非線形抵抗回路網の解析に関する研究

熊谷貞俊

内容梗概

本編は筆者が大阪大学大学院博士課程(制御工学専攻)に在学中行った非線形抵抗回路網の解析に関する研究をまとめたもので，本文は次の緒論，第1章，第2章および結論よりなっている。

緒論および各章の第1節では本研究分野における従来の研究成果，本研究の意義と目的を概説している。

各章の最後の節では，その章で得られた主な結果と今後の問題点がまとめられている。

第1章は相互結合をもつ非線形抵抗回路網の解の存在について考察している。

1.2節では相互結合をもつ非線形抵抗回路網の回路方程式を導出し，素子の特性を表わす連続写像の性質と解の存在条件との関係を示す。

1.3節では (1) 有界な非線形抵抗素子のみよりなる回路

網(2)有界な非線形抵抗素子と線形抵抗素子よりなる回路網の2つについて解の存在性と回路トポロジとの関係を考察し，解の存在の必要十分条件を回路トポロジについての条件として示す。

第2章は区分的線形な特性をもつ抵抗回路網の解の存在，および求解のアルゴリズムについて考察している。

2.2節では連続な区分的線形写像のいくつかの基本的な性質を示す。

2.3節では，区分的線形写像の写像度を定義し，この写像度の概念を用いて，区分的線形写像を用いて表わせる方程式の解の存在定理を示し，区分的線形抵抗回路網の解の存在条件を明らかにする。

2.4節では，前節で得られた解の存在条件のもとで，従来の求解のアルゴリズムを修正したアルゴリズムにより，有限回の

くり返しにより解が求まることを示す。

結論には本研究で得られた結果，および今後に残された課題がまとめられている。

目次

緒　論

非線形回路網の解析における基本的な問題として，直流動作点を求める問題がある。[1],[2] この問題は非線形抵抗回路網の直流方程式を解く問題に帰着されるが，近年ますます大規模化する非線形回路網においては解析的な解を得ることは困難である。電子計算機による回路網解析の技法が開発されるに従い，大規模回路網の数値解を求める手法が整備されつつあるが，その場合，非線形抵抗回路網の解の存在・唯一性についての条件を明らかにすることが理論的問題として重要であり，この問題に関して数多くの研究がなされてきた。

非線形抵抗素子の特性が相互結合をもたず単調である場合については Sandberg，Willson[3]-[6] によって詳細な研究がなされており，特性が相互結合をもつより一般的な場合については，大附，渡部[7]，

藤沢, Kuh[8][9]らによって研究がなされている。

しかし，いままで得られた解の存在・唯一性のための(必要)十分条件と対象とする回路網の回路トポロジとの関係は明らかでなく，回路理論的な解釈は困難である。解の存在・唯一性についての条件を回路トポロジについての条件として考察したものには，非線形抵抗素子の特性が相互結合をもたず，単調である場合についての Desoer, Wu[10]の最近の成果があるが，相互結合をもつより一般的な非線形回路網については今までなされた研究は見当らない。本編第1章には相互結合をもつ非線形抵抗回路網の解の存在性と回路トポロジとの関係に関する研究が，発表論文[1]を中心にまとめられている。

実際の電気回路に現われる非線形抵抗素子の特性は，それを有限個の領域で線形近似した区分的線

形な特性で近似できる場合が多い。[11] したがって，区分的線形な特性をもつ抵抗回路網の解析のための手法を確立することが，相互結合をもつより一般的な非線形抵抗回路網の解析をおこなううえで重要な工学的意義をもつ。相互結合をもたない区分的線形な抵抗回路網の求解のアルゴリズムがKatzenelson[12]により提出されて以来，この種の抵抗回路網の解析問題に関し数多くの研究成果が発表されている。[9][13][14] Katzenelsonのアルゴリズムは解の存在を保証するある条件のもとで相互結合をもつ区分的線形抵抗回路網に適用されたが[14]，解の存在を保証するより一般的な条件のもとではこのアルゴリズムは適用が不可能である。本編第2章で，区分的線形写像の写像度の概念より得られる一般的な解の存在条件を導き，Katzenelsonの方法を修正した一般化Katzenelsonアルゴリズムにより，

この条件のもとで区分的線形抵抗回路網の解が有限回のくりかえしで求まることを示す。この章の内容は発表論文[2]を中心にまとめられている。

関連発表論文

[1] 熊谷, "相互結合をもつ非線形抵抗回路網の解の存在について", 電子通信学会論文誌(A) 載録決定済

[2] T. Ohtsuki, T. Fujisawa and S. Kumagai, "Existence Theorems and a Solution Algorithm for Piecewise-Linear Resistor Networks", SIAM Journal on Applied Mathematics 投稿中.

第 1 章
相互結合をもつ非線形抵抗回路網の解の存在について

1.1 序言

非線形回路網の解析における基本的な問題として，直流動作点を求める問題がある。[1],[2] この問題は、非線形抵抗回路網の直流方程式を解く問題に帰着されるが，近年ますます大規模化する非線形回路網においては，解析的な解を得ることは困難である。電子計算機による回路網解析の技法が開発されるに従い，大規模回路網の数値解を求める手法が整備されつつあるが，その場合，非線形抵抗回路網の解の存在・唯一性についての条件を明らかにすることが理論的問題として，重要であり，この問題に関連して数多くの研究成果が発表されてきている。

非線形抵抗素子の特性が相互結合をもたず，単調である場合については，Sandberg, Willson [3]-[6] によって詳細な研究がなされており，特性が相互結合をもつより一般的な場合については，大附，渡部[7]，藤沢，Kuh [8][9] らによって特性が連続微分可能である場合や，区分的線形である場合について研究がなされている。これらの成果で，写像が微分同相になるための Palais の定理[15]（付録B-4），およびその系である Liu, Holtzman の条件[16]に比べ，より実用的な解の存在・唯一性のための（必要）十分条件が得られている。しかし，それらの条件と対象とする回路網の回路トポロジとの関係は明らかでなく，回路理論的な解釈は困難である。非線形抵抗素子の特性が単調で，相互結合をもたない場合について回路トポロジと解の存在・唯一性

との関係を述べたものに，Desoer, Wu の最近の成果がある。[10]

本章1.2節では連続写像 $\underset{\sim}{f}: R^n \to R^n$ のいくつかの性質を定義し，いままで得られた解析的な解の存在定理を示す。また，相互結合をもつ非線形抵抗回路網の回路方程式を導出し，非線形抵抗素子の特性のみに依存する解の存在定理を示す。1.3節では，本章の主題である相互結合をもつ非線形抵抗回路網の解の存在条件と回路トポロジとの関係について考察する。

1.2 問題の定式化

本編を通じ，次の記法を用いる。

任意の自然数 n に対し，R^nは n次元実ユークリッド空間，$\underset{\sim}{0}$ は R^nの零ベクトルとし，$\underset{\sim}{x} \in R^n$ に対し x_i は $\underset{\sim}{x}$ の i-成分，任意の $\underset{\sim}{x} \in R^n$, $\underset{\sim}{y} \in R^n$ に対し $\langle \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \rangle$ は $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ ，$\| \underset{\sim}{x} \|$

は $\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ をあらわす。$n\times n$ 実行列 A に対し，A^T, A^{-1}, $\det A$ はそれぞれ A の転置行列，逆行列，行列式をあらわす。正方行列 A が正定値であるとは，A の対称部が正定値であることである。集合 $B\subset R^n$ に対し，$\bar{B}$, ∂B, B° はそれぞれ B の閉包，境界，内点の集合をあらわす。

R^n から R^n への連続写像 $f: R^n\to R^n$ が (1) ノルム強圧的 (norm coercive) であるとは

$$(1.1)\qquad \|f(x)\|\to\infty \quad (\|x\|\to\infty)$$

となることである。f が (2) 弱強圧的 (weakly coercive) であるとは，$a\in R^n$ が存在して

$$(1.2)\qquad \frac{\langle f(x), x-a\rangle}{\|x-a\|}\longrightarrow\infty \quad (\|x\|\to\infty)$$

となることであり，任意の $a\in R^n$ に対して (1.2) が成り立つとき f は (3) 全強圧的 (strongly coercive) であるという。

連続写像 $\underset{\sim}{f}: R^n \to R^n$ が (1) 単調 (monotone) であるとは，任意の $\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \in R^n$ に対して

$$(1.3) \qquad \langle \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{u}) - \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{v}), \underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{v} \rangle \geqq 0$$

となることであり，$\underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{v}$ の場合に (1.3) が不等号で成り立つとき $\underset{\sim}{f}$ は (2) 狭義単調 (strictly monotone) であるという。$\underset{\sim}{f}$ が (3) 一様単調 (uniformly monotone) であるとは，$r > 0$ が存在して，任意の $\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \in R^n$ に対して，

$$(1.4) \qquad \langle \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{u}) - \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{v}), \underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{v} \rangle \geqq r \|\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{v}\|^2$$

となることである。

連続写像 $\underset{\sim}{f}: R^n \to R^n$ が (1) $\underset{\sim}{u}$ で受動的[17] (passive on $\underset{\sim}{u}$) であるとは，任意の $\underset{\sim}{x} \in R^n$ に対して

$$(1.5) \qquad \langle \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) - \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{u}), \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{u} \rangle \geqq 0$$

となることであり，(2) $\underset{\sim}{u}$ で狭義受動的 (strictly passive on $\underset{\sim}{u}$) であるとは任意の $\underset{\sim}{x} \neq \underset{\sim}{u}$ に対して

(1.5)が不等号で成り立つことをいう。$\underset{\sim}{f}$がB)$\underset{\sim}{u}$で一様受動的（uniformly passive on $\underset{\sim}{u}$）であるとは$\gamma>0$が存在して，任意の$\underset{\sim}{x}\in R^n$に対して

$$(1.6) \qquad \langle \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})-\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{u}),\ \underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{u}\rangle \geqq \gamma\|\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{u}\|^2$$

が成り立つこともいう。

$\underset{\sim}{f}$が弱強圧的ならばノルム強圧的であることは明らかである。$\underset{\sim}{f}$が単調，狭義単調，一様単調ならば$\underset{\sim}{f}$は任意の$\underset{\sim}{u}\in R^n$でそれぞれ受動的，狭義受動的，一様受動的である。また$\underset{\sim}{f}$が一様単調ならば$\underset{\sim}{f}$は全強圧的，$\underset{\sim}{f}$が$\underset{\sim}{u}$で一様受動的ならば$\underset{\sim}{f}$は弱強圧的であることも明らかである。連続写像$\underset{\sim}{f}$のこれらの諸性質と$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})=\underset{\sim}{y}$の解の存在・唯一性との関係については付録Bに掲げた定理が成り立つ。

つぎに，相互結合をもつ非線形抵抗回路網の

回路方程式を導出し，非線形抵抗素子の特性と方程式の解の存在性との関係について得られた結果をしめす。

1端子対抵抗素子(非線形,線形)の個数をnとしたとき，素子の特性は次式のようにハイブリッド表示されるものとする。

$$(1.7) \qquad \underset{\sim}{h}(\underset{\sim}{x}) = [h_1(\underset{\sim}{x}), \cdots, h_n(\underset{\sim}{x})]^T = \underset{\sim}{y}$$

ここで，$h_i(\cdot)$, $i=1,\cdots,n$, はi番目の素子の特性を表わすR^nからR^1への連続写像，$\underset{\sim}{x}$, $\underset{\sim}{y}$は各素子の端子電流または電圧からなるn次元実ベクトルであり，xのj-成分x_jが電圧(電流)ならばそれに対応する$\underset{\sim}{y}$のj-成分y_jは電流(電圧)である。i番目の素子でx_iが電流を表わすならば，その素子を電流制御であるといい，x_iが電圧を表わすならば，その素子を電圧制御であるという。

独立電流源は素子に並列に，独立電圧源は素子

に直列になるように抵抗回路に接続され，電流源のみのカットセット，電圧源のみのループは存在しないものとする。

いま，対象とする回路網の独立電流源，独立電圧源をそれぞれ開放除去，短絡除去して得られる抵抗回路網に対応する連結なグラフをGとする。Gのn個の要素からなる枝集合Bを電圧制御の枝集合B_1と電流制御の枝集合B_2に分割し*)，($B=B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2 = \phi$)，さらに，Gのある木T（補木を$\bar{T}$とする）に関してB_1を$B_{1t}=B_1 \cap T$と$B_{1\ell}=B_1 \cap \bar{T}$に，$B_2$を$B_{2t}=B_2 \cap T$と$B_{2\ell}=B_2 \cap \bar{T}$にそれぞれ分割する。このような分割に従って素子の番号を入れかえ，式(1.7)を(1.8)のように表わす。

$$\text{(1.8)} \qquad \underset{\sim}{h}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{y}$$

---

*) 電圧制御でも電流制御でもある枝については，あらかじめどちらかを指定しておく。

ここで，

$$\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{v}_{1t} \\ \underset{\sim}{i}_{2\bar{t}} \\ \underset{\sim}{v}_{1\bar{t}} \\ \underset{\sim}{i}_{2t} \end{bmatrix} \in R^n, \quad \underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{i}_{1t} \\ \underset{\sim}{v}_{2\bar{t}} \\ \underset{\sim}{i}_{1\bar{t}} \\ \underset{\sim}{v}_{2t} \end{bmatrix} \in R^n$$

$\underset{\sim}{h}$ ： R^nからR^nへの連続写像

$\underset{\sim}{v}_{1t}$ ($\underset{\sim}{i}_{1t}$) は B_{1t} に属する素子の電圧（電流）ベクトルを表わし，他の記号も同様の記法に従う。

グラフGの木Tに関する基本カットセット行列Dを

$$(1.9) \qquad D = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \overbrace{\quad}^{B_{1t}} & \overbrace{\quad}^{B_{2t}} & \overbrace{\quad}^{B_{1\bar{t}}} & \overbrace{\quad}^{B_{2\bar{t}}} \end{array} \\ \begin{bmatrix} I & 0 & F_1 & F_2 \\ 0 & I & F_3 & F_4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}B_{1t} \\ \}B_{2t} \end{array}$$

としたとき，キルヒホッフ則は次式で表わせる。

$$(1.10) \qquad P\underset{\sim}{h}(\underset{\sim}{x}) + Q\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{w}$$

ここで，

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 & F_1 & 0 \\ 0 & I & 0 & -F_4^T \\ 0 & 0 & 0 & -F_3^T \\ 0 & 0 & F_3 & 0 \end{bmatrix} \quad : n \times n \text{ 実行列}$$

$$
Q = \begin{bmatrix} 0 & F_2 & 0 & 0 \\ -F_2^T & 0 & 0 & 0 \\ -F_1^T & 0 & I & 0 \\ 0 & F_4 & 0 & I \end{bmatrix} \quad : n \times n \text{ 実行列}
$$

$$
\tilde{w} = \begin{bmatrix} \tilde{j}_1 \\ \tilde{e}_2 \\ \tilde{e}_1 \\ \tilde{j}_2 \end{bmatrix} \quad : n \text{ 次元実ベクトル}
$$

$\tilde{j}_1$ ($\tilde{j}_2$) は $B_1 t$ ($B_2 t$) の枝のつくるカットセットに存在する電流源の一次結合によってできる電流源ベクトル, $\tilde{e}_1$ ($\tilde{e}_2$) は $B_1 \bar{t}$ ($B_2 \bar{t}$) の枝のつくるループに存在する電圧源の一次結合によってできる電圧源ベクトルである。

非線形抵抗回路網の一般的な回路方程式は式(1.10)で表わせ, 任意の電源ベクトル $\tilde{w}$ の値に対し, 式(1.10)が少くとも1つの解をもつとき, その非線形抵抗回路網は任意の入力に対して解をもつという。

グラフ G の木 T として特に，電圧制御の枝を最大個含む木 T_m をとると，T_m に関する G の基本カットセット行列 D_m は

$$(1.11) \qquad D_m = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_{1t} & B_{2t} & B_{1\bar{t}} & B_{2\bar{t}} \end{array} \\ \begin{bmatrix} I & 0 & F_1 & F_2 \\ 0 & I & 0 & F_3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \} B_{1t} \\ \} B_{2t} \end{array}$$

となり，式(1.10)の P, Q において F_3 は零行列となる。回路変数ベクトル $\hat{x}$ を

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} v_{1t} \\ i_{2\bar{t}} \end{bmatrix} \in R^m$$

電源ベクトル $\hat{w}$，$\hat{u}$ をそれぞれ

$$\hat{w} = \begin{bmatrix} j_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \in R^m, \quad \hat{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_1 \\ j_2 \end{bmatrix} \in R^n$$

とすると，回路方程式として式(1.10)と同値な次式が得られる。

$$(1.12) \qquad C\,h(C^T \hat{x} + \hat{u}) + S\hat{x} = \hat{w}$$

ここで，

$$C = \begin{bmatrix} I & 0 & F_1 & 0 \\ 0 & I & 0 & -F_3^T \end{bmatrix} \quad : m \times n \text{ 実行列}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & F_2 \\ -F_2^T & 0 \end{bmatrix} \quad : m \times m \text{ 実行列}$$

次節では式(1.10)に基づいて非線形抵抗回路網の解の存在性と回路トポロジとの関係を考察するが，以下で，非線形抵抗素子の特性を表わす連続写像 $\underset{\sim}{h}: R^n \to R^n$ と式(1.12)で与えられる回路方程式

$$\underset{\sim}{f}(\hat{\underset{\sim}{x}}) = C\underset{\sim}{h}(C^T\hat{\underset{\sim}{x}} + \hat{\underset{\sim}{u}}) + S\hat{\underset{\sim}{x}} = \hat{\underset{\sim}{w}}$$

の解の存在性との関係について得られた結果を示す。

<u>定理1</u>[18]。特性 $\underset{\sim}{h}: R^n \to R^n$ が一様単調である非線形抵抗素子よりなる回路網は任意の入力 $\underset{\sim}{w} = \begin{bmatrix} \hat{\underset{\sim}{w}} \\ 0 \end{bmatrix} + \hat{u}$ に対し，唯一の解をもち，解は入力に連続的に依存する。

(証明). 式(1.12)で $\hat{u} \in R^n$ が与えられたとする。S が反対称行列であること，および C の形より，任意の $p, q \in R^m$ に対し

$$\langle f(p) - f(q), p - q \rangle$$

$$= \langle C h(C^T p + \hat{u}) - C h(C^T q + \hat{u}), p - q \rangle + \langle S(p - q), p - q \rangle$$

$$= \langle h(C^T p + \hat{u}) - h(C^T q + \hat{u}), (C^T p + \hat{u}) - (C^T q + \hat{u}) \rangle$$

$$\geqq \gamma \| C^T (p - q) \|^2$$

$$\geqq \gamma \| p - q \|^2$$

従って，f は一様単調となり，付録B-3より f は R^m から R^m の上への位相写像である。よって回路方程式(1.12)は任意の $\hat{v}, \hat{u}$ に対して唯一の解をもち，解は $\hat{v}, \hat{u}$ に連続的に依存する。（証終）

h が R^n から R^n への C^1-級写像の場合，h の Jacobian 行列 $\left[\frac{\partial h}{\partial x}\right]$ が一様正定ならば，f は R^m から R^m への

微分同相写像になることが知られている。[7]

定理2.[18] 特性 $\underset{\sim}{h}: R^n \to R^n$ が全強圧的である非線形抵抗素子よりなる回路網は任意の入力に対し，少くとも1つの解をもつ。

(証明). 式(1.12)において，$\hat{\underset{\sim}{u}} \in R^n$ が与えられたとする。任意の $\hat{\underset{\sim}{a}} \in R^m$ に対し，

$$\frac{\langle \underset{\sim}{f}(\hat{\underset{\sim}{x}}),\ \hat{\underset{\sim}{x}} - \hat{\underset{\sim}{a}} \rangle}{\| \hat{\underset{\sim}{x}} - \hat{\underset{\sim}{a}} \|} = \frac{\langle C\underset{\sim}{h}(C^T\hat{\underset{\sim}{x}} + \hat{\underset{\sim}{u}}) + S\hat{\underset{\sim}{x}},\ \hat{\underset{\sim}{x}} - \hat{\underset{\sim}{a}} \rangle}{\| \hat{\underset{\sim}{x}} - \hat{\underset{\sim}{a}} \|}$$

$$= \frac{\langle \underset{\sim}{h}(C^T\hat{\underset{\sim}{x}} + \hat{\underset{\sim}{u}}),\ C^T\hat{\underset{\sim}{x}} - C^T\hat{\underset{\sim}{a}} \rangle - \langle S\hat{\underset{\sim}{x}}, \hat{\underset{\sim}{a}} \rangle}{\| \hat{\underset{\sim}{x}} - \hat{\underset{\sim}{a}} \|}$$

$$\geqq \frac{\langle \underset{\sim}{h}(\underset{\sim}{x}),\ \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{p} \rangle \cdot \| \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{p} \|}{\| \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{p} \| \ \| \hat{\underset{\sim}{x}} - \hat{\underset{\sim}{a}} \|} - \frac{k \| \hat{\underset{\sim}{x}} \|}{\| \hat{\underset{\sim}{x}} - \hat{\underset{\sim}{a}} \|}$$

ここで，$\underset{\sim}{x} = C^T\hat{\underset{\sim}{x}} + \hat{\underset{\sim}{u}}$，$\underset{\sim}{p} = C^T\hat{\underset{\sim}{a}} + \hat{\underset{\sim}{u}}$，$k > 0$ は定数．

上式より $\| \hat{\underset{\sim}{x}} \| \longrightarrow \infty$ に対し，$\dfrac{\langle \underset{\sim}{f}(\hat{\underset{\sim}{x}}),\ \hat{\underset{\sim}{x}} - \hat{\underset{\sim}{a}} \rangle}{\| \hat{\underset{\sim}{x}} - \hat{\underset{\sim}{a}} \|} \longrightarrow \infty$ となり $\underset{\sim}{f}$ は全強圧的である。従って，付録B-1より $\underset{\sim}{f}$ は R^m から R^m への全射となる。(証終)

系. 特性 $\underset{\sim}{h}: R^n \to R^n$ が弱強圧的かつ，Lipschitz条

件を満す非線形抵抗素子よりなる回路網は任意の入力に対し少くとも1つの解をもつ。

（証明）$\underset{\sim}{f}$が弱強圧的でかつLipschitz条件を満す，すなわち，$K>0$が存在して任意の$\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in R^n$に対して，
$$\| \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) - \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{y}) \| \leqq K \| \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y} \|,$$
ならば$\underset{\sim}{h}$は全強圧的であることが簡単に判る。従って，前定理より系が得られる。（証終）

〔注1〕．$\underset{\sim}{f}$が弱強圧的であれば$\underset{\sim}{f}$はR^nからR^nへの全射となるが これだけでは回路方程式が少くとも1つの解をもつ保証にはならないことが判る。

〔注2〕．$\underset{\sim}{f}$が狭義単調であれば$\underset{\sim}{h}$も狭義単調であることは明らかである。従って，$\underset{\sim}{f}$が狭義単調であることは，回路方程式の解が存在すれば一意であるための十分条件である。

1.3 回路トポロジと解の存在性

1.2節では，相互結合をもつ非線形抵抗回路網の解の存在条件を，非線形抵抗素子の特性のみに依存する条件によって示したが，本節では式(1.10)で表わされるある種の非線形抵抗回路網の回路方程式の解の存在性と回路トポロジとの関係を明らかにする。

相互結合をもつ非線形抵抗素子が有界であるとは，素子の特性を表わす式(1.7)の $h_i : R^n \to R^1$ が R^n のいたるところで一様に有界，すなわち $K>0$ が存在して，任意の $x \in R^n$ に対し，$|h_i(x)| \leq K$ が成り立つことをいう。本節で対象とする回路網を構成する非線形抵抗素子はすべて有界であるものとする。

まず，写像 $f : R^n \to R^n$ が連続であるとき，写像 $g : R^n \to R^n$，$g(x) = x + f(x)$ が全射になるための十分

条件を与える次の補題をしめす。

<u>補題1.</u>[6][19] 写像 $\underset{\sim}{f}: R^n \to R^n$ が連続であるとき，$0<r<1$, $k>0$ が存在して，$\|\underset{\sim}{z}\| \geqq k$ なるすべての $\underset{\sim}{z} \in R^n$ に対して $\|\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{z})\| \leqq r\|\underset{\sim}{z}\|$ ならば，任意の $\underset{\sim}{y} \in R^n$ に対して，$\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{y}$ は少くとも1つの解をもつ。

補題1より本節の解析で主要な次の補題が得られる。

<u>補題2.</u> 写像 $\underset{\sim}{f}: R^n \to R^n$ は連続で，R^n で一様に有界，A, B を $n \times n$ 定行列としたとき，任意の $\underset{\sim}{y} \in R^n$ に対して $A\,\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) + B\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y}$ が少くとも1つの解をもつためには B が非特異であることが必要十分である。

(証明). 条件が必要であることは明らかである。いま，Bを非特異とする。仮定より $K>0$ が存在して，任

意の $\underset{\sim}{x} \in R^n$ に対して $\|B^{-1}A\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})\| \leqq K$ が成り立つ。従って，$0<r<1$ に対して，kを $K/r \leqq k$ とすると，$\|\underset{\sim}{x}\| \geqq k$ なるすべての $\underset{\sim}{x} \in R^n$ に対して $\|B^{-1}A\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})\| \leqq r\|\underset{\sim}{x}\|$ が成り立ち，補題1より，任意の $\underset{\sim}{y} \in R^n$ に対して $\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}) = B^{-1}A\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) + \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y}$ は少くとも1つの解をもつ。従って，$B\underset{\sim}{g}$，$B\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}) = A\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) + B\underset{\sim}{x}$，は R^n から R^n への全射となる。（証終）

補題2より相互結合をもった有界な抵抗素子によって構成される非線形抵抗回路網の解の存在性と回路トポロジとの関係を示す次の結果が得られる。

定理3.[20] 相互結合をもつ有界な非線形抵抗素子のみによって構成される非線形抵抗回路網が任意の入力に対して少くとも1つの解をもつためには，次の条件(i)，(ii)が必要十分である。

(i) 電流制御の素子のみによってできるループが

存在しない。

(ii) 電圧制御の素子のみによってできるカットセットが存在しない。

[注]. 定理3の条件は素子の特性が相互結合をもたず単調である場合, Desoer と Wu の結果[10]と一致する。

(証明). 条件(i)または(ii)が満たされないとすれば, 電源のある値に対してキルヒホッフ則が成り立たないループまたはカットセットが回路網に存在することになるから, 条件が必要であることは明らかである。

条件が十分であることを証明するために, 前節式(1.10)で表わされるこの回路網の回路方程式を考える。非線形抵抗素子の数を n として, $n \times n$ 実行列 P, Q は回路トポロジにより決まる行列であり, この回路網に対応するグラフの基本カットセット行列が式(1.9)のように与えられているとすると, Qは

$$Q=\begin{bmatrix} 0 & F_2 & 0 & 0 \\ -F_2^T & 0 & 0 & 0 \\ -F_1^T & 0 & I & 0 \\ 0 & F_4 & 0 & I \end{bmatrix}$$

である。条件 (i), (ii) が満たされていると仮定する。

基本カットセット行列は unimodular 行列[21] であるから、その部分行列 F_2 も unimodlar である。F_2 の非零要素 1, -1 のうち、-1 を 1 にかえてできる行列を F_2^0 とする。F_2^0 は回路網のグラフ G を無向グラフ G_0 と考えたときの基本カットセット行列の部分行列に対応する。F_2 は unimodular であるから、F_2 の階数と F_2^0 の 2 を法とする代数に関する階数は一致する。[21] いま、F_2 の行ベクトルが一次従属であるとすると、B_{1t} の枝のつくる G_0 の基本カットセットの環和 (ring sum) によってできるカットセットまたは互いに素なカットセットの集合[21] で電圧制御の枝のみを含むものが存在し、仮定に

矛盾する。同様に，F_2^T の行ベクトルが一次従属であるとすると，B_2 モの枝のつくる G_0 の基本ループの環和によってできるループまたは互いに素なループの集合[21]で電流制御の枝のみを含むものが存在し，仮定に矛盾する。従って，行列 S

$$S = \begin{bmatrix} 0 & F_2 \\ -F_2^T & 0 \end{bmatrix}$$

は非特異である。$\det Q = \det S \neq 0$ であるから Q も非特異である。素子の特性が式 (1.8) で与えられているとすると，回路方程式は

$$(1.13) \qquad P\underset{\sim}{h}(\underset{\sim}{x}) + Q\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{w}$$

となり，仮定より $\underset{\sim}{h}$ は連続で R^n で一様に有界である。従って，補題2より (1.13) は任意の電源ベクトル $\underset{\sim}{w}$ に対して少なくとも1つの解をもつ。　　　　(証終)

つぎに，このような有界な非線形抵抗素子と相互結合をもたない線形抵抗素子とによって構成される非線形抵

抗回路網の解の存在性と回路トポロジとの関係について得られた次の結果を示す。線形抵抗素子は正のコンダクタンスをもち，枝の分類においては，これを電圧制御の枝と分類しておく。

定理4.[20] 相互結合をもつ有界な非線形抵抗素子と線形抵抗素子とによって構成される回路網が任意の入力に対し，少くとも1つの解をもつためには，次の条件(i),(ii)が必要十分である。

(i) 電流制御の素子のみによってできるループは存在しない。

(ii) 電圧制御の素子のみによってできるカットセットは少くとも1つの線形抵抗素子を含む。

[注]. 非線形抵抗素子が相互結合をもたない場合，この結果は [10] の結果と一致する。

(証明). 条件が必要であることは定理3と同様に明

らかである。いま、条件(i),(ii)が満たされているものとし、この回路網に対応するn個の枝をもった連結なグラフをGとする。条件(i),(ii)より、Gの木で、すべての電流制御の枝と、線形抵抗の枝よりできるものが存在する。この木に関し、Gの枝集合を前節のように分割し、それぞれB_{1t}, $B_{1\bar{t}}$, B_{2t}とする。B_{1t}は線形抵抗の枝のみからなる。基本カットセット行列Dを

$$D = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} B_{1t} & B_{2t} & B_{1\bar{t}} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} I & 0 & F_1 \\ 0 & I & F_2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \}B_{1t} \\ \}B_{2t} \end{array} \end{array}$$

とする。$B_{1\bar{t}}$に含まれる枝の電圧変数ベクトル$\underset{\sim}{v}_{1\bar{t}}$を線形抵抗の電圧変数ベクトル$\underset{\sim}{v}_{1\bar{t}l}$と非線形抵抗の電圧変数ベクトル$\underset{\sim}{v}_{1\bar{t}n}$に分割し、$\underset{\sim}{x}$, $\underset{\sim}{h}(\underset{\sim}{x})$を

$$(1.14) \qquad \underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{v}_{1t} \\ \underset{\sim}{v}_{1\bar{t}l} \\ \underset{\sim}{v}_{1\bar{t}n} \\ \underset{\sim}{i}_{2t} \end{bmatrix}, \qquad \underset{\sim}{h}(\underset{\sim}{x}) = \begin{bmatrix} G_t \underset{\sim}{v}_{1t} \\ G_{\bar{t}} \underset{\sim}{v}_{1\bar{t}l} \\ \underset{\sim}{h}_{1\bar{t}n}(\underset{\sim}{x}) \\ \underset{\sim}{h}_{2t}(\underset{\sim}{x}) \end{bmatrix}$$

とする。ここで、G_t, $G_{\bar{t}}$はB_{1t}, $B_{1\bar{t}}$に存在する線

形抵抗のコンダクタンス行列で，それぞれ

$$G_t = \begin{bmatrix} g_{t1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_{tp} \end{bmatrix}, \quad G_{\bar{t}} = \begin{bmatrix} g_{\bar{t}1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_{\bar{t}r} \end{bmatrix}$$

で表わせる。回路方程式は (1.10) に従って，

$$(1.15) \qquad P\underset{\sim}{h}(\underset{\sim}{x}) + Q\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{w}$$

ここで，

$$P = \begin{bmatrix} I & F_1 & 0 \\ 0 & 0 & -F_2^T \\ 0 & F_2 & 0 \end{bmatrix} \quad : n \times n \text{ 実行列}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -F_1^T & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad : n \times n \text{ 実行列}$$

(1.14) より (1.15) を書きかえて，

$$(1.16) \qquad \hat{P}\,\hat{\underset{\sim}{h}}(\underset{\sim}{x}) + \hat{Q}\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{w}$$

ここで

$$\hat{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underbrace{}_{B_{1t}} & \underbrace{}_{B_{1\bar{t}\ell}} & \underbrace{}_{B_{1\bar{t}n}} & \underbrace{}_{B_{2t}} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & F_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -F_{21}^T \\ 0 & 0 & 0 & -F_{22}^T \\ 0 & 0 & F_{22} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}B_{1t} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} B_{1\bar{t}} \\ \}B_{2t} \end{array}$$

$$\hat{Q} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} \overbrace{\quad}^{B_1t} & \overbrace{\quad}^{B_1\bar{t}l} & \overbrace{\quad}^{B_1\bar{t}n} & \overbrace{\quad}^{B_2t} \\ \end{array}$$

$$\hat{Q} = \left[\begin{array}{cccc} G_t & F_{11}G_{\bar{t}} & 0 & 0 \\ -F_{11}^T & I & 0 & 0 \\ -F_{12}^T & 0 & I & 0 \\ 0 & F_{21}G_{\bar{t}} & 0 & I \end{array}\right]\begin{array}{l} \}B_1t \\ \}B_1\bar{t}l \\ \}B_1\bar{t}n \\ \}B_2t \end{array}$$

$$\hat{\underset{\sim}{h}}(\underset{\sim}{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underset{\sim}{h}_{1\bar{t}n}(\underset{\sim}{x}) \\ \underset{\sim}{h}_{2t}(\underset{\sim}{x}) \end{bmatrix}$$

$$[\underbrace{F_{11}}_{B_1\bar{t}l} \mid \underbrace{F_{12}}_{B_1\bar{t}n}] = F_1, \quad [\underbrace{F_{21}}_{B_1\bar{t}l} \mid \underbrace{F_{22}}_{B_1\bar{t}n}] = F_2$$

とする。 行列 S を

$$S = \begin{bmatrix} G_t & F_{11}G_{\bar{t}} \\ -F_{11}^T & I \end{bmatrix}\}P$$

とすると[22],

$$\det S = \det G_t \det [I + F_{11}^T G_t^{-1} F_1 G_{\bar{t}}]$$

$P \times P$ 行列 M を $M = F_{11}^T G_{\bar{t}}^{-1} F_1 G_{\bar{t}}$ とすると, 任意の $\underset{\sim}{x} \in R^P$, $\underset{\sim}{x} \neq 0$, に対して, G_t^{-1} は 正定値 であるから,

(1.17) $\langle M\underset{\sim}{x}, G_{\bar{t}}\underset{\sim}{x}\rangle \geqq 0$

従って, 任意の $\underset{\sim}{x} \neq 0$ に対し

(1.18) $\langle (I+M)\underset{\sim}{x}, G_{\bar{t}}\underset{\sim}{x}\rangle > 0$

行列 $I+M$ の任意の実固有値を λ とし，λ に対する固有ベクトルを $\underset{\sim}{x}_\lambda \neq 0$ とすると，(1.18) より

$$\langle (I+M)\underset{\sim}{x}_\lambda \ , G_E \underset{\sim}{x}_\lambda \rangle$$

$$= \lambda \langle \underset{\sim}{x}_\lambda , G_E \underset{\sim}{x}_\lambda \rangle > 0$$

G_E は正の対角行列だから，$\lambda > 0$ となる。

従って，

$$\det (I+M) > 0$$

となり，$\det Q = \det S = \det G_t \det (I+M) > 0$ 。

$\underset{\sim}{f}$ は連続で，R^n で一様に有界であるから，補題2より，式 (1.16) は任意の $\underset{\sim}{v} \in R^n$ に対し，少くとも1つの解をもつ。　　　　　　　　　　(証終)

1.4 結言

連続写像のいくつかの性質を定義し，この性質によって与えられる解の存在定理より，非線形抵抗素子の特性と非線形抵抗回路網の解の存在性との

関係について1.2節の結果が得られた。本章の主題は相互結合をもつ非線形抵抗回路網の解の存在性と回路トポロジとの関係を明らかにすることであったが，1.3節において，この関係を(1)有界な非線形抵抗素子によって構成される回路網(2)有界な非線形抵抗素子と線形抵抗素子とによって構成される回路網の2つについて考察し，解が存在するための必要十分条件を回路トポロジについての条件として導いた。特性が混合表現で与えられる一般的な線形回路網の解の存在性についてはマトロイド理論を用いた統一的手法により，その位相幾何学的条件が得られている。[23] 相互結合をもつ非線形抵抗素子の特性が一般的な場合の，非線形抵抗回路網の解の存在性と回路トポロジとの関係も，より明確にする必要があり，今後の課題

として残されている。

第 2 章

区分的線形な特性をもつ抵抗回路網の解の存在について

2.1 序言

実際の電気回路に現われる非線形抵抗素子の特性はそれを有限個の領域で線形近似して得られる区分的線形な特性で近似できる場合が多い。[11] したがって，区分的線形な特性をもつ抵抗回路網の解析のための手法を確立することが，相互結合をもつ場合も含めてより一般的な非線形抵抗回路網の解析をおこなううえで重要な工学的意義をもつ。

相互結合をもたない区分的線形な抵抗回路網の回路方程式の求解のアルゴリズムが Katzenelson[12] により提出されて以来，この種の抵抗回路網の解析問題に関し数多くの研究成果が発表されている。Katzenelson の方法は一意解の存在が保証

されている単調な抵抗回路網[24]に対して適用されたが，以後の研究ではより一般的な区分的線形抵抗回路網の解の存在・一意性の条件の厳密化，およびKatzenelsonの方法の一般化が問題となり，Kuh, Hajj, 藤沢[9],[13]により相互結合をもつ区分的線形な抵抗回路網が一意解をもつための条件が明らかにされ，その条件のもとでKatzenelsonの方法が適用できることが判っている。回路方程式の解が必ずしも一意でない場合について，解の存在条件およびKatzenelsonの方法による求解のアルゴリズムがKuh, 藤沢, 大附[14]により研究され，解の存在が保証されてもKatzenelsonの方法は必ずしも適用できず，ある条件のもとでこの方法が適用可能であることが判っている。本章2.2節では，区分的線形写像の性質について基本的な結果をしめし，

2.3節で，区分的線形写像の写像度を定義し，この写像度の概念を用いて相互結合をもつ区分的線形抵抗回路網の解の存在についての十分条件を考察する。2.4節ではKatzenelsonの方法を修正することにより，2.3節で得られたより一般的な解の存在条件のもとで有限回のくりかえしで解が求まるアルゴリズムをしめす。

2.2 区分的線形写像の性質

本章では，第1章で定められた記法に従う。

<u>定義1.</u> R^n から R^n への連続写像 $\underset{\sim}{f}: R^n \to R^n$ が区分的線形であるとは，R^n が有限個の $(n-1)$ 次元超平面により有限個の領域 $R_1, R_2, \cdots, R_\ell$ に分けられ，各領域 R_i で $\underset{\sim}{f}$ がアフィン写像，すなわち，任意の $\underset{\sim}{x} \in R_i$ に対して

$$(2.1) \qquad \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) = J^{(i)}\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{b}^{(i)} \quad , \quad i=1, \cdots, \ell$$

と表わされることである。ここで，$J^{(i)}$ は $n \times n$ 実定行列（Jacobian行列と呼ぶ），$\underset{\sim}{b}^{(i)}$ は n 次元実定ベクトルである。

R^n から R^n への連続写像 $\underset{\sim}{f}: R^n \to R^n$ が区分的線形であるとき，隣接する2つの領域でのJacobian行列についてのつぎの性質が知られている。[14]

性質1. $\underset{\sim}{f}: R^n \to R^n$ を連続な区分的線形写像とする。2つの領域 R_1, R_2 が法線ベクトル $\underset{\sim}{\gamma}$ をもつ $(n-1)$ 次元超平面を共通の境界としてもつとき，R_1, R_2 でのJacobian行列 $J^{(1)}, J^{(2)}$ の間には，n 次元実定ベクトル $\underset{\sim}{c}$ が存在して次の関係が成り立つ。

$$J^{(2)} - J^{(1)} = \underset{\sim}{c}\,\underset{\sim}{\gamma}^T \tag{2.2}$$

性質1より区分的線形写像の次の重要な性質が得られる。[14]

性質2. $\underset{\sim}{f}: R^n \to R^n$ を連続な区分的線形写像とする。2つの領域が共通の境界超平面をもつとき，そこでのJacobian行列の階数(rank)の差は高々1である。

領域の数は有限であるから，次の性質が簡単に得られる。[14]

<u>性質3.</u> $\underset{\sim}{f}: R^n \to R^n$ を連続な区分的線形写像とする。
$\underset{\sim}{f}$ は Lipschitz 条件をみたす。すなわち，$\gamma > 0$ が存在し，任意の $\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \in R^n$ に対し

$$(2.3) \qquad \| \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{u}) - \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{v}) \| \leqq \gamma \| \underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{v} \|$$

[注]. γ として，すべての Jacobian 行列のノルムの最大値をとればよい。

第1章でしめした連続写像の性質について，$\underset{\sim}{f}$ が区分的線形写像である場合つぎのことが成り立つ。

<u>性質4.</u> $\underset{\sim}{f}: R^n \to R^n$ を連続な区分的線形写像とする。
$\underset{\sim}{f}$ が弱強圧的ならば，$\underset{\sim}{f}$ は全強圧的である。

(証明). 性質3および定義より明らかである。（証終）

$\underset{\sim}{f}$ が区分的線形写像の場合，弱(全)強圧的であることを単に強圧的であるという。性質4および第1章定理2より非線形抵抗素子の特性を表わす連続

写像 $\underset{\sim}{f}:R^n\to R^n$ が区分的線形で強圧的ならば，回路方程式は少くとも1つの解をもつことが判る。

区分的線形写像 $\underset{\sim}{f}:R^n\to R^n$ が狭義単調ならば，すべてのJacobian行列は正定値である。文献[14]の Proposition 3 の証明と同様にして，$\underset{\sim}{f}$ について第1章式(1.4)が得られる。ここで $r>0$ は，すべてのJacobian行列の対称部の固有値の最小値をとればよい。これより，次の性質が得られる。

性質5. $\underset{\sim}{f}:R^n\to R^n$ を連続な区分的線形写像とする。$\underset{\sim}{f}$ が狭義単調ならば，$\underset{\sim}{f}$ は一様単調である。

$\underset{\sim}{f}:R^n\to R^n$ が区分的線形写像の場合，性質5および付録B-3より，$\underset{\sim}{f}$ が狭義単調であれば，$\underset{\sim}{f}$ は R^n から R^n の上への位相写像となる。

性質6. $\underset{\sim}{f}:R^n\to R^n$ を連続な区分的線形写像とする。$\underset{\sim}{f}$ が $\underset{\sim}{x}\in R^n$ で一様受動的であるためには，$\underset{\sim}{f}$ が $\underset{\sim}{x}$ で

狭義受動的，かつ強圧的であることが必要十分である。

(証明). $\underset{\sim}{y}$ がある領域 R_i の内点であるとすると，仮定より $J^{(i)}$ は正定値となる。従って，任意の $\underset{\sim}{x} \in R_i$ に対して，$r_1 > 0$ が存在し

$$\text{(2.4)} \quad \langle \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) - \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{y}), \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y} \rangle = \langle J^{(i)}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}), \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y} \rangle \geqq r_1 \| \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y} \|^2$$

となる。R_i 以外のすべての非有界領域を $R_1, \cdots, R_k$ とし，R_j，$j = 1, \cdots, k$，の境界である $(n-1)$ 次元の辺（$n-1$ dimensional face）の集合を $B_j = \{ H_1^{(j)}, \cdots, H_{r_j}^{(j)} \}$ とする。$p > 0$ を $p > \max\limits_{j=1,\cdots,k} \max\limits_{i=1,\cdots,r_j} d(\underset{\sim}{0}, H_i^{(j)})$，ただし $d(\underset{\sim}{0}, H_i^{(j)})$ は原点 $\underset{\sim}{0} \in R^n$ と閉集合 $H_i^{(j)}$ とのユークリッド距離，としたとき $r > 0$ を p より十分大きな数として，開球 Q，$Q = \{ \underset{\sim}{x} \in R^n \mid \| \underset{\sim}{x} \| < r \}$，をすべての有界領域を含むようにとる。任意の非有界領域 R_j で $R_j \cap \overline{Q} = W_j$ とすると，$W_j \cap H_i^{(j)} \neq \phi$，$i = 1, \cdots, r_j$.

従って，任意の $\underset{\sim}{x} \in R_j - \overline{Q}$ に対して，$\underset{\sim}{v} \in W_j$ が存在して，半直線 $L_x = \{\underset{\sim}{y} \mid \underset{\sim}{y} = \lambda\underset{\sim}{x} + (1-\lambda)\underset{\sim}{v},\ \lambda \geqq 0\}$ は R_j に含まれる。単位ベクトルの集合 A を

$$A = \left\{\underset{\sim}{d} \mid \underset{\sim}{d} = \frac{\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{v}}{\|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{v}\|},\ \underset{\sim}{x} \in R_j - Q,\ \underset{\sim}{v} \in W_j,\ \underset{\sim}{x} \neq \underset{\sim}{v}\right\}$$

とすると，任意の $\underset{\sim}{x} \in R_j - Q$ に対し $\underset{\sim}{d} \in A$，$\underset{\sim}{v} \in W_j$ が存在して，$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{v} + \lambda\underset{\sim}{d}$ とかける。Aは閉集合であることがつぎのようにして判る。開球 $Q' \supset \overline{Q}$ を考えると，上に述べたことより，

$$A = A' = \left\{\underset{\sim}{d} \mid \underset{\sim}{d} = \frac{\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{v}}{\|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{v}\|},\ \underset{\sim}{x} \in Q' \cap R_j - Q,\ \underset{\sim}{v} \in W_j\right\}$$

$\underset{\sim}{d}^{(0)}$ に収束する $\underset{\sim}{d}^{(i)} \in A'$ の系列 $\{\underset{\sim}{d}^{(i)}\}$，

$$\underset{\sim}{d}^{(i)} = \frac{\underset{\sim}{x}^{(i)} - \underset{\sim}{v}^{(i)}}{\|\underset{\sim}{x}^{(i)} - \underset{\sim}{v}^{(i)}\|},\quad \underset{\sim}{x}^{(i)} \in Q' \cap R_j - Q,\ \underset{\sim}{v}^{(i)} \in W_j$$

とすると，$\overline{Q'} \cap R_j - Q$，$W_j$ のコンパクト性より，$\{\underset{\sim}{x}^{(i)}\}$，$\{\underset{\sim}{v}^{(i)}\}$ の集積点 $\underset{\sim}{x}^{(0)} \in Q' \cap R_j - Q$，$\underset{\sim}{v}^{(0)} \in W_j$ が存在し

$$\underset{\sim}{d}^{(0)} = \frac{\underset{\sim}{x}^{(0)} - \underset{\sim}{v}^{(0)}}{\|\underset{\sim}{x}^{(0)} - \underset{\sim}{v}^{(0)}\|},$$

従って，$d^{(0)} \in A'$ となり，A' すなわち A は閉集合である。

いま，$R^n - Q$ で $\underset{\sim}{f}$ が一様単調的でないとすると，ある非有界領域 R_j で，正の数 ε_i の系列 $\{\varepsilon_i\}$，$\lim_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0$，と $R_j - Q$ の点の系列 $\{\underset{\sim}{x}^{(i)}\}$，$\lim_{i\to\infty} \|\underset{\sim}{x}^{(i)}\| = \infty$ が存在し，

$$(2.5)\qquad \langle \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^{(i)}) - \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{u}), \underset{\sim}{x}^{(i)} - \underset{\sim}{u} \rangle \leqq \varepsilon_i \|\underset{\sim}{x}^{(i)} - \underset{\sim}{u}\|^2.$$

先に述べたように，$\underset{\sim}{v}^{(i)} \in W_j$，$\underset{\sim}{d}^{(i)} \in A$ が存在して，$\underset{\sim}{x}^{(i)}$ は

$$\underset{\sim}{x}^{(i)} = \underset{\sim}{v}^{(i)} + \lambda_i \underset{\sim}{d}^{(i)}$$

と表わせる。ここで，$\lim_{i\to\infty} \lambda_i = \infty$.

(2.5)より

$$(2.6)\qquad \langle \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^{(i)}) - \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{u}), \underset{\sim}{x}^{(i)} - \underset{\sim}{u} \rangle$$

$$= \lambda_i^2 \langle J^{(j)} \underset{\sim}{d}^{(i)}, \underset{\sim}{d}^{(i)} \rangle + \lambda_i \{ \langle \underset{\sim}{K}^{(i)}, \underset{\sim}{d}^{(i)} \rangle + \langle J^{(j)} \underset{\sim}{d}^{(i)}, \underset{\sim}{k}^{(i)} \rangle \}$$

$$+ \langle \underset{\sim}{K}^{(i)}, \underset{\sim}{k}^{(i)} \rangle \leqq \lambda_i^2 \varepsilon^{(i)} \| \underset{\sim}{d}^{(i)} + \frac{\underset{\sim}{k}^{(i)}}{\lambda_i} \|^2$$

ただし，$\underset{\sim}{K}^{(i)} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{v}^{(i)}) - \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{u})$，$\underset{\sim}{k}^{(i)} = \underset{\sim}{v}^{(i)} - \underset{\sim}{u}$

(2.6)，および A のコンパクト性より $\lim_{i\to\infty} \underset{\sim}{d}^{(i)} = \underset{\sim}{d}^{(\infty)} \in A$ が存在し

$$(2.7)\qquad \langle J^{(j)} \underset{\sim}{d}^{(\infty)}, \underset{\sim}{d}^{(\infty)} \rangle \leqq 0$$

$\lim_{i\to\infty} \underset{\sim}{v}^{(i)} = \underset{\sim}{v}^{(\infty)}$ とすると、R_j は閉集合であるから

任意の $\lambda \geqq 0$ に対し、$\underset{\sim}{x}_\lambda = \underset{\sim}{v}^{(\infty)} + \lambda \underset{\sim}{d}^{(\infty)} \in R_j$.

一方、仮定より、$\underset{\sim}{f}$ は強圧的であるから

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\langle \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}_\lambda), x_\lambda \rangle}{\| x_\lambda \|} = \infty$$

従って、$\langle J^{(j)} \underset{\sim}{d}^{(\infty)}, \underset{\sim}{d}^{(\infty)} \rangle \quad > 0$ となり (2.7)式に矛盾する。これより、任意の $\underset{\sim}{x} \in R^n - Q$ に対して、$\gamma_2 > 0$ が存在し、

$$(2.8) \quad \langle \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) - \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{u}), \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{u} \rangle \geqq \gamma_2 \| \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{u} \|^2$$

となる。$\overline{Q - R_i}$ のコンパクト性および、$\underset{\sim}{f}$ が $\underset{\sim}{u} \in R_i$ で狭義単調的であるという仮定より、$\min_{\underset{\sim}{x} \in \overline{Q-R_i}} \langle \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) - \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{u}), \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{u} \rangle = k > 0$, $\max_{x \in \overline{Q-R_i}} \| \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{u} \|^2 = K$ が存在し、$\gamma_3 = \frac{k}{K} > 0$ とすると、

$$(2.9) \quad \langle \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) - \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{u}), \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{u} \rangle \geqq \gamma_3 \| \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{u} \|^2$$

となる。$\gamma = \min(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ とすると、式 (2.4), (2.8), (2.9) より、任意の $\underset{\sim}{x} \in R^n$ に対し、

$$\langle \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) - \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{u}), \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{u} \rangle \geqq \gamma \| \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{u} \|^2 .$$

$\underset{\sim}{u}$ がある領域 R_i の境界上にある場合を考える。

$\underset{\sim}{u}$ を含む任意の開球を Q とし，Q の中で $\underset{\sim}{f}$ が一様受動的でないとすれば，一般性を失うことなく，$R_i \cap Q$ の中に系列 $\{\underset{\sim}{x}^{(k)}\}$ が存在して，正の数 ε_k の系列 $\{\varepsilon_k\}$，$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$，に対して

$$(2.10) \quad \langle \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^{(k)}) - \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{u}), \underset{\sim}{x}^{(k)} - \underset{\sim}{u} \rangle \leqq \varepsilon_k \| \underset{\sim}{x}^{(k)} - \underset{\sim}{u} \|^2 .$$

単位ベクトル $\underset{\sim}{d}^{(k)}$ を $\underset{\sim}{d}^{(k)} = \dfrac{\underset{\sim}{x}^{(k)} - \underset{\sim}{u}}{\| \underset{\sim}{x}^{(k)} - \underset{\sim}{u} \|}$ とする。

$R_i \cap \bar{Q}$ の中で，$\underset{\sim}{d}^{(k)}$ の集積点 $\underset{\sim}{d}^{(\infty)}$ が存在して，(2.10) より

$$(2.11) \quad \langle J^{(i)} \underset{\sim}{d}^{(\infty)}, \underset{\sim}{d}^{(\infty)} \rangle = 0 \quad 。$$

R_i は n 次元凸多面体の領域だから十分小さな $r > 0$ に対し，

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{u} + r \underset{\sim}{d}^{(\infty)} \in R_i$$

となり，(2.11) より

$$\langle \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) - \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{u}), \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{u} \rangle = 0 \quad 。$$

これは，$\underset{\sim}{f}$ が $\underset{\sim}{u}$ で狭義受動的である仮定に矛盾する。

$R^n - Q$ で一様受動的であることは，先と同様にして証明

できる。 (証終)

全領域でJacobian行列が特異であるとすると，$\underset{\sim}{f}$は明らかに全射ではない。本章で考察する区分的線形写像はこのような特別なものを含まないものと仮定する。次の性質は，次節で区分的線形写像の写像度を定義するときに必要な性質である。

性質7. $\underset{\sim}{f}: R^n \to R^n$を連続な区分的線形写像とする。$\underset{\sim}{f}$は，少くとも1つの領域で非特異なJacobian行列をもつものと仮定する。$B \subset R^n$を$(n-1)$次元境界超平面上のすべての点の集合とし，$E \subset R^n$を特異なJacobian行列をもつ領域のすべての点の集合とすると

$$\underset{\sim}{f}(E) \subseteq \underset{\sim}{f}(B)$$

である。

(証明). 特異なJacobian行列をもつ領域をR_kとしたとき，R_kの任意の内点$\underset{\sim}{x}^*$に対して，$\underset{\sim}{x}' \in B$が存

在して $f(x')=f(x^*)$ となることをしめせば十分である。

H を法線ベクトル γ をもつ R_k の $(n-1)$ 次元境界超平面とする。$J^{(k)}$ の階数が 0 ならば，任意の $x' \in H$ は，$f(x')=f(x^*)$ となる。いま，$J^{(k)}$ の階数を $n-p$，$1 \leqq p \leqq n-1$，とすると，$J^{(k)} v = 0$ の解の集合 V は p 次元ベクトル空間となる。次の２つの場合について考える。

(1). V のすべてのベクトルが γ と直交する場合。

p 次元超平面 $H_p = \{x \in R^n \mid x = x^* + v,\ v \in V\}$ がどの $(n-1)$ 次元境界超平面とも交わらないとすると，すべての境界超平面は H_p と平行であることになる。$x' \in H$ に対し，H_p と平行な p 次元超平面 $\{x \in R^n \mid x = x' + v,\ v \in V\}$ は H に含まれる。f の連続性より，R_k の隣接領域 R_l の Jacobian 行列 $J^{(l)}$ の階数は高々 $n-p$ である。これを続けて，全領域まで考えると，すべての境界超平面は H_p と平行であるから，

全 Jacobian 行列は特異となり仮定に矛盾する。

従って，p次元超平面 H_p は少くとも1つの(n−1)次元境界超平面と交わり，その交わりに含まれる任意の $\underset{\sim}{x}'$ で $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}')=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^*)$ となる。

(2). $\underset{\sim}{v}\in V$ が存在し，$\underset{\sim}{v}$ は R_k のどれかの境界超平面の法線ベクトル $\underset{\sim}{c}$ と直交していない場合。この場合は，直線 $\{\underset{\sim}{x}\in R^n \mid \underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{x}^*+\lambda\underset{\sim}{v},\ -\infty<\lambda<\infty\}$ はどれかの境界超平面と交わり，その交わりに含まれる任意の $\underset{\sim}{x}'$ で $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}')=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^*)$ となる。（証 終）

[注]. 連続な区分的線形写像 $\underset{\sim}{f}:R^n\to R^n$ が全射である場合，(n−1)次元境界超平面の集合Bの像 $\underset{\sim}{f}(B)$ は，Jacobian 行列が非特異な領域の境界の像と一致するから，性質7よりも強いつぎのような性質が得られる。任意の $\underset{\sim}{x}^*\in B\cup E$ に対し，Jacobian 行列が非特異な領域の境界超平面上の点 $\underset{\sim}{x}'$ が

存在し, $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}')=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^*)$ となる。

しかし $\underset{\sim}{f}$ が全射でない場合, 次の例でしめされるように このようなことは一般に成り立たない。

<u>例1.</u> 全空間 R^2 が x_1-軸, x_2-軸, および直線 $x_1=x_2$ で6個の領域に分けられ, 各領域で $\underset{\sim}{f}(x_1, x_2)=(y_1, y_2)$ がつぎのように表わせているとする。

R_1: $y_1=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$, $y_2=2x_2$

R_2: $y_1=x_1$, $y_2=x_1+x_2$

R_3: $y_1=0$, $y_2=x_2$

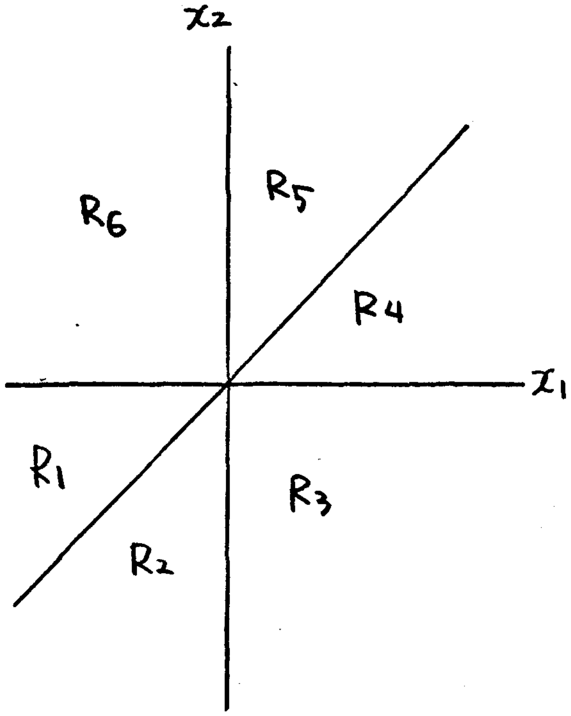
R_4: $y_1=x_2$, $y_2=x_2$

R_5: $y_1=x_1$, $y_2=x_1$

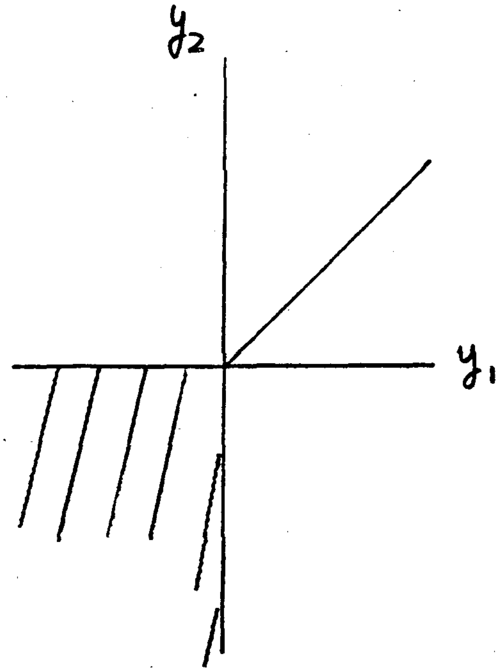
R_6: $y_1=\frac{1}{2}x_1$, $y_2=0$

領域 R_1, R_2 は非特異な Jacobian 行列をもち, $\underset{\sim}{f}$ はハルム強圧的ではないことに注意する。$\underset{\sim}{f}(R^2)$ のうち R_4, R_5 の像 $\{(y_1, y_2) \mid y_1=y_2=\lambda,\ \lambda \geqq 0\}$ の点 (λ, λ),

$\lambda > 0$ に対し, R_1, R_2 の境界上の点で f の値が (λ, λ) となる点は存在しない。



X - space



Y- space

Fig. 1　例1の図示

2.3 区分的線形写像の写像度と存在定理

本節では，まず R^n から R^n への連続な区分的線形写像 $\boldsymbol{f}$ であらわせる方程式

$$(2.12) \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$$

について，任意の $\boldsymbol{y} \in R^n$ に対して，解が存在するかどうかという問題を考察する。

$C \subset R^n$ を有界な開集合とし，$\boldsymbol{y} \notin \boldsymbol{f}(B) \cap \boldsymbol{f}(\partial C)$ とする。前節，性質7より $\boldsymbol{y}$ に対し，式(2.12)の C の中に含まれる解は高々有限個である。集合 Γ を $\Gamma = \{\boldsymbol{x} \in C \mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\}$ とし，$J^{(i)}$ を解 $\boldsymbol{x}^{(i)}$ の含まれる領域の Jacobian 行列とする。

次の式で定義される整数を $\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{y}$ における C に関する写像度とよぶ。

$$(2.13) \qquad \deg(\boldsymbol{f}, C, \boldsymbol{y}) \triangleq \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \operatorname{sgn} \det J^{(i)}, & \Gamma = \{\boldsymbol{x}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{x}^{(m)}\} \\ 0, & \Gamma = \phi \end{cases}$$

連続写像の写像度の解析的な定義は文献[25]の中で付録A1-2の形で与えられている。次の定理でしめされるようにA1-2の定義は $\underset{\sim}{y} \notin \underset{\sim}{f}(B) \cup \underset{\sim}{f}(\partial C)$ については(2.13)の定義と一致する。

<u>定理1</u>[18]. $\underset{\sim}{f}: R^n \to R^n$ を連続な区分的線形写像とする。$C \subset R^n$ を有界な開集合, $\underset{\sim}{y} \notin \underset{\sim}{f}(B) \cup \underset{\sim}{f}(\partial C)$ とする。$\underset{\sim}{f}$ の $\underset{\sim}{y}$ における C に関するA1-2で与えられた写像度 $\deg_A(\underset{\sim}{f}, C, \underset{\sim}{y})$ は(2.13)の $\deg(\underset{\sim}{f}, C, \underset{\sim}{y})$ に一致する。

(証明). 集合 Γ を $\Gamma = \{\underset{\sim}{x} \in C \mid \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{y}\}$ とする。$\bar{C}$ で $\underset{\sim}{f}$ に一様に収束する C^1 級写像の系列を $\{\underset{\sim}{f}^{(k)}\}$ とする。すなわち,

$$\| \underset{\sim}{f}^{(k)} - \underset{\sim}{f} \|_{\bar{C}} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

$\Gamma = \phi$ とする。k_0 が存在して, $k \geq k_0$ ならば, $\underset{\sim}{f}^{(k)}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{y}$ は C の中で解をもたないことを示す。そうでないとすれば, $k_1 < k_2 < \cdots$ があり, $\underset{\sim}{f}^{(k_i)}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{y}$

が、C の中で解 $\underset{\sim}{x}^{(i)}$ を持つ。したがって

$$\|\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^{(i)})-\underset{\sim}{y}\| = \|\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^{(i)})-\underset{\sim}{f}^{(k_i)}(\underset{\sim}{x}^{(i)})\| \leqq \|\underset{\sim}{f}-\underset{\sim}{f}^{(k_i)}\|_{\bar{C}}$$

$\bar{C}$ はコンパクトであるから $\{\underset{\sim}{x}^{(i)}\}$ の集積点 $\underset{\sim}{x}^{(\infty)} \in \bar{C}$ が存在し，上式より $\|\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^{(\infty)})-\underset{\sim}{y}\|=0$ 。$\underset{\sim}{y} \notin \underset{\sim}{f}(\partial C)$ だから，$\Gamma=\phi$ の仮定に矛盾する。したがって，十分大きな k_0 に対し，$k>k_0$ で $\{\underset{\sim}{x} \in C \mid \underset{\sim}{f}^{(k)}(x)=\underset{\sim}{y}\}=\phi$ となり、付録 A1-3 より

$$\deg_A(\underset{\sim}{f}^{(k)}, C, \underset{\sim}{y})=0 \qquad , k>k_0$$

故に

$$\begin{aligned}\deg_A(\underset{\sim}{f}, C, \underset{\sim}{y}) &= \lim_{k\to\infty} \deg_A(\underset{\sim}{f}^{(k)}, C, \underset{\sim}{y}) \\ &= 0 \\ &= \deg(\underset{\sim}{f}, C, \underset{\sim}{y})\end{aligned}$$

となる。

つぎに，$\Gamma=\{\underset{\sim}{x}^{(1)}, \cdots, \underset{\sim}{x}^{(m)}\}$ の場合を考える。各 $\underset{\sim}{x}^{(i)}$ は非特異な Jacobian 行列 $J^{(i)}$ をもつ異った領域の内点である。$\delta_1>\delta_2$ を正の数とし，$i=1,\cdots,m$ に

対して，$\underset{\sim}{x}^{(i)}$ を中心とし，半径 δ_1 の閉球が R_i の内部に含まれるものとする。集合 P_i，Q_i をそれぞれ，$P_i=\{\underset{\sim}{x}\in R^n \mid \|\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}^{(i)}\|<\delta_2\}$，$Q_i=\{\underset{\sim}{x}\in R^n \mid \|\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}^{(i)}\|>\delta_1\}$ とすると，R^n から $[0,1]$ への関数 $\varphi_i(\underset{\sim}{x})=d^2(\underset{\sim}{x},\overline{Q_i})/(d^2(\underset{\sim}{x},\overline{P_i})+d^2(\underset{\sim}{x},\overline{Q_i}))$ は連続微分可能である。$\varphi(\underset{\sim}{x})=\sum_{j=1}^{m}\varphi_j(\underset{\sim}{x})$ とし，$\hat{\underset{\sim}{f}}^{(k)}=\varphi\underset{\sim}{f}+(1-\varphi)\underset{\sim}{f}^{(k)}$，$k=1,2,\cdots$，とすると $\hat{\underset{\sim}{f}}^{(k)}$ は R^n から R^n への C^1-級写像となり，明らかに

$\lim_{k\to\infty}\|\hat{\underset{\sim}{f}}^{(k)}-\underset{\sim}{f}\|_C=0$。また，任意の $\underset{\sim}{x}\in P=P_1\cup P_2\cup\cdots\cup P_m$ に対して $\hat{\underset{\sim}{f}}^{(k)}(\underset{\sim}{x})=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})$。

$\Gamma=\phi$ の場合と同様に $\overline{C}-P$ のコンパクト性より，十分大きな k_0 に対して，$\hat{\underset{\sim}{f}}^{(k)}(\underset{\sim}{x})=\underset{\sim}{y}$，$k>k_0$，は $C-P$ の中に解を持たない。従って，$k>k_0$ に対し，$\{\underset{\sim}{x}\in C \mid \hat{\underset{\sim}{f}}^{(k)}(\underset{\sim}{x})=\underset{\sim}{y}\}=\{\underset{\sim}{x}^{(1)},\cdots,\underset{\sim}{x}^{(m)}\}=\Gamma$ となり，明らかに $\left.\dfrac{\partial\hat{\underset{\sim}{f}}^{(k)}}{\partial\underset{\sim}{x}}\right|_{\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{x}^{(i)}}=J^{(i)}$ であるから，付録A1-3より，

$$\deg_A(\hat{\underset{\sim}{f}}^{(k)},C,\underset{\sim}{y})=\sum_{i=1}^{m}\operatorname{sgn}\det\left.\frac{\partial\hat{\underset{\sim}{f}}^{(k)}}{\partial\underset{\sim}{x}}\right|_{\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{x}^{(i)}}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \operatorname{sgn} \det J^{(i)}, \qquad k > k_0$$

故に、 $$\deg_A(\underset{\sim}{f}, C, \underset{\sim}{y}) = \lim_{k\to\infty} \deg_A(\hat{\underset{\sim}{f}}^{(k)}, C, \underset{\sim}{y})$$
$$= \deg(\underset{\sim}{f}, C, \underset{\sim}{y})$$ （証終）

定理１より (2.13) で与えた区分的線形写像の写像度の定義は一般の連続写像の写像度の定義と矛盾せず、連続写像の写像度の諸性質はこの場合に保存されるが、特に付録A2-3で示した写像度の不変性は本節の考察において重要である。

R^n から R^n への連続な区分的線形写像 $\underset{\sim}{f}$ がノルム強圧的である場合，任意の $\underset{\sim}{x} \in R^n$ に対して，$\underset{\sim}{f}^{-1}(\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}))$ は R^n のコンパクト集合である。$X(\underset{\sim}{f}, \underset{\sim}{x})$ を $\underset{\sim}{x}$ を含む $\underset{\sim}{f}^{-1}(\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}))$ の極大連結集合，すなわち，連結成分とすると[26]，有界な開集合 C が存在して，$X(\underset{\sim}{f}, \underset{\sim}{x}) \subset C$，$\bar{C} \cap [\underset{\sim}{f}^{-1}(\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})) - X(\underset{\sim}{f}, \underset{\sim}{x})] = \phi$ となる。[26]

定理2.[18] 連続な区分的線形写像 $f: R^n \to R^n$ がノルム強圧的であるとし，$f(x)=y$ とする。C を有界な開集合で $C \supset X(f,x)$，$\bar{C} \cap [f^{-1}(f(x)) - X(f,x)] = \phi$ とすると，y の開近傍 U が存在して，任意の $y^{(1)}$，$y^{(2)} \in U - f(B)$ に対して

$$\deg(f, C, y^{(1)}) = \deg(f, C, y^{(2)})$$

となる。

(証明)．f の連続性，∂C のコンパクト性 および $y \notin f(\partial C)$ より，y の十分小さな開近傍 U が存在して，$f(\partial C) \cap U = \phi$ となる。従って，写像度の不変性より定理を得る。(証終)

$y^* \in R^n$ と，単位ベクトル $d \in R^n$ に対し

$$L(y^*, d) = \{y \in R^n \mid y = y^* + \lambda d,\ -\infty < \lambda < \infty\}$$

は y^* を通り，d の方向をもつ直線である。

定理2より得られるつぎの定理は，次節でしめす求解

のアルゴリズムの理論的根拠を与えるものであるが，同じく次節で述べるように本章では，この定理によらずアルゴリズムの収束性をしめすから，定理を掲げるだけにとどめ 証明は省略する。

<u>定理3.</u>[18] 連続な区分的線形写像 $f : R^n \to R^n$ がノルム強圧的であるとする。十分小さなすべての $\lambda \neq 0$ に対し，x^* および単位ベクトル α を $f(x^*) + \lambda \alpha \notin f(B)$ とすると，偶数個の単位ベクトル β が存在し，そのおのおのに対し，$y \in X(f, x^*)$ が存在して，十分小さなすべての $\nu > 0$ に対し，$y + \nu \beta \notin X(f, x^*)$，$f(y + \nu \beta) \in L(f(x^*); \alpha)$ となる。

[注]. 次節で考察する問題のために，ここでつぎの2つの場合について考えておくと都合がよい。

(1). x^* が非特異な Jacobian 行列をもつ2つの領域を分ける $(n-1)$ 次元境界超平面 H の $(n-1)$ 次元

凸多面体(convex polyhedral)領域(これを単純な$(n-1)$次元境界超平面とよぶ)の上にある場合について定理3の$\underset{\sim}{\beta}$を考える。Hの法線ベクトルを$\underset{\sim}{\lambda}$，2つの領域R_1，R_2のJacobian行列をそれぞれ$J^{(1)}$，$J^{(2)}$とすると，任意の単位ベクトル$\underset{\sim}{\alpha}$に対して次式が成り立つ。[14]

$$\langle J^{(2)^{-1}}\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{\lambda} \rangle = \frac{\det J^{(1)}}{\det J^{(2)}} \langle J^{(1)^{-1}}\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{\lambda} \rangle$$

まず，$\det J^{(1)} \cdot \det J^{(2)} > 0$の場合を考える。

$\langle J^{(2)^{-1}}\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{\lambda} \rangle > 0$ならば，十分小さなすべての$\nu > 0$に対して，$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^* + \nu J^{(2)^{-1}}\underset{\sim}{\alpha}) = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^*) + \nu\underset{\sim}{\alpha}$で，しかもCの中でこれが成り立つベクトルは$J^{(2)^{-1}}\underset{\sim}{\alpha}$のみである。同様に，十分小さなすべての$\nu > 0$に対し，$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^* + \nu(-J^{(1)^{-1}}\underset{\sim}{\alpha})) = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^*) - \nu\underset{\sim}{\alpha}$で$-J^{(1)^{-1}}\underset{\sim}{\alpha}$はCの中でこれが成り立つ唯一のベクトルである。したがって，この場合は2つの$\underset{\sim}{\beta}$が存在することになる。$\langle J^{(2)^{-1}}\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{\lambda} \rangle < 0$の場合も

同様に考えられる。$\langle J^{(2)^{-1}}\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{\ell}\rangle = \langle J^{(1)^{-1}}\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{\ell}\rangle = 0$ の場合，十分小さな $\nu > 0$ に対し，$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^*) + \nu\underset{\sim}{\alpha}$ は境界超平面Hの上にあるが，$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^* + \nu J^{(2)^{-1}}\underset{\sim}{\alpha}) = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^* + \nu J^{(1)^{-1}}\underset{\sim}{\alpha}) = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^*) + \nu\underset{\sim}{\alpha}$，$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^* + \nu(-J^{(2)^{-1}}\underset{\sim}{\alpha})) = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^* + \nu(-J^{(1)^{-1}}\underset{\sim}{\alpha})) = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^*) - \nu\underset{\sim}{\alpha}$ となり，$J^{(1)^{-1}}\underset{\sim}{\alpha} = J^{(2)^{-1}}\underset{\sim}{\alpha}$ であるから，この場合も2つの β が存在することになる。つぎに，$\det J^{(1)} \cdot \det J^{(2)} < 0$ の場合を考える。$\langle J^{(2)^{-1}}\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{\ell}\rangle > 0$ の場合，十分小さな $\nu > 0$ に対し $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^* + \nu J^{(2)^{-1}}\underset{\sim}{\alpha}) = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^* + \nu J^{(1)^{-1}}\underset{\sim}{\alpha}) = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^*) + \nu\underset{\sim}{\alpha}$ となる。C の中に，$J^{(2)^{-1}}\underset{\sim}{\alpha}$，$J^{(1)^{-1}}\underset{\sim}{\alpha}$ 以外にこの式を成り立たせるベクトルは存在しない。十分小さな $\nu > 0$ に対し，$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^*) - \nu\underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^* + \nu\underset{\sim}{\beta})$ となる $\underset{\sim}{\beta}$ は存在しないから，この場合も $\underset{\sim}{\beta}$ は2つ存在する。$\langle J^{(2)^{-1}}\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{\ell}\rangle < 0$ の場合については，十分小さな $\nu > 0$ に対し，$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^* + \nu(-J^{(2)^{-1}}\underset{\sim}{\alpha})) = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^* + \nu(-J^{(1)^{-1}}\underset{\sim}{\alpha})) = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^*)$

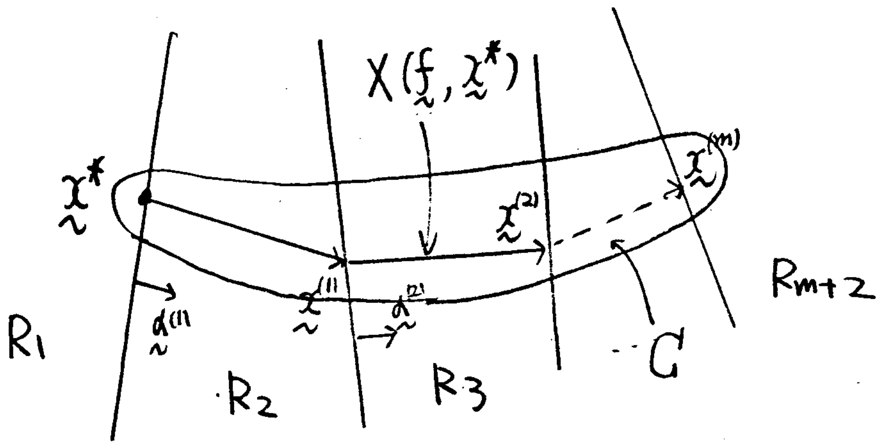
$-\nu\underset{\sim}{\alpha}$ および $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^*)+\nu\underset{\sim}{\alpha}=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^*+\nu\underset{\sim}{\beta})$ となる $\underset{\sim}{\beta}$ は存在しないことより，β は2つ存在することになる。

$\langle J^{(2)-1}\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{x}\rangle = 0$ の場合は先に考察した通りである。従って，$\underset{\sim}{x}^*$ が非特異な Jacobian 行列をもつ隣接する2つの領域に共通な単純な $(n-1)$ 次元境界超平面の上にあるときは，十分小さな $\nu>0$ と，単位ベクトル $\underset{\sim}{\alpha}$ に対し，それぞれの領域に $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^*)+\nu\underset{\sim}{\alpha}$ または，$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^*)-\nu\underset{\sim}{\alpha}$ の解が必ず1つづつ存在することになる。

(2). $\underset{\sim}{x}^*$ が非特異な Jacobian 行列 $J^{(1)}$ をもつ領域 R_1 とそれに隣接する Jacobian 行列 $J^{(2)}$ の階数が $n-1$ である領域 R_2 との単純な $(n-1)$ 次元境界超平面の上にある場合。この場合，$J^{(2)}\underset{\sim}{\alpha}^{(1)}=\underset{\sim}{0}$ となる単位ベクトル $\underset{\sim}{\alpha}^{(1)}$ が一意に定まる。半直線 $\{\underset{\sim}{x}\in R^n \mid \underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{x}^*+\lambda\underset{\sim}{\alpha},\ \lambda\geq 0\}$ が R_2 に隣接する領域 R_3 の

単純な境界と交わったとし，その点を $\underset{\sim}{x}^{(1)}$ とする。$J^{(3)}$ の階数が $n-1$ ならば，$J^{(3)}\underset{\sim}{\alpha}^{(2)}=0$ となる単位ベクトル $\underset{\sim}{\alpha}^{(2)}$ を求めて先と同様の手順をくりかえす。$\underset{\sim}{f}$ はノルム強圧的であるから必ず有限回の手順で，$\underset{\sim}{x}^{(m-1)}+\lambda\underset{\sim}{\alpha}^{(m-1)}$，$\lambda\geqq 0$ は非特異な Jacobian 行列をもつ領域 R_{m+2} と交わる。その点を $\underset{\sim}{x}^{(m)}$ とする。$X(\underset{\sim}{f},\underset{\sim}{x}^{*})$ は有限個の連結な線分の集合 $\{[\underset{\sim}{x}^{(1)},\underset{\sim}{x}^{(2)}],[\underset{\sim}{x}^{(2)},\underset{\sim}{x}^{(3)}],\cdots[\underset{\sim}{x}^{(m-1)},\underset{\sim}{x}^{(m)}]\}$ となる。定理3で C を $C\supset X(\underset{\sim}{f},\underset{\sim}{x}^{*})$，$C\subset R_1\cup R_2\cdots\cup R_{m+2}$ とすると，十分小さな $\nu>0$ に対し，β は2つ存在することが容易に判る。

従って，この場合も，十分小さな $\nu>0$ および，任意の単位ベクトル $\underset{\sim}{\alpha}$ に対し，$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^{*})+\nu\underset{\sim}{\alpha}$ または $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^{*})-\nu\underset{\sim}{\alpha}$ の解は R_1，R_{m+2} の中に必ず1つづつ存在する。（Fig.2 参照）



$$\mathrm{rank}\, J^{(1)} = \mathrm{rank}\, J^{(m)} = n$$
$$\mathrm{rank}\, J^{(2)} = \cdots = \mathrm{rank}\, J^{(m-1)} = n-1$$

Fig. 2　注. (2) の図解

$\boldsymbol{y} \in R^n - \boldsymbol{f}(B)$ とする。$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ の解は R^n の中で高々有限個である。このことより，次の大域的写像度の定義が得られる。集合 Γ を $\Gamma = \{\boldsymbol{x} \in R^n \mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\}$ とし，$J^{(i)}$ を解 $\boldsymbol{x}^{(i)}$ の存在する領域の Jacobian 行列とするとき次式で定義される整数を $\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{y}$ における写像度という。

(2.14)
$$\deg(\boldsymbol{f}, R^n, \boldsymbol{y}) \triangleq \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \mathrm{sgn}\, \det J^{(i)}, & \Gamma = \{\boldsymbol{x}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{x}^{(m)}\} \\ 0, & \Gamma = \phi \end{cases}$$

定理4. 連続な区分的線形写像 $\underset{\sim}{f}: R^n \to R^n$ がノルム強圧的ならば，任意の $\underset{\sim}{y}^{(1)}, \underset{\sim}{y}^{(2)} \in R^n - \underset{\sim}{f}(B)$ に対し

$$\deg(\underset{\sim}{f}, R^n, \underset{\sim}{y}^{(1)}) = \deg(\underset{\sim}{f}, R^n, \underset{\sim}{y}^{(2)})$$

となる。

(証明). $\underset{\sim}{f}$ はノルム強圧的であるから $\underset{\sim}{0}$ を中心にもつ十分大きな開球 C が存在し，

$$\deg(\underset{\sim}{f}, R^n, \underset{\sim}{y}^{(1)}) = \deg(\underset{\sim}{f}, C, \underset{\sim}{y}^{(1)})$$

$$\deg(\underset{\sim}{f}, R^n, \underset{\sim}{y}^{(2)}) = \deg(\underset{\sim}{f}, C, \underset{\sim}{y}^{(2)}),$$

$$\{\underset{\sim}{y} \in R^n \mid \underset{\sim}{y} = \lambda \underset{\sim}{y}^{(1)} + (1-\lambda)\underset{\sim}{y}^{(2)},\ 0 \leqq \lambda \leqq 1\} \cap \underset{\sim}{f}(\partial C) = \phi$$

となる。従って，写像度の不変性より

$$\begin{aligned}\deg(\underset{\sim}{f}, R^n, \underset{\sim}{y}^{(1)}) &= \deg(\underset{\sim}{f}, C, \underset{\sim}{y}^{(1)}) \\ &= \deg(\underset{\sim}{f}, C, \underset{\sim}{y}^{(2)}) \\ &= \deg(\underset{\sim}{f}, R^n, \underset{\sim}{y}^{(2)})\end{aligned}$$

(証終)

定理5.[18] 連続な区分的線形写像 $\underset{\sim}{f}: R^n \to R^n$ がノルム強圧的であるとする。すべての非有界領域 $R_1, \cdots, R_p$ で，

$$\det J^{(i)} \geqq 0 \quad , \quad i=1,\cdots,p$$

ただし，少くとも1つの $i \in \{1,\cdots,p\}$ で $\det J^{(i)} > 0$ ならば，$\underset{\sim}{f}$ は R^n から R^n への全射である。

(証明). 非有界領域 R_i で $\det J^{(i)} > 0$ であるとする。$\underset{\sim}{f}$ はノルム強圧的であるから，$\underset{\sim}{y} \in R_i$ が存在して，

$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{y}) \notin \underset{\sim}{f}(B)$，また，$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{y})$ の解がすべて非有界領域の中に存在するようにできる。明らかに，

$\deg(\underset{\sim}{f}, R^n, \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{y})) > 0$ であるから定理4より任意の $\underset{\sim}{y} \in R^n - \underset{\sim}{f}(B)$ に対して，$\deg(\underset{\sim}{f}, R^n, \underset{\sim}{y}) > 0$. 付録A2-1 [Kronecker の定理] より，任意の $\underset{\sim}{y} \in R^n - \underset{\sim}{f}(B)$ に対して，$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{y}$ は R^n の中に解をもつ。$\underset{\sim}{y} \in \underset{\sim}{f}(B)$ に対しては明らかに $\underset{\sim}{x} \in B$ が存在して，$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{y}$ となるから定理の結果を得る。(証終)

<u>系.</u> $\underset{\sim}{f}$ を R^n から R^n への連続な区分的線形写像とする。すべての非有界領域 $R_1,\cdots,R_p$ で，$\det J^{(i)} > 0$，$i=1,\cdots,p$,

ならば、$\underset{\sim}{f}$ は R^n から R^n への全射である。

(証明)、仮定より、$\underset{\sim}{f}$ はノルム強圧的であるから前定理より明らか。 (証終)

[注]. この系は文献[14]の定理5を特別な場合として含む。

次の定義は、次節で考察する求解のアルゴリズムにおいて有効な初期値の条件を示す上で重要なものである。

<u>定義2.</u> $\underset{\sim}{f}$ を R^n から R^n への連続な区分的線形写像とする。次の条件(1), (2), (3)を満す $\underset{\sim}{y} \in R^n$ は $\underset{\sim}{f}$ に関して1-写像度条件を満すという。

(1) $\underset{\sim}{y} \notin B$

(2) 任意の $\underset{\sim}{x} \neq \underset{\sim}{y}$ に対して、 $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) \neq \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{y})$

(3) $\det J > 0$, ここで J は $\underset{\sim}{y}$ の存在する領域の Jacobian 行列である。

[注]. $\deg(\underset{\sim}{f}, R^n, \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{y})) = 1$ を満す $\underset{\sim}{y}$ は必ずしも

1-写像度条件を満すとは限らない。$\underset{\sim}{x}$が1-写像度条件を満しておれば、明らかに $\deg(\underset{\sim}{f}, R^n, \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})) = 1$ である。

次の補題は次節の考察に必要である。

<u>補題1</u>[18]. $\underset{\sim}{f}: R^n \to R^n$ を連続な区分的線形写像でノルム強圧的であるとする。$\underset{\sim}{x} \in R^n$ が $\underset{\sim}{f}$ に関して1-写像度条件を満すとすると、$\underset{\sim}{x}$ の開近傍 N が存在して、N の任意の点は1-写像度条件をみたす。

(証明). $\underset{\sim}{x} \in R_i$ とする。仮定より $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) \notin f(B)$。

R_i の Jacobian 行列 $J^{(i)}$ は非特異であるから、$\underset{\sim}{x}$ の開近傍 U と $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})$ の開近傍 V が存在して、$U \subset R_i$、$V \cap \underset{\sim}{f}(B) = \phi$、また $\underset{\sim}{f}$ は U から V への位相写像となるようにできる。集合 D を $D = \underset{\sim}{f}^{-1}(V)$ とすると、$\underset{\sim}{f}$ はノルム強圧的であるから D は有界な開集合である。$\{\underset{\sim}{y}^{(m)}\} \subset V$ を $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})$ に収束する系列とする。$\underset{\sim}{y}^{(m)}$ に対して、唯一の $\underset{\sim}{x}^{(m)} \in U$ が存在して、$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^{(m)}) = \underset{\sim}{y}^{(m)}$

となる。$m=1,2,\cdots$ に対して $f^{-1}(y^{(m)})$ が少くとも1つの $z^{(m)}$ $\neq x^{(m)}$ をもつものとする。系列 $\{z^{(m)}\}$ はコンパクト集合 $\bar{D}-U$ に含まれ、従って集積点 $z \in \bar{D}-U$ が存在するがこの z に対し $f(z)=\lim_{m\to\infty} f(z^{(m)})=f(x)$ となるから、x が1-写像度条件を満すことに矛盾する。従って、x の開近傍 N および $f(x)$ の開近傍 W が存在し、$N \subset U$, $W \subset V$ で任意の $y \in W$ に対し $f(x)=y$ の解は唯一で N の中に存在する。すなわち N の任意の点は1-写像度条件を満す。 (証終)

<u>定理6.</u>[18] $f: R^n \to R^n$ を連続な区分的線形写像で、ノルム強圧的であるとする。$x \in R^n$ が存在して、1-写像度条件を満すものとすると、f は R^n から R^n への全射である。

(証明). $\deg(f, R^n, f(x))=1$ だから定理4およびKroneckerの定理より容易に証明できる。 (証終)

[注]. f が全射であるためには、$x \in R^n$ が存在して、

$f(y) \notin f(B)$, $\deg(f, R^n, f(y)) \neq 0$ であれば十分であるが，次節で示すように1-写像度条件を満すyは求解のアルゴリズムの有効な初期値を与えるために，定理の表現で存在条件を与えるのが適当である。また，実際の非線形抵抗回路網の回路方程式は定理6の条件を満す場合が多い。[18]

<u>系.</u> $f: R^n \to R^n$ を連続な区分的線形写像とする。

(1) 任意の有界領域 R_i で $\det J^{(i)} > 0$

(2) 任意の非有界領域 R_j で $J^{(j)}$ は正定値

とすると，f は R^n から R^n への位相写像である。

(証明). $r > 0$ として閉球 $\{x \in R^n \mid \|x\| \leq r\}$ がすべての有界領域を含むものとする。$M > 0$ をすべての有界領域のJacobian行列のノルムの最大値とし，$m > 0$ をすべての非有界領域のJacobian行列の対称部の固有値の最小値とする。明らかに，ある非有界領域

R_i の内点 $\underset{\sim}{u}$ で，$\underset{\sim}{u}$ と境界超平面の距離が $2Mr/m$ 以上であるものが存在する。この $\underset{\sim}{u}$ が 1-1 写像条件をみたすことが次の様にして示される。仮定より，$\underset{\sim}{u} \in B$，$\det J^{(i)} > 0$ である。いま，$\underset{\sim}{v} \neq \underset{\sim}{u}$ が存在して，$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{u})$ であると仮定する。線分 L を $L = \{\underset{\sim}{x} \in R^n \mid \underset{\sim}{x} = (1-\lambda)\underset{\sim}{u} + \lambda \underset{\sim}{v}\,;\ 0 \leqq \lambda \leqq 1\}$ とし，区間 $[0, 1]$ を $[\lambda_0 = 0, \lambda_1]$，$[\lambda_1, \lambda_2]$，$\cdots [\lambda_{m-1}, \lambda_m = 1]$ と分割し，L の部分 $\{\underset{\sim}{x} \in R^n \mid \underset{\sim}{x} = (1-\lambda)\underset{\sim}{u} + \lambda \underset{\sim}{v}\,;\ \lambda \in [\lambda_{i-1}, \lambda_i]\}$ が領域 R_i，$i = 1, \cdots, m$ に含まれるものとする。

$\underset{\sim}{u}^{(i)} = (1-\lambda_i)\underset{\sim}{u} + \lambda_i \underset{\sim}{v}$，$i = 0, 1, \cdots, m$，$\underset{\sim}{u}^{(0)} = \underset{\sim}{u}$，$\underset{\sim}{u}^{(m)} = \underset{\sim}{v}$，とすると，

$$\langle \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{u}) - \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{v}),\ \underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{v} \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \langle \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{u}^{(i-1)}) - \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{u}^{(i)}),\ \underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{v} \rangle$$

$\|\underset{\sim}{u}^{(0)} - \underset{\sim}{u}^{(1)}\| = \lambda_1 \|\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{v}\| \geqq 2Mr/m$ であるから

$$上式 \geqq m\lambda_1 \|\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{v}\|^2 - Mr\|\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{v}\|$$

$$\geqq Mr\|\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{v}\| > 0$$

これは矛盾である。従って，x は I-写像度条件をみたす。定理6より f は R^n から R^n への全射となる。また $y \in R^n - f(B)$ に対しては $f(x)=y$ の解は一意であることは，$\deg(f, R^n, y)=1$ および 全 Jacobian 行列の行列式が正であることより明らかである。

$x, v \in B$，$x \neq v$ が存在して，$f(x)=f(v)$ であるとする。文献[14]，定理4より十分小さな $\nu>0$ と任意の単位ベクトル α に対して，単位ベクトル β が存在して，$f(x+\nu\beta)=f(x)+\nu\alpha$．$v$ についても同様に，単位ベクトル β' が存在し，$f(v+\nu\beta')=f(v)+\nu\alpha$．$\alpha$ を $f(x)+\nu\alpha \notin f(B)$ となるように選ぶと，$y=f(x)+\nu\alpha \notin f(B)$ に対して，$f(x)=y$ は2つの解 $x+\nu\beta$，$v+\nu\beta'$ をもつことになり，先に証明したことに矛盾する。従って，f は R^n から R^n への全単射となり，f は連続であるから，f は位相写像となる。

(証終)

つぎに，区分的線形な特性をもつ非線形抵抗素子よりなる区分的線形抵抗回路網の解の存在について考察する。

この回路網の基本カットセット行列を

$$
D_m = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} B_{1t} & B_{2t} & B_{1\bar{t}} & B_{2\bar{t}} \end{array} \\
\begin{bmatrix} I & 0 & F_1 & F_2 \\ 0 & I & 0 & F_3 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} \} B_{1t} \\ \} B_{2t} \end{array}
$$

とすると，キルヒホッフ則は式(1,10)，(1,12)と同様につぎの2つの同値な式(2.15)，(2.16)で表わせる。

$$
(2.15) \qquad \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) = P\underset{\sim}{h}(\underset{\sim}{x}) + Q\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{w}
$$

ここで，

$$
P = \left[\begin{array}{cccc} I & 0 & F_1 & 0 \\ 0 & I & 0 & -F_3^T \\ \hline & & 0 & \end{array}\right] \text{：} n \times n \text{ 実行列}
$$

$$
Q = \begin{bmatrix} 0 & F_2 & 0 & 0 \\ -F_2^T & 0 & 0 & 0 \\ -F_1^T & 0 & I & 0 \\ 0 & F_3 & 0 & I \end{bmatrix} \text{：} n \times n \text{ 実行列}
$$

$\underset{\sim}{h}$ ：R^n から R^n への連続な区分的線形写像

$$(2.16) \qquad \hat{f}(\hat{x}) = C\,h(C^T\hat{x} + \hat{u}) + S\hat{x} = \hat{w}$$

ここで,

$$C = \begin{bmatrix} I & 0 & F_1 & 0 \\ 0 & I & 0 & -F_3^T \end{bmatrix} \quad : m \times n \text{ 実行列}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & F_2 \\ -F_2^T & 0 \end{bmatrix} \quad : m \times m \text{ 実行列}$$

x, $\hat{x}$ は それぞれ n次元, m次元の 回路変数ベクトル, $w = \begin{bmatrix} \hat{w} \\ 0 \end{bmatrix} + \hat{u}$ は n次元 電源ベクトルである。h は 抵抗素子の特性をあらわす R^nからR^nへの連続な区分的線形写像である。h が 強圧的であれば, 2.2節 性質4より $\hat{f}$ は 全強圧的となり, 第1章 定理2より 式(2.16)の $\hat{f}: R^m \to R^m$ は 全射となるから 回路網は 任意の入力 $w = \begin{bmatrix} \hat{w} \\ 0 \end{bmatrix} + \hat{u}$ に対し, 少なくとも1つの解をもつ。 また 2.2節 性質5より h が 狭義単調ならば, $\hat{f}$ は 一様単調となり, 第1章 定理1より $\hat{f}$ は R^mから R^mへの 位相写像となる。従って 狭義単調な特性をもつ 区分的線形抵抗素子よりなる 抵抗回路網は,

任意の入力に対して一意の解をもち，解は入力に連続的に依存する。

回路方程式 (2.15) において，$\hat{h}$ の領域 R_i における Jacobian 行列を $H^{(i)}$，その領域における $\hat{f}$ の Jacobian 行列を $J^{(i)}$ とすると，明らかに

$$J^{(i)} = P H^{(i)} + Q \tag{2.17}$$

である。 $H^{(i)}$ を

$$H^{(i)} = \begin{array}{cc|cl} & \overbrace{\qquad}^{m} & \overbrace{\qquad}^{n-m} & \\ \left[\right. & \begin{array}{c|c} H_{11} & H_{12} \\ \hline H_{21} & H_{22} \end{array} & \left.\right] & \begin{array}{l} \}\, m \\ \}\, n-m \end{array} \end{array} ,$$

P, Q を

$$P = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} m & n-m \end{array} & \\ \left[\begin{array}{c|c} I & A \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0} \end{array}\right] & \begin{array}{l} \}\, m \\ \}\, n-m \end{array} \end{array} , \tag{2.18}$$

$$Q = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} m & n-m \end{array} & \\ \left[\begin{array}{c|c} S & 0 \\ \hline -A^{T} & I \end{array}\right] & \begin{array}{l} \}\, m \\ \}\, n-m \end{array} \end{array}$$

ここで，

$$A = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & -F_3^T \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & F_2 \\ -F_2^T & 0 \end{bmatrix}$$

とすると，$J^{(i)}$ は

$$(2.19) \qquad J^{(i)} = \left[\begin{array}{c|c} H_{11} + AH_{21} + S & H_{12} + AH_{22} \\ \hline -A^T & I \end{array}\right]$$

式(2.11)の C を用いて (2.19) を表わすと

$$(2.20) \qquad J^{(i)} = \left[\begin{array}{c|c} I & H_{12} + AH_{22} \\ \hline 0 & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} CH^{(i)}C^T + S & 0 \\ \hline -A^T & I \end{array}\right]$$

となる。(2.20)より次の関係式を得る。

$$(2.21) \qquad \det J^{(i)} = \det\left[CH^{(i)}C^T + S\right]$$

式(2.21)の右辺の行列式 $[CH^{(i)}C^T + S]$ は回路方程式(2.16)の $\underset{\sim}{\hat{f}}$ の Jacobian 行列である。式(2.21)および S が反対称行列であることより，次の補題を得る。

<u>補題2.</u> 回路方程式(2.15)の $\underset{\sim}{h}$ の Jacobian 行列が領域 R_L で正定値ならば，R_L での $\underset{\sim}{f}$ の Jacobian 行列 $J^{(i)}$ は $\det J^{(i)} > 0$ となる。

補題2より、境界上にない $u \in R^n$ が h に関して、どのような条件を満しておれば f に関して1−写像度条件を満すかを示す次の補題が得られる。

補題3. 回路方程式(2.15)の h が境界上にない $u \in R^n$ において狭義受動的ならば u は f に関して1−写像度条件を満す。

(証明). $u \in R_i$ とする。$u \notin B$ だから、R_i でのJacobian行列 $H^{(i)}$ は正定値となり、補題2より f の R_i でのJacobian行列 $J^{(i)}$ は $\det J^{(i)} > 0$ となる。いま、$v \neq u$ が存在して、$f(v) = f(u)$ となったとすると、(2.15)より

$$P(h(v) - h(u)) + Q(v - u) = 0$$

$\xi = h(v) - h(u)$, $\eta = v - u$ として、

$$\xi = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \hline \xi_2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} m \\ n-m \end{array}, \quad \eta = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \hline \eta_2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} m \\ n-m \end{array}$$

と表わすと、

式(2.18)より、

$$(2.22) \quad P\xi + Q\eta = \begin{bmatrix} \xi_1 + A\xi_2 + S\eta_1 \\ -A^T\eta_1 + \eta_2 \end{bmatrix} = 0$$

(2.22)より

$$\langle \xi, \eta \rangle = \eta_1^T \xi_1 + \xi_2^T \eta_2$$

$$= -\eta_1^T A \xi_2 - \eta_1^T S \eta_1 + \xi_2^T A^T \eta_1 = 0$$

となり、仮定に矛盾する。 従って、u は f の 1-写像度条件を満す。 (証終)

f が境界上にない $y \in R^n$ において、一様受動的ならば f はノルム強圧的であり、補題3より y は f の 1-写像度条件を満す。 この場合、定理6より、f は R^n から R^n への全射である。これより、次の定理が得られる。

<u>定理7.</u> 回路方程式(2.15)で f が境界上にない $y \in R^n$ で一様受動的ならば、f はノルム強圧的で、回路網は任意の入力に対し、少なくとも1つの解をもつ。また y は f に関して 1-写像度条件をみたす。

[注]. 先に述べたように回路網が任意の入力に対して少なくとも1つの解をもつためには f が

強圧的であれば十分であるが、次節で考察するアルゴリズムにおいて、1-写像度条件をみたす x が有効な初期値を与え、また f がノルム強圧的であることが必要であるから区分的線形抵抗回路網の解の存在定理をこの形で与えておくのが適当である。

2.4 求解のアルゴリズム

f を R^n から R^n への連続な区分的線形写像とする。本節では、前節定理6の条件のもとで、任意の $y \in R^n$ に対して有限回の手順で $f(x)=y$ の解を求めるためのアルゴリズムを示す。相互結合をもたない単調な区分的線形抵抗回路網の回路方程式の求解のアルゴリズムが最初 katzenelson により提出され[12]、そのアルゴリズムは相互結合をもつ区分的線形抵抗回路網にある条件の下で拡張されたが[14]、特異な Jacobian 行列や行列式の符号が異る Jacobian 行列をもつ領域

が存在する場合には適用が不可能である。

本節のアルゴリズムはkatzenelsonのアルゴリズムを定理6の条件のもとで、特異なJacobian行列や、行列式の符号が異なるJacobian行列をもつ領域が存在する場合にまで適用できるように一般化したものである。

任意の $\underset{\sim}{y}^* \in R^n$ に対し、$\underset{\sim}{x}^{(1)}$ を非特異なJacobian行列 $J^{(1)}$ をもつ領域 R_1 の内点とし、$\underset{\sim}{y}^{(1)} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^{(1)})$ としたとき、

$$L_{\underset{\sim}{y}_\lambda} = \{\underset{\sim}{y}_\lambda \in R^n \mid \underset{\sim}{y}_\lambda = \lambda \underset{\sim}{y}^* + (1-\lambda)\underset{\sim}{y}^{(1)}, -\infty < \lambda \leq 1\}$$

の逆像の $\underset{\sim}{x}^{(1)}$ を含む連結な成分 $L_\lambda \subset \underset{\sim}{f}^{-1}(L_{y_\lambda})$ を $\underset{\sim}{y}^*$ に対する $\underset{\sim}{x}^{(1)}$ を初期値とする解曲線と呼ぶ。

$\lambda = 1$ に対する解曲線上の点 $\underset{\sim}{x}^*$ が求まれば $\underset{\sim}{x}^*$ は $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{y}^*$ の1つの解である。

いま、$\underset{\sim}{f}$ をノルム強圧的とし、解曲線がJacobian行列の階数が $n-1$ 以上の領域およびその単純

な $(n-1)$次元境界超平面（2.3節 定理3の注 参照）のみを通るものと仮定すると，次の手順で解曲線が求まる。　$\det J^{(1)}>0$ とする。解曲線 L_λ の R_1 に含まれる部分はつぎの式 $\underset{\sim}{W}^{(1)}(\lambda)$ を含む。

(2.23)　　$\underset{\sim}{W}^{(1)}(\lambda)=\underset{\sim}{x}^{(1)}+\lambda J^{(1)^{-1}}(\underset{\sim}{y}^{*}-\underset{\sim}{y}^{(1)}),\ \lambda\geqq 0$

$\underset{\sim}{W}^{(1)}(1)\in R_1$ ならば 解 $\underset{\sim}{x}^{*}$ が求まり，

$$\underset{\sim}{x}^{*}=\underset{\sim}{W}^{(1)}(1)=\underset{\sim}{x}^{(1)}+J^{(1)^{-1}}(\underset{\sim}{y}^{*}-\underset{\sim}{y}^{(1)})\ 。$$

$\underset{\sim}{W}^{(1)}(1)\notin R_1$ ならば，$0<\lambda_1<1$ が存在し，$\underset{\sim}{x}^{(2)}=\underset{\sim}{W}^{(1)}(\lambda_1)$ は R_1 の単純な境界超平面上にある。$\underset{\sim}{y}^{(2)}=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^{(2)})\in L_{y_\lambda}$，$R_1$の隣接領域を $R_2\ni\underset{\sim}{x}^{(2)}$ とし，$\det J^{(2)}>0$ とすると，2.3節 定理3の注より解曲線 L_λ の R_2 に含まれる部分が存在し，それを $\underset{\sim}{W}^{(2)}(\lambda)$ とあらわすと，

$$W^{(2)}(\lambda)=\underset{\sim}{x}^{(2)}+\lambda J^{(2)^{-1}}(\underset{\sim}{y}^{*}-\underset{\sim}{y}^{(2)})\ ,\ \lambda>0。$$

$\underset{\sim}{W}^{(2)}(1)\in R_2$ ならば，それが解 $\underset{\sim}{x}^{*}$ である。

$W^{(2)}(1)\notin R_2$ ならば，先の手順をくりかえし，$\lambda_2>0$

が存在して，R_2の境界上に，$\underset{\sim}{x}^{(3)} = \underset{\sim}{w}^{(2)}(\lambda_2)$ が求まる。

$\underset{\sim}{y}^{(3)} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^{(3)}) = \underset{\sim}{y}_{\lambda_1+\lambda_2} \in L_{y_2}$ とする。$\underset{\sim}{x}^{(2)}$ と $\underset{\sim}{x}^{(3)}$ を結ぶ線分は解曲線の R_2 内の部分である。この手順をくりかえして，解曲線が通過する領域の Jacobian 行列の行列式がすべて正ならば上で求められる L_{y_2} 上の系列 $\{\underset{\sim}{y}^{(2)} = y_{\lambda_1},$ $y^{(3)} = \underset{\sim}{y}_{\lambda_1+\lambda_2}, ----$ は $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots$ だから $\underset{\sim}{y}^*$ に単調に近づく。領域の数は有限で，各領域で解曲線は唯一であるから，この場合は，有限回の手順で $\underset{\sim}{y}^*$ に対する解曲線上の点 $\underset{\sim}{x}^*$ が求まり，$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^*) = \underset{\sim}{y}^*$ となる。以上で考察した場合では，アルゴリズムは文献[14]の場合と異ならない。

つぎに，$\underset{\sim}{x}^{(2)} = \underset{\sim}{w}^{(1)}(\lambda_1)$, $0 < \lambda_1 < 1$ が R_1の境界上に求まったとして，隣接領域 R_2 の Jacobian 行列 $J^{(2)}$ が $\det J^{(2)} < 0$ である場合を考える。2.3節 定理3の注より，この場合は，$\lambda < 0$ に対して，

$$\underset{\sim}{w}^{(2)}(\lambda) = \underset{\sim}{x}^{(2)} + \lambda J^{(2)^{-1}}(\underset{\sim}{y}^{*} - \underset{\sim}{y}^{(2)})$$

が L_λ の R_2 に含まれる部分となる。

(場合1) $-\infty \leqq \lambda < 0$ に対して, $\underset{\sim}{w}^{(2)}(\lambda) \subset R_2$ ならば $\underset{\sim}{y}^{*}$ に対する $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{y}^{*}$ の解は求まらない。

あとで述べるように初期値 $\underset{\sim}{x}^{(1)}$ を適当に選べれば(1−写像度条件を満たすように)このような場合は起り得ない。

ある $\lambda_2 < 0$ に対し, $\lambda < \lambda_2$ で $w^{(2)}(\lambda) \notin R_2$ とすると, R_2 の境界上に $\underset{\sim}{x}^{(3)} = \underset{\sim}{w}^{(2)}(\lambda_2)$ が存在する。 R_2 の隣接領域を $R_3 \neq R_1$, $R_3 \ni \underset{\sim}{x}^{(3)}$, $\underset{\sim}{x}^{(3)}$ に対して, $\underset{\sim}{y}^{(3)} \in L_{y\lambda}$ を $\underset{\sim}{y}^{(3)} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^{(3)})$ とする。

$\underset{\sim}{y}^{(3)}$ は $L_{y\lambda}$ 上で $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ に対する点であるから, $\underset{\sim}{y}^{(2)}$ に比べ $\underset{\sim}{y}^{*}$ から遠のいている。

$\det J^{(3)} < 0$ とすると, $\lambda < 0$ に対して,

$$\underset{\sim}{w}^{(3)}(\lambda) = \underset{\sim}{x}^{(3)} + \lambda J^{(3)^{-1}}(\underset{\sim}{y}^{*} - \underset{\sim}{y}^{(3)})$$

は，L_λ の R_3 に含まれる部分である。$\lambda_3<0$ に対して $w^{(3)}(\lambda_3)$ が R_3 の境界上に求まり，$\underset{\sim}{x}^{(4)}=\underset{\sim}{w}^{(3)}(\lambda_3)$，$\underset{\sim}{y}^{(4)}=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^{(4)})$ とすると，$\underset{\sim}{y}^{(4)}$ は $\underset{\sim}{y}^{(3)}$ と比べ $\underset{\sim}{y}^*$ から更に遠のいている。この手順で解曲線の通過する領域 $R_2, R_3, \cdots R_{m-1}$ で $\det J^{(i)}<0$，$i=2,3,\cdots m-1$ とすると，L_{y_λ} 上の系列 $\{\underset{\sim}{y}^{(2)}, \underset{\sim}{y}^{(3)}, \cdots, \underset{\sim}{y}^{(m-1)}\}$ は $\underset{\sim}{y}^*$ より次才に遠のく点の系列となる。領域 $R_m \ni \underset{\sim}{x}^{(m)}$ で $\det J^{(m)}>0$ となったとすると，前と同様に，$\lambda>0$ に対し，$\underset{\sim}{w}^{(m)}(\lambda)=\underset{\sim}{x}^{(m)}+\lambda(\underset{\sim}{y}^*-\underset{\sim}{y}^{(m)})$ が R_m 内での L_λ の部分となり最初に述べた手順にもどり，以下，解曲線を求める。解曲線 L_λ が Jacobian 行列の階数が $n-1$ である領域 R_p の単純な境界超平面と $x^{(p)}$ で交わったとすると，2.3節，定理3の注(2)で述べたように，$\underset{\sim}{f}$ がノルム強圧的ならば，非特異な Jacobian 行列をもつ領域

R_kの境界上に$\underset{\sim}{x}^{(k)}$が存在して，$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^{(p)})=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^{(k)})=\underset{\sim}{y}^{(p)}$，$\chi(\underset{\sim}{f},\underset{\sim}{x}^{(p)})\in L_\lambda$となるから，$x^{(k)}\in R_k$から再び先の手順をくりかえして解曲線が求められる。この手順により，解曲線が次々に異る領域に入り，先に述べた場合1が起らないとすると，（場合2）解曲線がm回の手順で$R_1\ni\underset{\sim}{x}^{(1)}$に再入して閉ループをなす，（場合3）解曲線がある$\underset{\sim}{x}^{(k)}$，$k>1$で閉ループをなす場合を除いて，有限回の手順で$\underset{\sim}{y}^*$に対する解$\underset{\sim}{x}^*$が求まる。いま，$\underset{\sim}{x}^{(1)}$を$\underset{\sim}{f}$に関して1-写像度条件をみたす領域$R_1$の内点とする。一般にm回目の手順で場合1が起るとすると，$\underset{\sim}{x}\in R_m$，$\underset{\sim}{x}\neq\underset{\sim}{x}^{(1)}$，が存在して，$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^{(1)})$となり1-写像度条件に反する。また，場合2が起るとすると，$\underset{\sim}{x}\in R_k$，$1<k<m$，$\underset{\sim}{x}\neq\underset{\sim}{x}^{(1)}$が存在して，$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^{(1)})$となり，1-写像度条件に反する。従って，$\underset{\sim}{x}^{(1)}$を$\underset{\sim}{f}$に関して1-写像度条件

を満すように選べれば，場合1，場合2 は起り得ない。また，場合3が起るのは，$x^{(k)}$ が2つ以上の$(n-1)$次元境界超平面の交わり，あるいはJacobian行列の階数が$(n-2)$以下の領域に含まれる場合だけであり，解曲線がJacobian行列の階数が$(n-1)$以上の領域および単純な境界超平面しか通らないとした仮定に矛盾する。従って，この場合も，先の仮定のもとでは起り得ない。

このアルゴリズムの一般性を保証するためには，任意の$y^* \in R^n$に対し，ト写像度条件をみたす$x^{(1)}$を適当に選んで$L_{y\lambda}$に対する解曲線L_λがJacobian行列の階数が$n-1$以上の領域およびその単純な境界超平面しか通過しないようにできることが示されればよい。 集合Cを 2つ以上の$(n-1)$次元境界超平面の交わり あるいは，Jacobian行列の階数が$(n-2)$以下である領域のすべての点の

集合とする。$\underset{\sim}{f}(C)$は明らかに有限個の$(n-2)$次元超平面内の閉凸多面体領域$K_1, \cdots, K_p$の和集合である。

$\underset{\sim}{f}(C) \subset \underset{\sim}{f}(B)$，また$\underset{\sim}{y}^{(1)} \in R^n - \underset{\sim}{f}(B)$とし，$\underset{\sim}{x}^{(1)} = \underset{\sim}{f}^{-1}(\underset{\sim}{y}^{(1)}) \in R_1$は$\underset{\sim}{f}$に関して卜写像度条件を満すとする。

2.3節 補題1より$\delta > 0$が存在して，$\underset{\sim}{x}^{(1)}$を中心とする半径δの開球Sの任意の点は卜写像度条件を満す。R_1のJacobian行列$J^{(1)}$は非特異であるから，$\varepsilon > 0$が存在して，任意の$\underset{\sim}{y}$，$\|\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{y}^{(1)}\| < \varepsilon$，に対して$\underset{\sim}{x} \in S$が存在して，$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{y}$となる。

いま，半直線$L = \{\underset{\sim}{y} \in R^n \mid \underset{\sim}{y} = \lambda \underset{\sim}{y}^{(1)} + (1-\lambda)\underset{\sim}{y}^*, \lambda \geqq 0\}$が，$K_1 \subset \underset{\sim}{f}(C)$と$\underset{\sim}{y}^*$以外の点$\underset{\sim}{y}' = \lambda' \underset{\sim}{y}^{(1)} + (1-\lambda')\underset{\sim}{y}^*$，$\lambda' \neq 1$，で交わっているとする。$K_1$は$(n-2)$次元超平面$H_1$に含まれる凸多面体領域である。$L$と$H_1$の交わりが$\underset{\sim}{y}'$だけであるとする。$(n-2)$次元ベクトル空間$\{\underset{\sim}{x} \in R^n \mid \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{y}', \underset{\sim}{y} \in H_1\}$の基底を$\underset{\sim}{d}^{(1)}, \cdots, \underset{\sim}{d}^{(n-2)}$とし，

$\underset{\sim}{y}^{(1)}-\underset{\sim}{y}^{*}$, $\underset{\sim}{\alpha}^{(n_1)}$ を選んで $\underset{\sim}{\alpha}^{(1)}, \underset{\sim}{\alpha}^{(2)}, \cdots, \underset{\sim}{\alpha}^{(n-2)}, \underset{\sim}{y}^{(1)}-\underset{\sim}{y}^{*}, \underset{\sim}{\alpha}^{(n_1)}$ が

R^n の基底となるようにする。μ_1 を十分小さな正の数とし，

半直線 $L_{\mu_1}=\{\underset{\sim}{y}\in R^n \mid \underset{\sim}{y}=\lambda(\underset{\sim}{y}^{(1)}+\mu_1\underset{\sim}{\alpha}^{(n_1)})+(1-\lambda)\underset{\sim}{y}^{*}, \lambda\geqq 0\}$

が K_1 と $\underset{\sim}{y}^{*}$ 以外の点 $\underset{\sim}{y}''=\lambda''(\underset{\sim}{y}^{(1)}+\mu_1\underset{\sim}{\alpha}^{(n_1)})+(1-\lambda'')\underset{\sim}{y}^{*}$, $\lambda^{*}\neq 0$,

で交わったとする。 $\underset{\sim}{y}''=\underset{\sim}{y}'+\sum_{i=1}^{n-2}a_i\underset{\sim}{\alpha}^{(i)}$ だから，

$$\lambda''(\underset{\sim}{y}^{(1)}-\underset{\sim}{y}^{*})+\lambda''\mu_1\underset{\sim}{\alpha}^{(n_1)}=\lambda'(\underset{\sim}{y}^{(1)}-\underset{\sim}{y}^{*})+\sum_{i=1}^{n-2}a_i\underset{\sim}{\alpha}^{(i)}$$

これより $\mu_1=0$ となり，矛盾する。従って，十分小さな $\mu_1>0$

に対し，L_{μ_1} は $\underset{\sim}{y}^{*}$ 以外で K_1 と交わることはない。L_{μ_1}

が $K_2,\cdots,K_p$ と交わっていれば，同様の手順をくりかえし，

$\mu_2,\cdots,\mu_p$ を十分小さくとることにより $\hat{\underset{\sim}{y}}^{(1)}$、

$$\hat{\underset{\sim}{y}}^{(1)}=\underset{\sim}{y}^{(1)}+\sum_{i=1}^{p}\mu_i\underset{\sim}{\alpha}^{(n_i)}$$

に対して，$L_{y_2}=\{\underset{\sim}{y}\mid \underset{\sim}{y}=\underset{\sim}{y}^{*}+\lambda(\hat{\underset{\sim}{y}}^{(1)}-\underset{\sim}{y}^{*}), \lambda>0\}$ を

$L_{y_2}\cap \underset{\sim}{f}(C)=\phi$，また $\|\hat{\underset{\sim}{y}}^{(1)}-\underset{\sim}{y}^{(1)}\|<\varepsilon$ とできる。よって

1－写像度条件を満す $\hat{\underset{\sim}{x}}^{(1)}=\underset{\sim}{f}^{-1}(\hat{\underset{\sim}{y}}^{(1)})\in S$ が存在し，

$\underset{\sim}{y}^{*}$ に対する $\hat{\underset{\sim}{x}}^{(1)}$ を初期値とする解曲線は，Jacobian

行列の階数が $n-1$ 以上の領域およびその単純な境界超平面のみを通過する。

L と H_1 との交わりが L の部分になる場合は，$(n-2)$ 次元ベクトル空間 $\{\underset{\sim}{v} \in R^n \mid \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{y}', \underset{\sim}{y}' \in H_1\}$ の基底を $\underset{\sim}{\alpha}^{(1)}, \cdots, \underset{\sim}{\alpha}^{(n-3)}, \underset{\sim}{y}^{(1)} - \underset{\sim}{y}^*$ と選び，R^n の基底を $\underset{\sim}{\alpha}^{(1)}, \cdots, \underset{\sim}{\alpha}^{(n-3)}, \underset{\sim}{y}^{(1)} - \underset{\sim}{y}^*, \underset{\sim}{\alpha}^{(n-1)}, \underset{\sim}{\alpha}^{(n)}$ とすることにより，十分小さな $\mu > 0$ に対し，半直線 $L_{\mu} = \{\underset{\sim}{y} \in R^n \mid \underset{\sim}{y} = \lambda(\underset{\sim}{y}^{(1)} + \mu \underset{\sim}{\alpha}^{(n)}) + (1-\lambda)\underset{\sim}{y}^*\}$ が $\underset{\sim}{y}^*$ 以外の点で K_1 と交わらないことが確められる。従って，この場合も，仮定をみたす $\hat{\underset{\sim}{x}}^{(1)}$ が1-写像度条件を満す $\underset{\sim}{x}^{(1)}$ の近傍に存在することになる。

従って，任意の $\underset{\sim}{y}^* \in R^n$ に対し，$\underset{\sim}{x}$ を $\underset{\sim}{f}$ に関する1-写像度条件を満す点とすると，$\underset{\sim}{x}$ の十分小さな近傍に $\underset{\sim}{x}^{(1)}$ が存在し，$\underset{\sim}{x}^{(1)}$ は1-写像度条件をみたし，$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{y}^*$ の解は $\underset{\sim}{x}^{(1)}$ を初期値とする先のアルゴリズム

により有限回の手順で求まる。このアルゴリズムを一般化Katzenelsonアルゴリズムとよぶ。

[注]. 実際には，ト写像度条件をみたす$\underset{\sim}{x}$から出発した解曲線が集合Cと交わったときにだけ，$\underset{\sim}{x}$に十分小さな摂動$\nu\underset{\sim}{a}$を加えて，解曲線がもはやCと交わらないようにすればよい。

以上の議論より次の定理を得る。

<u>定理8</u>. $\underset{\sim}{f}: R^n \to R^n$を連続な区分的線形写像とする。定理6の条件のもとで，任意の$\underset{\sim}{y} \in R^n$に対し $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{y}$の解は一般化Katzenelsonアルゴリズムにより有限回の手順で求まる。

2.3節 定理7より 区分的線形抵抗回路網の解析に関して，次の定理を得る。

<u>定理9.</u> $\underset{\sim}{h}$をR^nからR^nへの連続な区分的線形写像とする。$\underset{\sim}{h}$が境界上にない$\underset{\sim}{x} \in R^n$で一様受

動的ならば，任意の電源ベクトル $\underset{\sim}{v}$ に対して，式(2.15)で表わせる回路方程式の解は一般化Katzenelsonアルゴリズムにより有限回の手順で求まる。

2.5 結言

本章の主題は区分的線形写像 f により $f(\underset{\sim}{x})=\underset{\sim}{y}$ であらわせる区分的線形抵抗回路網の回路方程のより一般的な解の存在定理を導くことであったが，2.3節で定義された区分的線形写像の写像度の概念を用いて従来の解の存在定理に比べより一般的な存在定理が得られた。2.4節において，$\det J^{(i)}>0$, $i=1,\cdots,\ell$, の条件のもとで相互結合をもつ区分的線形抵抗回路網に拡張的に適用されたKatzenelsonの方法[14]をさらに $J^{(i)}$ が特異である場合や，$\det J^{(i)}$ の符号が異なる場合にまで一般化した一般化Katzenelsonアルゴリズムを与え，このアルゴリズムにより一様受動的な特

性をもつ区分的線形抵抗回路網の解が任意の電源ベクトル $\mathbf{w}$ に対して有限回のくりかえしで求まることを示した。

相互結合をもつ非線形抵抗素子の特性を区分的線形写像で近似する問題は本章ではふれていないが，必ずしも自明な問題でなく特性の modeling 問題として研究の余地がある。また，実際の数値解を一般化 Katzenelson アルゴリズムにより求める場合，隣接する領域の Jacobian 行列の逆行列を計算しなければならないが，最も効率のより計算法を求めることが問題であり sparse-Matrix 手法を用いた数多くの研究がなされている。[14][27][28]

結　論

本編において相互結合をもつ非線形抵抗回路網の解析問題に関し得られた結果および今後に残された問題を簡単にまとめると次のようになる。

第1章では，相互結合をもつ非線形抵抗回路網の解の存在・唯一性と非線形抵抗素子の特性を表わす連続写像の性質との関係が明らかにされた。また，

(1) 有界な非線形抵抗素子のみにより構成される回路網

(2) 有界な非線形抵抗素子と線形抵抗素子により構成される回路網の2つについて解の存在の必要十分条件が回路トポロジについての条件として得られた。

非線形抵抗素子の特性がより一般的な場合について回路網の解の存在・唯一性と回路トポロジとの関係を明確にすることが今後の課題として残されている。

第2章では，区分的線形写像の写像度の概念を用いて，区分的線形抵抗回路網の解の存在条件を導いた。また，

Katzenelson の方法を修正した一般化 Katzenelson アルゴリズムを示し，このアルゴリズムにより上記の存在条件のもとで，区分的線形抵抗回路網の解が有限回のくり返しで求まることを示した。回路網の解が一意でない場合，すべての解や，特定の解を求める効率のよいアルゴリズムを開発することが今後の課題として残されている。

本研究により相互結合をもつある種の非線形抵抗回路網の存在性と回路トポロジとの関係が明らかにされ，解析的条件に比べ工学的意義のある回路理論的条件を得た。また，区分的線形抵抗回路網の解のより一般的な存在条件が得られ，この条件のもとで有限回の手順で解が求まるアルゴリズムが得られた。

謝辞

本研究の全過程を通じて，直接御指導をたまわり，有益な御助言とともに筆者を励まして下さった本学藤沢俊男教授に心から感謝の意を表わす。

大学院修士，博士両課程において，御指導をたまわった制御工学教室 桜井良文教授，坂和愛幸教授，辻三郎教授ならびに情報工学教室 嵩忠雄教授に厚く感謝する。

修士在学中に，熱心な御指導をたまわった保田豊助教授に厚く感謝する。

熱心に御討論頂いた前田浩一助手，井上雄二郎助手に厚く感謝する。

二ヶ年に渉り御援助を頂いた財団法人井植記念会に厚く感謝する。

本学職員鹿野美砂子嬢には種々の手助けをたまわった。厚く感謝する。

付　録

A1. 連続写像の写像度[25]

C を R^n の有界な開集合とする。

A1-1. 写像 $\underset{\sim}{f}: \bar{C} \to R^n$ を C^1-級写像としたとき，$\underset{\sim}{y} \notin \underset{\sim}{f}(\partial C)$ における C に関する $\underset{\sim}{f}$ の写像度 $deg_A(\underset{\sim}{f}, C, \underset{\sim}{y})$ をつぎのように定義する。

$$deg_A(\underset{\sim}{f}, C, \underset{\sim}{y}) \triangleq \int_{R^n} \phi(\underset{\sim}{x}) d\underset{\sim}{x}$$

ここで，$\phi: R^n \to R^1$ ，$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} \psi(\| \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) - \underset{\sim}{y} \|) \det \dfrac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{x}} &, \underset{\sim}{x} \in C \\ 0 &, \underset{\sim}{x} \notin C \end{cases}$

ただし，$\psi \in W_\alpha = \{ \psi : R^1 \to R^1 \mid \delta \in (0, \alpha)$ に対し $\psi(t) = 0$，$\forall t \in [\delta, \alpha] \}$，
$\alpha < \min \{ \| \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) - \underset{\sim}{y} \| \mid \underset{\sim}{x} \in \partial C \}$

A1-2. 写像 $\underset{\sim}{f}: \bar{C} \to R^n$ を連続写像としたとき $\underset{\sim}{y} \notin f(\partial C)$ における C に関する $\underset{\sim}{f}$ の写像度 $deg_A(\underset{\sim}{f}, C, \underset{\sim}{y})$ をつぎのように定義する。

$$deg_A(\underset{\sim}{f}, C, \underset{\sim}{y}) \triangleq \lim_{k \to \infty} deg_A(\underset{\sim}{f}^{(k)}, C, \underset{\sim}{y})$$

ここで，$\{\underset{\sim}{f}^{(k)}\}$ は C の中で $\underset{\sim}{f}$ に一様に収束する C^1-級写像の系列である。

A1-3. A1-1 で得られた C^1-級写像の写像度の定義より，

$\boldsymbol{y} \notin \boldsymbol{f}(\partial C)$ として任意の $\boldsymbol{x} \in \Gamma = \{\boldsymbol{x} \in C \mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\}$ において $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}$ が非特異ならば，$\boldsymbol{y}$ における C に関する C^1-級写像 $\boldsymbol{f}$ の写像度は，

$$\deg_A(\boldsymbol{f}, C, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \operatorname{sgn} \det \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(i)}} & , \Gamma = \{\boldsymbol{x}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{x}^{(m)}\} \\ 0 & , \Gamma = \phi \end{cases}$$

となる。

A2. 連続写像の写像度の性質[25]

A2-1. [Kronecker の定理] 写像 $\boldsymbol{f}: \bar{C} \to R^n$ を連続写像とする。$\boldsymbol{y} \notin \boldsymbol{f}(\partial C)$ に対し，$\deg_A(\boldsymbol{f}, C, \boldsymbol{y}) \neq 0$ ならば，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ は C の中に解をもつ。

A2-2. [Homotopy Invariance Theorem] $H: \bar{C} \times [0,1] \subset R^{n+1} \to R^n$ を連続写像とする。任意の $(\boldsymbol{x}, t) \in \partial C \times [0,1]$ に対して $H(\boldsymbol{x}, t) \neq \boldsymbol{y}$ ならば $\deg_A(H(\cdot, t), C, \boldsymbol{y})$ はすべての $t \in [0,1]$ に対して一定である。

A2-3. $\boldsymbol{f}: \bar{C} \to R^n$ を連続写像とする。任意の2点 $\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_1 \in R^n$ が連続曲線 $p: [0,1] \subset R^1 \to R^n$ により $\boldsymbol{f}(\partial C)$ と交わらずに

結べたとする。すなわち，　$p(0)=y_0$, $p(1)=y_1$, $p(t)\notin f(\partial C)$, $t\in[0,1]$　ならば，　$\deg_A(f,C,y_0)=\deg_A(f,C,y_1)$

B. 存在定理[25]

写像 $f:R^n\to R^n$ を連続写像とする。

B-1. f が弱強圧的ならば f は R^n への全射である。

B-2. f が一様変動的ならば f は R^n への全射である。

B-3. f が一様単調ならば f は R^n への位相写像である。

B-4. [Palaisの定理] $f:R^n\to R^n$ を C^1-級写像とする。

(1) f はノルム強圧的である。

(2) Jacobian 行列 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ は任意の $x\in R^n$ で非特異である。

ならば，f は R^n への微分同相写像である。

文　献

(1) 木田，相原，"非線形回路理論"，信学誌，56，6，昭48-6，pp. 847.

(2) C. A. Desoer and J. Katzenelson, "Nonlinear RLC Networks", Bell Syst. Tech. J., 44, 1, Jan. 1965, pp. 161-198.

(3) I. W. Sandberg and A. N. Willson, Jr., "Some Theorems on Properties of DC Equations of Nonlinear Networks", Bell Syst. Tech. J., 28, 1, Jan. 1969, pp. 1-34.

(4) A. N. Willson, Jr., "New Theorems on The Equations of Nonlinear DC Transistor Networks", Bell Syst. Tech. J., 49, 8, Oct. 1970, pp. 1713-1738.

(5) I. W. Sandberg, "Necessary and Sufficient Conditions for the Global Invertibility of Certain Nonlinear Operators That Arise in The Analysis of Networks", IEEE Trans., CT-18, 2, March 1971, pp. 260-263.

(6) I. W. Sandberg and A. N. Willson, Jr., "Existence and Uniquencess of Solutions for The Equations of Nonlinear DC Networks", SIAM J. Appl. Math., 22, 2, March 1972, pp. 173-186.

(7) T. Ohtsuki and H. Watanabe, "State-Variable Analysis of RLC Networks Containing Nonlinear Coupling Element", IEEE Trans., CT-16, Feb. 1969, pp. 26-38.

(8) T. Fujisawa and E. S. Kuh, "Some Results on Existence and Uniqueness of Solutions of Nonlinear Networks", IEEE Trans., CT-18, 5, Sept. 1971.

(9) T. Fujisawa and E. S. Kuh, "Piecewise-Linear Theory of Nonlinear Networks", SIAM J. Appl. Math., 22, 2, March 1972, pp. 307-328.

(10) C. A. Desoer and F. F. Wu, "Nonlinear Monotone Networks", SIAM J. Appl. Math., 26, 2, March 1974.

(11) L. O. Chua, "Analysis and Synthesis of Multivalued Memoryless Nonlinear Networks", IEEE Trans. Circuit Theory, CT-14, June 1967, pp. 192-209.

(12) J. Katzenelson, "An Algorithm for Solving Nonlinear Resistive Networks", Bell Syst. Tech. J., 44, Oct. 1965, pp. 317-323.

(13) E. S. Kuh and I. N. Hajj, "Nonlinear Circuit Theory: Resistive Networks", Proc. IEEE, 59, No. 3, March 1971.

(14) T. Fujisawa, E. S. Kuh and T. Ohtsuki, "A Sparse Matrix Method for Analysis of Piecewise-Linear Resistive Networks", IEEE Trans. Circuit Theory, CT-19, Nov. 1972, pp. 571-584.

(15) R. S. Palais, "Natural Operations on Differential Forms", Trans. Amer. Math. Soc., 92, July 1959, pp. 125-141.

(16) C. A. Holtzmann and R. W. Liu, "On The Dynamical Equations of Nonlinear Networks with N-Coupled Elements", Proc. of The 3rd Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory, Univ. of Illinois, 1965, pp. 533-545.

(17) B. Gopinath and D. Mitra, "When are Transistors Passive?', Bell Syst. Tech. J., 50, 1971, pp. 2835-2847.

(18) T. Ohtsuki, T. Fujisawa and S. Kumagai, "Existence Theorems and a Solution Algorithm for Piecewise-Linear Resistor Networks", SIAM J. Appl. Math., To be published.

(19) V. E. Benes and I. W. Sandberg, "Application of a Theorem of Dubrovskii to the Periodic Response of Nonlinear Systems", Bell Syst. Tech. J., 43, 1964, pp. 2855-2872.

(20) 熊谷, “相互結合をもつ非線形抵抗回路網の解の存在について”, 信学論(A) 載録.

(21) S. Seshu and M. B. Reed, "Linear Graphs and Electrical Networks", Addison-Wesley, Reading, Mass. 1961.

(22) 佐竹, “行列と行列式”, 裳華房.

(23) 伊理, 富沢, “回路理論の基礎的諸問題へのマトロイドによる統一的接近法”, 信学会, 回路とシステム研資, CST73-77, 1974-01.

(24) R. J. Duffin, "Nonlinear Networks, I,II and IIb", Bull. Amer. Math. Soc., 52, 53 and 54, 1946, 1947, and 1948, pp. 836-838, 963-971, and 119-127.

(25) J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt, "Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables", New York, Academic Press, 1970.

(26) 河田, 三村, “現代数学概説II”, 岩波書店

(27) L. O. Chua, "Efficient Computer Algorithm for Piecewise Linear Analysis of Resistive Nonlinear Networks", IEEE Trans., CT-18, No. 1, Jan. 1971, pp. 73-85.

(28) G. D. Hachtel, R. K. Brayton, and F. G. Gustavson, "The Sparse Tableau Approach to Network Analysis and Design", IEEE Trans. Circuit Theory, CT-18, No. 1, Jan. 1971, pp. 101-113.