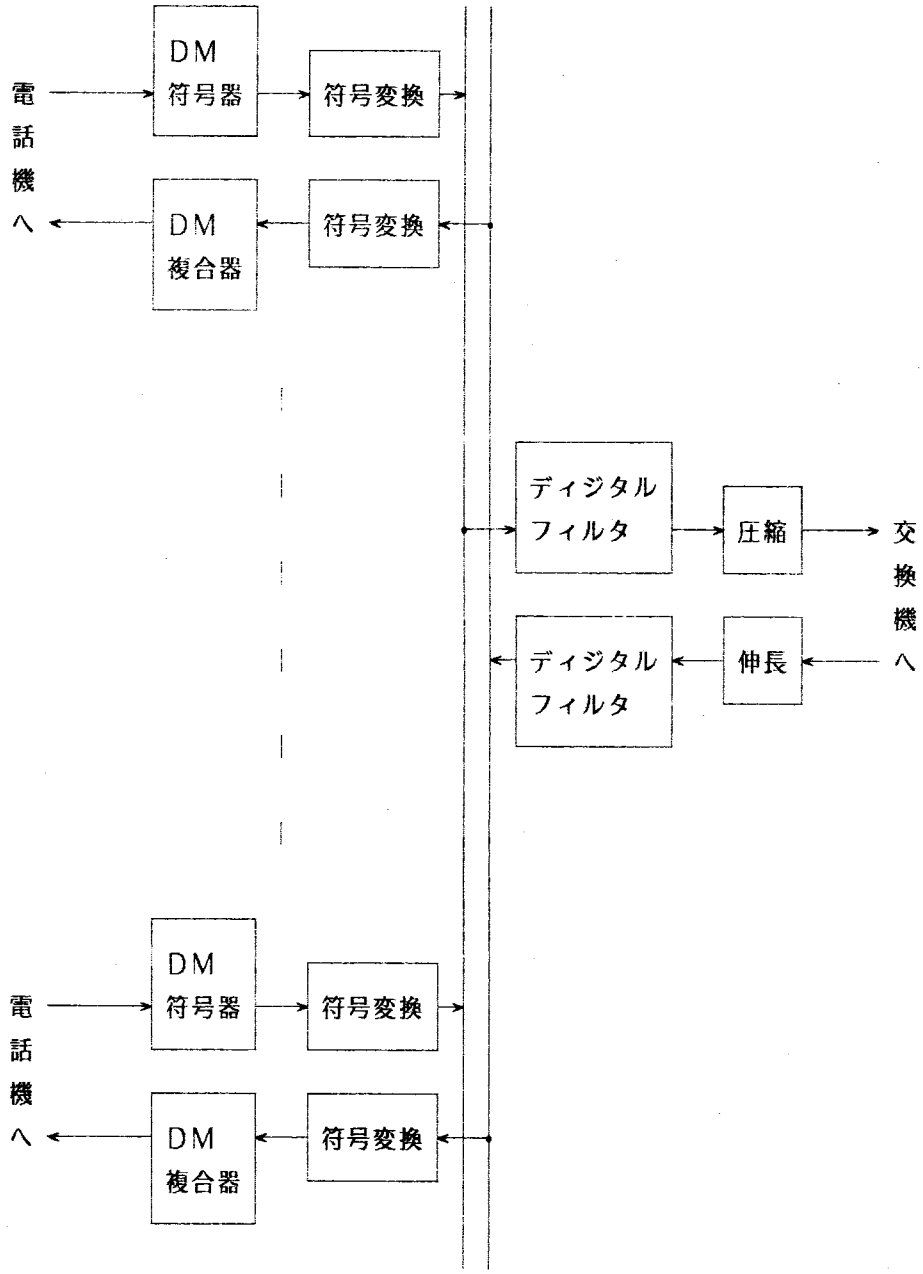
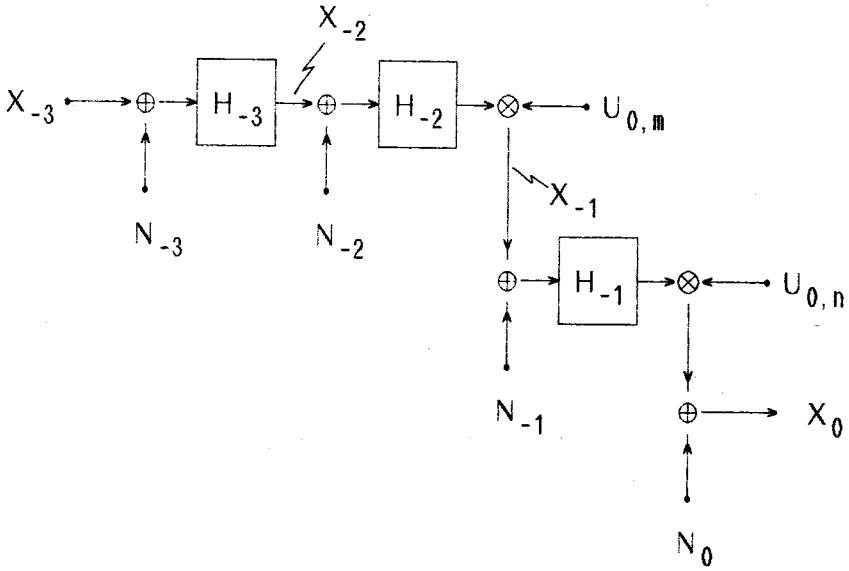
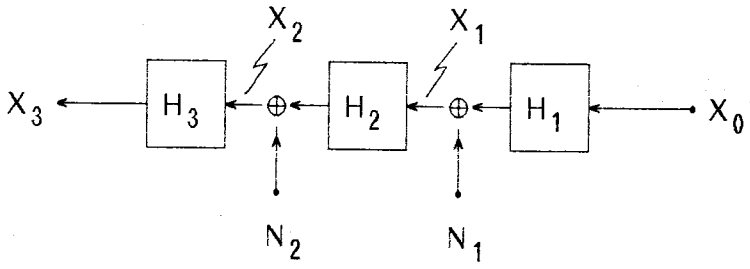


図４．２　音声－ＰＣＭ相互変換装置の構成



（a） 送信側



（b） 受信側

図4．3 音声－PCM相互変換装置の
線形モデル（1回線分）

$$T_3 = (H_3 \cdot) \qquad (4.2)$$

$$H_3\ (\exp\ [j2\pi f\tau]) \simeq \{2\pi\tau(f_{30}+jf)\}^{-1}\cdot(f_{32}+jf)\cdot(f_{31}+jf)^{-1} \quad (f_{30}<f_{31}<f_{32};\ f\tau\ll 1) \qquad (4.3)$$

と表わされる．符号器の作用素T_{-3}は非線形であり，伝達関数

$$H_{-3}=(1+H_3)^{-1} \qquad (4.4)$$

を近似的に実現する．

符号器，復号器の素子感度を低くするには，信号帯域（f_L，f_H）に対して，

$$f_{30}\ll f_L \qquad (f_L=300Hz)$$

あるいは

$$f_{30}\gg f_H \qquad (f_H=3400Hz)$$

とすることが望ましい．SN比に余裕があれば$f_{30}\gg f_H$とする方が符号変換回路の設計が容易であるが，式（4．5）の条件を採用し，前記のように$X_{\pm1}$をDPCM信号とすれば，標本化周波数を低くすることができる．f_{31}については，安定性の点から，つねに

$$f_{31}\gg f_H$$

であることが必要である．

符号変換回路は，SN比（信号対帯域内雑音電力比）を低下させることなく，標本化周波数の変換を行なうためのものである．折返し雑音や補間雑音は$1/m\tau$の整数倍の周波数の近傍に現れるから，これらの周波数にk次の零点をもつように，

$$H_{\pm2}(z)=\{(1-z^{-m})\cdot(1-z^{-1})^{-1}\}^k \qquad (4.7)$$

と定めることにより，折返し雑音や補間雑音によるSN比の低下を防ぐことができる．

式（4．7）のH_{-2}は，作用素$T_2=(H_2\cdot)$によって実現され，H_{-2}は整係数であるから，

$$N_{-2}=0$$

となる（折返し雑音は$U_{0,m}$との乗算で考慮されており，N_{-2}には含まれない）．これに対してH_2を実現する回路は，１ビット量子化の機能が不可欠であり，H_2が整係数でも，$N_2=0$とはならない．ＤＭ符号器をディジタル化した回路で１ビット量子化を実現しようとすると，高速の実係数の乗算が必要となり，著しく経済性が損われるが，例えば３．２節で述べた方法を用いれば，構成が簡単で特性のよい符号変換回路が得られる．

X_{+1}はＤＰＣＭ信号であるから，ディジタルフィルタの伝達関数$H_{\pm1}$の利得は信号帯域内において，６ｄＢ／ｏｃｔの傾斜をもたねばならない．このため，$H_{\pm1}$を

$$H_{-1}(z)=\tilde{H}_{-1}(z^m)\cdot(1-az^{-m})^{-1} \qquad (0<1-a\ll 2\pi f_L m\tau) \qquad (4.8)$$

$$H_1(z)=(1-z^{-m})\cdot\tilde{H}_1(z^m) \qquad (4.9)$$

と定める．ここで，$\tilde{H}_{-1}$，$\tilde{H}_1$はそれぞれ帯域内の利得が平坦な帯域通過フィルタおよび低域通過フィルタの伝達関数である．図４．２のディジタルフィルタおよび圧伸回路は，多数の音声信号を時分割多重で処理するため，経済性はあまり問題にならない．したがって，上記の伝達関数$\tilde{H}_{\pm1}$は，通常のディジタルフィルタの設計手法を用いて実現して差支えない．とくに検討を要するのは，$H_{\pm2}$を実現する符号変換回路の構成であるが，その前に，所要標本化周波数等，システムの基本的なパラメータの値を支配するＤＭ符号器の特性について述べる．

4．3　特性の解析および改善

4．3．1　2重積分デルタ変調形符号器の特性

図4．2のX_0は，13ビット直線PCM信号を8ビットに圧縮し，これを伸長したものである．圧伸（圧縮伸長）によって生じる雑音N_0は規格上不可避であるが，他の雑音はこれに比べて無視できる程度に小さくしなければならない．DM符号器の場合，量子化雑音N_{-3}を無視できる程度に小さくするには，標本化周波数を信号帯域幅に比べて非常に高くする必要がある．2重積分形直線DM符号器の出力のSN比と標本化周波数の関係を次に示す[53],[56]．

式（4．1），（4．2）および$X_{-2}=H_3\cdot(X_{-3}+N_{-3})$から，DM符号器の入出力関係は

$$\begin{aligned}X_2&=Q'\ (X_3-H_3\cdot X_{-2})\\&=Q'\ \{(1+H_3)^{-1}\cdot X_{-3}-H_3\cdot(1+H_3)^{-1}\cdot N_{-3}\}\end{aligned}$$

と表わされる．$\|X_{-3}\|\gg 1$とすると，勾配過負荷が生じないための条件は，一般に

$$\|(1+H_3)^{-1}\cdot X_{-3}\|<1$$

で近似され，X_{-3}が正弦波$x_{-3}(t)=A\cdot\sin(2\pi f t)$（$f_L\leqq f\leqq f_H$）のz変換である場合，上式は

$$|A\cdot\{1+H_3(\exp[j2\pi f\tau])\}^{-1}|<1$$

となる．$|f\tau|\ll 1$のとき$|H_3(\exp[j2\pi f\tau])|\gg 1$であるから，上記の条件を満足するAの最大値は近似的に次式で与えられる．

$$\begin{aligned}A^2&=(2\pi\tau)^{-1}\cdot(f_{30}^{\,2}+f^2)^{-2}\\&\quad\cdot(f_{32}^{\,2}+f^2)^{2}\cdot(f_{31}^{\,2}+f^2)^{-2}\end{aligned}$$

一方，量子化雑音N_{-3}は，入力が微小でなければ，区間（−1，1）で一様分布するランダム雑音で近似される．したがって，遮断周波数がf_Bである理想低域通過フィルタによって帯域外の雑音を除去すれば，その電力は，ほぼ

$3\text{-}1\cdot 2f_B\tau$　　($f_B=4000Hz$)

となる．このことは，DM符号器の出力に対して，理想的なディジタル信号処理を行なったとしても

$$\{2^{-1}\cdot A^2\}/\{3^{-1}\cdot 2f_B\tau\}$$
$$=3\cdot(f_{32}^2+f^2)\cdot\{16\pi^2\tau^3 f_B\cdot(f_{30}^2+f^2)\cdot(f_{31}^2+f^2)\}^{-1} \quad (4.10)$$

以上のSN比は得られないことを意味する．上式で$f_{31}=f_{32}$とおくと，単一積分形DM符号器の場合に帰着し，$f_{31}<f_{32}$とすることの効果が上式によって定量的に評価される．ただし，$f_{31}<f_{32}$の場合，DM符号器が不安定となる可能性がある．

2重積分形直線DM符号器の安定性については，1970年頃までに，十分条件がいくつか示されているが[55)-(57)]，任意入力に対して漸近安定であるための必要十分条件は未だに得られていないようである．これまでに示されている代表的な十分条件に対して，条件

$$f_{30}\ll f_L$$
$$f_H\ll f_{31}<f_{32}\ll 1/\tau$$

を用いて簡単化したものを以下に示す．

$$2\pi\cdot(f_{32}-f_{31})\cdot\tau\simeq 1 \quad (4.11)$$
$$1/2\leqq 2\pi f_{32}\tau\leqq(\sqrt{13}-1)/2 \quad (4.12)$$
$$1-f_{31}/f_{32}<\pi f_{31}\tau \quad (4.13)$$

これらの条件を満足する(f_{31}, f_{32})の領域は，互いにかなり異なっており，安定であるための必要十分条件を求めることの難しさを暗示している．

上記の安定条件を考慮し，$f_L\leqq f\leqq f_H$である任意のfに対して，式(4.10)のSN比が所定の値以上になるように，標本化周波数$1/\tau$や，積分器のパラメータf_{30}, f_{31}, f_{32}を定めなければならない．また，DM信号の標本化周波数$1/\tau$は，圧伸PCM信号の標本化周波数$2f_B$の2のべき乗倍であることが望ましい．詳細は省略するが，図4.3のパラメータnを

$$n=1/2f_B\tau=256$$

と定めれば，若干の雑音余裕（noise margin）をもって，国際標準規格を満足する圧伸ＰＣＭ信号を得ることができる．

４．３．２　送信側符号変換回路の簡単化

ここでは，式（４．７）の伝達関数を実現する回路構成について述べる．H_{-2}単独では，これを伝達関数とするディジタルフィルタで構成せざるを得ない．しかし，後段の間引き回路とあわせて，作用素（$U_{0,m}\otimes$）（$H_{-2}\cdot$）を実現すればよいから，必らずしもこのようなディジタルフィルタは必要ではない．ｋ＝１の場合には，図４．４（ａ）の回路が（$U_{0,m}\otimes$）（$H_{-2}\cdot$）を実現することが，よく知られている[61]．この回路は，周期$m\tau$でリセットされるカウンターで構成され，リセット直前の値が出力される．図のＵの加算は，２値入力を±１でなく，０，２とみなすだけでよく，論理素子は必要としない．また，$m=2^i$とすると，$m\cdot U_{0,m}$の減算は2^iより上位のビットを反転するだけでよい．

図４．４（ａ）の回路に限らず，一般に作用素（$U_{0,m}\otimes$）（$H_{-2}\cdot$）によって生じる折返し雑音の電力は，$mf_B\tau \ll 1$であれば，近似的に

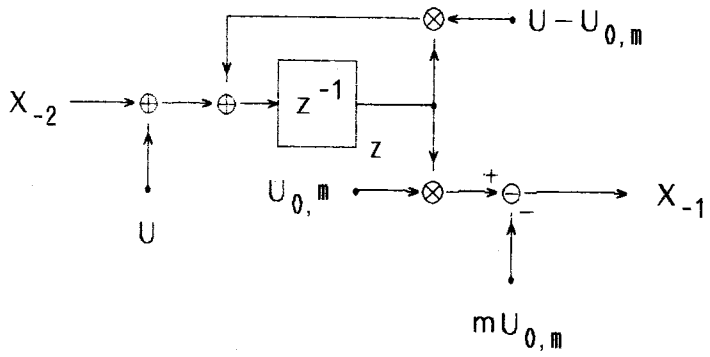
$$\sum_{k=1,m-1}\int_D |(H_{-2}H_{-3}N_{-3})(\exp[j2\pi f\tau])|^2\,df \qquad (D=[k/m\tau-f_B,\ k/m\tau+f_B])$$

で与えられる．折返し雑音によるＳＮ比の劣化が無視できるためには，上式の値が

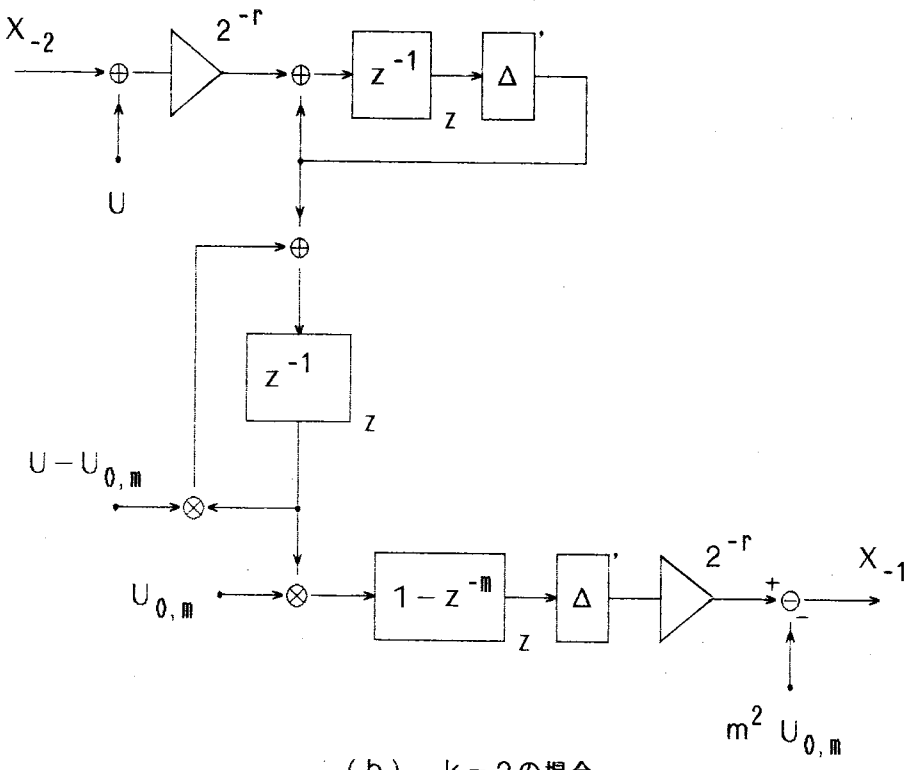
$$\int_D |(H_{-2}H_{-3}N_{-3})(\exp[j2\pi f\tau])|^2\,df \qquad (D=[-f_B,\ f_B])$$

に比べて十分小さくなるようにｍを定めなければならない．図４．２のディジタルフィルタや圧縮伸長回路を多数の回線が共用するためには，なるべくｍが大きいことが望ましいが，式（４．７）においてｋ＝１とすると，ｍの値を大きくすることができない．

式（４．１４）のｎ＝２５６の場合，ｋ＝２とすれば，ｍ＝６４程度でもＳＮ比劣化量が１ｄＢ以下である．このため，図４．４（ａ）と類似のリセット機能付き積算器を用い，その前段に６３次の周波数サンプリング・フィルタを設置する構成が提案



（a）　k＝1の場合



（b）　k＝2の場合

図４．４　送信側符号変換回路の非線形モデル

されているが(71)，経済性に難がある．これと等価で，はるかに経済的な回路の構成を図４．４（ｂ）に示す．この回路は，一見複雑であるが，カウンタ，リセット機能付き積算器，並直列変換回路および微分器で構成され，ｋ＝１の場合と同様に，Ｕの加算や2^{+r}によるスケーリングには論理素子は不要である．並直列変換回路は，図には表示されていないが，$U_{0,m}$で間引きされた信号W_{-1}をビット直列で表示する．微分器の伝達関数は$[1-z^{-m}]_z$であるが，記憶素子としては，ｍ段のシフトレジスタではなく，１標本値を記憶するレジスタがあればよい．

図の回路の定常状態における入出力関係は，ｒを適当に定めることにより，

$$X_{-1}\otimes U_t = \{U_{0,m}\otimes[z^{-2}\cdot]_z\,,\ H_{-2}X_{-2}\}\otimes U_t \qquad (t\geqq 2m) \qquad (4.15)$$

と表わされることを以下に証明する．（$[z^{-2}\cdot]_z$は単なる遅延であり，特性には影響しない．）

図のW_{-2}をW_{-1}に変換する部分は，線形時変回路であるから，入出力関係は各時刻におけるインパルス応答を荷重加算することにより，

$$W_{-1}=U_{0,m}\otimes[z^{-1}\cdot(1-z^{-m})\cdot(1-z^{-1})^{-1}]_z\,,\ W_{-2} \qquad (4.16)$$

であることが示される．すなわち，

$$W_{-2}(z)=z^{-s} \qquad (km-m\leqq s<km)$$

のとき，この線形時変回路の出力は

$$W_{-1}(z)=z^{-km}$$

である．一方，式（４．１６）に対して，上記のW_{-2}を代入すると，

$$W_{-1}=U_{0,m}\otimes[\Sigma^{\,i=0,m-1}\ z^{-s-i}]_z=[z^{-km}]_z$$

となり，上記の$W_{-1}(z)$と一致する．

したがって，Δによって有限語長に制限することの影響がX_{-1}に現われないことを云えばよい．図からわかるように，

$$
\begin{aligned}
W_{-2} &= \Delta\,[\,z-1\cdot\,]_z\,'\ (V+W_{-2}) \\
&= [\,z^{-1}\,]_z\cdot(\Delta'\,V+\Delta'\,W_{-2}-\Gamma'\,N) \\
V &= 2^{-r}\cdot(X_{-2}+U) \\
\Gamma'\,N &= \Gamma'\,(\Delta'\,V+\Delta'\,W_{-2})
\end{aligned}
$$

と表わされるから，

$$
\begin{aligned}
W_{-2} &= \Delta'\,W_{-2} \\
&= [\,z^{-1}\cdot(1-z^{-1})^{-1}\,]_z\cdot(\Delta'\,V-\Gamma'\,N)
\end{aligned}
$$

となる．$\Gamma'\,N$はあふれ雑音である．

上式，式（４．１６）および

$$
X_{-1}=2^{r}\,\Delta'\,\{[\,1-z^{-m}\,]_z\cdot W_{-1}\}-m^2\,U_{0,m}
$$

から，

$$
\begin{aligned}
X_{-1} &= 2^{r}\,\Delta\,(U_{0,m}\otimes)\,[\,z^{-2}\cdot(1-z^{-m})^{2}\cdot(1-z^{-1})^{-2}\cdot\,]_z\,' \\
&\quad (\Delta'\,V-\Gamma'\,N) \\
&\quad -m^2\,U_{0,m}
\end{aligned}
\qquad (4.17)
$$

が得られる．$\Gamma'\,N$がX_{-1}に影響しないことはただちに分かる．したがって，

$$
\begin{aligned}
&\Delta\,[\,z^{-2}\cdot(1-z^{-m})^{2}\cdot(1-z^{-1})^{-2}\cdot\,]_z\,\Delta'\,V \\
&=[\,z^{-1}\cdot(1-z^{-m})\cdot(1-z^{-1})^{-1}\,]_z^{\,2}\cdot V
\end{aligned}
$$

を満足するように，$r\geqq 2m^2$ とすれば，X_{-1}は

$$
\begin{aligned}
X_{-1} &= U_{0,m}\otimes[\,2^{r}\,z^{-2}\cdot\,]_z\,'\ H_{-2}V-m^2\,U_{0,m} \\
&= U_{0,m}\otimes[\,z^{-2}\cdot\,]_z\,'\ H_{-2}V_{-2} \\
&\quad +U_{0,m}\otimes[\,z^{-2}H_{-2}(z)-m^2\,]_z\,'\ U
\end{aligned}
$$

となる．上式の右辺第２項は過渡項であり，時刻２ｍ以後の標本値は０になるから（$z^{-2}H_{-2}(z)$は２ｍ次の多項式で，その直流利得はm^2である），定常状態における入出力関係は式（４．１５）で表わされる．

上記のようにrの値を定めれば，式（４．１５）が成立する．このとき，送信側符

号変換回路で生じる雑音は（$U_{0,m}\otimes$）による折返し雑音のみであり，線形回路とみなして特性を解析することができる．

4．3．3　受信側符号変換回路の特性改善

受信側符号変換回路で発生し，復号器出力に現れる本質的な雑音としては，

i）H_2 が理想的な低域通過フィルタでないことによる補間雑音
（H_2 X_1 の帯域外成分）

ii）H_2 X_1 を2値信号X_2 に量子化することによる量子化雑音（N_2）

がある．補間雑音によるSN比低下量は，前記の送信側符号変換回路での折返し雑音によるSN比低下量と同様にして計算できる．式（4．7）において，送信側の伝達関数H_{-2}をk＝2とし，mを大きくすると，受信側の伝達関数H_2 に対しても，k＝2とする必要がある．

このような伝達関数H_2 をもち，かつ量子化雑音N_2 が信号帯域近傍で非常に小さい密度変調回路を経済的に実現するための一案として，3．2節では補間の周波数比と入力標本値を互いに素な整数とするディジタルΔ－Σ変調器を用いる方法を示した．この方法は，簡単な回路で良好な特性が得られるが，回路が若干複雑になることを許せば，特性改善の余地がある．図4．2の装置では，なるべくmを大きくすることが望ましい．ここでは，BRM（Binary　Rate　Multiplier）とよばれる回路を改良した密度変調回路の構成を示す．

まず，通常のBRMによって密度変調を行なう場合の問題点について述べる．図4．5は，標本値が0，1，……8である9値の入力を，標本化周波数が8倍の2値信号に変換する場合のBRMの原理的な構成を示したものである[63),(64)]．動作原理は図から容易に理解できると思われるので，説明は省略する．図のゲート信号g_k のz変換G_k は

$$G_k(z)=\tilde{G}_k(z)\cdot(1-z^{-8})^{-1}\qquad(k=0,1,2)$$
$$\tilde{G}_3(z)=(1-z^{-8})\cdot(1-z^{-1})^{-1}$$
$$\tilde{G}_2(z)=1+z^{-2}+z^{-4}+z^{-6}$$
$$\tilde{G}_1(z)=z^{-1}+z^{-5}$$
$$\tilde{G}_0(z)=z^{-3}$$

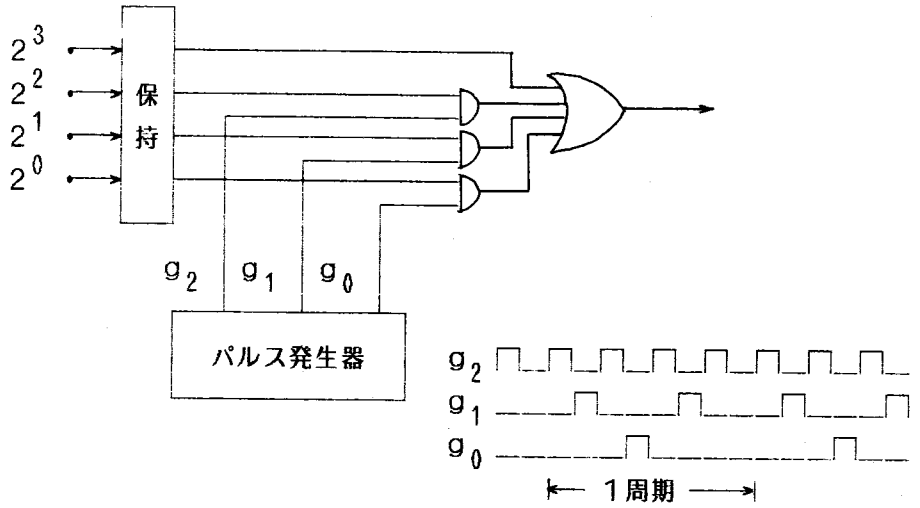


図4．5　Binary Rate Multiplier （BRM）

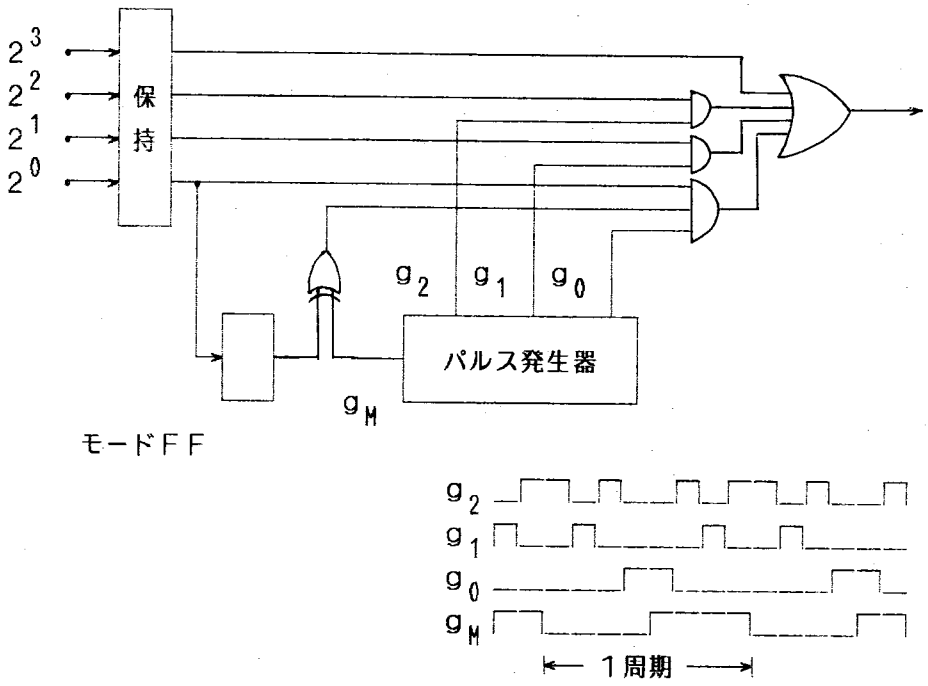


図4．6　バイモードBRM

と表わされ，$\tilde{G}_k$ に対応する量子化雑音は

$$\tilde{N}_k\ (z) = \tilde{G}_k\ (z) - 2^{k-3} \cdot \tilde{G}_3\ (z) \qquad (4.18)$$

となる．入力の第 i 標本値の第 k ビットが 1 であれば，出力には量子化雑音 $z^{-8} \cdot \tilde{N}_k\ (z)$ が重畳される．

BRMの出力はアナログ低域通過フィルタで帯域制限されるが，このフィルタの所要次数を低くするには，BRM出力に含まれる量子化雑音の電力をなるべく高域に偏らせることが必要である．できれば，各 $\tilde{N}_k$ が $z=1$ に高次の零点をもつことが望ましいが，上記の $\tilde{N}_k$ はいずれも $z=1$ に 1 次の零点しかもたない．これに対して，例えば

$$\tilde{G}_2\ (Z) = 1 + z^{-2} + z^{-5} + z^{-7}$$
$$\tilde{G}_1\ (z) = z^{-1} + z^{-6}$$

と定めると，式（4．18）の $\tilde{N}_k$ は $z=1$ に高次の零点をもつ．一般に，$\tilde{N}_k$ が

$$\tilde{N}_k\ (1) = 0 \qquad (4.19)$$
$$z^{-7} \cdot \tilde{N}_k\ (z^{-1}) = \tilde{N}_k\ (z) \qquad (4.20)$$

を満足すれば，$z=1$ に偶数次の零点をもつ．このことは，$\tilde{N}_k\ (\exp\ [j\omega])$ は余弦関数を荷重加算した式で表わされることから，ただちにわかる．

$k=0$ の場合は，式（4．18），（4．19），（4．20）を満足するような 0 または 1 を係数とする多項式 $\tilde{G}_0$ は存在しない．奇数倍の標本化周波数で補間するように変更すれば，このような $\tilde{G}_0$ は存在するが，装置全体の構成から考えると，2 のべき乗倍の標本化周波数で補間することが望ましい．偶数倍の標本化周波数で補間する場合でも，ベースバンドのパルス伝送におけるバイポーラ符号化と類似の手法を用いることにより，入力標本値の最下位ビットによって発生する量子化雑音の電力の直流近傍における値を十分小さくすることができる．図4．6の回路は，このような方針に基づいて設計したものである．

この回路では，奇数標本値が入力されるたびに状態が反転するモード・フリップフロップと，タイミング信号 g_M の排他的論理和と g_0 の双方で，最下位ビットを保持した信号をゲートする．

これにより，図4．5の回路の $\tilde{G}_0$ に対応する信号として，この回路では

$$\tilde{G}0,3\ (z) = Z^{-3}$$

$$\tilde{G}_{0,4}(z) = z-4$$

が交互に使用されることになる．このように，２個の動作モードが存在するため，この回路をバイモードＢＲＭとよぶ．

$\tilde{G}_{0,k}$（k＝３．４）に対応する量子化雑音を

$$\tilde{N}_{0,k}(z) = z^{-k} - 8^{-1} \cdot (1-z^{-8}) \cdot (1-z^{-1})^{-1} \quad (4.21)$$

とおくと，

$$\lim_{z\to\infty} \tilde{N}_{0,k}(z) \cdot (1-z^{-1})^{-1} = 7/2 - k$$

であるから，任意のｉに対して

$$\lim_{z\to\infty} (1-z^{-1})^{-1} \cdot \{\tilde{N}_{0,3}(z) + z^{-8i} \cdot \tilde{N}_{0,4}(z)\} = 0 \quad (4.22)$$

が成立する．上式は，$\tilde{N}_{0,3}(z) + z^{-8i} \cdot \tilde{N}_{0,4}(z)$がz＝１に高次の零点をもっていることを意味する．したがって，$\tilde{G}_{0,3}$と$\tilde{G}_{0,4}$を交互に使用することにより，奇数入力標本値の最下位ビットで発生する量子化雑音の電力も，直流近傍で十分小さい値となる．

バイモードＢＲＭを用いた受信側符号変換回路の構成を図４．７に示す．バイモードＢＲＭの入力W_1の標本化周波数は１／mτであり，$2^{-S}X_1$を保持した信号が，２次の雑音帰還を用いた量子化回路によって，W_1に量子化される．2^{-S}は

$$-2^{-1}R \cdot U_{0,R} \lesseqgtr W_1 = \Gamma' W_1 \otimes U_{0,R} \lesseqgtr 2^{-1}R \cdot U_{0,R} \qquad (R = 2^r : \text{mの約数})$$

を満足するようにスケーリングを行なうためのものである．ゲート信号G_kは

$$G_k(z) = \tilde{G}_k(z) \cdot (1-z^{-R})^{-1} = (1-z^{-R})^{-1} \cdot \{\hat{G}_k(z) + z^{-R+1} \cdot \hat{G}_k(z^{-1})\} \qquad (0 \leq k \leq r)$$

$$\hat{G}_r(z) = (1-z^{-R/2}) \cdot (1-z^{-1})^{-1}$$

$$\hat{G}_k(z) = z^{-i+1} \cdot (1-z^{-R/2}) \cdot (1-z^{-2i})^{-1} \qquad (i = 2^{-k-1} \cdot R;\ 0 < k < r)$$

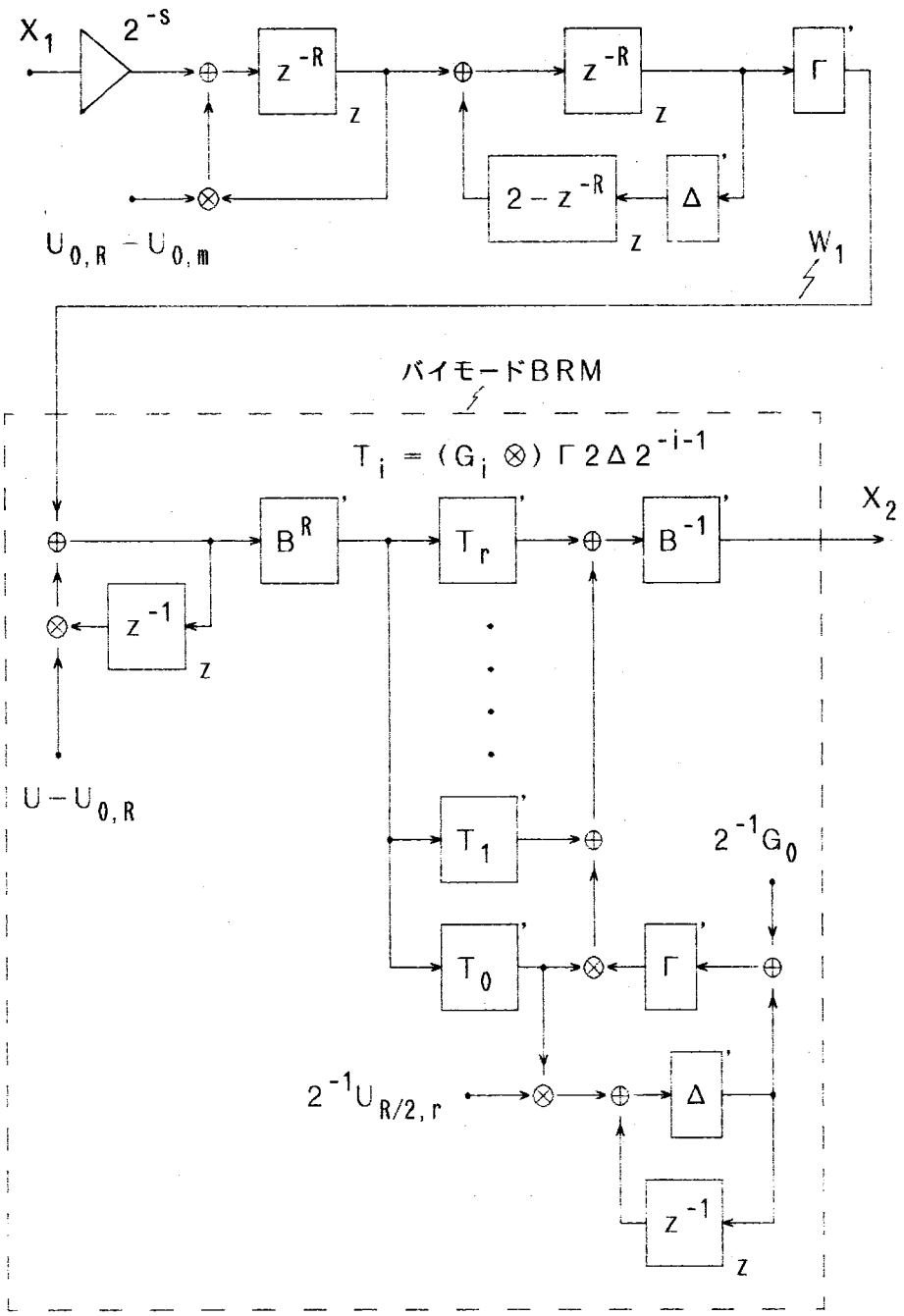


図４．７　受信側符号変換回路の非線形モデル

$$\hat{G}_0(z) = z^{-R/2+1}$$

と定めると，回路構成が簡単になる．すなわち，周期Rτでリセットされ，リセットからRτ／２後の時刻に歩進が禁止される２進カウンタを用い，これに若干の論理ゲートを付加することによって，G_i が得られる．

前章で述べた図３．７のディジタルΔ－Σ変調器では，2^r 倍の標本化周波数で補間する場合，入力標本値を$2^{r-1}+1$値に制限する必要があったが，バイモードＢＲＭでは2^r+1値まで許されるから，入力標本値を作成するときに生じる量子化雑音の電力は１／４になる．ｎ，ｍの値が大きければ，この量子化雑音は，密度変調によって発生する量子化雑音に比べて無視しうるが，ｎ＝４ｍ＝２５６程度になると無視できなくなり，バイモードＢＲＭを用いることの効果が現れてくる．

４．４　シミュレーション結果

前節の考察により，２重積分形直線ＤＭを用いて，図４．２の音声－ＰＣＭ相互変換装置を経済的に実現し得るという見通しが得られた．ここでは，受信側符号変換回路の機能を確認するために行なったシミュレーション結果について述べる．

図４．４（ｂ）の送信側符号変換回路は，　伝達関数が式（４．７）で与えられる２ｍ次の整係数ディジタルフィルタの出力をパルス列$U_{0,m}$で間引く回路と等価である．したがって，ＤＭ符号器の出力Ｘ-2のスペクトルが与えられれば折返し雑音が計算できるから，とくにシミュレーションの必要性は感じられない．これに対して，図４．７の受信側符号変換回路の動作は非常に複雑であり，X_1のスペクトルからX_2のスペクトル，とくにその量子化雑音成分を計算することは極めて難しい．このため，

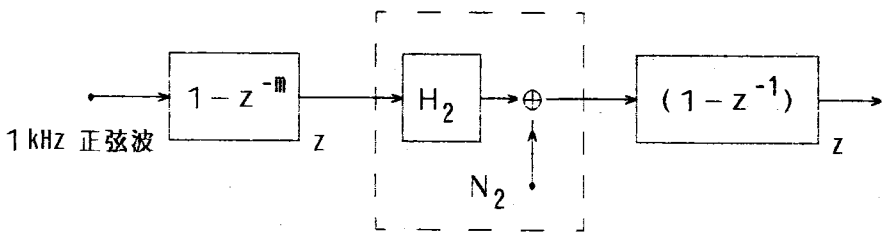
$$n = 4m = 256$$
$$R = 2^r = 4$$

とおいて，図４．８（ａ）のモデルによるシミュレーションを行なった．

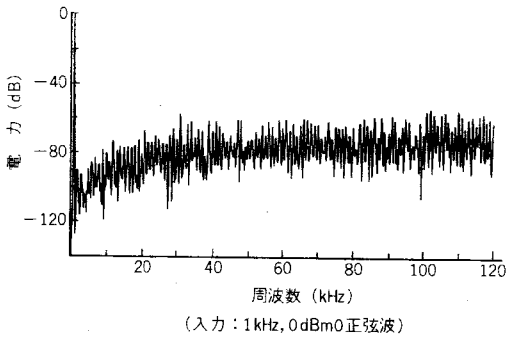
詳細は省略するが，ｎの値は式（４．１４）に従ったものであり，ｍの値はこのときに許される折返し雑音と補間を概算し，ｎの約数となるように定めたものである．また，ｒとしては２次の雑音帰還が可能な最小の値を選び，経済化を図っている．シミュレーションの結果によっては，ｒ，さらにはｍの値をも修正しなければならないことも考えられる．

図４．８（ｂ）に$0dB_{m0}$の１ｋＨｚ正弦波を入力したときの積分器出力のスペクトルを示す．このスペクトルは，Hanning窓を用い，2^{14}点の高速フーリエ変換を行なって求めたものである．図に示されるように，量子化雑音成分の電力密度が，信号帯域内では平均値より２０ｄＢ程減衰していることが確められる．図４．８（ｃ）はＳＮ比の入力レベル特性を示したものである．過負荷点が高いのは入力が１ｋＨｚであることによるもので，３４００Ｈｚの場合には＋３ｄＢとなるように設計されている．図の直線は１３ビット直線ＰＣＭのＳＮ比の入力レベル特性であり，十分な雑音余裕があることがわかる．

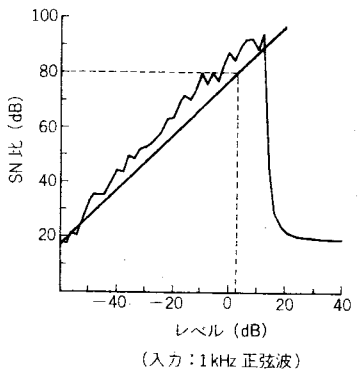
これらのシミュレーション結果は，パラメータの値を前記のように定めても，所定の性能が得られることを意味している．



（ａ）　シミュレーションのモデル



（ｂ）　量子化雑音スペクトル



（ｃ）　ＳＮ比のレベル特性

図４．８　正弦波入力に対する
シミュレーション結果

4．5　結言

雑音帰還を用いた量子化の応用例として，　デルタ変調（ＤＭ）を利用した音声－ＰＣＭ相互変換方式について検討を行なった．４．２節では，ＤＭ符号器複合器として，２重積分形直線ＤＭを採用した理由と，これを用いた音声－ＰＣＭ相互変換装置の基本構成につい述べ，　４．３節では，この装置を経済的に実現するためのＤＭ－ＤＰＣＭ相互変換を行なう符号変換回路の構成案を示した．

ＤＭを介してアナログ音声信号と圧伸ＰＣＭ信号の相互変換を行なう方式は，ベル研究所で古くから検討されている．１９６９年には，Ｄ．Ｊ．Goodman[61]が，単一積分形直線ＤＭ符号器を用いた場合の送信側符号変換に関する基礎的な考察を行ない，フィルタの代用として図４．４（ａ）のリセット機能付きカウンタを用いることを提案している．また，１９７１年には，Ｃ，Ｗ，Weller [64]が，図４．５の補間回路（Binary　Rate　Multiplier ）を用いた受信側符号変換について検討している．１９７４年には，Ｈ．Ｓ．McDonald [65]，Ｊ，Ｈ，Condon ら[66]が，加入者交換機の構成や符号変換部のＬＳＩ化の案を発表し，この方式が内外各社の注目を浴びるようになった[67]-[79]．符号器複号器として，直線ＤＭの他に，圧伸ＤＭ[67]，直線Δ－Σ[71]，圧伸Δ－Σ[72]等も検討され，各種のＬＳＩが試作されたが，いずれも，標本値当り１ビットの量子化を用いてアナログ回路を簡単化しているという点では変らない．

筆者らも，この種の方式の検討を開始し，１９７６年に単一積分形ＤＭ符号器復号器のＩＣと，これに対する符号変換用ＬＳＩを試作したが[68],[77]，　８．１９２ＭＨｚのクロックを用いるため，実用性に難があった．このため，２重積分形直線ＤＭを用いる
方式に移行し，本章に述べた成果を得た．

図４．４（ｂ）に示した送信側符号変換回路は，Ａ．Ｒ．Potter ら[71]の６４次の周波数サンプリングフィルタを併用する回路と同等の機能を，非常に簡単な回路で実現している．また，図４．７の受信側符号変換回路に用いられている図４．６のバイモードＢＲＭは，極めて良好な特性を有する密度変調回路である．前記のＣ．Ｗ．Weller の検討では，ＢＲＭを１６ＭＨｚのクロックで動作させているが，バイモードＢＲＭを用いると２ＭＨｚ程度のクロックで同等の性能を達成することができる．

第５章　　結論

ディジタル信号処理回路では，演算結果の量子化という非線形処理が不可避であり，量子化雑音による特性の劣化を防ぐことが，一つの大きな課題になっている．本研究は，固定少数点演算（直線量子化）を行なう回路について，量子化雑音の解析，対策に関する検討を行ない，次の成果を得た．

まず，第２章で，非線形作用素に対して，入力振幅の上限をパラメータとするノルムを定義し，このノルムの性質と，量子化雑音の影響を解析する場合に有効な等価変換について述べた．適当な等価変換の後，ノルムを計算すれば，デルタ変調器のような非線形姓の強い回路についても，出力に現れる量子化雑音成分の上界を求めることができ，パラメータによるノルムの変化から過負荷点を知ることもできる．この等価回路の一部をランダム雑音源で置換すると，従来の線形モデルとなる．

第３章では，量子化雑音の対策として，整係数ディジタルフィルタによって雑音帰還を行なう周波数領域での処理と，状態変数に応じて切捨て切上げの切換えを行なう時間領域での処理について，基本的性質と応用例を示した．前者については，比較的一般性のある回路に対して，前記の雑音解析用の等価回路を用いて，出力に現れる量子化雑音を厳密に表現し，この影響を軽減するための雑音帰還用のフィルタの例を示した．また，後者については，回路の蓄積エネルギーと量子化雑音の関係について詳細に検討し，ディジタルフィルタのリミットサイクルを抑制するための最適な量子化切換えの方法や，正弦波発振器の出力を安定化する方法を示した．

最後に，具体的な装置への応用例として，第４章で，デルタ変調を利用した音声の符号化復号化を経済的に実現するための回路構成案を示した．主な検討対象はデルタ変調信号と差分ＰＣＭ信号の相互変換を行なう部分であり，高次のフィルタと等価な時変係数の積算器や，バイモードＢＲＭと名付けた密度変調回路を用いることにより，著しく経済性を向上させられることを示した．

なお，本研究では，非線形回路に対しても作用素代数的な手法を試み，ある程度成功した．作用素を用いることによって回路の機能を厳密かつ簡潔に表現することができ，各種の検討を行なう上で非常に有効であった．記法の提案に際しては，慣用記法との親和性についても，十分に留意した．例えば，伝達関数が $(1-az^{-1})^{-1}$ である積分器の入出力関係を厳密に表現する作用素は

$$\{1-Qa(q+)[z^{-1}\cdot]z\}^{-1}$$

のように表わされ，$Q=1$，$q=0$とおいて量子化および遅延素子の初期値の影響を無視すると，伝達関数と類似の表現$(1-a[z^{-1}\cdot]_Z)^{-1}$に帰着する．$z^{-1}$，$[z^{-1}]_Z$，$[z^{-1}\cdot]_Z$はそれぞれ関数値，関数，作用素であり，これらを明確に区別することによって，表現があいまいになることを防いでいる．

抽象的な思考を行なう場合の記法の重要性については第１章でも言及したが，ここでもくり返してこの点を強調したい．作用素を用いることの効果は，本研究の対象のような狭い範囲に限られない．フーリエ変換や座標変換の作用素，統計量を求める作用素（汎関数）等をも含めて，統一的な体系の確立を図ることが望ましい．

謝辞

本研究は，筆者が株式会社日立製作所中央研究所で得た成果をもとに，大阪大学工学部滑川研究室に研究生として在籍中，さらに検討を加え，体系化を図ったものである．この間，滑川敏彦教授から懇切なるご指導，ご鞭撻を賜わり，村田正助手からは有益なご助言，ご討論を戴いた．また，日立製作所在職中は，同社より多年にわたって研究の機会を与えて戴き，とくに同社光技術開発推進本部　芳根寛樹次長，同社中央研究所　吹抜敏彦主管研究員には，本研究の基盤であるディジタル通信について，広くご指導賜った．

本研究前半については，横浜国立大学工学部　國枝寿博教授，石井六哉助教授，日立製作所中央研究所　桑原弘主任研究員，前田成道主任研究員から，また，後半については，日立製作所戸塚工場　大野徹部長，日立電子株式会社小金井工場　今井邦雄主任技師，日立製作所中央研究所　天田栄一研究員から，ご指導，ご討論，ご協力戴いた．　さらに，研究成果の体系化を試みるに至った背景として，大阪大学工学部　手塚慶一教授，熊谷信昭教授，中西義郎教授のご鞭撻，ご助言があったことを付言したい．

本研究をまとめるに当り，上記の方々をはじめ，関係各位に深甚なる謝意を表する．

参考文献

(1) 電子通信学会編；“ディジタル信号処理”，コロナ社，昭50

(2) A. V. Oppenheim and R. W. Schafer: “Digital signal processing”, Prentice－Hall, 1975

(3) R. H. Martin, Jr.: “Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces”, John Wiley and Sons, 1976

(4) L. R. Rabiner, et al: “Terminology in digital signal processing”, IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU－20, pp. 322-337, Dec. 1972

(5) B. Liu: “Effect of finite word length on the accuracy of digitalz filters－A review”, IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT－18, pp. 670－677, Nov. 1971

(6) L. B. Jackson: “On the interaction of roundoff noise and dynamic range in digital filters”, Bell Syst. Tech. J, vol. 49, pp. 159－184, Feb. 1970

(7) idem: “Roundoff－noise analysis for fixed－point digital filters realized in cascade or parallel form”, IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU－18, pp. 107－122, June 1970

(8) A. V. Oppenheim: “Realization of digital filters using block－floating－point arithmetic”, ibid, pp. 130－136

(9) D. S. K. Chan and L. R. Rabiner: “Analysis of quantization errors in the direct form for finite impulse response digital filters”, IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU－21, pp. 354－366, Aug. 1973

(10) S. Y. Hwang: “Roundoff noise in state－space digital filtering：A general analysis”, IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP－24, pp. 256－262, June 1976

(11) C. T. Mullis and R. A. Roberts: “Synthesis of minimum roundoff noise fixed point digital filters”, IEEE Trans. Circuits. Syst, vol. CA－23, pp. 551－562, Sept.

1976
(12) L. B. Jackson, J. F. Kaiser and H. S. Mcdonald : "An approach to the implementation of digital filters", IEEE Trans. Audio, Electroacoust., vol. AU-16, pp. 413- 421, Sept. 1968
(13) A. Fettweis : "Digital filter structures related to classical filter networks", Arch. Elek. Ubertragung., vol. 25, pp. 79-89, Fed. 1971
(14) A. Peled and B. Liu: "A new hardware realization of digital filters", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-22, pp. 456- 462, Dec. 1974
(15) 小野："線形システムの等価システムの構造とその変換行列について"，信学論(A)，vol. J59-A, pp. 702- 709, 昭51-09
(16) 小野，青山："状態変数法によるディジタルフィルタの構成"，信学技報，CS76-66, 昭51-08
(17) 石井："ディジタルフィルタの連続等価回路変換法"，信学論(A)，vol. J60-A, pp. 733- 739, 昭52-08
(18) 宮田："まるめを考慮したディジタルフィルタの構造の記述と等価変換"，信学技報，CAS79- 117, 昭54-11
(19) 宮田："ディジタル信号処理回路における非線形効果の解析"，信学技報，CAS79- 130, 昭54-12
(20) L. B. Jackson: "An analysis of limit cycles due to multiplication rounding in recursive digital (sub) filters" Proc. 7th Annu. Allerton Conf. Circuit System Theory, pp. 69-78, 1969
(21) P. M. Ebert, J. E. Mazo and M. G. Taylor : "Overflow oscillations in digital filters", Bell Syst. Tech. J., vol. 48, pp. 2999-3020, Nov. 1969
(22) S. R. Parker and S. F. Hess : "Limit cycle oscillations in digital filters", IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-18, pp. 687- 697, Nov. 1971
(23) T. Kaneko : "Limit cycle oscillations in floating-point digital filters", IEEE Trans. AudioElectoacoust., vol. AU-21, pp. 100- 106, April 1973
(24) G. A. Maria and M. M. Fahmy: "Limit cycle oscillations

in a cascade of first − and second− order digital sections", IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS−22, pp. 131− 134, Feb. 1975

(25) T−Thong and B. Liu: "Limit cycles in the combinatorial implementation of digital filters", IEEE Trans. Acoust, Speech, Signal Processing, vol. ASSP−24, pp. 248− 256, June 1976

(26) 石井, 三留, 川崎: "2次の全極形ディジタルフィルタのリミットサイクル" 信学論(A), vol. J63−A, pp. 51−58, 昭55−02

(27) 久保田, 吉田, 辻井: "切り捨て量子化ディジタルフィルタのリミットサイクルに関する考察", 信学論(A), vol. J64−A, pp. 371− 377, 昭56−05

(28) I. W. Sandberg and J. F. Kaiser: "A bound on limit cycles in fixed point implementations of digital filters" IEEE Trans. Audio Electroacoust., AU−20, pp. 110− 112, June 1972

(29) J. L. Long and T. N. Trick: "An absolute bound on limit cycles due to roundoff errors in digital filters", IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU−21, pp. 27 −30, Feb. 1973

(30) 久保田, 辻井: "ディジタルフィルタにおけるリミットサイクルの実効値の上界とその軽減法について", 信学論(A), vol. J64−A, pp. 63 −70, 昭56−01

(31) T. A. C. M. Claasen, W. F. G. Mecklenbrauker and J. B. H. Peek: "Some remarks on the classification of limit cycles in digital filters", Philips Res, Rep., vol. 28, pp. 297− 305, Aug. 1973

(32) idem: "Second −order digital filter with only one magnitude −truncation quantiser and having practically no limit cycles", Electron. Lett., vol. 9, pp. 531− 532, Nov. 1973

(33) idem: "Frequency domain criteria for the absence of zero−input limit cycles in nonlinear discrete−time systems, with applications to digital filters", IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS−22, pp. 232− 239 March 1975

(34) A. C. Callahan : "Random rounding : Some principles and applications", 1976 Int' l Conf . Acoust . , Speech , Signal Processing , pp. 501- 504
(35) R. B. Kieburtz , V. B. Lawrence and K. V. Mina : "Control of limit cycles in recursive digital filters by randomized quantization", IEEE Trans. Circuits Syst . vol . CAS-24, PP. 291- 299, June 1977
(36) M. Buttner: "Elimination of limit cycles in digital filters with very low increase in the quantization noise" IEEE Trans. Circuits Syst . , vol . CAS-24, pp. 300- 304, June 1977
(37) K. Meerkotter and W. Wegener: "A new second-order digital filter without parasitic oscillations", Arch . Elektron . Ubertragungstech . , vol . 29, pp. 312- 314, 1975
(38) J. F. Kaiser : "On the limit cycle problem ", 1976 Int' l Symp . Circuits Syst . , pp. 642- 645
(39) H. A. Spang, Ⅲ and P. M. Schultheiss: "Reduction of quantizing noise by use of feedback", IEEE Trans. Commun . Syst . , vol . CS-10, pp. 373- 380, Dec. 1962
(40) 宮田："ディジタル信号処理回路におけるまるめ雑音の補正方式"，昭51 信学通信全大，138
(41) 宮田："周波数領域におけるディジタル信号処理回路のまるめ雑音の制御方式"，信学論（A），vol . J63-A, pp. 165- 172, 昭55-03
(42) T-L Chang and S. A. White: "An error cancellation digital -filter structure and its distributed -arithmetic implementation", IEEE Trans. Circuits Syst . , vol . CAS-28, pp. 339- 342, April 1981
(43) A. Fettweis and K. Meerkotter : "Suppression of parasitic oscillations in wave digital filters ", IEEE Trans. Circuits Syst . , vol . CAS-22, pp. 239- 246, March 1975
(44) B. Eckhardt and W. Winkelnkemper: "Implementation of a second order digital filter section with stable overflow behavior", Nachrichtentech. Z. , vol . 26, pp. 282- 284, June 1973
(45) H. J. Butterweck : "Suppression of parasitic oscellations

in second-order digital filter by means of a controlled rounding arithmetic", Arch. Elektron. Ubertragungstech., vol. 29, pp. 371- 374, 1975

(46) G. Verkroost and H. J. Butterweck : "suppression of parasitic oscillations in wave digital filters and related structures by means of controlled rounding", 1976 Int'l Symp. Circuets Syst., pp. 628- 629

(47) G. Verkroost: "A general second-order digital filter with controlled rounding to cxclude limit cycles for constant input signals", IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-22, pp. 428- 431, Aug. 1977

(48) V. B. Lawrence and K. V. Mina : "Control of limit cycle oscillations in second-order recursive digital filters using constrained random quantization", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-26, pp. 127- 134, April 1978

(49) 宮田："時間領域におけるディジタル信号処理回路の丸め雑音の制御方式"，信学論(A)，vol. J63-A, pp. 657- 644, 昭55-10

(50) 川又，竹尾，樋口："リミットサイクルのないディジタルフィルタの状態方程式に基づく合成法"，信学論(A)，vol. J63-A, pp. 870-877, 昭55-12

(51) J. Tierney, C. M. Rader and B. Gold : "A digital frequency synthesizer", IEEE Trans. Audio Electroacoust, vol. AU-19, pp. 48-56, March 1971

(52) N. S. Jayant : "Digital coding of speech waveforms : PCM, DPCM, and DM quantizers", Proc. IEEE, vol. 62, pp. 611- 632 May 1974

(53) H. R. Schindler: "Delta modulation", IEEE Spectrum, pp. 69-78, Oct. 1970

(54) R. W. Schafer and L. R. Rabiner: "A digital signal processing approach to interpolation", Proc. IEEE, vol. 61, pp. 692- 702, June 1973

(55) F. de Jager: "Delta modulation, a method of p.c.m. transmission using the 1-unit code", Philips Res. Rep., vol. 7, pp. 442- 466, 1952

(56) Y. Nakamaru and H. Kaneko : "Delta modulation encoder",

NEC Res. Develop., No. 1, pp. 46−54, Oct. 1960
(57) P. P. Wang : "An absolute stability criterion for delta modulation", IEEE Trans. Commun. Technol., vol. COM−16, pp. 186− 188, Feb. 1968
(58) 守屋, 村野, 藤井 : "デルタ変調器における設計パラメータの特性への影響" 信学研資, CS74− 113, 昭49−11
(59) J. E. Iwersen: "Calculated quantizing noise of single integration delta modulation coders", Bell Syst. Tech. J., vol. 48, pp. 2359−2389, Sept. 1969
(60) H. Inose and Y. Yasuda : "A unity bit coding method by using negative feedback", Proc. IEEE, vol. 51, pp. 1524−1535, Nov. 1963
(61) D. J. Goodman: "The application of delta modulation to analog−to−PCM encoding", Bell Syst. Tech. J., vol. 48, pp. 321− 343, Feb. 1969
(62) D. J. Goodman and L. J. Greenstein : "Quantizing noise of ΔM/PCM encoders", Bell Syst. Tech. J., vol. 52. pp. 183− 204, Feb. 1973
(63) W. Arnstein, et al. : "Digital linear interpolation and the binary rate multiplier", Control Engrg., vol. 6, No. 6, pp. 79−83, June 1964
(64) C. W. Weller : "Pulse−code modulation to voice conversion −Binary rate multiplier differential pulse −code−modulation decoder", IEEE Trans. Commun. Technol., vol. COM−19, pp. 1064−1069, Dec. 1971
(65) H. S. Mcdonald : "An experimental digital local system", 1974 Int' l Switching Symp., pp. 212/ 1− 212/ 5
(66) J. H. Condon and H. T. Breece Ⅲ : "Low cost analog−digital interface for telephone switching", 1974 Int' l Conf. Commun., pp. 13B.1 −13B.4
(67) L. D. J. Eggermont: "A single−channel PCM coder with companded DM and bandwidth −restricting digital filtering", 1975 Int' l Conf. Commun., pp. 44.2−40.6
(68) T. Ohno, H. Kuwahara, M. Miyata and K. Imai : "Voiceband analog−PCM conversion system using delta modulation", 1976 Int' l Conf. Commun., pp. 31.22 −31.26

(69) J. H. Miller : "Digital-to-digital conversion between an adaptive delta modulation format and companded PCM", ibid, pp. 43. 29-43. 34

(70) G. P. Edwards, T. Preston, L. D. J. Eggermont and M. H. H. Hofelt : "System and hardware design consideration for a single-channel analog-to-PCM via -HIDM encoder", 1976 Int' l Zurich Seminar on Digital Commun . , pp. B3.1-B3.5

(71) A. R. Potter and N. T. Thurlow: "Coding and single interfacing for a digital local exchange", ibid, pp. C8.1-C8.5

(72) J. C. Candy, Y. C. Chang and D. S. Alexander: "Using triangularly weighted interpolation to get 13-bit PCM from a sigma -delta modulator", IEEE Trans. Commun . , vol . COM-24, pp. 1268-1275, Nov. 1976

(73) 宮田："音声用ディジタル符号変換回路の検討"，信学技報，SE75-83, 昭51-01

(74) 安川，青山："まるめ雑音補償法の一検討"，昭51信学通信全大，164

(75) 村上，坂本："PCM／ΔM変換法の一検討"，同，165

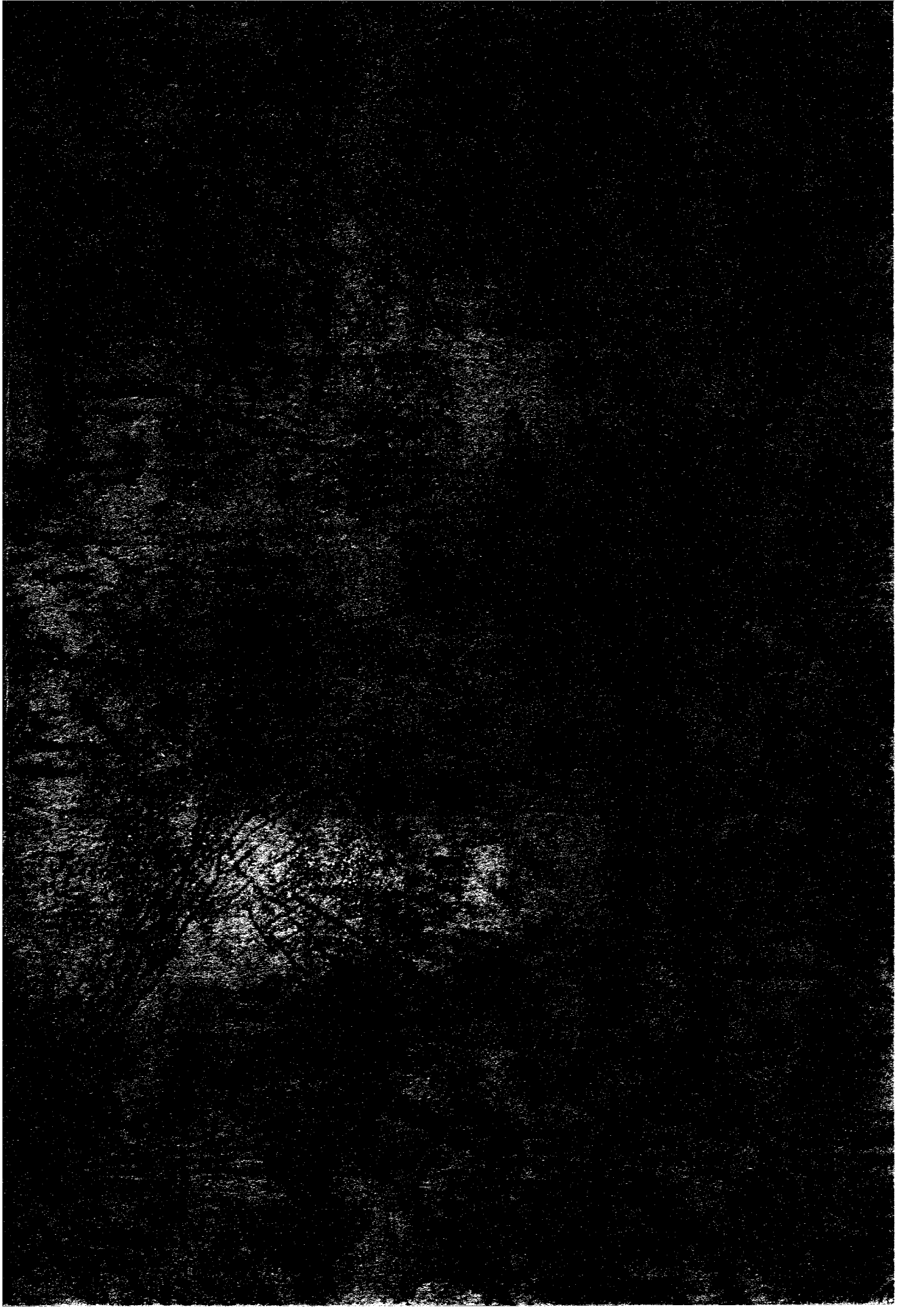
(76) 林，山沢，守屋："ΔM／PCM変換ディジタルフィルタの検討"，昭52信学総大，1794

(77) 大野，他："音声-DM-PCM変換方式とその集積回路化の検討"，同，S 2- 3

(78) 宮田，天田，桑原："音声-DM-PCM変換装置のためのDM-DPCM相互変換方式"，信学論（B），vol . J62-B, pp. 207- 214, 昭54-03

(79) T. Misawa , J. E. Iwersen and J. G. Ruch : "A single-chip codec with filters -Architecture", 1980 Int' l Conf . Commun . , pp. 30. 5. 1-30. 5. 6

(80) C. W. Barnes and A. T. Fam: "Minimum norm recursive digital filters that are free of overflow limit cycles", IEEE Trans. , Circuits Syst . , vol . CAS-24, pp. 569- 574, Oct. 1977

(81) W. L. Mills, C. T. Mullis and R. A. Roberts: "Digital filter realization without overflow oscillations", IEEE Trans, Acoust . , Speech , Signal Processing , vol . ASSP

－２６，pp. 334－ 338，Aug. 1978
（８２）宮田：“ディジタル信号処理回路の非線形特性の一解析手法”，信学論（Ａ）vol．Ｊ６５－Ａ，pp. 14－21，昭57－01
（８３）宮田：“予測符号器の等価変換と量子化雑音の振幅の上界”，昭57信学総大，1784