



Title	線形システムの動特性推定法に関する研究
Author(s)	鈴木, 胖
Citation	大阪大学, 1967, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/1327
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

線形システムの動特性推定法に関する研究

鈴

木

胖

線形システムの動特性推定法に関する研究

内 容 梗 概

新しい数理を利用した動的最適化の理論を実際のシステムに適用するということは、現在の自動制御工学における主要な研究課題の一つである。なかでも制御すべき対象の動特性を推定する方法を確立するということは、これら最適制御理論のほとんどが制御対象の動特性が既知であるとして展開されているのに対し、現実のシステムには動特性の不明のものが非常に多いという重大なギャップを埋めるという意味できわめて重要であり、しかもいまだに未解決の問題である。

本論文は、以上の見地に立って、一般化した線形システム（多変数でしかも自己平衡性をもつとは限らないシステム）の動特性を推定する方法について研究を行なった結果をまとめたものである。

第1章では緒論として、現在の自動制御工学のすう勢を述べ、動特性推定法に関する本研究の占める地歩の重要性を明らかにしている。

第2章では、まず正常運転状態のままで動特性を推定することの必然性を明らかにし、そのような状態の入出力を利用して動特性（ステップ応答）を推定する方法の原理を説明し、動特性推定量を与える方程式を導く。

第3章では、第2章で導かれた、そのままの形では求解が困難な積分方程式をサンプル値形で近似し、代数学的方法を利用して解く方法について述べるとともに、解の統計的性質を明らかにする。

第4章では、従来から正常運転状態の動特性推定法として提案されている相関法と本方法との関連性を明らかにし、両方法を比較することによって、本方法が相関法を特別な場合として包含するところの、一般的かつ普遍的方法であることを示す。

第5章では、本方法を実際のシステムに適用する場合に、問題となるシステムの入出力データのサンプル周期、観測誤の個数、システムの動特性の表現誤の個数などの選定法について理論と基礎的実験を対比させながら考察する。また模擬プロセスの動特性推定例を示し、本方法の実用性を示唆する。

第6章では、実在のプロセスの動特性推定を行なった例を示し、本方法の実用性を実証する。対象は火力発電所で操業状態にあるボイラである。その一つは蒸気圧力制御系で、制御系全体の応答特性を推定した例であり、他の一つは給水制御

系で、その制御ループ中に存在する自己平衡性のないドラム水位応答特性を推定した例である。

第7章は、全章にわたる総括である。

第 1 章	緒 論	1
第 2 章	正常運転状態の入出力を利用して動特性を推定する方法	
	— 最小 2 乗法 — の原理	3
§ 2.1	緒 言	3
§ 2.2	正常運転状態にあるシステムの入出力関係の表現	3
§ 2.3	自己平衡性のあるシステムの動特性推定の原理	6
§ 2.4	自己平衡性のないシステムの動特性推定の原理	8
§ 2.5	結 言	11
第 3 章	2 乗平均誤差を最小とする動特性推定量	
	— 最小 2 乗解 — の計算法	13
§ 3.1	緒 言	13
§ 3.2	連続なシステムの離散形表示	13
§ 3.3	最小 2 乗解を与える方程式	19
§ 3.4	解の統計的性質	22
§ 3.5	解を求める手順	25
§ 3.6	結 言	28
第 4 章	相関法との関連性および比較	31
§ 4.1	緒 言	31
§ 4.2	相関法の原理	31
§ 4.3	相関法の問題点および最小 2 乗法との関連性	33
§ 4.4	相関関数計算の精度	35
§ 4.5	相関法と最小 2 乗法の比較	37
§ 4.6	結 言	42
第 5 章	基礎的実験	44
§ 5.1	緒 言	44
§ 5.2	サンプル周期の選定	44
5.2.1	選定基準の必要性	44
5.2.2	サンプル周期と動特性推定精度との関係	45

5.2.3	実用的なサンプル周期選定基準の導入	49
5.2.4	実験的考察	52
§ 5.3	プリセット・パラメータの選定	56
5.3.1	観測系の個数 N_d の選定	56
5.3.2	動特性表現系の個数 N_p の選定	63
§ 5.4	自己平衡性のないシステムの動特性推定法に関する実験的考察	65
5.4.1	実験方法	65
5.4.2	自己平衡性のないシステムの動特性推定例	66
5.4.3	自己平衡性のあるシステムの動特性推定への適用	71
§ 5.5	模擬プロセスの動特性推定例	74
5.5.1	対象のプロセス	74
5.5.2	アナログ計算機による模擬	74
5.5.3	動特性推定例 — その1	78
5.5.4	動特性推定例 — その2	79
§ 5.6	結 言	81
第 6 章	実在するプロセスの動特性推定	84
§ 6.1	緒 言	84
§ 6.2	動特性推定の手順	84
§ 6.3	ボイラ蒸気圧力制御系の動特性推定例	87
6.3.1	プロセス変数の測定	87
6.3.2	データ処理	89
6.3.3	動特性の推定結果	90
6.3.4	検 討	94
§ 6.4	ボイラドラム水位制御系の動特性推定例	95
6.4.1	ドラム水位制御系の概略および変数の測定	96
6.4.2	動特性の推定結果	99
6.4.3	考 察	111
§ 6.5	結 言	112
第 7 章	結 論	115
	謝 辞	
	付 録	

第 1 章 結 論

自動制御理論の進歩はめざましく、これまでに線形制御理論はほぼ確立され、現在、非線形制御系のシンセシスあるいは新しい数理を利用した動的最適化の理論の応用という問題に研究の焦点がしぼられているといっても過言ではない。

これらの研究の成果は、航空機あるいは飛翔体などの各種の制御に應用され、みごとな実績をあげている。最近、建設されつつあるいくつかの新しい工業プラント（もっと一般的な表現をすればシステム）でも、その制御系に計算機を導入し、これらの理論を応用する試みがなされつつある。これはシステムが複雑かつ高度化し運転の条件が厳密になるにつれて、これまで無視してきた運転条件によるシステムの特性的変化を考慮にいれ、これに適応した最適制御を行なうことが要求されるようになったためである。

これまでに実施されているシステムの計算機制御についてみると、もちろん十分な実績をあげている例もいくつかあるが、計算機を導入するのに要したコストを回収するのがやつとであるという例も少なくない。このような誤算を生じた原因を探ってみると、ほとんどが、対象のシステムが複雑で、その動特性を正確に把握することができないという実にあるように思われる。このことは新しい制御理論のほとんどすべてが制御すべき対象の動特性が既知であるとして理論を展開しているため、これを実際に応用する場合には、対象の動特性を把握するということが先決問題であるということを経験すれば、当然といわねばならない。

このように動特性推定の技術が、理論と実際の橋渡しを行なうという重要な役割をもっているにもかかわらず、制御理論の発展にくらべて著しく遅れているのは、それ相応の理由がある。その一つは動特性推定という課題が現実のシステムを対象としているため、その研究には実際的な検討が必要であり多大の時間と労力を要するということ、他の一つは、これに関連して、これまでに報告されている動特性推定法が単なる提案に終わっていて実際的な検討が不足しているということ、また実際に応用した例のある方法でも、特殊な試験信号を必要とする、推定に時間がかかる、対象がごく限られているなどの欠で一般のシステムに適用するのが難しいということである。

筆者は、このような現状を打開すべく、これまでに報告されているいくつかの統計的手法を利用した動特性推定法を包含するような一般的な方法について研究

を行ない、これを実際のシステムの動特性推定に適用することを試みた。その結果、この方法で一般の線形システムの動特性を、運転状態のデータを利用し、しかも比較的短い時間で、推定することが可能であるとの結論を得た。

以下にその研究成果を体系づけて示すことにする。

第 2 章 正常運転状態の入出力を利用して動特性を 推定する方法 — 最小2乗法 — の原理

§2.1 緒 言

本章では、システムの動特性を、正常運転状態における入出力データのみを利用し、最小2乗平均誤差の概念に基づいて推定する方法（最小2乗法）を提案し、その原理を説明する。

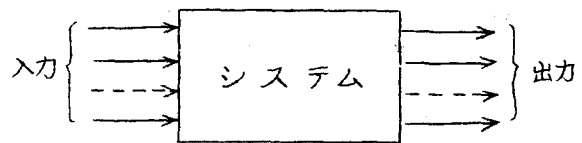
対象のシステムが正常運転状態にある場合、入出力は一般に不規則な変動をしている。このため動特性を定める普通の方法すなわち人工的に特定の試験信号を加えて応答を調べる方法⁽¹⁾⁽²⁾はほとんど応用できない。なぜなら試験信号の大きさは、たかだか、正常運転時の入力程度しか許されないし、一方、そのような大きさの信号に対する応答は不規則な変動をするもとの出力で、まったく乱されてしまうからである。このためシステムの入力に広帯域不規則信号（白色性雑音）を重ねし、この信号と出力の間の相互相関関数を計算することによりシステムの動特性（インパルス応答）を求める方法^{(3)~(6)}が考えられている。しかし、多くのシステムでは試験信号を加えること自体、経済性、安定性、あるいは物理的に実現できるかどうかなどの点で問題がある。対象が工業プロセスの場合には、試験信号を加えることはプロセスの保守管理という立場から好ましくないし相当の費用がかかる。パワー・プラントでは入力は一般に負荷変動であるが、これと同等の試験信号をつくりだすことは、まず不可能である。

このような点を考慮すれば、正常運転時の入出力をそのまま利用できるような動特性推定法を確立することはきわめて大きな意義があるといえる。

§2.2 正常運転状態にあるシステムの入出力関係の表現

工学の対象となるシステムの物理的構造は多種多様にわたっている。しかし、その状態を定めている数学的関係だけを問題にする場合には、観測可能な状態量を入力と出力とに分け抽象化した形で第2.1図のように表わすことができる。

入出力は一般に任意の物理量、たとえば電圧、電流、機械力、変位、容量、流量あるいは温度などである。本節では、このようなシステムが正常な運転状態にあり、かつ



第2.1図 抽象化したシステム

入出力の関係が線形で観測時間内では変化しないとみなせる場合に、これを数学的に記述する方程式を導く。正常運転状態のシステムでは、一般に入力は連続的に不規則な変動をしながら加わっている。また出力には入力に対する応答のほかに測定することのできない外乱あるいはシステム内部で発生する雑音に起因する未知の雑音が重畳しているなどの点を考慮する必要がある。

いまシステムの入力数を N_x 個、出力数を N_y 個とする。入力を $x_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, N_x$)、出力を $y_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N_y$) で表わす。雑音がまったく存在しないときの出力 $z_i(t)$ を考えれば、出力は

$$y_i(t) = z_i(t) + n_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, N_y \quad (2.1)$$

と表わすことができる。 $n_i(t)$ は出力端に換算された雑音である。線形システムでは理想出力は入力といわゆるたたみこみ積分の形で関係づけることができる。^{*})

j 番目の入力 $x_j(t)$ の i 番目の理想出力 $z_i(t)$ への寄与は

$$\int_{-\infty}^t g_{ij}(t-\tau) x_j(\tau) d\tau$$

で表わされる。 $g_{ij}(t-\tau)$ は時刻 τ において j 番目の入力端だけに単位インパルスを加えたとき、時刻 t に i 番目の出力端に現われる応答である。理想出力 $z_i(t)$ は入力に対する応答をすべて重畳したものであるから

$$z_i(t) = \sum_{j=1}^{N_x} \int_{-\infty}^t g_{ij}(t-\tau) x_j(\tau) d\tau \quad i = 1, 2, \dots, N_y \quad (2.2)$$

と表わすことができる。(2.2) 式を (2.1) 式に代入すれば実際の入出力の関係式

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{N_x} \int_{-\infty}^t g_{ij}(t-\tau) x_j(\tau) d\tau + n_i(t) \quad (2.3)$$

が得られる。⁽⁷⁾

^{*}) 線形システムにおける入出力の関係は集中定数系ならば常微分方程式で分布定数系ならば偏微分方程式で表わすこともできる。常微分方程式で表わすにはその階数を定める必要があるが、あらかじめこれを知ることは困難である。また偏微分方程式は取り扱いが非常に面倒である。たたみこみ積分はシステムの線形性を仮定するだけで階数には関係なく分布定数系を含めて入出力の関係を表わすことができるので、より一般性がある。

ここで、次のようなベクトル

$$\underline{x}(t) \equiv \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{N_x}(t) \end{bmatrix} \quad \underline{y}(t) \equiv \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_{N_y}(t) \end{bmatrix} \quad \underline{z}(t) \equiv \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_{N_y}(t) \end{bmatrix} \quad \underline{n}(t) \equiv \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ \vdots \\ n_{N_y}(t) \end{bmatrix}$$

および各入出力の間のインパルス応答を要素とする $N_y \times N_x$ のマトリクス

$$\underline{G}(\tau) \equiv \begin{bmatrix} g_{11}(\tau) & g_{12}(\tau) & \cdots & g_{1N_x}(\tau) \\ g_{21}(\tau) & g_{22}(\tau) & \cdots & g_{2N_x}(\tau) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{N_y1}(\tau) & g_{N_y2}(\tau) & \cdots & g_{N_yN_x}(\tau) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

を定義すると (2.2), (2.3) 式は簡単に

$$\underline{z}(t) = \int_{-\infty}^t \underline{G}(t-\tau) \underline{x}(\tau) d\tau \quad (2.5)$$

$$\underline{y}(t) = \int_{-\infty}^t \underline{G}(t-\tau) \underline{x}(\tau) d\tau + \underline{n}(t) \quad (2.6)$$

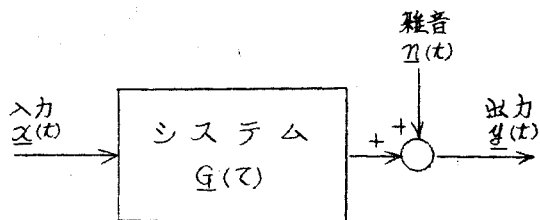
と表わすことができる。(2.6)式の右辺の積分において $t-\tau$ をあらためて τ とおけば、(2.6)式とまったく等価なもう一つの表現式

$$\underline{y}(t) = \int_0^\infty \underline{G}(\tau) \underline{x}(t-\tau) d\tau + \underline{n}(t) \quad (2.7)$$

が得られる⁽⁸⁾

第2.2図は、第2.1図のシステムを数学的に表示したものである。

以下では、システムのインパルス応答を要素とするマトリクス $\underline{G}(\tau)$ を推定する方法の原理を説明する。



第2.2図 システムの数学的表示

§ 2.3 自己平衡性のあるシステムの動特性推定の原理⁽⁸⁾

ここでは対象として自己平衡性すなわち一定の入力を加えた場合に、時間が十分経過すれば、出力も一定となるような性質をもつシステムを考える。このようなシステムでは、

$$\tau > T_s \text{ において } \underline{G}(\tau) = \underline{0} \quad (2.8)$$

とみなせるような T_s (整定時間) が存在するから、システムの入出力の関係式 (2.7) は

$$\underline{y}(t) = \int_0^{T_s} \underline{G}(\tau) \underline{x}(t-\tau) d\tau + \underline{n}(t) \quad (2.9)$$

と書ける。(2.9)式において、 $\underline{x}(t)$ は十分な精度で測定できるが、出力 $\underline{y}(t)$ には雑音 $\underline{n}(t)$ が不可避的に重畳していることに注意しなければならない。いま、未知の $\underline{G}(\tau)$ が、かりに、 $\hat{\underline{G}}(\tau)$ であるとする、そのときの $\underline{x}(t)$ に対する出力 $\hat{\underline{y}}(t)$ は

$$\hat{\underline{y}}(t) \equiv \int_0^{T_s} \hat{\underline{G}}(\tau) \underline{x}(t-\tau) d\tau \quad (2.10)$$

となるはずである。そこで、この $\hat{\underline{y}}(t)$ と実際の出力 $\underline{y}(t)$ との誤差

$$\underline{e}(t) \equiv \underline{y}(t) - \hat{\underline{y}}(t) \quad (2.11)$$

を考えれば、これは $\hat{\underline{G}}(t)$ の選び方によって変わることになる。この誤差 $\underline{e}(t)$ の一定時間 T_0 ($T_0 > T_s$) における2乗平均値

$$J \equiv \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \underline{e}(t)' \underline{e}(t) dt \quad (2.12)$$

ここで ' は転置を表わす。

に注目し、これを最小にするような $\hat{\underline{G}}(\tau)$ を求めてみる。その値を $\hat{\underline{G}}(\tau)$ とすれば、これは次式の解として与えられることが容易に証明できる。(付録参照)

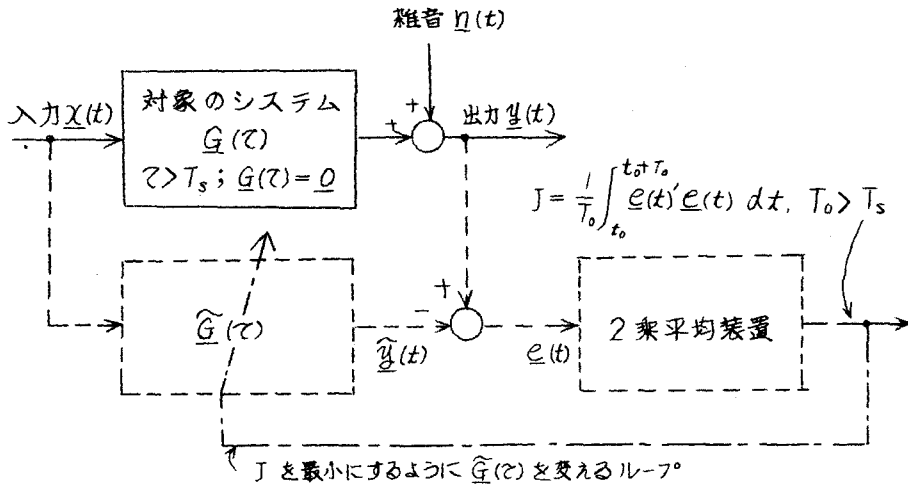
$$\underline{C}(t_0, T_0, \tau_1) = \int_0^{T_s} \hat{\underline{G}}(\tau_2) \underline{A}(t_0, T_0, \tau_1, \tau_2) d\tau_2 \quad (2.13)$$

ここで $T_s > \tau_1, \tau_2 > 0$

$$\underline{C}(t_0, T_0, \tau_1) \equiv \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \underline{y}(t) \underline{x}(t-\tau_1)' dt \quad (2.14)$$

$$\underline{A}(t_0, T_0, \tau_1, \tau_2) \equiv \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \underline{x}(t-\tau_2) \underline{x}(t-\tau_1)' dt \quad (2.15)$$

第2.3図は、この原理をブロック線図で説明したものである。



第2.3図 自己平衡性のあるシステムの動特性推定 の原理

さて、 $\hat{G}(\tau)$ の統計的性質を調べてみよう。(2.14) 式に (2.7) 式を代入し、
所要の計算を行なえば、

$$\begin{aligned} \underline{C}(t_0, T_0, \tau_1) &= \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \left[\int_0^{T_s} \underline{G}(\tau_3) \underline{x}(t-\tau_3) d\tau_3 + \underline{n}(t) \right] \underline{x}(t-\tau_1)' d\tau_1 \\ &= \int_0^{T_s} \underline{G}(\tau_3) \underline{A}(t_0, T_0, \tau_1, \tau_3) d\tau_3 + \underline{D}(t_0, T_0, \tau_1) \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\text{ここで } \underline{D}(t_0, T_0, \tau_1) \equiv \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \underline{n}(t) \underline{x}(t-\tau_1)' dt \quad (2.17)$$

なる関係が得られる。(2.16) 式を (2.13) 式に代入すれば、結局

$$\begin{aligned} &\int_0^{T_s} \underline{G}(\tau_3) \underline{A}(t_0, T_0, \tau_1, \tau_3) d\tau_3 + \underline{D}(t_0, T_0, \tau_1) \\ &= \int_0^{T_s} \hat{\underline{G}}(\tau_2) \underline{A}(t_0, T_0, \tau_1, \tau_2) d\tau_2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

が成り立つ。(2.18)式から $\hat{G}(\tau)$ の雑音依存性を知ることができる。

まず、 $\eta(t)$ と $\underline{x}(t)$ が独立で $\eta(t)$ の平均値が $\underline{0}$ である場合を考える。(2.18)式の両辺の集合平均 $\mathcal{E}$ をとれば

$$\begin{aligned} \int_0^{T_s} \underline{G}(\tau_3) \underline{A}(t_0, T_0, \tau, \tau_3) d\tau_3 + \mathcal{E} \underline{D}(t_0, T_0, \tau) \\ = \int_0^{T_s} \mathcal{E} [\hat{G}(\tau_2)] \underline{A}(t_0, T_0, \tau, \tau_2) d\tau_2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

である。条件より

$$\mathcal{E} \underline{D}(t_0, T_0, \tau) = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \mathcal{E} [\eta(t)] \underline{x}(t-\tau) dt = \underline{0} \quad (2.20)$$

であるから、

$$\mathcal{E} \hat{G}(\tau) = \underline{G}(\tau) \quad (2.21)$$

すなわち入力と相関のない雑音が重畳しているならば、 $\hat{G}(\tau)$ の集合平均は、対象の動特性 $\underline{G}(\tau)$ に一致する。さらに

$$\underline{D}(t_0, T_0, \tau) \approx \underline{0} \quad (2.22)$$

となるような T_0 をとれば

$$\hat{G}(\tau) \approx \underline{G}(\tau) \quad (2.23)$$

である。

$\eta(t)$ と $\underline{x}(t)$ が独立でない場合には(2.20)式が成立せず、このときは(2.19)式から明らかなごとく $\hat{G}(\tau)$ は $\underline{G}(\tau)$ とは異なる値をとる。しかし、その場合でも、少なくとも2乗平均誤差を最小にするという条件は満たされていることが本方法の特徴である。

§2.4 自己平衡性のないシステムの動特性推定の原理⁽⁸⁾

自己平衡性のないシステムでは、たとえ入力が一定であっても、出力は時間とともに増加あるいは減少する。したがって正常な運転状態にあるシステム全体が自己平衡性をもっていないという場合はきわめてまれである。しかしシステムを構成しているサブシステムを取り出して考えると、それ自体の特性は平衡性のない場合がしばしばある。ここでは、一定入力を加えた場合、十分時間

が経過すれば、出力が一定の傾斜で増加あるいは減少するようなシステム、すなわち積分性をもつシステムの動特性を推定する方法について述べる。このようなシステムでは、出力は入力過去の履歴すべてに関係しているので、前節の方法をそのまま適用することはできない。

システムが積分特性をもつならば

$$t > T_s \text{ において } \underline{G}(t) = \underline{C} \quad (2.24)$$

ここで $\underline{C}$ は少なくとも一つの要素は 0 でないような $N_y \times N_x$ の定マトリクス

とみなせるような T_s が存在する。システムの出力は、

$$\underline{y}(t) = \int_{-\infty}^t \underline{G}(t-\tau) \underline{x}(\tau) d\tau + \underline{n}(t) \quad (2.6)$$

で表わされる。いま、実際の出力 $\underline{y}(t)$ よりも T_d だけずれた信号 $\underline{y}_d(t)$ を考えると、

$$\underline{y}_d(t) \equiv \underline{y}(t-T_d) = \int_{-\infty}^{t-T_d} \underline{G}(t-T_d-\tau) \underline{x}(\tau) d\tau + \underline{n}(t-T_d) \quad (2.25)$$

である。実在のプロセスでは $t < 0$ に対し、 $\underline{G}(t) = 0$ であるから (2.25) 式は

$$\underline{y}(t-T_d) = \int_{-\infty}^t \underline{G}(t-T_d-\tau) \underline{x}(\tau) d\tau + \underline{n}(t-T_d) \quad (2.26)$$

と書くことができる。(2.6)式より(2.26)式を引くと

$$\underline{y}(t) - \underline{y}(t-T_d) = \int_{-\infty}^t [\underline{G}(t-\tau) - \underline{G}(t-T_d-\tau)] \underline{x}(\tau) d\tau + \underline{n}(t) - \underline{n}(t-T_d) \quad (2.27)$$

となる。右辺の第1項の積分において $t-\tau$ をあらためて τ とおくと

$$\underline{y}(t) - \underline{y}(t-T_d) = \int_0^{\infty} [\underline{G}(\tau) - \underline{G}(\tau-T_d)] \underline{x}(t-\tau) d\tau + \underline{n}(t) - \underline{n}(t-T_d) \quad (2.28)$$

が得られる。ここで

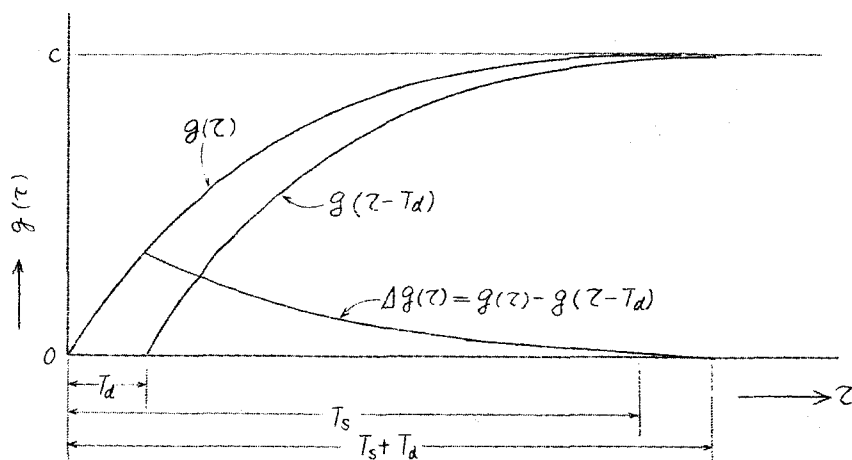
$$\left. \begin{aligned} \Delta \underline{y}(t) &\equiv \underline{y}(t) - \underline{y}(t-T_d) \\ \Delta \underline{G}(\tau) &\equiv \underline{G}(\tau) - \underline{G}(\tau-T_d) \\ \Delta \underline{n}(t) &\equiv \underline{n}(t) - \underline{n}(t-T_d) \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

を定義すれば、第 2.4 図 a) に示すように

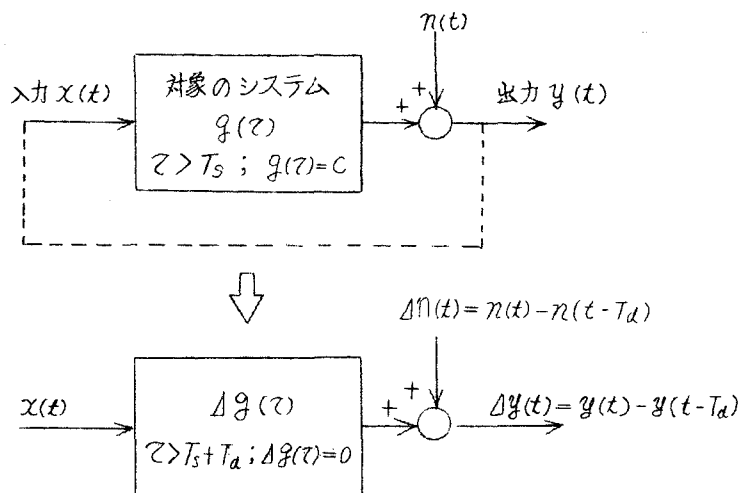
$$\tau > T_s + T_d \quad \text{において} \quad \Delta g(\tau) = 0 \quad (2.30)$$

となるから (2.28) 式は

$$\Delta y(t) = \int_0^{T_s + T_d} \Delta g(\tau) x(t - \tau) d\tau + \Delta n(t) \quad (2.31)$$



a) $\Delta g(\tau) = g(\tau) - g(\tau - T_d)$ の説明



b) 変換

第 2.4 図 自己平衡性のないシステムの実扱い

と書くことができる。第2.4図 b) は、この関係をブロック線図に示したものである。

(2.31)式と(2.13)式を比較してみよう。(2.13)式において

$$\left. \begin{aligned} \underline{y}(t) &\rightarrow \Delta \underline{y}(t) \\ \underline{G}(\tau) &\rightarrow \Delta \underline{G}(\tau) \\ \underline{\eta}(t) &\rightarrow \Delta \underline{\eta}(t) \\ T_s &\rightarrow T_s + T_d \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

とおけば(2.31)式が得られる。このことから、つぎのような興味ある結論が得られる。すなわち出力 $\underline{y}(t)$ の代わりに、出力の階差関数 $\Delta \underline{y}(t)$ をとった場合には、システムのインパルス応答 $\underline{G}(\tau)$ の代わりに $\Delta \underline{G}(\tau)$ 、雑音 $\underline{\eta}(t)$ の代わりに $\Delta \underline{\eta}(t)$ を考えておけば、前節とまったく相似の問題となるので、システムがたとえ自己平衡性をもっていなくても、自己平衡性のあるものと同様の方法で動特性を定めることができる。

§2.5 結 言

本章では、正常運転状態にあるシステムの推定法として、最小2乗法を提案し、その原理を説明した。これをまとめると以下ようになる。

- 1) システムの出力について想定した観測時間内の2乗平均誤差が最小になるように動特性を推定するので、システムの入力の統計的性質に関係なく、適用することができる。推定量は(2.13)式の解として与えられる。
- 2) 少なくともシステムの整定時間よりは長い任意の観測時間のもとで得られる動特性の推定量は、入力と雑音が互いに独立ならば、その集合平均が真の動特性に一致する。また、入力と雑音に依存する(2.17)式が0であるとみなせるような適当な観測時間をとれば、動特性の推定量は真の動特性に一致する。
- 3) 自己平衡性のないシステムは、出力の代わりに(2.29)式で定義される階差関数をとることにより、自己平衡性のあるシステムと、まったく同様に、取り扱うことができる。

第2章の参考文献

- (1) 高橋 : 自動制御 2, No.1 (1955)
- (2) J.O.Hougen & R.A.Walsh: Chemical Engg. Progress,
57, No.3, 69 (1961)
- (3) J.G.Truxal : Automatic Feedback Control System, 437, (1955)
- (4) G.W.Anderson, J.A.Aseltnine & A.R.Mancini :
I R E Convention Record, 1958, 6, Pt.4, 182.
- (5) M.T.G. Hughes & A.R.M. Noton : Proc. IEE, 109, Pt.B, 77.
(1962)
- (6) 古田, 伊沢 : 計測と制御, 3, 665 (昭39)
- (7) 西村, 藤井, 鈴木, 梅本, 峠 : 計測自動制御学会学術講演会, 540, (昭40)
- (8) 鈴木, 藤井 : 電学誌, 87-2 (昭42)

第 3 章 2乗平均誤差を最小とする動特性推定量 — 最小2乗解 — の計算法

§ 3.1 緒 言

前章では、2乗平均誤差を最小にするような動特性の推定量が、積分方程式 (2.13) で与えられることを明らかにしただけで、具体的にどのような方法でこれを解くかについては触れなかった。ここでは (2.13) 式を代数方程式で近似し、デジタル計算機を利用して解く方法を説明する。

このような方法を選んだ理由は、最近の電子計算機のもごましい発達と普及とによって、数値計算法がもっとも普遍的な方法になりつつあること、および (2.13) 式の形の積分方程式の厳密な解法が現在のところ見いだされていない⁽¹⁾ ということの二つにある。

§ 3.2 連続なシステムの離散形表示

ここでは (2.9) 式および (2.31) 式の離散形の近似式をつくるのが目的である。まず、その準備として (2.7) 式の近似式を導こう。

説明の便宜上、しばらく一入出力のシステム⁽²⁾を考える。入出力はそれぞれ周期 T でサンプルされるものとする。入力 $x(t)$ の時刻 lT (l は任意の整数) におけるサンプル値を $x(l)$ 、理想出力 $z(t)$ の時刻 $(l+\delta)T$ ($0 < \delta < 1$) におけるサンプル値を $z(l)$ とする。^{*} これらの関係を図示したのが第 3.1 図である。 δT は入力と出力のサンプル時刻のずれを表わしている。

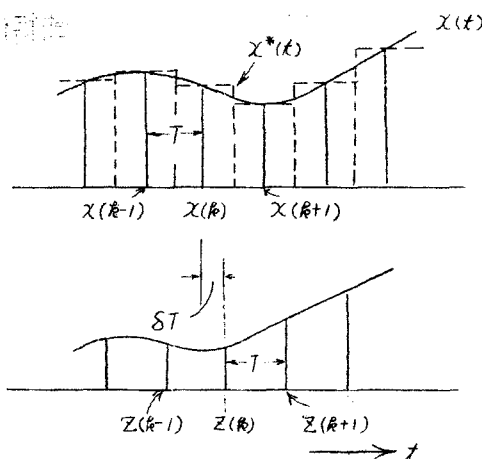
さて、第 3.1 図に実線で示したような $x(l)$ を外挿したパルス列の信号、すなわち $(l - \frac{1}{2})T \leq t \leq (l + \frac{1}{2})T$ において

$$x^*(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) \Delta u(t-lT) \quad (3.1)$$

ここで

$$\Delta u(t-lT) = \begin{cases} 1 & (l - \frac{1}{2})T \leq t \leq (l + \frac{1}{2})T \\ 0 & \text{その他の } t \end{cases}$$

^{*} $z(t)$ は理想状態の出力であるから実際に測定することはできない。しかし、ここでは (2.7) 式の近似式を求めるのが目的であるから $z(t)$ を測定可能と仮定してもさしつかえない。



第3.1図 システムの連続な入出力と
そのサンプル値との関係

と表わされる信号 $x^*(t)$ を考える。線形システムにこのような入力加わっていると仮定した場合、そのときの出力 $z(t)$ は (2.5) 式を用いて

$$\begin{aligned} z^*(t) &= \int_{-\infty}^t g(t-\tau) x^*(\tau) d\tau \\ &= x(k) \int_{(k-\frac{1}{2})T}^t g(t-\tau) d\tau + \sum_{l=-\infty}^{k-1} x(l) \int_{(l-\frac{1}{2})T}^{(l+\frac{1}{2})T} g(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.2)$$

と書ける。ここでインディシャル応答の定義式すなわち

$$h(\tau) = \int_0^{\tau} g(\tau_1) d\tau_1 \quad (3.3)$$

なる関係を用いると (3.2) 式は、

$$z^*(t) = x(k) \left\{ h\left[t - \left(k - \frac{1}{2}\right)T\right] - h(0) \right\} + \sum_{l=-\infty}^{k-1} x(l) \left\{ h\left[t - \left(l - \frac{1}{2}\right)T\right] - h\left[t - \left(l + \frac{1}{2}\right)T\right] \right\} \quad (3.4)$$

と書きかえることができる。時刻 $(k+\delta)T$ における $z^*(t)$ のサンプル値 $z^*(k)$ は $t = (k+\delta)T$ を (3.4) 式に代入して

$$z^*(k) \equiv z^*[(k+\delta)T] = \sum_{l=-\infty}^k x(l) \Delta h(k-l+1) \quad (3.5)$$

$$\text{ここで } \Delta h(k-l+1) \equiv h\left[\left(k-l+\frac{1}{2}+\delta\right)T\right] - h\left[\left(k-l-\frac{1}{2}+\delta\right)T\right]$$

である。もし $x^*(t)$ が $x(t)$ に等価であるとみなすことができるような十分

短いサンプル周期 T が選定されているならば、

$$Z(k) \approx Z^*(k) = \sum_{l=-\infty}^k \Delta h(k-l+1) X(l) \quad (3.6)$$

なる関係が近似的に成立する。実際に観測される出力のサンプル値は、

$$\begin{aligned} y(k) &= Z(k) + n(k) \\ &= \sum_{l=-\infty}^k \Delta h(k-l+1) X(l) + n(k) \end{aligned} \quad (3.7)$$

と表わすことができる。(3.7) 式において $k-l+1$ をあらためて l とおけば

$$y(k) = \sum_{l=-\infty}^k \Delta h(l) X(k-l+1) + n(k) \quad (3.8)$$

となる。

多入出力のシステム⁽³⁾では、第3.2図に示すよ

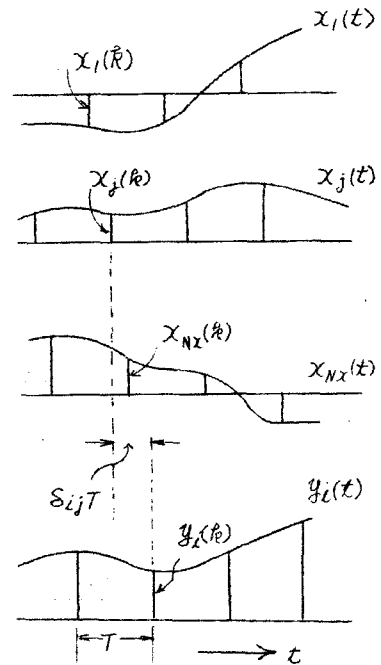
うに、 $(k-\frac{1}{2})T < t < (k+\frac{1}{2})T$ における

$x_j(t)$ ($j=1, 2, \dots, N_x$), $y_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, N_y$) のサンプル値を、それぞれ $x_j(k)$, $y_i(k)$ と表わし、ベクトル

$$\underline{x}(k) \equiv \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{N_x}(k) \end{bmatrix} \quad \underline{y}(k) \equiv \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_{N_y}(k) \end{bmatrix} \quad \underline{n}(k) \equiv \begin{bmatrix} n_1(k) \\ n_2(k) \\ \vdots \\ n_{N_y}(k) \end{bmatrix}$$

ここで $n_i(k)$ は $y_i(k)$ に対応した $n_i(t)$ のサンプル値を表わす、および $N_y \times N_x$ のマトリクス

$$\Delta H(l) \equiv \begin{bmatrix} \Delta h_{11}(l) & \Delta h_{12}(l) & \cdots & \Delta h_{1N_x}(l) \\ \Delta h_{21}(l) & \Delta h_{22}(l) & \cdots & \Delta h_{2N_x}(l) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta h_{N_y1}(l) & \Delta h_{N_y2}(l) & \cdots & \Delta h_{N_yN_x}(l) \end{bmatrix}$$



第3.2図 多入出力システム

(3.9)

$$\text{ここで } \Delta h_{ij}(\ell) = \begin{cases} h_{ij}[(\frac{1}{2} + \delta_{ij})T] & \ell = 1 \\ h_{ij}[(\ell - \frac{1}{2} + \delta_{ij})T] - h_{ij}[(\ell - \frac{3}{2} + \delta_{ij})T] & \ell = 2, 3, \dots \end{cases}$$

$\delta_{ij}T$ は第3.2図に示したように $x_j(t)$ と $y_i(t)$ のサンプル時刻のずれを表わしている。

を用いて

$$\underline{y}(\ell) = \sum_{l=1}^{\infty} \Delta H(l) \underline{x}(\ell-l+1) + \underline{n}(\ell) \quad (3.10)$$

と表わすことができる。これが(2.7)式の近似式である。

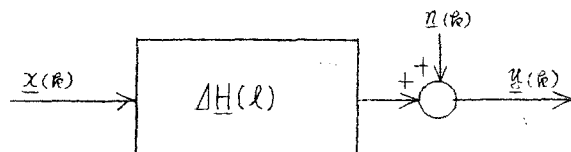
システムが自己平衡性をもつ場合は、(2.8)式の条件を満たす T_S に対して

$$T \times N_p \approx T_S \quad (3.11)$$

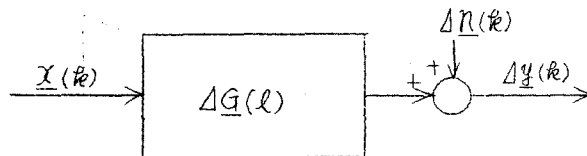
なる整数 N_p (これを以後、動特性表現式の個数と呼ぶ) と考えると、(3.10)式における $\Delta H(l)$ は、 $\ell > N_p$ ですべて 0 となるから

$$\underline{y}(\ell) = \sum_{l=1}^{N_p} \Delta H(l) \underline{x}(\ell-l+1) + \underline{n}(\ell) \quad (3.12)$$

と表わすことができる。これが(2.9)式の離散形の近似式である。第3.3図



a) 自己平衡性のあるシステム



b) 自己平衡性のないシステム

第3.3図 連続なシステムの離散形表示

a) は、(3.12)式の関係をブロック線図に表わしたものである。

システムが積分特性をもち、自己平衡性のない場合には、出力の階差関数についての方程式(2.3.1)を考えればよいことはすでに述べたとおりである。

(2.29) 式におけるずれの時間 T_d をサンプル周期に等しくとることにすると、(3.10) 式より、

$$\begin{aligned} \underline{y}(k) &= \Delta H(1) \underline{x}(k) + \Delta H(2) \underline{x}(k-1) + \Delta H(3) \underline{x}(k-2) + \cdots + \underline{n}(k) \\ \underline{y}(k-1) &= \Delta H(1) \underline{x}(k-1) + \Delta H(2) \underline{x}(k-2) + \cdots + \underline{n}(k-1) \end{aligned}$$

である。両辺を相引けば

$$\begin{aligned} \underline{y}(k) - \underline{y}(k-1) &= \Delta H(1) \underline{x}(k) + [\Delta H(2) - \Delta H(1)] \underline{x}(k-1) \\ &\quad + [\Delta H(3) - \Delta H(2)] \underline{x}(k-2) + \cdots + \underline{n}(k) - \underline{n}(k-1) \end{aligned} \quad (3.13)$$

となる。ここで

$$\left. \begin{aligned} \Delta \underline{y}(k) &\equiv \underline{y}(k) - \underline{y}(k-1) \\ \Delta \underline{G}(l) &\equiv \Delta H(l) - \Delta H(l-1) \\ \Delta \underline{n}(k) &\equiv \underline{n}(k) - \underline{n}(k-1) \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

を定義し、(2.30) 式に対応して

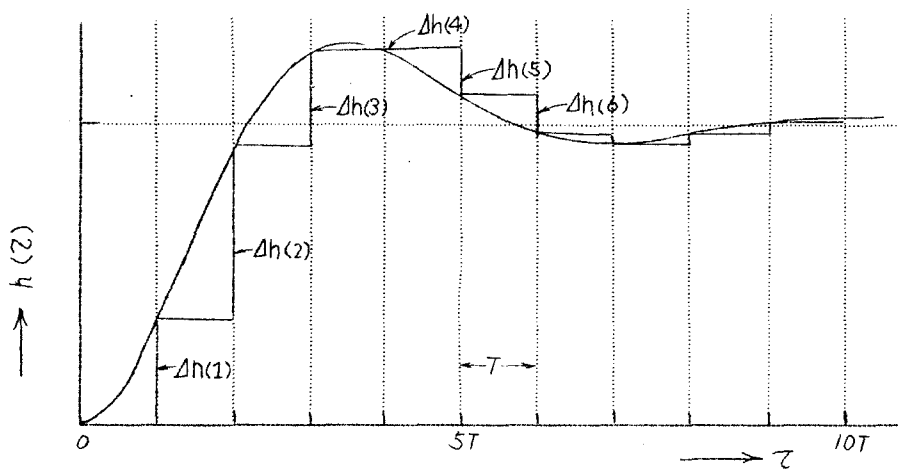
$$T \times N_p \approx T_s + T_d = T_s + T$$

なる N_p を考えると、 $\Delta \underline{G}(l)$ は $l > N_p$ ですべて 0 となるから、結局 (3.13) 式を

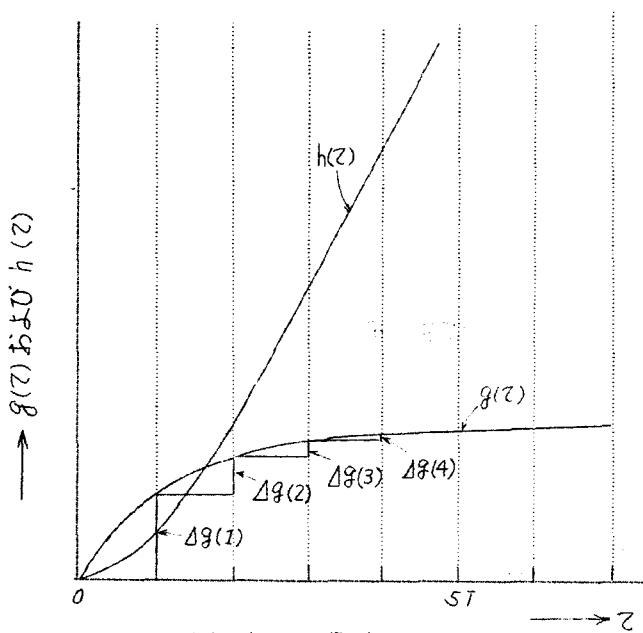
$$\Delta \underline{y}(k) = \sum_{l=1}^{N_p} \Delta \underline{G}(l) \underline{x}(k-l+1) + \Delta \underline{n}(k) \quad (3.15)$$

と表わすことができる。これが (2.31) 式の離散形の近似式である。第 3.3 図 b) は (3.15) 式の関係をブロック線図に表わしたものである。

第 3.4 図は $\Delta H(l)$ とインディシャル応答の関係および $\Delta \underline{G}(l)$ とインディシャル応答、あるいはインパルス応答との関係を 1 入出カシステムを例にとり説明したものである。



a) 自己平衡性のあるシステム



b) 自己平衡性のないシステム

第3.4図 $h(t)$ と $\Delta h(l)$ および $g(t)$ と $\Delta g(l)$ の関係

§ 3.3 最小2乗解を与える方程式⁽³⁾⁽⁴⁾

(3.12) 式をもとにして、(2.13) 式の関係を近似的に表わす代数方程式を導こう。以下の手法は、そのまま (3.15) 式にも適用できる。

あとの取り扱いに便利のように、(3.12) 式を Σ を含まない形に書きかえておく。このため N_p 元のベクトル

$$\Delta h_{ij} \equiv \begin{bmatrix} \Delta h_{ij}(1) \\ \Delta h_{ij}(2) \\ \vdots \\ \Delta h_{ij}(N_p) \end{bmatrix} \quad \underline{u}_j(k) \equiv \begin{bmatrix} x_j(k) \\ x_j(k-1) \\ \vdots \\ x_j(k-N_p+1) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

を定義すれば

$$y_i(k) = \sum_{j=1}^{N_x} \Delta h'_{ij} \underline{u}_j(k) + n_i(k) \quad (3.17)$$

であるから、さらに Δh_{ij} を要素とする $N_p N_x$ 元のベクトルおよび $\underline{u}_j(k)$ を要素とする同じく $N_p N_x$ 元のベクトル

$$\underline{b}_i \equiv \begin{bmatrix} \Delta h_{i1} \\ \Delta h_{i2} \\ \vdots \\ \Delta h_{iN_x} \end{bmatrix} \quad \underline{u}(k) \equiv \begin{bmatrix} \underline{u}_1(k) \\ \underline{u}_2(k) \\ \vdots \\ \underline{u}_{N_x}(k) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

を定義することにより

$$y_i(k) = \underline{b}_i' \underline{u}(k) + n_i(k) \quad (3.19)$$

と書くことができる。そこで

$$\underline{B} \equiv \begin{bmatrix} \underline{b}_1' \\ \underline{b}_2' \\ \vdots \\ \underline{b}_{N_y}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta h'_{11} & \Delta h'_{12} & \cdots & \Delta h'_{1N_x} \\ \Delta h'_{21} & \Delta h'_{22} & \cdots & \Delta h'_{2N_x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta h'_{N_y 1} & \Delta h'_{N_y 2} & \cdots & \Delta h'_{N_y N_x} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

なる $N_y \times N_p N_x$ のマトリクスを導入すれば、(3.12) 式を簡単に

$$\underline{y}(k) = \underline{B} \underline{u}(k) + \underline{n}(k) \quad (3.21)$$

と表わすことができる。(2.9) 式との対応関係を考えると

$$\left. \begin{array}{l} k \rightarrow t \\ \underline{y}(k) \rightarrow \underline{y}(t) \\ \underline{u}(k) \rightarrow \underline{x}(t-T_s), \quad 0 < t < T_s \\ \underline{\eta}(k) \rightarrow \underline{\eta}(t) \\ \underline{B} \rightarrow \underline{H}(T_s), \quad 0 < t < T_s \end{array} \right\} \quad (3.22)$$

であり、マトリクス $\underline{B}$ がシステムの動特性を表わしている。

さて、2乗平均誤差を最小にするような $\underline{G}(T)$ の推定量を $\hat{\underline{G}}(T)$ で表わしたように、ここでも $\underline{B}$ のそのような推定量を $\hat{\underline{B}}$ で表わし、これを最小2乗解と呼ぶことにする。 $\hat{\underline{G}}(T)$ を与える方程式(2.13)は、見かけ上(2.9)式の $\underline{\eta}(t)$ を $\underline{0}$ 、 $\underline{G}(T)$ を $\hat{\underline{G}}(T)$ とおいた方程式

$$\underline{y}(t) = \int_0^{T_s} \hat{\underline{G}}(T) \underline{x}(t-T) dT \quad (3.23)$$

の両辺に右から $\underline{x}(t-T)$ の転置ベクトルを乗じ、時間 T_s の間の平均をとれば得られることに注意しよう。この関係を利用すれば(2.13)式に対応する方程式、すなわち最小2乗解 $\hat{\underline{B}}$ を与える方程式を容易に導くことができる。

(3.21)式で、 $\underline{\eta}(k)$ を $\underline{0}$ 、 $\underline{B}$ を $\hat{\underline{B}}$ とおけば

$$\underline{y}(k) = \hat{\underline{B}} \underline{u}(k) \quad (3.24)$$

となる。両辺に右から $\underline{u}(k)'$ を乗じ、 k に関して時間 T_s の長さに相当する個数 N_d (これを以後、観測データの個数と呼ぶ) の和をとれば

$$\sum_{k=0}^{N_d-1} \underline{y}(k) \underline{u}(k)' = \hat{\underline{B}} \sum_{k=0}^{N_d-1} \underline{u}(k) \underline{u}(k)' \quad (3.25)$$

$$\text{こゝで} \quad T \times N_d \approx T_s \quad (3.26)$$

が得られる。さらに

$$\left. \begin{array}{l} \underline{C} \equiv \sum_{k=0}^{N_d-1} \underline{y}(k) \underline{u}(k)' \\ \underline{A} \equiv \sum_{k=0}^{N_d-1} \underline{u}(k) \underline{u}(k)' \end{array} \right\} \quad (3.27)$$

とおけば、(3.25)式は

$$\underline{C} = \hat{\underline{B}} \underline{A} \quad (3.28)$$

と表わすことができる。これが (2.13) 式に対応した最小2乗解を与える方程式である。 $\underline{C}$ は $N_y \times N_p N_x$ のマトリクス、 $\underline{A}$ は $N_p N_x \times N_p N_x$ の対称マトリクスである。

あとの説明の都合上、 $\underline{C}$ 、 $\underline{A}$ の要素をさらに詳細に定義しておく。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \underline{C}_i &\equiv \sum_{k=0}^{N_d-1} y_i(k) \underline{u}(k) \\ \underline{C}_{ij} &\equiv \sum_{k=0}^{N_d-1} y_i(k) \underline{u}_j(k) \\ \underline{a}_{nj} &\equiv \sum_{k=0}^{N_d-1} \underline{u}_n(k) \underline{u}_j(k)' \quad n=1, 2, \dots, N_x \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

を定義すれば、 $\underline{C}$ 、 $\underline{A}$ の要素について

$$\underline{C}_{ij} = \begin{bmatrix} C_{ij}(0) \\ C_{ij}(1) \\ \vdots \\ C_{ij}(N_p-1) \end{bmatrix}$$

$$\text{ここで} \quad C_{ij}(p-1) = \sum_{k=0}^{N_d-1} y_i(k) x_j(k-p+1) \quad (p=1, 2, \dots, N_p)$$

$$\underline{a}_{nj} = \begin{bmatrix} a_{nj}(0,0) & a_{nj}(0,1) & \dots & a_{nj}(0,N_p-1) \\ a_{nj}(1,0) & a_{nj}(1,1) & \dots & a_{nj}(1,N_p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nj}(N_p-1,0) & a_{nj}(N_p-1,1) & \dots & a_{nj}(N_p-1,N_p-1) \end{bmatrix}$$

$$\text{ここで} \quad a_{nj}(q-1, p-1) = \sum_{k=0}^{N_d-1} x_n(k-q+1) x_j(k-p+1) \quad (q=1, 2, \dots, N_p)$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{C}'_1 \\ \underline{C}'_2 \\ \vdots \\ \underline{C}'_{N_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{C}'_{11} & \underline{C}'_{12} & \dots & \underline{C}'_{1N_x} \\ \underline{C}'_{21} & \underline{C}'_{22} & \dots & \underline{C}'_{2N_x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{C}'_{N_y1} & \underline{C}'_{N_y2} & \dots & \underline{C}'_{N_yN_x} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{Q}_{11} & \underline{Q}_{12} & \dots & \underline{Q}_{1N_x} \\ \underline{Q}_{12} & \underline{Q}_{22} & \dots & \underline{Q}_{2N_x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{Q}_{N_x1} & \underline{Q}_{N_x2} & \dots & \underline{Q}_{N_xN_x} \end{bmatrix}$$

なる関係が成立する。

§ 3.4 解の統計的性質⁽⁴⁾

出力に重畳している雑音が入力と独立で、平均値が 0 である場合について、最小 2 乗解 $\hat{B}$ の統計的性質を調べてみる。

まず、 $\hat{B}$ の集合平均について

$$\begin{aligned} E \hat{B} &= E [C A^{-1}] \\ &= E \left[\sum_{k=0}^{Nd-1} y(k) \underline{u}(k)' A^{-1} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{Nd-1} E [y(k)] \underline{u}(k)' A^{-1} \end{aligned} \quad (3.31)$$

一方 (3.21) 式より

$$E y(k) = B \underline{u}(k) \quad (3.32)$$

であるから、これを (3.31) 式に代入して

$$\begin{aligned} E \hat{B} &= B \sum_{k=0}^{Nd-1} \underline{u}(k) \underline{u}(k)' A^{-1} \\ &= B A A^{-1} \\ &= B \end{aligned} \quad (3.33)$$

を得る。すなわち最小 2 乗解 $\hat{B}$ は B の不偏推定量⁽⁵⁾ (unbiased estimate) である。このことは、すでに、第 2 章で示した。

つぎに、 $\hat{B}$ の二つの行 $\hat{b}_i, \hat{b}_j$ の間の共分散行列について

$$E [\hat{b}_i - E \hat{b}_i] [\hat{b}_j - E \hat{b}_j]' = E [\hat{b}_i - b_i] [\hat{b}_j - b_j]' \quad (3.34)$$

一方 (3.28) 式より、 $\hat{b}_i$ について

$$\hat{b}_i = A^{-1} C_i = A^{-1} \sum_{k=0}^{Nd-1} y_i(k) \underline{u}(k) \quad (3.35)$$

が成り立つ。また (3.19) 式より

$$E y_i(k) = b_i' \underline{u}(k) = \underline{u}(k)' b_i \quad (3.36)$$

両辺に $\underline{u}(k)$ を左から乗じ $\sum$ をとると

$$\sum_{k=0}^{Nd-1} \underline{u}(k) E y_i(k) = \sum_{k=0}^{Nd-1} \underline{u}(k) \underline{u}(k)' b_i = A b_i \quad (3.37)$$

ゆえに

$$\underline{b}_i = A^{-1} \sum_{k=0}^{N_d-1} \underline{u}(k) \varepsilon y_i(k) \quad (3.38)$$

同様に

$$\hat{\underline{b}}_j' = C_j A^{-1} = \sum_{k=0}^{N_d-1} y_j(k) \underline{u}(k)' A^{-1} \quad (3.39)$$

$$\underline{b}_j' = \sum_{k=0}^{N_d-1} \varepsilon y_j(k) \underline{u}(k)' A^{-1} \quad (3.40)$$

これらを(3.34)式に代入すれば、 $y_i(k) - \varepsilon y_i(k) = n_i(k)$ であることを考慮して、

$$\begin{aligned} E[\hat{\underline{b}}_i - \underline{b}_i][\hat{\underline{b}}_j - \underline{b}_j]' &= E\left[A^{-1} \sum_{k=0}^{N_d-1} \{y_i(k) - \varepsilon y_i(k)\} \underline{u}(k) \sum_{l=0}^{N_d-1} \{y_j(l) - \varepsilon y_j(l)\} \underline{u}(l)' A^{-1}\right] \\ &= E\left[A^{-1} \sum_{k=0}^{N_d-1} n_i(k) \underline{u}(k) \sum_{l=0}^{N_d-1} n_j(l) \underline{u}(l)' A^{-1}\right] \\ &= A^{-1} \sum_{k,l=0}^{N_d-1} E[n_i(k) n_j(l)] \underline{u}(k) \underline{u}(l)' A^{-1} \quad (3.41) \end{aligned}$$

を得る。これから、雑音が異常不規則性をもつならば、一般に $\hat{\underline{B}}$ は一致推定量⁽⁶⁾ (consistent estimate)、すなわち N_d を十分大きくとれば $\underline{B}$ に収束することがわかる。もし雑音が白色性とみなせるならば、(3.41)式において

$$E[n_i(k) n_j(l)] = \delta_{kl} \sigma_{ij} \quad (3.42)$$

$$\text{ここで } \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k=l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

であるから、これを(3.41)式に代入して

$$\begin{aligned} E[\hat{\underline{b}}_i - \underline{b}_i][\hat{\underline{b}}_j - \underline{b}_j]' &= A^{-1} \sum_{k,l=0}^{N_d-1} \delta_{kl} \sigma_{ij} \underline{u}(k) \underline{u}(l)' A^{-1} \\ &= A^{-1} \sum_{k=0}^{N_d-1} \sigma_{ij} \underline{u}(k) \underline{u}(k)' A^{-1} \\ &= \sigma_{ij} A^{-1} A A^{-1} \\ &= \sigma_{ij} A^{-1} \quad (3.43) \end{aligned}$$

なる関係が成立する。

雑音が正規性白色雑音である場合には、 $y(k)$ ($k=0, 1, 2, \dots, N_d$) の生起する同時確率密度関数を容易に計算できるので、多重回帰理論における最尤推定法⁽⁷⁾ (method of maximum likelihood) を適用して $\underline{B}$ を推定することが可能である。以下では、最小2乗解 $\hat{\underline{B}}$ が多重回帰理論における最尤推定量と一致することを示そう。

$n(k)$ が平均値 0 で、かつ

$$\underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N_y} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2N_y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N_y 1} & \sigma_{N_y 2} & \cdots & \sigma_{N_y N_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & \cdots & \sigma^{1N_y} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} & \cdots & \sigma^{2N_y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma^{N_y 1} & \sigma^{N_y 2} & \cdots & \sigma^{N_y N_y} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.44)$$

なる共分散行列をもつ正規雑音である場合には、(3.21)式から容易にわかるように、出力の観測値 $y(k)$ ($k=0, 1, 2, \dots, N_d-1$) は平均値 $\underline{B} \underline{u}(k)$ 、共分散行列 $\underline{\Sigma}$ をもつ正規母集団から得られた標本値と考えることができる。

$\underline{B}$, $\underline{\Sigma}$ は未知の母数である。 $\underline{B}$, $\underline{\Sigma}$ に関する尤度関数を L で表わせば、この場合

$$L = (2\pi)^{-\frac{1}{2} N_d N_y} |\underline{\Sigma}|^{-\frac{1}{2} N_d} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N_d-1} [y(k) - \underline{B} \underline{u}(k)]' \underline{\Sigma}^{-1} [y(k) - \underline{B} \underline{u}(k)] \right\} \quad (3.45)$$

である。 $\underline{\Sigma}$, $\underline{B}$ は不変であるが、最尤推定法では与えられた標本値すなわち、 $\underline{u}(k)$, $y(k)$ ($k=0, 1, 2, \dots, N_d-1$) に関し、この尤度関数を最大にするような $\underline{\Sigma}$, $\underline{B}$ をとって $\underline{\Sigma}$, $\underline{B}$ の推定量とするのである。 L をマトリクスの要素について表わし、対数をとると

$$\begin{aligned} \log L = & -\frac{1}{2} N_d N_y \log(2\pi) + \frac{1}{2} N_d \log |\hat{\sigma}^{rs}| \\ & - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{N_y} \sum_{k=0}^{N_d-1} \left[y_r(k) - \sum_{n=1}^{N_x} \sum_{g=1}^{N_p} \hat{h}_{rm}(p) x_n(k-p+1) \right] \hat{\sigma}^{rs} \left[y_s(k) - \sum_{n=1}^{N_x} \sum_{g=1}^{N_p} \hat{h}_{sn}(g) x_n(k-g+1) \right] \end{aligned} \quad (3.46)$$

となる。 $\log L$ の $\hat{h}_{ij}(l)$ に関する微係数を求めると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial \hat{h}_{ij}(l)} = & \sum_{s=1}^{N_y} \sum_{k=0}^{N_d-1} \hat{\sigma}^{is} x_j(k-p+1) \left[y_s(k) - \sum_{n=1}^{N_x} \sum_{g=1}^{N_p} \hat{h}_{sn}(g) x_n(k-g+1) \right] \\ = & \sum_{s=1}^{N_y} \hat{\sigma}^{is} \left[C_{sj}(p-1) - \sum_{n=1}^{N_x} \sum_{g=1}^{N_p} \hat{h}_{sn}(g) a_{nj}(p-1, g-1) \right] \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\text{ここで} \quad C_{sj}(p-1) = \sum_{k=0}^{N_d-1} y_s(k) x_j(k-p+1)$$

$$a_{nj}(p-1, g-1) = \sum_{k=0}^{N_d-1} x_n(k-g+1) x_j(k-p+1)$$

となる。 $\log L$ の最大値では、すべての微係数が $\hat{\sigma}^{is}$ のいかににかかわらず 0 となる必要がある。(3.47)式を 0 とおけば

$$C_{ij}(p-1) - \sum_{n=1}^{N_x} \sum_{g=1}^{N_p} \hat{h}_{in}(g) a_{nj}(p-1, g-1) = 0 \quad (3.48)$$

を得る。(3.29) (3.30)式を利用して、(3.48)式を、再び、マトリクスの形にまとめれば

$$\underline{C} - \underline{\hat{B}} \underline{A} = \underline{0} \quad (3.49)$$

となる。(3.49)式の解

$$\underline{\check{B}} = \underline{C} \underline{A}^{-1} \quad (3.50)$$

は(3.49)式の唯一の解であり、 $\underline{B}$ の最尤推定量を与える。(3.49)式を(3.28)式と比較すれば、明らかに

$$\underline{\hat{B}} = \underline{\check{B}} \quad (3.51)$$

すなわち $\underline{\hat{B}}$ が最尤推定量であることがわかる。

§ 3.5 解を求める手順⁽³⁾⁽⁴⁾

これまでに最小2乗解 $\underline{\hat{B}}$ が(3.28)式で与えられること、およびその統計的性質の詳細が明らかにされた。ここでは(3.28)式を解いて $\underline{\hat{B}}$ を求める手順を説明する。

(3.28)式において、 i 行目に注目すれば

$$\underline{C}_i = \underline{\hat{B}}_i \underline{A} \quad (3.52)$$

両辺の転置をとれば

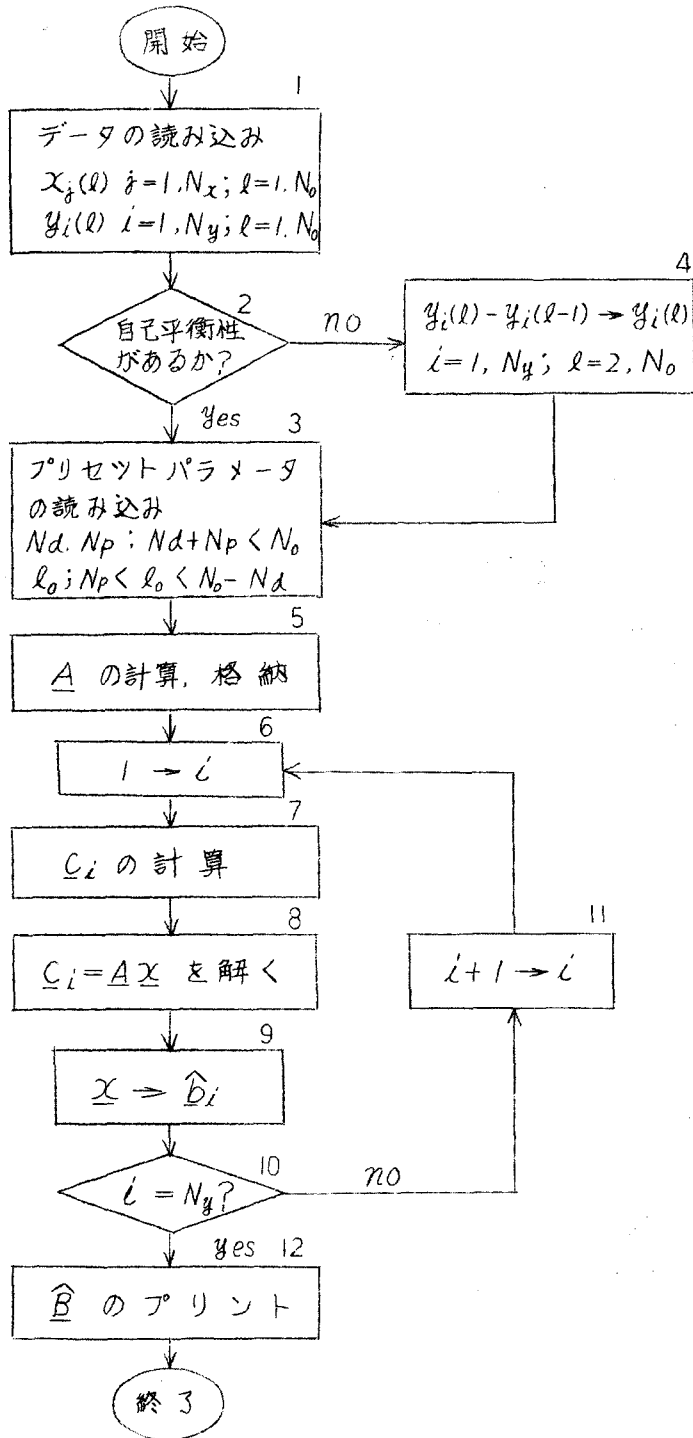
$$\underline{C}_i = \underline{A}' \underline{\hat{B}}_i' = \underline{A}' \underline{\hat{B}}_i \quad (3.53)$$

が得られる。これは $N_p \times N_x$ 元的一次代数方程式であり

$$\underline{\hat{B}}_i = \underline{A}^{-1} \underline{C}_i \quad (3.54)$$

として、 $\underline{\hat{B}}_i$ を求めることができる。これを各行についてくり返せば $\underline{\hat{B}}$ のすべての要素を決定することができる。

方程式の元数 $N_p \times N_x$ の大きさは、(3.12)式で(2.9)式を近似する関係上、少なくとも数十個程度になることが予想されるので、(3.53)式の求解には汎用のデジタル計算機を利用する必要がある。その場合の手順をフローチャートに示すと第3.5図のようになる。まず、Box 1において、動特性を推定すべきシステムの入出力データ $x_j(l)$, $y_i(l)$ ($j=1, 2, \dots, N_x$; $i=1, 2, \dots, N_y$; $l=1, 2, \dots, N_0$) が計算機の入出力装置より読み込まれ記憶装置に格納される。 N_0 はデータの個数を表わしている。Box 2はシステムが自己平



第3.5図 最小2条解を求めるためのフローチャート

平衡性をもつか否かに対応した分岐条件を与えている。もし、システムが自己平衡性をもっていない場合には、読み込まれた出力データについて

$$y_i(l) - y_i(l-1) \rightarrow y_i(l) \quad (i=1, 2, \dots, N_y; l=2, 3, \dots, N_0) \quad (3.55)$$

なる計算および置換が行なわれる。Box 3 では、動特性推定に先だって、プリセットすべきパラメータ N_d, N_p および観測開始点 l_0 が指定される。これらのプリセットパラメータは

$$\begin{aligned} N_d + N_p &< N_0 \\ N_p &< l_0 < N_0 - N_d \end{aligned} \quad (3.56)$$

なる条件を満足しなければならない。Box 5 ではマトリクス A の要素の計算および記憶装置への格納、配列が行なわれる。Box 6 でベクトル C_i の要素の計算および格納が行なわれ、(3.53) 式に対応した代数方程式

$$C_i = A X \quad (3.57)$$

が Box 8 で解かれる。求められた解 X が $\hat{b}_i$ に相当している。Box 10 および 11 により、 i を 1 から N_y まで順々に変えて計算が行なわれるので、結局 $\hat{B}$ のすべての要素が定まることになる。これを適当な出力装置を介して読み出せばよい。

マトリクス A の要素を計算するには、次のような方法をとっている。 A の中の一つの小行列 a_{nj} を取り出すと、(3.30) 式でも示したように、

$$a_{nj} = \begin{bmatrix} a_{nj}(0,0) & a_{nj}(0,1) & \dots & a_{nj}(0,N_p-1) \\ a_{nj}(1,0) & a_{nj}(1,1) & \dots & a_{nj}(1,N_p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nj}(N_p-1,0) & a_{nj}(N_p-1,1) & \dots & a_{nj}(N_p-1,N_p-1) \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$\text{ここで } a_{nj}(q-1, p-1) = \sum_{k=0}^{N_d-1} x_n(k-q+1) x_j(k-p+1)$$

である。対角線に平行な要素に注目すると、たとえば 1 行 1 列目の要素は、

$$\begin{aligned} a_{nj}(0,0) &= \sum_{k=0}^{N_d-1} x_n(k) x_j(k) \\ &= x_n(0) x_j(0) + x_n(1) x_j(1) + \dots \\ &\quad + x_n(N_d-2) x_j(N_d-2) + x_n(N_d-1) x_j(N_d-1) \end{aligned}$$

2行2列目の要素は

$$\begin{aligned} a_{nj}(1,1) &= \sum_{k=0}^{Nd-1} x_n(k-1) x_j(k-1) \\ &= x_n(-1) x_j(-1) + x_n(0) x_j(0) + \dots + x_n(Nd-2) x_j(Nd-2) \end{aligned}$$

となり、 $a_{nj}(1,1)$ は $a_{nj}(0,0)$ に $x_n(-1) x_j(-1)$ を加え $x_n(Nd-1) x_j(Nd-1)$ を差し引くだけで求められる。この関係を利用して (3.55) 式の要素を矢印の方向に計算していくことにすれば、計算に要する時間を非常に短縮することができる。

参考のため、第 3.5 図のフローチャートを元にして Fortran IV 形式で書かれた実用プログラムを付録に示す。

§3.6 結 言

最小 2 乗法は、任意の入力で比較的短時間に動特性を推定することが可能であるというすぐれた利点をもっているが、反面、動特性の推定量を与える厳密な方程式が非常に難解であるという問題点をもっている。本章では、この方程式をデジタル計算機を利用して解くという立場をとり、計算機に適した、しかも能率のよい近似計算法を見いだすことを目的として研究が行なわれた。これをまとめると以下ようになる。

- 1) システムの入出力関係は、各入出力について一定周期ごとのサンプル値をとることにより、自己平衡性のある場合には代数方程式 (3.12) で、また自己平衡性のない場合には代数方程式 (3.15) で近似表示できる。(3.15) 式では出力の代わりにその階差 (周期に等しい) 関数が考えられているのが特徴である。いずれの式においてもシステムの動特性は、 N_y (出力数) $\times$ N_x (入力数) $\times$ N_p (表現点の数) 個の量で表わされている。
- 2) 2 乗平均誤差を最小とする動特性推定量 (最小 2 乗解) は $N_y \times N_x \times N_p$ 個の未知数をもつ連立代数方程式 (3.28) で与えられる。

この最小 2 乗解は、第 2 章で示したように不偏推定量であり、さらに雑音が入力信号に一致する場合には一致推定量となる。もし雑音が入力信号と一致しない場合には解の分散は (3.43) 式で与えられる。雑音が入力信号と一致しない場合には最小 2 乗解は多重回帰理論における最尤推定量に一致する。

- 3) (3.28)式を解いて最小2乗解を求める手順を 第3.5図 のフローチャートに示した。マトリクスの要素の計算に工夫をこらしたので，第4章で述べるように相関法とほとんど変わらない計算時間で最小2乗解を算出できる。

第 3 章 ① 参考文献

- (1) W.B. Davenport & W.L. Root ; An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise, 371 (1958)
- (2) 鈴木, 峠, 藤井, 西村 ; 計測自動制御学会論文集, 1, 163 (昭40)
- (3) 鈴木, 藤井 ; 電学誌 87-2 (昭42)
- (4) 西村, 藤井, 鈴木, 梅本, 峠 ; 計測自動制御学会学術講演会 540 (昭40)
- (5) 河田, 国沢 ; 現代統計学上巻, 74 (昭40)
- (6) 同上 ; 75
- (7) T.W. Anderson ; An introduction to Multivariate Statistical Analysis, 175 (1958)

第 4 章 相関法との関連性および比較

§ 4.1 緒 言

これまでに述べてきた最小 2 乗法は、従来から正常運転状態における動特性推定の手法として提案されている相関法を極限の場合として含むような一般的な方法である。

相関法は正常運転時の不規則変動をする入出力と定常確率過程とみなし、統計的関係すなわち入力の自己相関関数と入出力の相互相関関数との間の関係を利用して対象の動特性を定めている。相関法は入力と関係のない雑音の影響をまったく受けないというすぐれた利点をもっており、理論上から見れば、きわめて整った方法であるといえるが、相関関数を求めるために入出力を長時間にわたって観測する必要があるという実用上の難点をもっている。このような難点は、相関法が入出力を実際に観測しているにもかかわらず、それから統計的性質のみを抽出するという考え方に基づいているために生じたものである。

最小 2 乗法は、第 2 章で説明したように、動特性を定めるべき対象の出力と動特性推定結果に依存する仮定の出力との 2 乗平均誤差を最小にするという概念に基づいたもので、入力の統計的性質をまったく利用していないため動特性推定に要する時間は事実上雑音の大きさのみに依存する。したがって、多くの場合、相関法に比較して短い時間で対象の動特性を定めることが可能であり、また入力の統計的性質（定常不規則性）を仮定する必要がないので適用範囲も広い。

本章では、相関法の原理を説明し、その問題点を探るとともに、相関法と最小 2 乗法との関連性を明らかにし、両方法の比較を行なう。

§ 4.2 相関法の原理

システムの入出力が定常不規則過程とみなせる場合には、統計的にシステムを記述することが可能である。(2.7) 式の両辺に入力ベクトル $\underline{x}(t-\tau)$ の転置ベクトルを右から乗ずると

$$\underline{y}(t) \underline{x}(t-\tau)' = \int_0^{\infty} \underline{g}(\tau_1) \underline{x}(t-\tau_1) d\tau_1 \cdot \underline{x}(t-\tau) + \underline{n}(t) \underline{x}(t-\tau)' \quad (4.1)$$

である。両辺の時間平均をとり、積分順序を変更すれば

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} y(t) x(t-\tau_1)' dt = \int_0^{\tau_1} G(\tau_1) \left\{ \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t-\tau_1) x(t-\tau_1)' dt \right\} d\tau_1 \\ + \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} n(t) x(t-\tau_1)' dt \dots\dots\dots (4.2)$$

である。\$x(t)\$ および \$n(t)\$ が足常不規則過程である場合には、(4.2) 式中の時間平均は、それぞれ、一定値に収束するので、

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau_1) &\equiv \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} y(t) x(t-\tau_1)' dt \\ R_{xx}(\tau_1, \tau_2) &\equiv \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t-\tau_1) x(t-\tau_2)' dt \\ &\equiv \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) x(t-\tau_1+\tau_2)' dt \\ R_{xn}(\tau_1) &\equiv \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} n(t) x(t-\tau_1)' dt \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} R_{xy}(\tau_1) \\ R_{xx}(\tau_1, \tau_2) \\ R_{xn}(\tau_1) \end{aligned}} \right\} \dots\dots\dots (4.3)$$

と表わすことができる。ここで \$R_{xy}(\tau)\$ は \$ij\$ 番目の要素が入力 \$x_j(t)\$ と出力 \$y_i(t)\$ の間の相互相関関数に等しいような \$N_y \times N_x\$ のマトリクス、\$R_{xx}(\tau)\$ は \$m, n\$ 番目の要素が入力 \$x_m(t)\$ と \$x_n(t)\$ との間の相関関数に等しいような \$N_x \times N_x\$ の対称マトリクス、\$R_{xn}(\tau)\$ は \$ij\$ 番目の要素が雑音 \$n_i(t)\$ と入力 \$x_j(t)\$ の相関関数に等しい \$N_y \times N_x\$ のマトリクスである。(4.3) 式を (4.2) 式に代入すれば

$$R_{xy}(\tau_1) = \int_0^{\tau_1} G(\tau_2) R_{xx}(\tau_1 - \tau_2) d\tau_2 + R_{xn}(\tau_1) \dots\dots\dots (4.4)$$

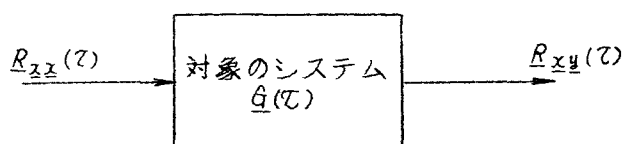
なる関係が得られる。雑音が入力と独立ならば

$$R_{xn}(\tau) = 0 \dots\dots\dots (4.5)$$

であるから

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{\tau} G(\tau_2) R_{xx}(\tau - \tau_2) d\tau_2 \dots\dots\dots (4.6)$$

が成立する。この関係を図示したのが 第4.1図 である。上でも述べたように \$R_{xy}(\tau)\$, \$R_{xx}(\tau)\$ は確定量であるから、適当な方法で (4.6) 式を解く



第 4.1 図 システムの統計的表示

ことにより、 $\hat{G}(\tau)$ が定まる。この原理を用いるのが相関法である。

§ 4.3 相関法の問題点および最小 2 乗法との関連性

問題を入力と雑音の間に相関関係がなく、かつシステムが自己平衡性をもっている場合に限ろう。しかるときは (4.6) 式より、

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{T_s} \hat{G}(\tau_2) R_{xx}(\tau - \tau_2) d\tau_2 \quad (4.7)$$

ここで $\tau > T_s$ において $\hat{G}(\tau) = 0$

が成立する。(4.6) 式が厳密な意味で成立するのは、相関関数の定義式 (4.3) からも明らかなように、観測時間を無限大にとった場合に限られることに注意しよう。相関法の問題点というのは、実はこの (4.7) 式そのもの、すなわち実質不可能な無限大の観測時間をとった場合にのみ成立する (4.7) 式を出発点として、実在の対象の動特性を決定しようという考え方にある。以下では、この問題点をもう少し詳細に検討してみる。

相関法を実用する際には、観測時間 T_s を適当な長さにとり

$$\left. \begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T_s} R_{xy}(\tau_1) &= \frac{1}{T_s} \int_{t_0}^{t_0+T_s} y(t) x(t-\tau_1)' dt \\ \int_{t_0}^{t_0+T_s} R_{xx}(\tau_1-\tau_2) &= \frac{1}{T_s} \int_{t_0}^{t_0+T_s} x(t) x(t-\tau_1+\tau_2)' dt \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

なる形で相関関数を計算し、(4.7) 式に類似する関係式

$$\int_{t_0}^{t_0+T_s} R_{xy}(\tau) = \int_0^{T_s} \hat{\hat{G}}(\tau_2) \int_{t_0}^{t_0+T_s} R_{xx}(\tau-\tau_2) d\tau_2 \quad (4.9)$$

を解いて、 $\hat{\hat{G}}(\tau)$ を求める。 $\hat{\hat{G}}(\tau)$ は特に相関法による動特性の推定量という意味で区別して表わしてある。 $\hat{\hat{G}}(\tau)$ の性質を調べるために、§ 2.3 と同様な考察を試みよう。(4.8) 式と (2.14) 式の右辺はまったく一致するから (2.16) 式が利用できる、

$${}^fR_{xx}(z) = \underline{C}(t_0, T_0, z_1) = \int_0^{T_0} \underline{G}(z_3) \underline{A}(t_0, T_0, z_1, z_3) dz_3 + \underline{D}(t_0, T_0, z_1) \quad (4.10)$$

これを (4.9) 式に代入すれば

$$\int_0^{T_0} \underline{G}(z_3) \underline{A}(t_0, T_0, z_1, z_3) dz_3 + \underline{D}(t_0, T_0, z_1) = \int_0^{T_0} \underline{G}(z_2) {}^fR_{xx}(z_1 - z_2) dz_2 \quad (4.11)$$

なる関係が得られる。(4.11) 式より

$$\hat{\underline{G}}(z) \approx \underline{G}(z) \quad (4.12)$$

なるためには、観測時間 T_0 を

$$\begin{aligned} \underline{D}(t_0, T_0, z_1) &\approx 0 \\ {}^fR_{xx}(z_1 - z_2) &\approx \underline{A}(t_0, T_0, z_1, z_2) = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t-z_2) x(t-z_1) dt \quad (4.13) \end{aligned}$$

の両辺が成立するような長さにとる必要がある。

筆者の提案する最小2乗法では、動特性の推定量 $\hat{\underline{G}}(z)$ が真の動特性 $\underline{G}(z)$ にはほぼ一致するための条件は (2.22) 式のみであったが、相関法では、新たに、自己相関関数の計算精度を表わすところの (4.13) 式が条件として加わっている。(2.22) 式は入力と雑音の間の相互相関関数の計算精度を表わすものであり、一般のシステムでは、入力に比べれば雑音はかなり小さいということを考慮すれば、(2.22) 式の条件よりはむしろ、(4.13) 式の条件の方が観測時間 T_0 の長さに対し支配的であり、相関法で必要とされる観測時間は、最小2乗法のそれに比べて、著しく長くなる可能性のあることが容易に予想される。これについての定量的な比較は §4.5 で行なう。

さて、最小2乗法で観測時間を無限大にとつた極限の場合を考えてみよう。(2.13) 式において $T_0 \rightarrow \infty$ とすれば、同式中の $\underline{C}(t_0, T_0, z_1)$ および $\underline{A}(t_0, T_0, z_1, z_2)$ は、その定義式 (2.14), (2.15) を相関関数の定義式 (4.3) と比較すれば容易にわかるように、それぞれ $R_{xx}(z_1 - z_2)$, $R_{xx}(z_1)$ に収束する。すなわち最小2乗法で観測時間を十分大きくとつた場合は、(4.7) 式を $z_1 > 0$ の領域で解くことに等価であることがわかる。これから最小2乗法は相関法を特別な場合として含むような一般的な方法であるといえる。

§ 4.4 相関関数計算の精度⁽²⁾

前節において、相関法と最小2乗法との関連性を説明し、相関法の問題点が入力の自己相関関数の計算精度が動特性の推定結果に影響を与えるということにあることを明らかにした。そこで、本節では、相関関数の計算精度が観測時間の長さによってどのように変わるかを理論的に考察する。

信号 $x(t)$ は平均値 0 の正規性不規則信号とする。 $x(t)$ の自己相関関数 $r_{xx}(\tau)$ の計算値を $f_{r_{xx}}(\tau)$ とすると、(4.8) 式に示したように

$$f_{r_{xx}}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) x(t-\tau) dt \quad (4.14)$$

と表わされる。 T_0 は観測時間の長さである。 $f_{r_{xx}}(\tau)$ の分散を $\sigma_r^2(\tau)$ で表わすと

$$\begin{aligned} \sigma_r^2(\tau) &= E \left\{ f_{r_{xx}}(\tau) - E f_{r_{xx}}(\tau) \right\}^2 \\ &= E \left\{ f_{r_{xx}}(\tau) \right\}^2 - r_{xx}^2(\tau) \end{aligned} \quad (4.15)$$

である。(4.14) 式を (4.15) 式に代入して、所要の計算を行なうと

$$\sigma_r^2(\tau) = \frac{1}{T_0^2} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \left(T_0 - \tau_1 \right) \left\{ r_{xx}^2(\tau_1) + r_{xx}(-\tau_1 + \tau_2) r_{xx}(\tau_1 + \tau_2) \right\} d\tau_1 \quad (4.16)$$

となる(付録参照)。

$x(t)$ の統計的性質はさまざまであり、 $r_{xx}(\tau)$ の一般的な表現を見いだすことは困難なので、ここでは入力として考えられる典型的な例を 2, 3 あげてみる。まず

$$r_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\omega_0 |\tau|} \quad (4.17)$$

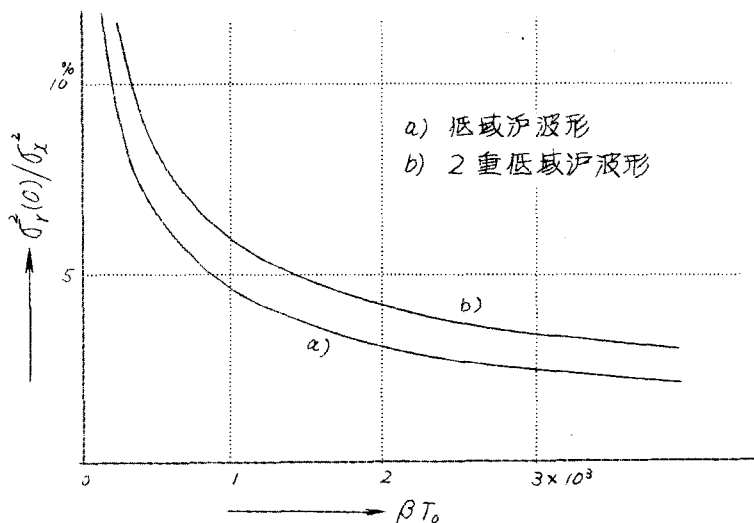
のとき、このような相関関数をもつ信号 $x(t)$ は、白色性雑音を帯域 ω_0 をもつ低域濾波器で濾波することによって得られる(これを以後、低域濾波形の信号と呼ぶ)。(4.17) 式を (4.16) 式に代入し、所要の計算を行なうと

$$\sigma_r^2(\tau) = \frac{\sigma_x^2}{2\omega_0^2 T_0^2} \left\{ 2\omega_0 T_0 - 1 + 2e^{-2\omega_0 T_0} + \left[(2\omega_0 T_0 - 1)(2\omega_0 \tau + 1) - 2\omega_0^2 \tau^2 \right] e^{-2\omega_0 \tau} \right\} \quad (4.18)$$

となる。(4.18) 式は τ の単調減少関数であり、 $\tau=0$ のとき最大となるから

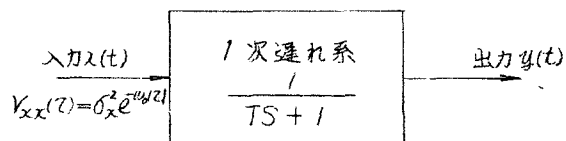
$$\sigma_r^2(0) = \sigma_x^2 \frac{2\omega_0 T_0 - 1 + e^{-2\omega_0 T_0}}{\omega_0^2 T_0^2} \quad (4.19)$$

を計算値の分数の目安にとることができる。(4.19)式を信号の帯域 β (この場合は $\beta = \omega_0$)で無次元化した観測時間 βT_0 を横軸にとってグラフに示すと、第4.2図の曲線(a)のようになる。



第4.2図 観測時間 T_0 と分散 $\sigma_r^2(0)$ との関係

これから、たとえば、分散が5%以内、したがって計算値の95%が平均値(この場合は真値に等しい)から10%の範囲に入るためには βT_0 は1000以上にとる必要があることがわかる。この数字のもつ意味を、最も簡単な動特性推定の問題と結びつけて考えてみる。第4.3図に示すように、(4.17)式の相関関数をもつ信号 $x(t)$ が時定数 T をもつ1次遅れ系に加わっている場合を想定する。信号の帯域と系の通過帯域が等しいとすると



第4.3図 低域濾波形の入力をもつ1次遅れ系

$$\beta = \frac{1}{T} \quad (4.20)$$

が成り立つから、上記の精度を得るために必要な観測時間は、動特性を推定すべき系の時定数の1000倍あるいは整定時間 T_s と比べると、この場合、 $T_s \approx 5T$

であるから、 T_s の 200 倍ということになる。相関法では観測時間の長さが、むしろ、相関関数の計算精度により支配されるということを示す好例である。
つぎに

$$r_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 (1 + \omega_0 |\tau|) e^{-\omega_0 |\tau|} \quad \dots\dots\dots (4.21)$$

のとき、このような相関関数をもつ信号 $x(t)$ は、白色雑音を、それぞれ帯域 ω_0 の、2 極低域通過滤波器で通過することによって得られる。(これを以後、2 重低域通過形の信号と呼ぶ)。さきの例と同様、 $\sigma_r^2(0)$ を計算すると

$$\sigma_r^2(0) = \sigma_x^2 \frac{10\omega_0 T_0 - 9}{2\omega_0^2 T_0^2} \quad \dots\dots\dots (4.22)$$

となる。信号の帯域 $\beta = \sqrt{2}\omega_0$ をとって、(4.22) 式をグラフに示すと、第 4.2 図の曲線 b) のようになる。この場合も a) と同様、分散を約 5% にするには $\beta T_0 = 1000$ 程度が必要であることがわかる。

§ 4.5 相関法と最小 2 乗法の比較⁽³⁾

まず、計算の手順および所要計算時間の比較を行なう。

相関法によりシステムのインパルス応答を求めるには、方程式

$$r_{xy}(\tau_1) = \int_0^{\tau_1} g(\tau_2) r_{xx}(\tau_1 - \tau_2) d\tau_2 \quad \dots\dots\dots (4.23)$$

ここで $\tau > T_s$ において $g(\tau) \approx 0$

を和の形

$$r_{xy}(\tau) = \sum_{l_2=1}^{N_p} g\left[\left(l_2 - \frac{1}{2}\right)T\right] r_{xx}\left[\tau - \left(l_2 - \frac{1}{2}\right)T\right] T \quad \dots\dots\dots (4.24)$$

ここで $N_p T \approx T_s$

で表わし、 N_p 個の未知数 $g\left[\left(l_2 - \frac{1}{2}\right)T\right]$ ($l_2 = 1, 2, \dots, N_p$) を求めるという方法が、通常、とられている。⁽⁴⁾ (4.24) 式において $\tau = T/2, 3T/2, \dots, (N_p - 1)T/2$ とおけば、 N_p 個の方程式

$$r_{xy}\left[\left(l_1 - \frac{1}{2}\right)T\right] = \sum_{l_2=1}^{N_p} g\left[\left(l_2 - \frac{1}{2}\right)T\right] r_{xx}\left[\left(l_2 - l_1\right)T\right] \quad l_1 = 1, 2, \dots, N_p \quad (4.25)$$

が得られるから、これを連立させて解くことにより $g\left[\left(l_2 - \frac{1}{2}\right)T\right]$ が求まる。

実際の場合には、たとえば、相関関数 $Y_{xx}(\ell T)$ は、(4.14) 式を和の形で表わし、

$$\begin{aligned} Y_{xx}(\ell T) &= Y_{xx}(\ell) = \frac{1}{N_d T} \sum_{k=0}^{N_d-1} x(kT) x((k+\ell)T) T \\ &= \frac{1}{N_d} \sum_{k=0}^{N_d-1} x(kT) x((k+\ell)T) \end{aligned} \quad (4.26)$$

として計算されるので、解くべき連立方程式を厳密に書くと

$$Y_{xy}\left[\left(\ell_1 - \frac{1}{2}\right)T\right] = \sum_{\ell_2=1}^{N_p} \hat{g}\left[\left(\ell_2 - \frac{1}{2}\right)T\right] Y_{xx}\left[(\ell_2 - \ell_1)T\right] \quad \ell_1 = 1, 2, \dots, N_p \dots (4.27)$$

となる。ここで $\hat{g}$ をつけたのは、(4.9) 式におけると同様、相関法による推定値という意味である。(4.27) 式の両辺に N_d を乗じ、マトリクス表示をすると、

$$\underline{r}_C = \underline{r}_A \hat{\underline{b}} \quad (4.28)$$

ここで

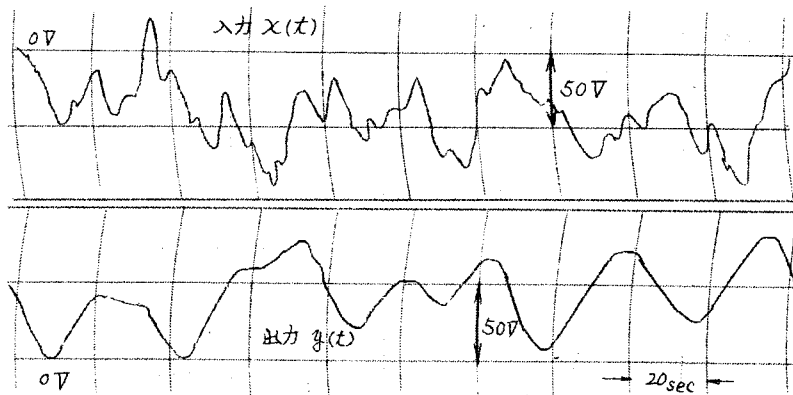
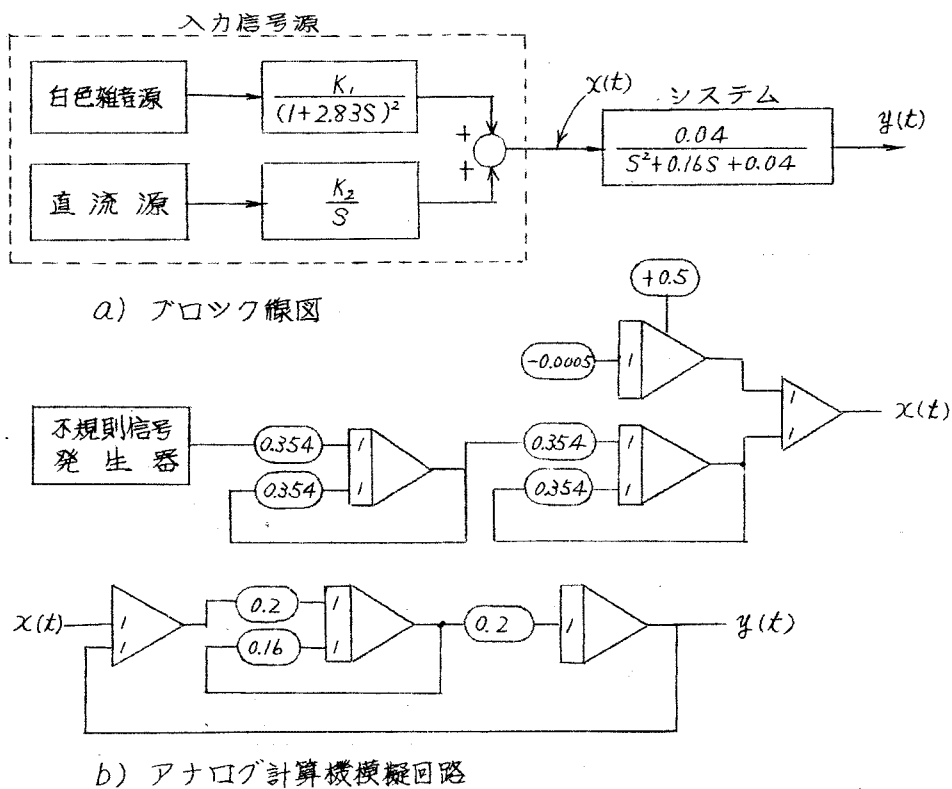
$$\left. \begin{aligned} \underline{r}_A &= \begin{bmatrix} \sum x^2(k) & \sum x(k-1)x(k) & \dots & \sum x(k-N_p+1)x(k) \\ \sum x(k)x(k-1) & \sum x^2(k) & \dots & \sum x(k-N_p+2)x(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x(k)x(k-N_p+1) & \sum x(k)x(k-N_p+2) & \dots & \sum x^2(k) \end{bmatrix} \\ \underline{r}_C &= \begin{bmatrix} \sum x(k)y(k) \\ \sum x(k-1)y(k) \\ \vdots \\ \sum x(k-N_p+1)y(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \hat{\underline{b}} = \begin{bmatrix} Tg\left(\frac{1}{2}T\right) \\ Tg\left(\frac{3}{2}T\right) \\ \vdots \\ Tg\left[\left(N_p - \frac{1}{2}\right)T\right] \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

となる。

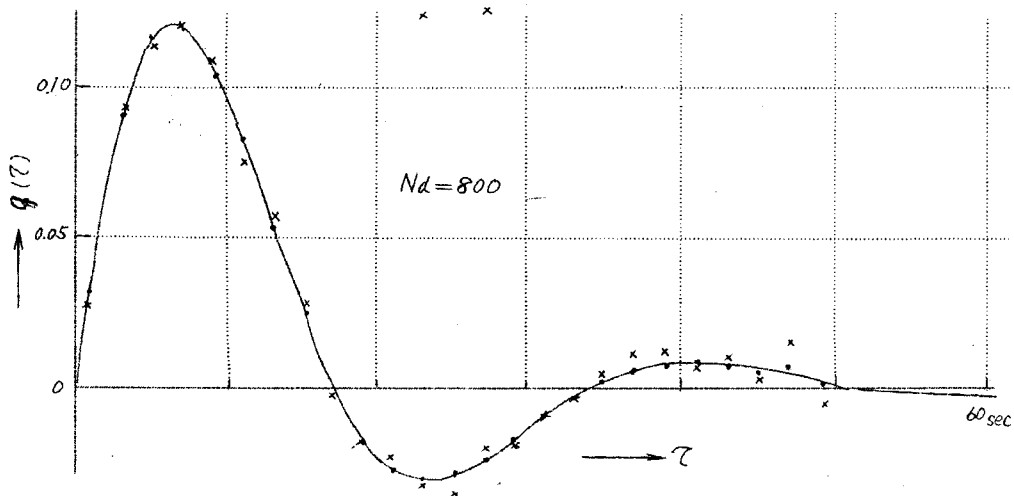
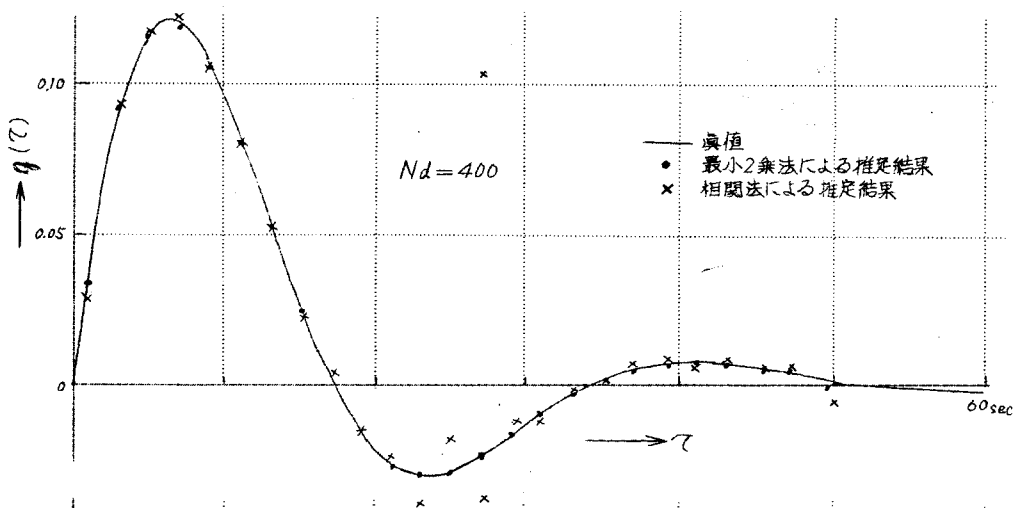
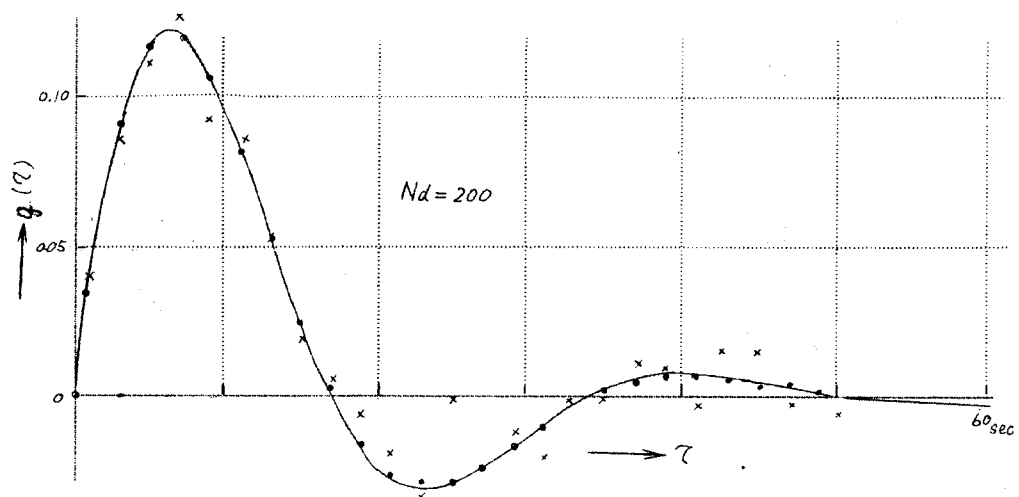
(4.29) 式を (3.55) 式と比較すれば、相関法と最小 2 乗法との差異がマトリクス $\underline{r}_A$ と $\underline{A}$ の要素が少し異なっている点にあることが明らかである。すなわち $\underline{r}_A$ では対角線に平行な要素はすべて同一であるのに対し、 $\underline{A}$ では対角線に平行なとなり合う要素はデータひと組分だけずれている。 $\underline{A}$ の要素を計算するには §3.5 で説明した方法をとっているのので、 $\underline{r}_A$ と $\underline{A}$ の計算に必要な時間はほぼ同じであると考えてよい。

さて、アナログ計算機上に構成した模擬システムの動特性を二つの方法で推

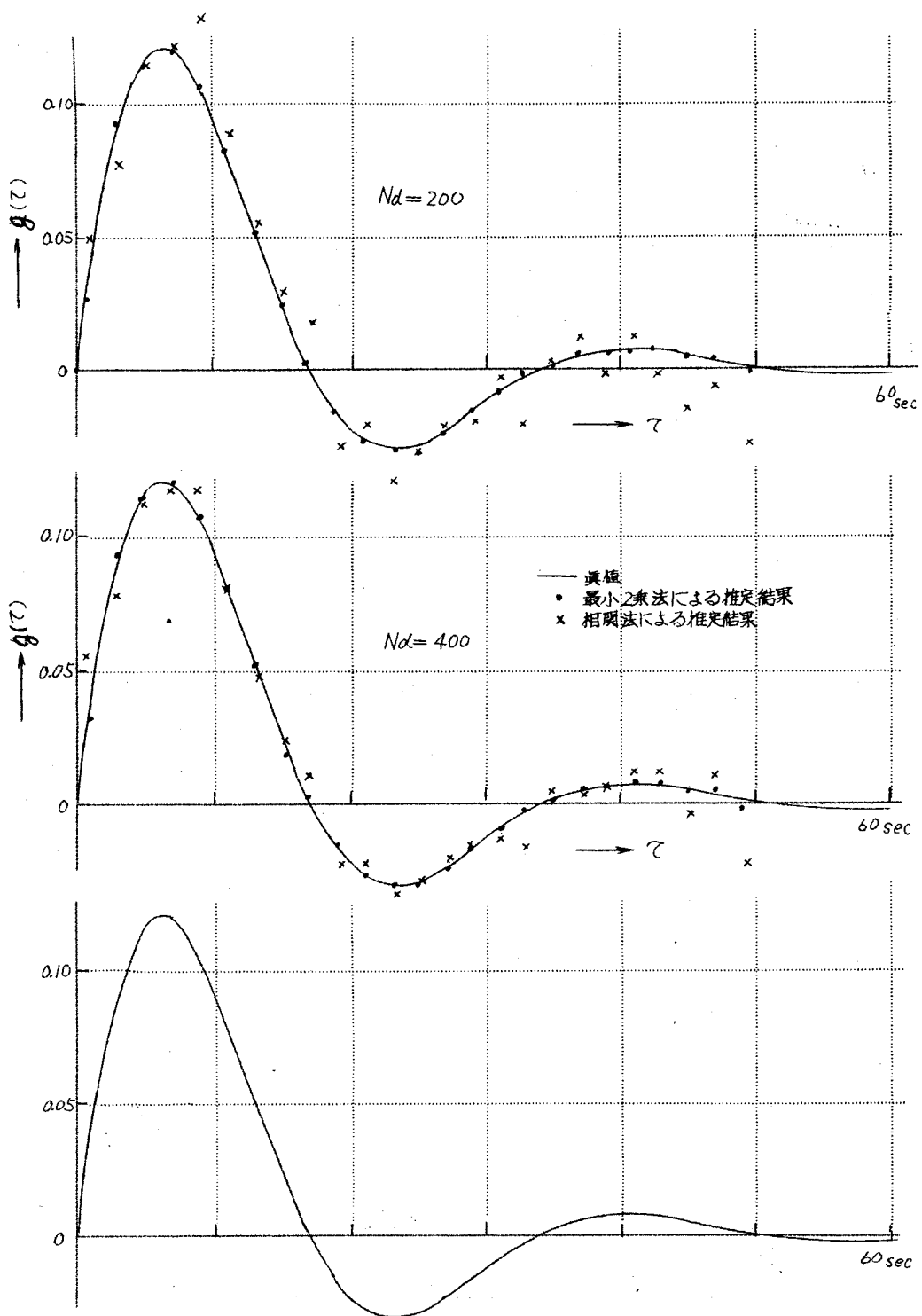
定し結果を比較してみる。第4.4図は模擬システムのブロック線図である。入



第4.4図 模 擬 シ ス テ ム



第4.5図 相関法と最小2乗法とによる動特性推定結果の比較
—その1. 定常不規則入力の場合, $T=2\text{sec}$, $N_p=25$



第 4.6 図 相関法と最小 2 乗法とによる動特性推定結果の比較
 —その 2. 入力に 3.4 V/min のドリフトのある場合, $T=2 \text{ sec}$, $N_p=25$

力 $x(t)$ としては 2 重低域濾波形の信号を用いている。入出力のサンプル周期 $T=2_{sec}$ ^{*} 動特性表現式の個数 $N_p=25$ にとり、観測式の個数 N_d を 200, 400, 800 の 3 通りに選んで、動特性を推定した結果が第 4.5 図である。

最小 2 乗法による推定値は真値とまったく一致しているといつてよいが、相関法による推定値は相当のバラツキがあり、 N_d は少なくとも 800 個以上、すなわちシステムの整定時間の 30 倍以上にとる必要がある。入力にドリフトがある場合には、定常性の仮定が満たされていないので、相関法を適用することは妥当でない。これを示すために、入力にわずかのドリフト ($3.4V/min$) を加えて、同様の実験を行なった結果が第 4.6 図である。

第 4.5 図と第 4.6 図を比較すれば、明らかに相関法ではドリフト分の影響があり推定値のバラツキが大きくなっている。最小 2 乗法では、その影響はまったくないといつてよい。

§4.6 結 言

従来から提案されている相関法の問題点および筆者の提案する最小 2 乗法との関係が明らかになった。これをまとめると以下のようになる。

- 1) 動特性を推定すべきシステムが定常確率過程とみなせる場合、観測時間を十分長くとれば、最小 2 乗平均誤差法は相関法と一致する。後者の方法は、入力の自己相関関数の計算精度が動特性の推定結果に影響するが、前者の方法ではまったく影響しない。
- 2) 入力の自己相関関数計算の精度と、計算に用いたデータの長さ (観測時間) との関係が明らかになった。(第 4.2 図)
- 3) 最小 2 乗法および相関法について、動特性計算の手順はほぼ同じであり、したがって計算に要する時間もほぼ等しい。
- 4) 模擬システムについての実験によれば、最小 2 乗法では常に正しい計算結果が得られるが、相関法ではバラツキが多い。とくに入力にゆるやかな変動 (ドリフト) がある場合、相関法ではかなりの影響があるが、最小 2 乗法では、まったく影響しないということ是对照的である。

* 適正なサンプル周期は、入力の統計的性質に応じて定められるべきである。この場合の周期は、§5.2 で述べる方法を用いて選定されている。

第 4 章 の 参 考 文 献

- (1) ソルドフニコフ・ウスコフ 著, 古屋, 安達 訳 ;
自動制御系の統計的解析法, 5 (昭 38)
- (2) 鈴木, 坂部, 藤井, 西村 ; 電学誌 84, 1923 (昭 39)
- (3) 西村, 藤井, 鈴木, 峠 ; 日本自動制御協会学術講演会 134 (昭 40)
- (4) 文献 (1), 38

第 5 章 基礎的実験

§5.1 緒 言

第3章において、動特性推定量すなわち最小2乗解を求める方法を説明したが、これを実際の問題に應用するという観点から見直すと、また、いくつかの問題点が残されている。これらは動特性計算の精度あるいは動特性計算に要する時間、電子計算組織面の経済性を支配する問題で、その一つはサンプル周期をいかなる基準に基づいて選定するかということであり、他の一つは(3.28)式を計算する場合にプリセットすべきパラメータ N_p , N_d をいかにとるかということである。

本章では、順を追って、これらの問題点を取りあげ、これを解決するための方策を理論と基礎的実験を対比させながら考察する。さらに本章の最後では、具体的な例題として模擬プロセスの動特性を推定した結果を述べる。なお、これらの基礎実験は、すべて、アナログ計算機を主体とする模擬回路を対象として行なわれたものであり、付録5.1に使用したアナログ計算機の主な規格、性能、試作した広帯域不規則信号発生器およびデータ処理装置の概略を示す。

§5.2 サンプル周期の選定

5.2.1 選定基準の必要性

最小2乗解 $\hat{B}$ がシステムの動特性 B の不偏推定量であることを示す方程式(3.3.3)は、システムについて離散形の表示式(3.12)したがって、(3.21)式が適用できる場合、換言すればサンプル周期が十分小さく選定されている場合にのみ成立することはいうまでもない。しかしながらサンプル周期 T を短くすると、(3.11)式および(3.26)式から明らかなように N_p および N_d が逆比例的に増加する。 N_p を例にとれば計算に要する時間、記憶容量は少なくとも N_p の2乗以上のオーダを増加するから、サンプル周期を必要以上に小さくすることは絶対に避けるべきではない。

これまでに考察されているサンプル周期選定基準の代表的なものに Shannon のサンプリング定理⁽⁷⁾がある。これは、周知のように信号に含まれている最高周波数成分を基準にとるので、本論文におけるように統計的性質が未知の不規則信号を取り扱う場合には最高周波数成分を見いだすこと自体が問題となり実用的でない。このため本節ではシステムの入出力信号について容易に測

定可能なある種のサンプリング誤差を基準にとってサンプル周期を選定する新しい方法を提案し、考察を加える。以下では説明の便宜上、1入出力システムを考える。これはなんら一般性を失うことはない。なぜなら多入出力システムでは個々の入出力について選定されたサンプル周期のうち最小のものをとればよいからである。

5.2.2 サンプル周期と動特性推定精度との関係⁽²⁾⁽³⁾

サンプル周期選定の基準を与えるために、まずサンプル周期 T の大きさと動特性推定の精度との関係を定量的に表わす方法を考えてみる。システムの入出力は定常不規則過程で、かつ雑音は入力と相関関係がないと仮定する。しかるときは §4.2 で述べたようにシステムの入出力の間に統計的關係、

$$Y_{xy}(\tau_1) = \int_0^{\infty} g(\tau_2) Y_{xx}(\tau_1 - \tau_2) d\tau_2 \quad (5.1)$$

が成立する。ここで $Y_{xx}(\tau)$ および $Y_{xy}(\tau)$ はそれぞれ入力の自己相関関数および入出力の相互相関関数である。一方、このシステムの最小2乗解 $\hat{b}$ は(3.53)式の添字 i をとって

$$\underline{C} = \underline{A} \hat{b} \quad (5.2)$$

なる関係で与えられる。(5.2)式を詳細に書くと

$$\begin{bmatrix} \sum y(k)x(k-1) \\ \sum y(k)x(k-2) \\ \vdots \\ \sum y(k)x(k-N_p+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x(k)^2 & \sum x(k)x(k-1) & \cdots & \sum x(k)x(k-N_p+1) \\ \sum x(k-1)x(k) & \sum x(k-1)^2 & \cdots & \sum x(k-1)x(k-N_p+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x(k-N_p+1)x(k) & \sum x(k-N_p+1)x(k-1) & \cdots & \sum x(k-N_p+1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{h}(1) \\ \hat{h}(2) \\ \vdots \\ \hat{h}(N_p) \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

である。 $\hat{h}(l)$ が不偏推定量であり、一致推定量であることはすでに §3.4 で証明した。

注意すべきことは、たとえサンプル周期 T が正しく選定されていなくても、マトリクス $\underline{C}, \underline{A}$ の要素が計算できるので(5.3)式を解くことができるということである。そこでサンプル周期 T を変えたときに(5.3)式の解がどのように変わるかを調べてみる。(5.3)式の両辺を N_d で除し $N_d \rightarrow \infty$ なる極限を考えれば $\underline{C}, \underline{A}$ の要素について定常不規則性の仮定から

$$\lim_{N_d \rightarrow \infty} \frac{1}{N_d} \sum_{k=0}^{N_d-1} x(k-l_2) x(k-l_1) = \lim_{N_d \rightarrow \infty} \frac{1}{N_d} \sum_{k=0}^{N_d-1} x\left[\left(k-l_2\right) T\right] x\left[\left(k-l_1\right) T\right] = r_{xx}\left[\left(l_1-l_2\right) T\right] \quad (5.4)$$

$$\lim_{N_d \rightarrow \infty} \frac{1}{N_d} \sum_{k=0}^{N_d-1} y(k) x(k-l_1) = \lim_{N_d \rightarrow \infty} \frac{1}{N_d} \sum_{k=0}^{N_d-1} y\left[\left(k+\frac{1}{2}\right) T\right] x\left[\left(k-l_1\right) T\right] = r_{xy}\left[\left(l_1-\frac{1}{2}\right) T\right]$$

なる関係が成立し

$$\begin{bmatrix} r_{xy}(T/2) \\ r_{xy}(3T/2) \\ \vdots \\ r_{xy}\left[\left(N_p-\frac{1}{2}\right) T\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(T) & \cdots & r_{xx}\left[\left(N_p-1\right) T\right] \\ r_{xx}(T) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}\left[\left(N_p-2\right) T\right] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}\left[\left(N_p-1\right) T\right] & r_{xx}\left[\left(N_p-2\right) T\right] & \cdots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h(1)^* \\ \Delta h(2)^* \\ \vdots \\ \Delta h(N_p)^* \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

と書くことができる。(5.5)式において解を $\Delta h(\ell)^*$ で表わしたのは最小 2 乗解 $\hat{\Delta h}(\ell)$ と区別するためである。(5.5)式は

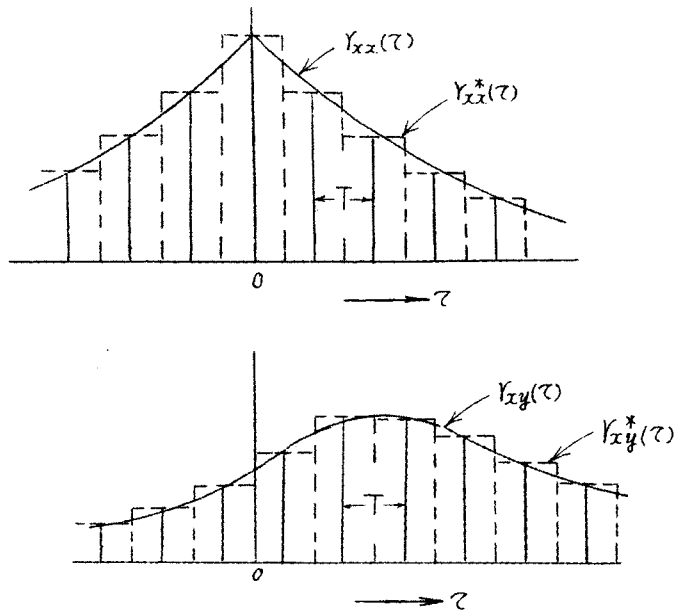
$$r_{xy}\left[\left(l_1-\frac{1}{2}\right) T\right] = \sum_{\ell_2=1}^{N_p} \Delta h(\ell_2)^* r_{xx}\left[\left(l_1-l_2\right) T\right] \quad (5.6)$$

において $\ell_i = 1, 2, \dots, N_p$ とおいたものに相当している。この (5.6) 式と実際の入出力関係の統計的表示式 (5.1) とを利用してサンプル周期 T と $\Delta h(\ell)^*$ の誤差との関係を求めることができる。

まず次式で定義されるようなモーメントの概念を導入する。(5.1)式における $g(\tau)$, $r_{xx}(\tau)$, $r_{xy}(\tau)$ の 0 次モーメントをそれぞれ ν_g , ν_{xx} , ν_{xy} とすれば,

$$\left. \begin{aligned} \nu_g &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} g(\tau) d\tau \equiv h(\infty) \\ \nu_{xx} &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} r_{xx}(\tau) d\tau \\ \nu_{xy} &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} r_{xy}(\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

である。 ν_g はシステムの直流ゲインである。また相関関数 $r_{xx}(\tau)$, $r_{xy}(\tau)$ が第 5.1 図に示すような形をしている場合は, ν_{xx} , ν_{xy} はその面積を表わすことになる。さて (5.1) 式の両辺を τ に関し無限区間で積分すれば,



第5.1 図 システムの入出力についての相関関数

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y_{xy}(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} g(\tau_2) d\tau_2 \int_{-\infty}^{\infty} Y_{xx}(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 \quad \dots\dots\dots (5.8)$$

となるから、これに (5.7) 式を代入して

$$V_{xy} = V_g V_{xx} \quad \dots\dots\dots (5.9)$$

なる関係が得られる。一方 (5.6) 式の両辺に T を乗じ l_1 に関する無限個の和をとれば

$$\sum_{l_1=-\infty}^{\infty} T V_{xy}[(l_2 - \frac{1}{2})T] = \sum_{l_2=1}^{N_p} \Delta h(l_2^*) \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} T V_{xx}[(l_2 - l_1)T] \quad \dots\dots\dots (5.10)$$

となる。ここで

$$\left. \begin{aligned} V_g^* &= \sum_{l=1}^{N_p} \Delta h(l^*) = h(\infty^*) \\ V_{xx}^* &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} T V_{xx}(lT) \\ V_{xy}^* &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} T V_{xy}[(l - \frac{1}{2})T] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5.11)$$

とおけば (5.9) 式に対応する関係

$$V_{xy}^* = V_g^* V_{xx}^* \quad \dots\dots\dots (5.12)$$

が得られる。 ν_{xx}^* , ν_{xy}^* は第 5.1 図に実線で示した図形 $\gamma_{xx}^*(\tau)$, $\gamma_{xy}^*(\tau)$ の面積に等しい。なお $\gamma_{xx}^*(\tau)$ は §3.2 で想定した信号 $x(t)$ の自己相関関数である。

いま ν_{xy} と ν_{xy}^* とがほぼ等しくなるようにサンプル周期が選定されているものとする。(5.9) 式と (5.12) 式から

$$\nu_g \nu_{xx} \approx \nu_g^* \nu_{xx}^* \quad (5.13)$$

なる関係が得られる。そこで ν_g^* の ν_g に対する相対誤差すなわち直流ゲインに関する相対誤差

$$\alpha_D = \frac{h(\infty) - h(\infty)^*}{h(\infty)} = \frac{\nu_g - \nu_g^*}{\nu_g} \quad (5.14)$$

を考えれば、(5.13) 式より

$$\alpha_D = \frac{\nu_{xx}^* - \nu_{xx}}{\nu_{xx}^*} \quad (5.15)$$

と表わすことができる。

ここで

$$\Delta \nu_{xx} = \nu_{xx}^* - \nu_{xx} \quad (5.16)$$

とおき (5.15) 式の ν_{xx}^* を消去すれば、一般に $\Delta \nu_{xx} / \nu_{xx} \ll 1$ であるから、

$$\alpha_D = \frac{\Delta \nu_{xx}}{\nu_{xx} + \Delta \nu_{xx}} \approx \frac{\Delta \nu_{xx}}{\nu_{xx}} \quad (5.17)$$

なる関係が得られる。さらに

$$e(t) = x(t) - x^*(t) \quad (5.18)$$

なるサンプリング誤差を考え、その自己相関関数 $\gamma_{ee}(\tau)$ の 0 次モーメントを ν_{ee} とすれば

$$\Delta \nu_{xx} = \nu_{ee} \quad (5.19)$$

なることが容易に証明できる。(村録 5.2 参照) (5.19) 式を (5.17) 式に

代入すれば結局

$$\alpha_D \approx \frac{V_{ee}}{V_{xx}} \quad (5.20)$$

なる関係が得られる。すなわち (5.5) 式の解 $\Delta h(l)$ の誤差を評価するため、解の代数和 $h^+(\infty)$ の相対誤差を考えれば、これは入力 $x(t)$ の自己相関関数 $V_{xx}(\tau)$ および $x(t)$ とこれの同期 T ごとのサンプル値を外挿して得られる信号 $x^+(t)$ との差 $e(t)$ の自己相関関数 $V_{ee}(\tau)$ の各 0 次モーメント V_{xx} , V_{ee} の比として表わされる。明らかに V_{ee} はサンプル周期 T の関数であるから、結局サンプル周期と解の精度との関係が (5.20) 式で定量的に表わされたことになる。

5.2.3 実用的なサンプル周期選定基準の導入⁽⁵⁾

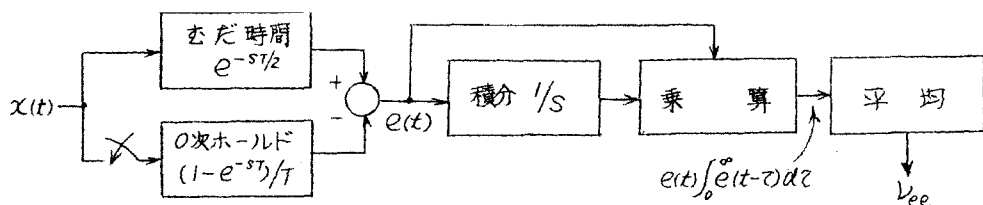
動特性推定の精度を α_D の形で指定しておけば、望みの精度を得るようなサンプル周期は (5.20) 式の右辺を計算すること、いいかえれば相関関数の 0 次モーメントを測定することによって選定することができる。この 0 次モーメントを、相関関数を計算することなしに、直接測定することも原理的には可能である。⁽⁶⁾ たとえば $e(t)$ の自己相関関数 $V_{ee}(\tau)$ の 0 次モーメント V_{ee} は定義より

$$V_{ee} = 2 \int_0^\infty e(t)e(t-\tau)d\tau = 2 \int_0^\infty \left[\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} e(t)e(t-\tau)dt \right] d\tau \quad (5.21)$$

である。積分順序を変更すれば

$$V_{ee} = 2 \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} e(t) \left[\int_0^\infty e(t-\tau)d\tau \right] dt \quad (5.22)$$

となる。〔 〕内は $e(t)$ を積分要素に加えたときの出力信号に相当しているから、これとよとの $e(t)$ を掛け算し時間平均をとることによって V_{ee} が得られる。信号 $e(t)$ は $x(t)$ を $T/2$ だけ遅らせた信号と $x(t)$ の T ごとのサンプル値を 0 次ホールドした信号との差をとれば得られる。第 5.2 図はこの原理をブロック線図に示したものである。これを実現するには、アナログ演算要素のなかでも最も複雑な構成を必要とするむだ時間要素と掛け算要素を含むため装置がばう大になるということ、および積分要素をフィードバック経路のない状態で使用しているため安定性が悪いということに問題



第5.2図 (5.22)式を用いて V_{ee} を求める原理

がある。このため(5.20)式で表わされる α_d をそのままサンプル周期選定の基準にとるのは実用的でない。

このため信号の0次モーメントの代わりに容易に測定できる2乗平均誤差をとった新しいサンプリング誤差の評価関数

$$\alpha_T = \overline{e^2(t)} / \overline{x^2(t)} \quad (5.23)$$

を考えてみる。もし α_T と α_d が $x(t)$ の性質に関係なく一対一に対応するならば、指定された α_d に対応する α_T が得られるようなサンプル周期を選定するという間接的な方法で、望みの精度を得るようなサンプル周期を選定することができる。

そこで $x(t)$ の統計的性質によって α_T と α_d の関係がどのように変わるかを調べてみる。統計的性質の一般的な表現を見いだすことは困難であるが、信号 $x(t)$ がシステムの入力であるということと考慮すれば、多くの場合、第5.1表にあげた3種類の信号のいずれかで近似できると思われる。このよ

第5.1表 信号の統計的性質

信号の種類	スペクトル密度 $\Phi_{ff}(S)$	自己相関関数 $V_{ff}(\tau)$
低域通過形	$\frac{2\omega_0}{\omega_0^2 - S^2}$	$e^{-\omega_0 \tau }$
2重低域通過形	$\frac{4\omega_0^3}{(\omega_0^2 - S^2)^2}$	$(1 + \omega_0 \tau)e^{-\omega_0 \tau }$
ピークのある 2重低域通過形	$\frac{4a(a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2 + S^2) - 4a^2S^2}$	$e^{-a \tau }(\cos b\tau + \frac{a}{b} \sin b \tau)$

$$a = \zeta\omega_0, \quad b = \sqrt{1 - \zeta^2}\omega_0$$

うな観点からこれらの信号について、付録5.2に示す方法で α_T および α_D を計算した結果が 第5.2表 である。第5.3図はこの結果を利用し各信号

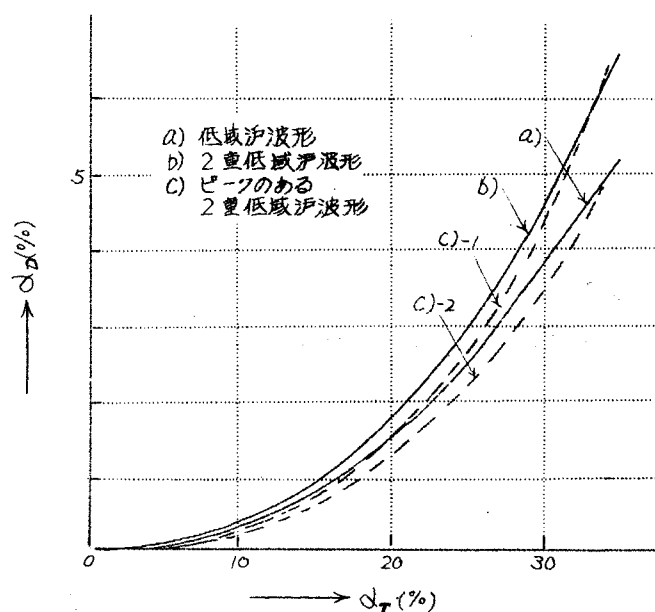
第5.2表 第5.1表にあげた信号について求めた α_D および α_T

信号の種類	α_D	α_T
低域濾波形	$\frac{\omega_0 T}{2} \frac{1+e^{-\omega_0 T}}{1-e^{-\omega_0 T}} - 1$	$2 \left[1 - \frac{1-e^{-\omega_0 T/2}}{\omega_0 T/2} \right]$
2重低域濾波形	$\frac{\omega_0 T}{4} \left[\frac{1+e^{-\omega_0 T}}{1-e^{-\omega_0 T}} + \frac{2\omega_0 T e^{-\omega_0 T}}{(1-e^{-\omega_0 T})^2} \right] - 1$	$2 \left[1 - \frac{2-(2+\frac{\omega_0 T}{2})e^{-\omega_0 T/2}}{\omega_0 T/2} \right]$
ピークのある 2重低域濾波形	$\frac{(a^2+b^2)T}{4a} \left[1 + \left(\frac{2a}{b} \right) e^{-aT} \sin bT - e^{-2aT} \right] - 1$	$2 \left[1 - \frac{4}{T} \frac{a - e^{-aT} \left(a \cos \frac{bT}{2} + \frac{a^2-b^2}{2b} \sin \frac{bT}{2} \right)}{a^2+b^2} \right]$

における α_T と α_D の関係を $\omega_0 T$ をパラメータとしてグラフに示したものである。第5.3図において α (a) の統計的性質は異なっているにもかかわらず α_T が 20 % 以下の領域で α_T と α_D の関係はほぼ類似している。これから α_T と α_D は信号の統計的性質に関係なくほぼ

一対一に対応しているとみなしてさしつかえないということ、したがって α_D の代わりに α_T をサンプル周期選定の基準にとるのは十分妥当性があるということが明らかである。

α_T を測定する装置は、2個の2乗回路と簡単なサーボ機構を用いて容易



第5.3図 最小2乗解の近似度を表す α_D とサンプル誤差の評価関数 α_T との関係

に構成することができる。その原理および構成の詳細は付録 5.2 に述べてある。

5.2.4 実験的考察⁽⁷⁾

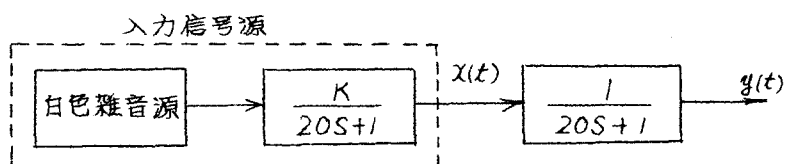
システムの動特性の推定値すなわち最小 2 乗解 $\hat{G}$ は対象のシステムについて (3.12) 式の関係が成立していると仮定して導かれたものである。この仮定が成立するためには α_D はほとんど 0 でなければならないから、サンプル周期は α_T が 5~10% 程度となるように選定すればよいと推察される⁽⁷⁾。これをアナログ計算機で構成した模擬システムを利用して確かめよう。

第 5.4 および 5.5 図は模擬システムのブロック線図である。第 5.4 図は低域低域波の入力が 1 次遅れ系に加わっている場合、第 5.5 図はピークのある 2 重低域波の入力が 2 次振動系に加わっている場合である。これらの入力信号は広帯域不規則信号（白色雑音）を適当な低域低域波器に通すことによって得られる。

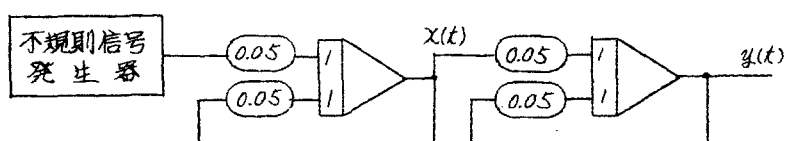
ここではサンプル周期の選定が問題であるから理想出力すなわち雑音が存在しない場合を考えている。これら 2 種類の模擬システムについて $\alpha_T = 5\%$ となるようなサンプル周期を選定し、動特性を求めた結果が第 5.6 および 5.7 図である。いずれの場合も観測系の個数 N_d は動特性の表現系の個数 N_p のわずか 2 倍であるが真値と比べてよく一致している。すなわちサンプル周期を入力 $x(t)$ のサンプル誤差が 5% 程度となるように選定すれば、工學上十分な精度で動特性推定が可能である。

) 動特性推定の精度を表わす α_D は入出力の相互相関関数について $l_{yx} \approx l_{yx}^$ なる関係が成立すると仮定して導かれたものである。実在するシステムのほとんどは低域低域波特性（逆の言い方をすれば高域高域波特性）をもつから、入力のサンプル周期を選定すれば、自動的に、 $l_{yx} \approx l_{yx}^*$ なる関係も成立することになる。

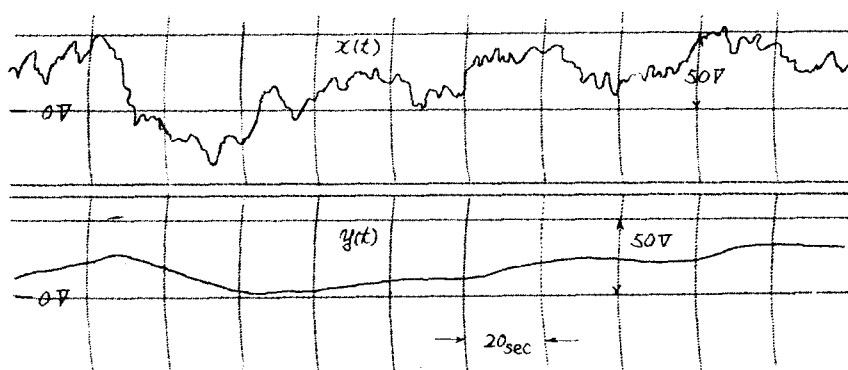
確実を期するならば、さらに出力について測定される α_T が 1% 程度になるようにサンプル周期を選定するという条件を付加しておけばよい。



a) ブロック図

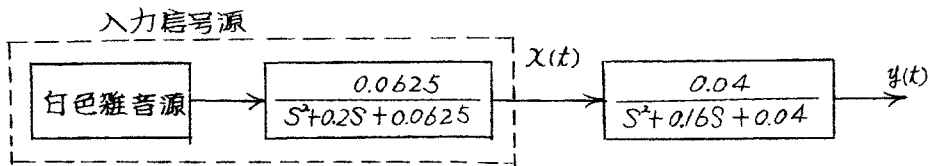


b) アナログ計算機模擬回路

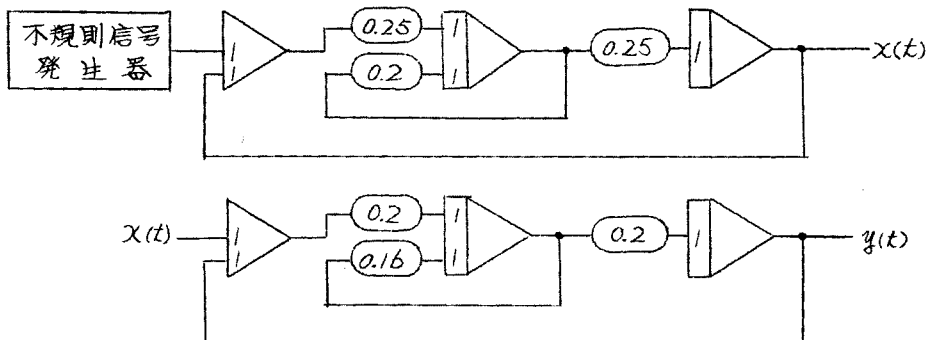


c) 記録波形

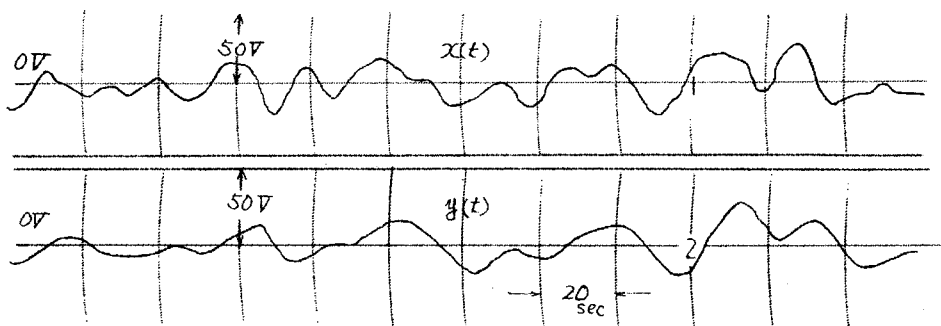
図 5.4 図 模擬システム (1 次遅れ系に低域正弦波入力がかわっている場合)



a) ブロック線図

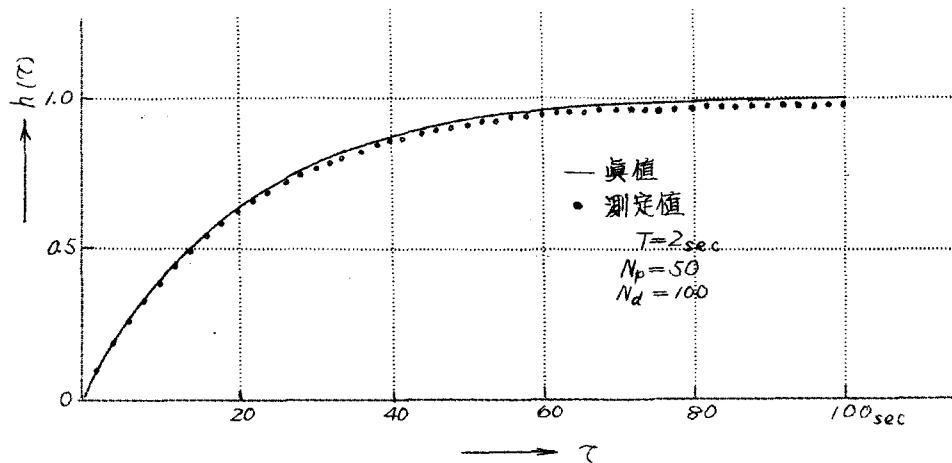


b) アナログ計算機模擬回路

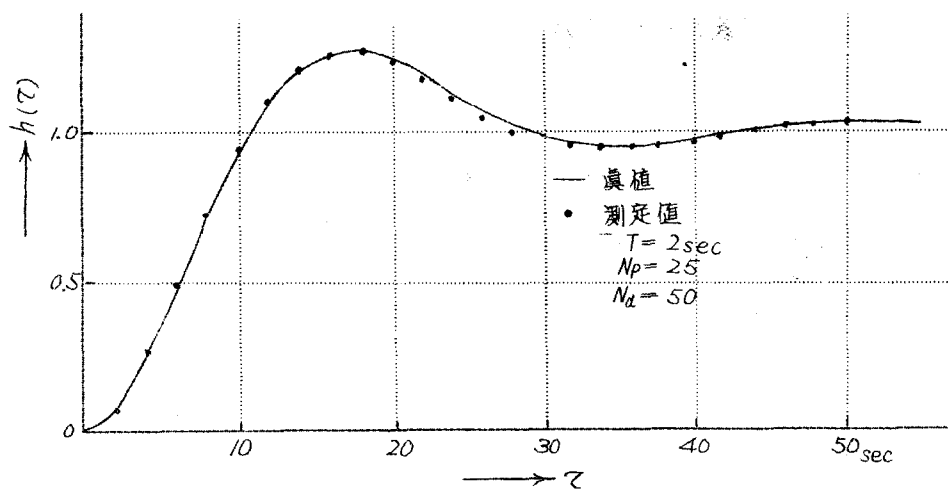


c) 記録波形

第 5.5 図 模擬システム（2次振動系にピークのある2重低減波形状の入力が加わっている場合）



第 5.6 図 第 5.4 図に示した模擬システムの動特性推定結果
—その 1 $\pi(t)=0$



第 5.7 図 第 5.5 図に示した模擬システムの動特性推定結果
—その 1 $\pi(t)=0$

§ 5.3 プリセット・パラメータの選定

5.3.1 観測誤の個数 N_d の選定

動特性推定の精度は、出力に重畳している未知の雑音の大きさ、および観測時間の長さ、すなわち観測誤の個数 N_d に依存することは言うまでもない。これをまず理論的に考察してみる。

一入出力システムで出力に重畳している雑音が白色雑である場合、最小2乗解 $\hat{\underline{b}}$ の任意の2つの要素 b_i, b_j の間の共分散は (3.43) 式より導かれる共分散マトリクス

$$\varepsilon(\hat{\underline{b}} - \underline{b})(\hat{\underline{b}} - \underline{b})' = \sigma_n^2 \underline{A}^{-1} \quad (5.24)$$

の ij 番目の要素で与えられる。ここで σ_n^2 は雑音の分散を表わしている。 $\underline{A}$ の逆マトリクス $\underline{A}^{-1}$ を計算することは、一般に、不可能であるが、入力 $x(t)$ が特別な性質をもつ場合には、次のようにして $\underline{A}^{-1}$ を求めることができる。

(3.30)式で定義された $\underline{A}$ の要素

$$a(p-1, p-1) = \sum_{k=0}^{N_d-1} x(k-p+1)x(k-p+1) \quad (p, p = 1, 2, \dots, N_p) \quad (5.25)$$

を N_d で除し、集合平均をとると、相関関数の定義より

$$\begin{aligned} \varepsilon\left[\frac{1}{N_d} a(p-1, p-1)\right] &= \frac{1}{N_d} \sum_{k=0}^{N_d-1} \varepsilon\{x(k-p+1)x(k-p+1)\} \\ &= \frac{1}{N_d} \sum_{k=0}^{N_d-1} \varepsilon\{x[(k-p+1)T]x[(k-p+1)T]\} \\ &= r_{xx}[(p-1)T] \end{aligned} \quad (5.26)$$

である。したがって

$$\varepsilon \underline{A} = N_d \begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(T) & \dots & r_{xx}[(N_p-1)T] \\ r_{xx}(T) & r_{xx}(0) & \dots & r_{xx}[(N_p-2)T] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[(N_p-1)T] & r_{xx}[(N_p-2)T] & \dots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

なる関係が成立する。とくに、入力が低域通過形である場合は、第5.1表に示したように

$$\gamma_{xx}(T) = \sigma_x^2 e^{-\omega_0 |T|} \quad (5.28)$$

なる自己相関関数をもつ。 $\gamma = e^{-\omega_0 T}$ とおくと

$$\gamma_{xx}(LT) = \sigma_x^2 e^{-\omega_0 LT} = \sigma_x^2 (e^{-\omega_0 T})^L = \sigma_x^2 \gamma^L \quad (5.29)$$

と表わすことができる。これを (5.27) 式に代入すれば

$$\varepsilon A = \frac{\sigma_x^2}{N_d} \begin{bmatrix} 1 & \gamma & \cdots & \gamma^{N_p-1} \\ \gamma & 1 & \cdots & \gamma^{N_p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma^{N_p-1} & \gamma^{N_p-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

となる。この逆行列は容易に計算することができて

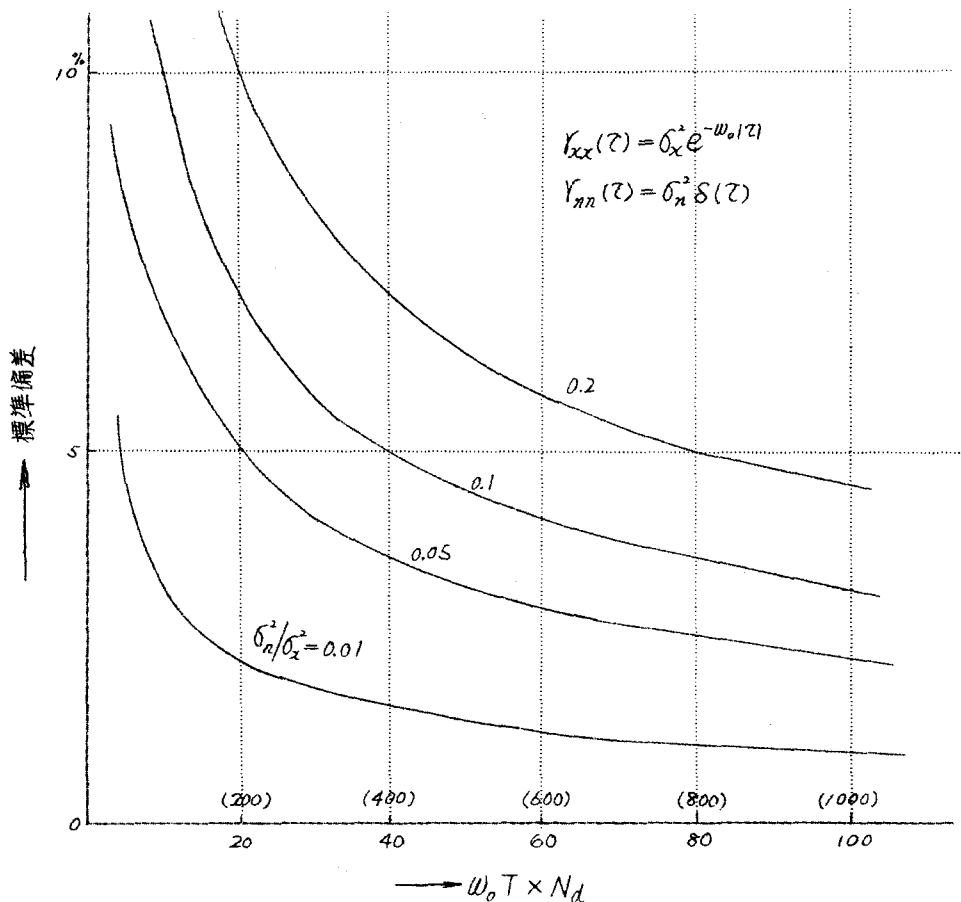
$$(\varepsilon A)^{-1} = \frac{1}{N_d \sigma_x^2 (1-\gamma^2)} \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\gamma & 1+\gamma^2 & -\gamma & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 1+\gamma^2 & -\gamma & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\gamma^2 & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\gamma & 1 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

である。そこで (5.24) 式における A^{-1} の代わりに (5.31) 式を用いてみる。最小 2 乗解 $\hat{\underline{b}}$ の各要素の分散は、共分散行列の対角要素のみをとればよいから

$$\left. \begin{aligned} \text{Var}[\Delta \hat{h}_1] &= \text{Var}[\Delta \hat{h}_{N_p}] = \frac{1}{N_d} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_x^2} \frac{1}{1-\gamma^2} \\ \text{Var}[\Delta \hat{h}_\ell] &= \frac{1}{N_d} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_x^2} \frac{1+\gamma^2}{1-\gamma^2} \quad (\ell = 2, 3, \dots, N_p-1) \end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

が得られる。

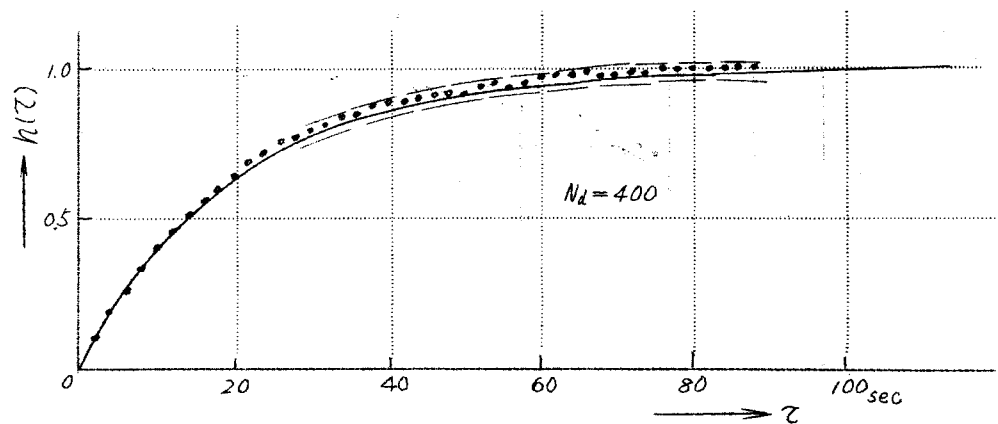
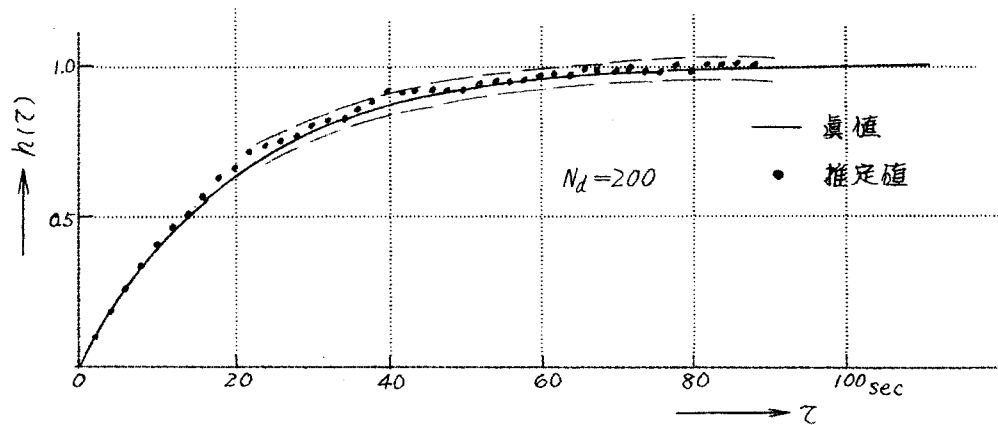
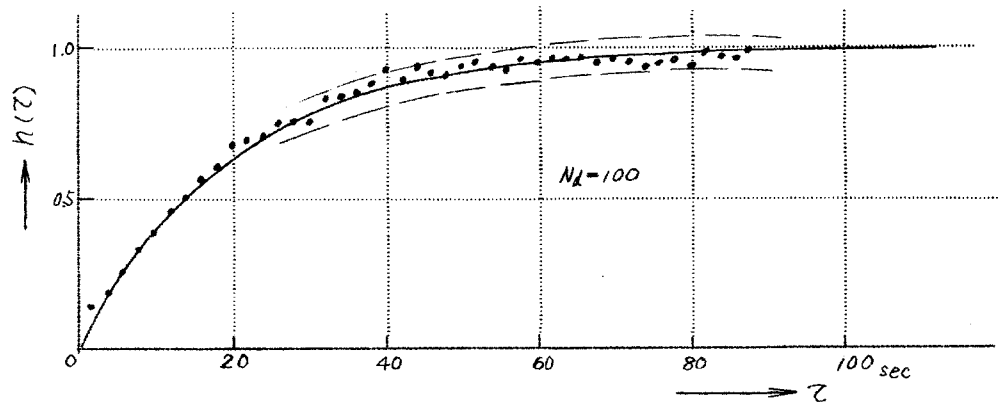
最小 2 乗解 $\hat{\underline{b}}$ を求めたときの、バラツキの様子を見るためには (5.32) 式の平方根すなわち標準偏差を用いる方が直感的でわかりやすい。そこで観測点の個数 N_d と標準偏差の関係を σ_n^2/σ_x^2 をパラメータにとってグラフに示したのが第 5.8 図である。横軸は $\omega_0 T$ で正規化してある。横軸上の括弧内の数字は $\alpha_r = 5\%$ すなわち、 $\omega_0 T = 0.1$ にとったときの実際の観測点個数



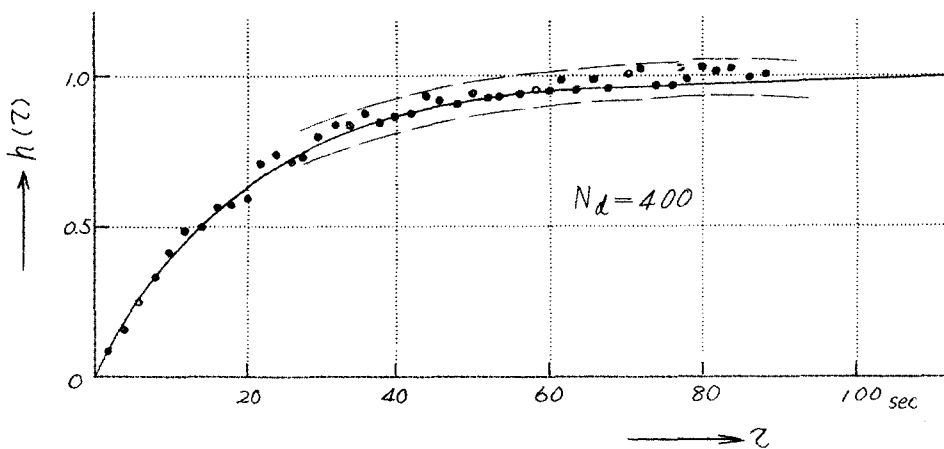
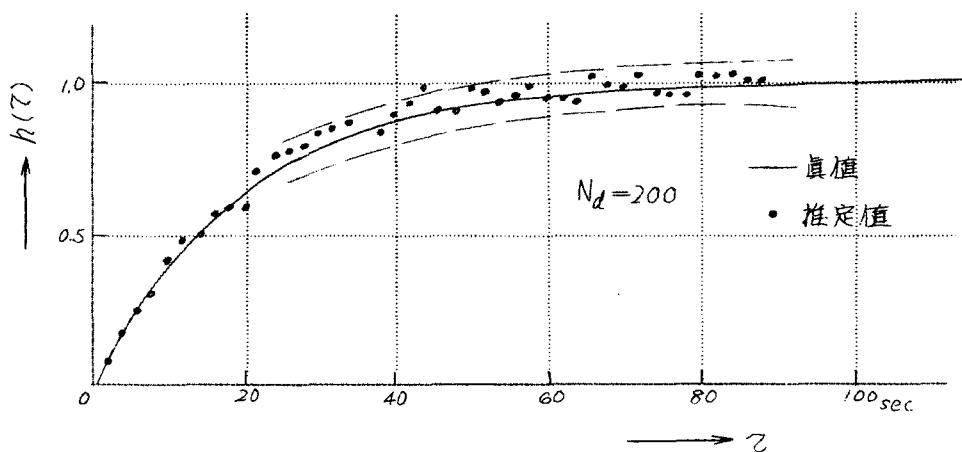
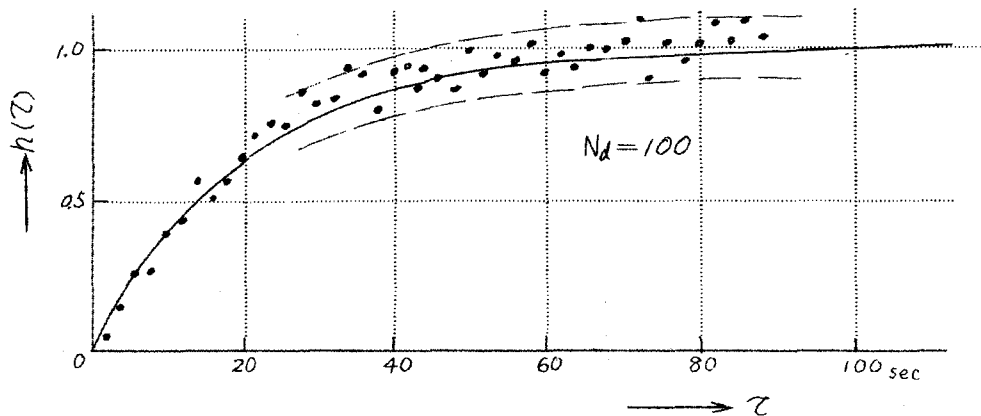
第 5.8 図 観測長の個数 N_d と最小 2 乗解 $\hat{b}$ の標準偏差との関係
 (横軸上の括弧内の数字は $\alpha_T = 5\%$ のときの N_d の大きさを示す)

N_d を示している。 $\sigma_n^2/\sigma_x^2 = 0.01$ すなわち雑音と信号の 2 乗平均値の比が 1 対 10 の場合には、観測長の個数を 200 にとれば、標準偏差は約 2.5% となり、解の 96% までは真値から 5% の範囲内に収まることが予想できる。

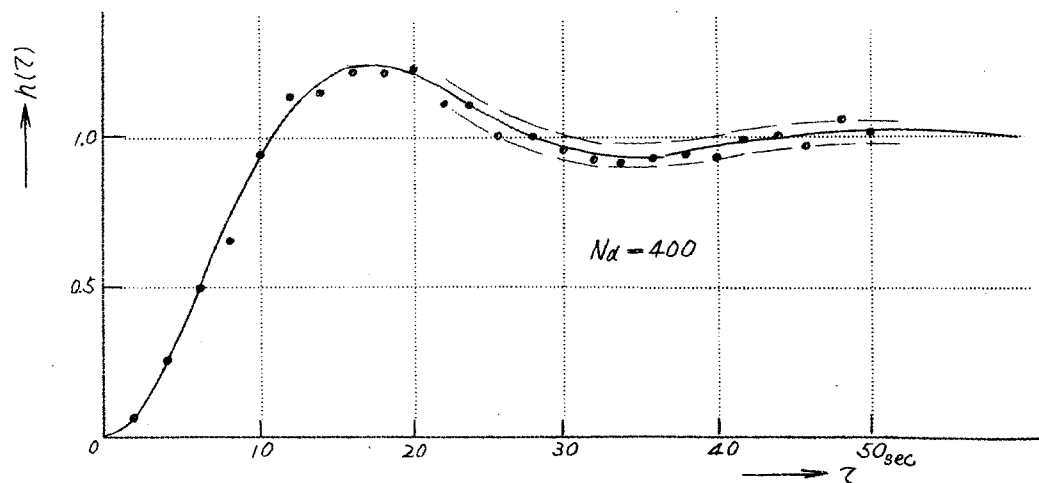
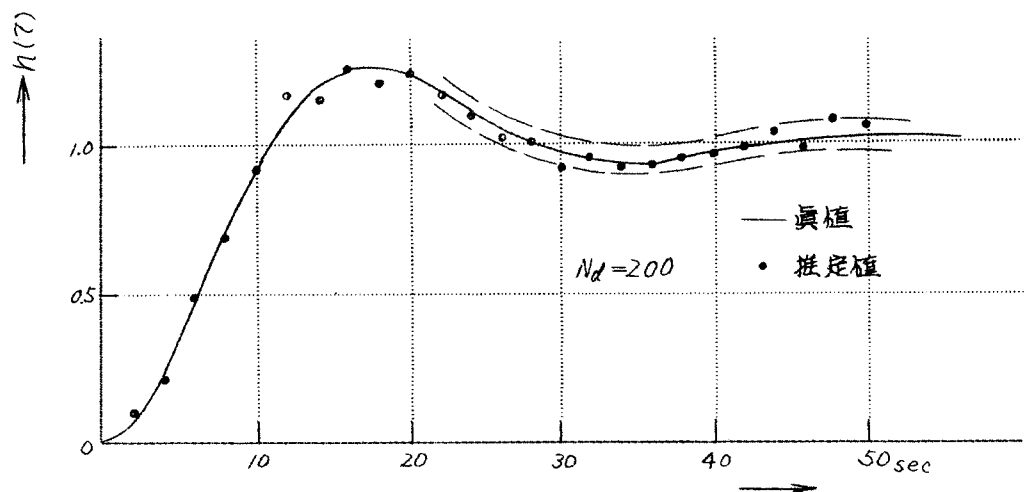
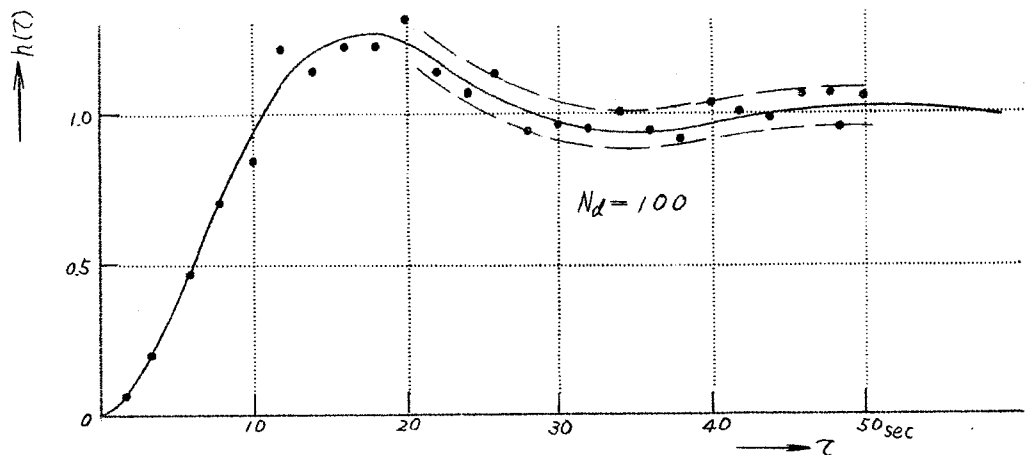
さて、実験的考察を試みよう。第 5.4 図の模擬システムにおいて、出力に白色雑音を重畳し、 σ_n^2/σ_x^2 を 0.01, 0.03 の 2 段階に変えて動時性を求めた結果が、第 5.9 および 5.10 図である。いずれも N_d の個数を 100, 200, 400 にとった 3 種類の場合を比較対照して示してある。各図中の破線は第 5.8 図で与えられる標準偏差を真値のまわりにとったもので、上でも述べたように理論上、計算結果の 96% がこの範囲に入るはずであり、計算結果は確かにこのような傾向を示している。同様の実験を第 5.5 図の模擬



第5.9図 第5.4図に示した模擬システムの動特性推定結果
 —その2. $\sigma_n^2/\sigma_x^2 = 0.01$, $T = 2\text{sec}$, $N_p = 44$

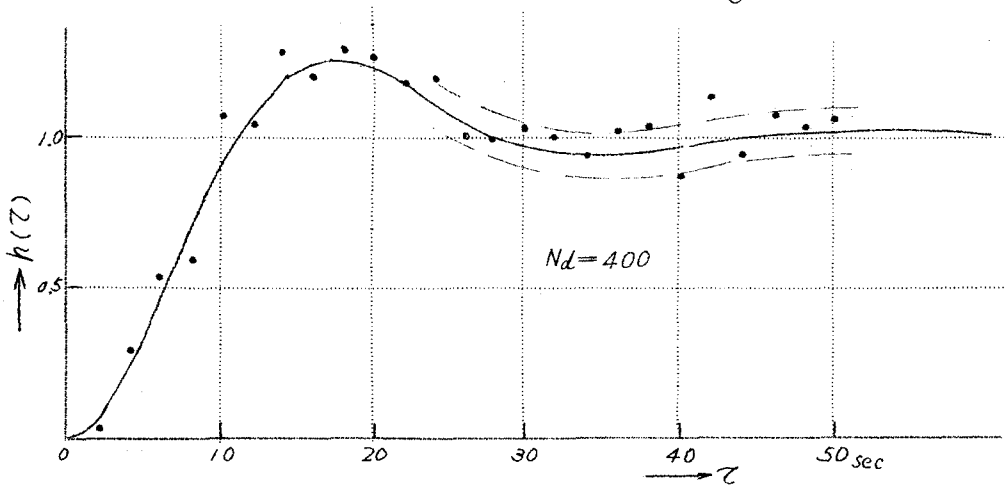
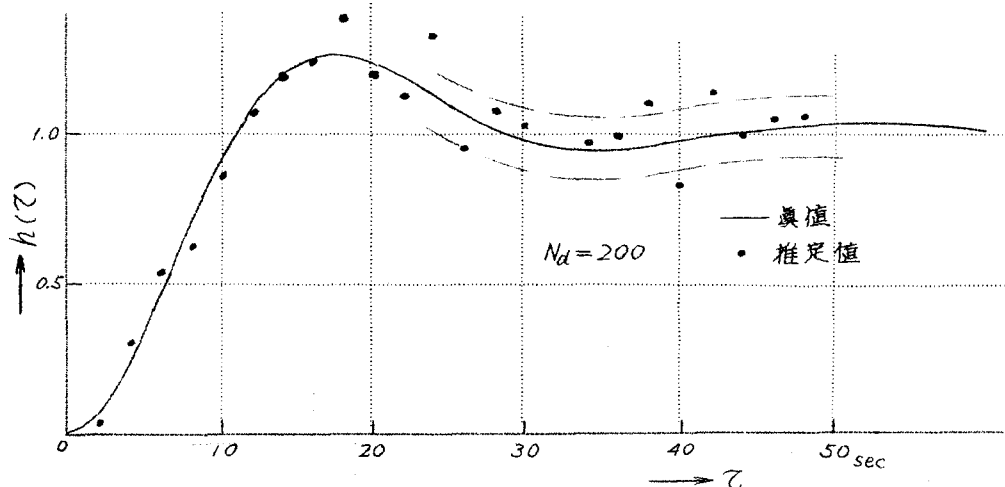
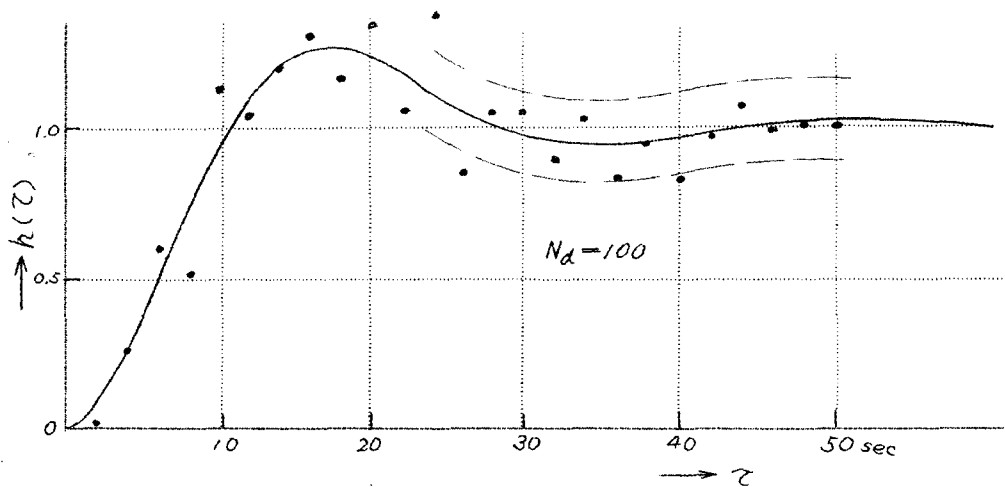


第5.10図 第5.4図に示した模擬システムの動特性推定結果
—その3. $\sigma_n^2/\sigma_x^2=0.03$, $T=2\text{ sec}$, $N_p=44$



第 5.11 図 第 5.5 図に示した模擬システムの動特性推定結果

— その 2. $\sigma_n^2/\sigma_x^2 = 0.01$, $T = 2 \text{ sec}$, $N_p = 25$



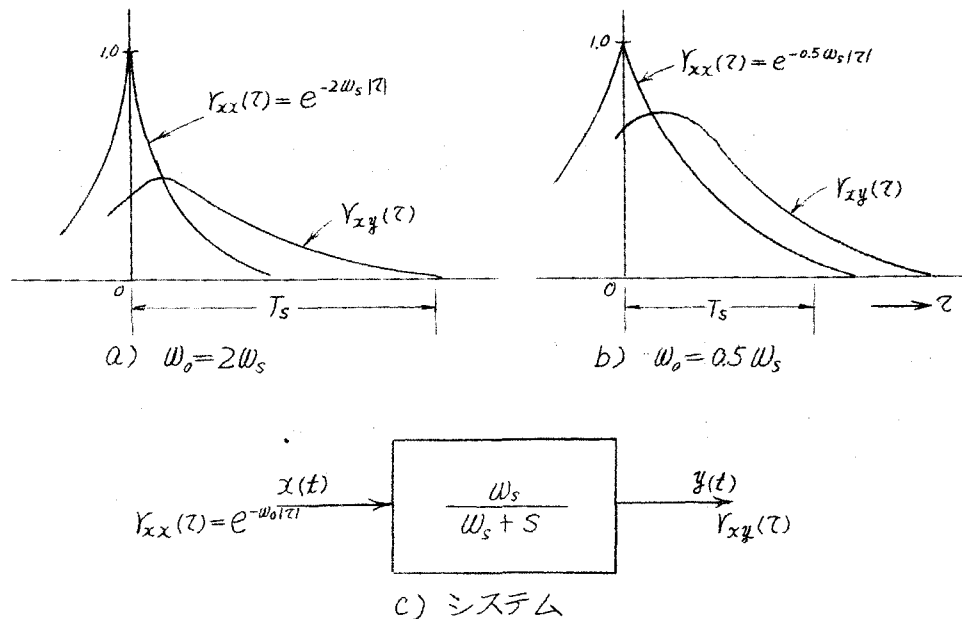
第 5.12 図 第 5.5 図に示した模擬システムの動特性推定結果

— その 3. $\sigma_n^3/\sigma_x^2 = 0.05$, $T = 2 \text{ sec}$ $N_p = 25$

システムについて試みた結果が第 5.11 および 5.12 図である。この場合には入力信号 $x(t)$ は (5.26) 式と異なる相関関数をもっているので、第 5.8 図で与えられる標準偏差をとるのは厳密さを欠くが、かりに、これの 2 倍をとってみると、やはりほとんどの計算値がその範囲内に入り、第 5.4 図の模擬システムにおけると同様の傾向が認められる。

5.3.2 動特性表現点の極数 N_p の選定⁽⁸⁾

サンプル周期 T を選定し (3.11) 式から N_p を定めるには、対象の整定時間 T_s について、おおよその見当をつけておく必要がある。 T_s はたとえば過渡応答を調べることにより容易にわかる場合が多い。入力が定常不規則過程である場合には、入力の自己相関関数と入出力の相互相関関数の形を比較して推定する方法も考えられる。しかし、この方法でも、入力の帯域が対象のシステムの通過帯域に比べて狭いと推定が困難になる。第 5.13 図は

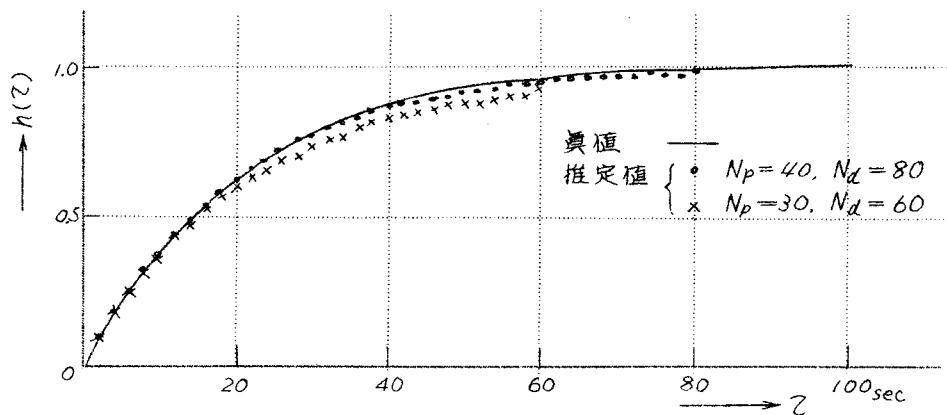


第 5.13 図 相関関数よりシステムの整定時間を推定すること

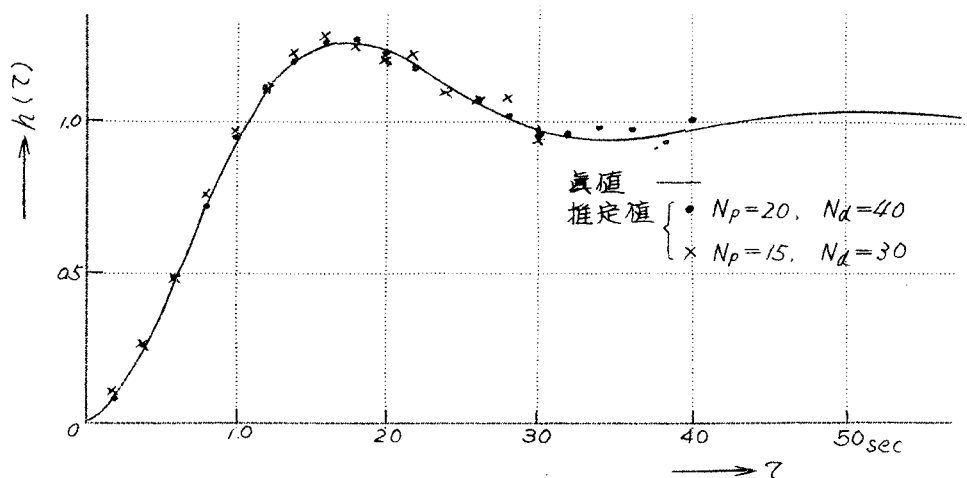
$e^{-\omega_0|\tau|}$ なる相関関数をもつ低域正弦波の入力が、通過帯域 ω_s の 1 次遅れ系に加わっている場合を例にとり、この間の事情を説明したものである。a) は $\omega_0 = 2\omega_s$ すなわち信号の帯域がシステムの通過帯域の 2 倍の場合で、

明らかにシステムの整定時間を推定できる。b) は逆に $\omega_b = \omega_s/2$ すなわち信号の帯域がシステムの通過帯域の半分の場合で、このときは推定が困難である。

一般に T_s の推定が不可能な場合には、 N_p を種々変えて計算をくり返すという試行錯誤的な方法をとる必要がある。第 5.14 および 5.15 図は第 5.4 および 5.5 図の模擬システムにおいて、故意に N_p を少なくとって計算



第 5.14 図 第 5.4 図に示した模擬システムにおいて故意に N_p を少なくとって計算した結果, $\eta(t)=0$, $T=2\text{sec}$



第 5.15 図 第 5.5 図に示した模擬システムにおいて故意に N_p を少なくとって計算した結果, $\eta(t)=0$, $T=2\text{sec}$

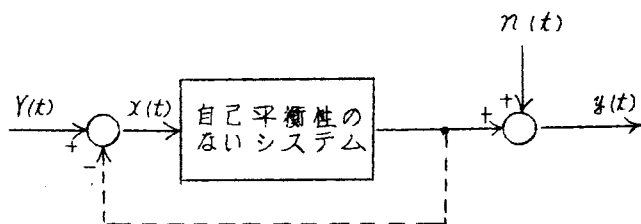
を行なった結果である。 N_p の選定が不適当であると、解の値が当然小さくなるべきところ、いいかえればステップ応答の終わりの部分が大きく変動する傾向が認められる。これを利用すれば、 N_p の選定が妥当であるかどうかを、逆に知ることができる。その場合には N_d を十分大きくとって雑音の影響をできるだけ除いておくことが肝要である。

§ 5.4 自己平衡性のないシステムの動特性推定法に関する実験的考察⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾

自己平衡性のないシステムは、出力の代わりにその階差をとることにすれば、見かけ上自己平衡性のあるシステムとなるので、最小2乗法を適用して動特性を推定することが可能である。これを前節と同様、アナログ計算機で構成した模擬システムを対象にとって確かめる。

5.4.1 実験方法

第5.16図に示すように前向き伝達経路に自己平衡性のないシステムを含む制御系を考える。制御

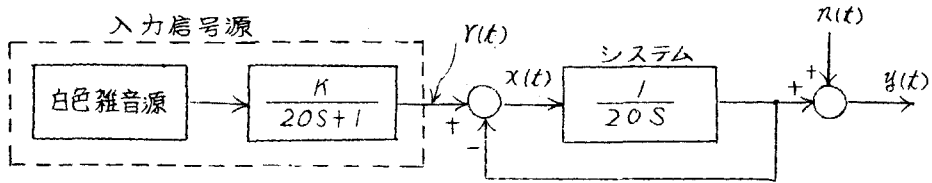


第5.16図 自己平衡性のないシステムを含む制御系

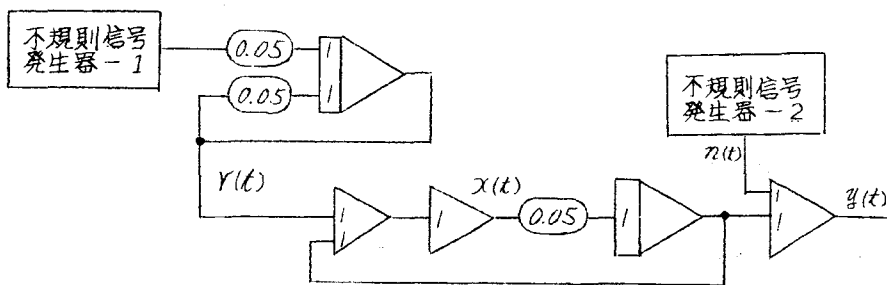
自己平衡性のないシステムへの入力すなわち一般には誤差信号を $x(t)$ とする。実際に観測される出力 $y(t)$ には $x(t)$ と相関のない雑音 $n(t)$ が重畳しているとする。この場合フィードバック・ループが存在しているため制御系全体の特性すなわち $Y(t)$ の関係は確かに自己平衡性をもっている。しかし $x(t)$ と $y(t)$ の関係に注目すれば、その関係は自己平衡性をもっていない。ここでは第5.16図に示すような制御系が正常運転状態にある場合を模擬し、系内の自己平衡性のないシステムの動特性を $x(t)$ と $y(t)$ から直接推定することを試みる。制御系に入る信号 $Y(t)$ は任意の信号でよいが、実験の便宜上前節と同様低域正弦波の信号を用いる。まず、最初に、最も簡単な問題として積分要素の利得すなわち積分定数を推定する問題をとりあげる。つぎに積分+1次遅れ要素からなる典型的な制御対象の動特性推定を行なう。最後に、自己平衡性のあるシステムにこの方法を適用し、通常の方法すなわち出力の階差をとら

ない方法との比較を行なう。

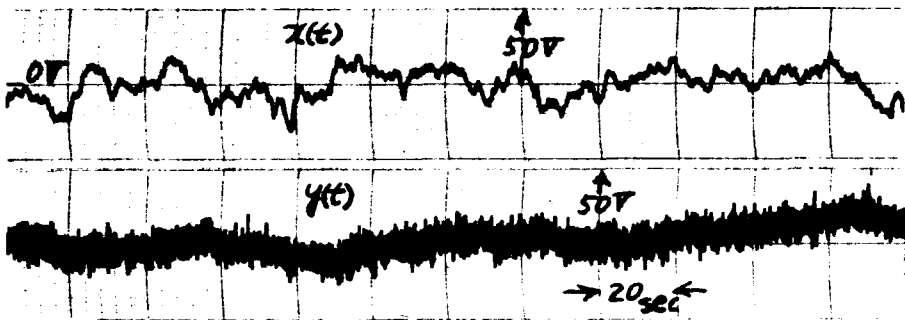
5.4.2 自己平衡性のないシステムの動特性推定例



a) ブロック線図



b) アナログ計算機模擬回路



c) 記録波形

第5.17図 模擬システム（積分要素のみを含む場合）

第5.17図に示すような積分要素のみを有する模擬システムの積分定数を推定する。一般に積分定数を K とすれば、これは最小2乗解 $\hat{G}$ の要素から

$$\Delta \hat{g}(l) = \Delta \hat{h}(l) - \Delta \hat{h}(l-1) \quad l = 1, 2, \dots, N_p$$

$$\hat{K} = \frac{1}{T} \sum_{l=1}^{N_p} \Delta \hat{g}(l) \quad (5.33)$$

なる関係を用いて計算することができる。まず、 $\eta(t)=0$ として第5.3表

第5.3表 第5.17図に示した模擬システムにおいて
積分定数を推定した結果、 $\eta(t)=0$

a) 入出力のサンプル値

信号 サンプル	$x(k)$	$y(k)$	$\Delta y(k)$
$k=1$	6.52	13.48	
2	-0.49	14.12	0.64
3	-3.99	14.36	0.24
4	-4.22	14.11	-0.25
5	-11.63	12.85	-1.26
6	-26.63	10.40	-2.45
7	-12.06	8.86	-1.54
8	-26.67	6.31	-2.55
9	-18.98	4.39	-1.92
10	-17.97	2.16	-2.23
11	-26.75	0.72	-1.44
12	-20.05	-2.61	-3.33
13	-18.05	-4.21	-1.60
14	-13.12	-5.22	-1.01
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

b) 積分定数の推定結果 — その1

$N_p=2, N_d=3$

推定に利用 したデータ	$k=4\sim7$	$k=5\sim8$	$k=6\sim9$	$k=7\sim10$	$k=8\sim11$
$\hat{K}$	0.0526	0.0525	0.0509	0.0529	0.0548

c) 積分定数の推定結果 — その2

$N_p=2$

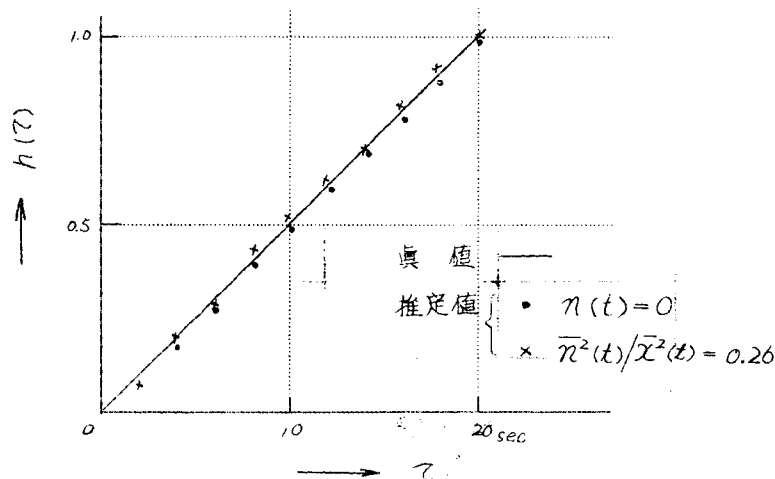
N_d	50	100	200
$\hat{K}$	0.0502	0.0497	0.0492

α) に示すようなデータから、 $N_p=2$, $N_d=3$ にとって積分定数を推定した結果が第5.3表 b) である。対象が積分要素のみから成ることがわかっている場合には、原理上 $N_p=1$ にとればよいが、ここではそうでない場合を考慮して $N_p=2$ にとった。第5.3表は N_d を大きくとって推定した結果である。b) に示した解のバラツキは、連続系を離散系で近似したために生ずるサンプリング誤差に起因していると考えられるが、 N_d を少し大きくとれば真値に十分近づくことが明らかである。出力に白色雑音が重畳している場合について同様の推定を行なった結果が第5.4表である。雑音のため N_d が小さいときには真値と大巾に異なるのは当然であるが、 N_d を大きくとれば

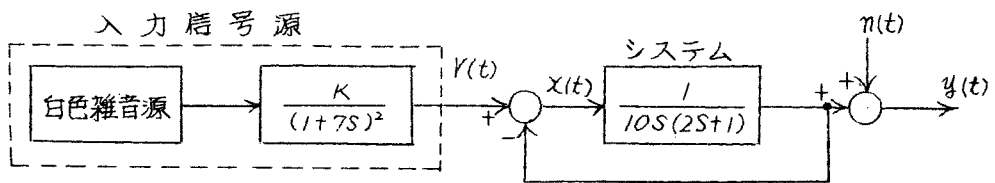
第5.4表 第5.17図に示した模擬システムにおいて
積分定数を推定した結果 $\bar{n}^2(t)/\bar{x}^2(t) = 0.05$

N_d	10	30	100	300
K	0.0621	0.0563	0.0504	0.0499

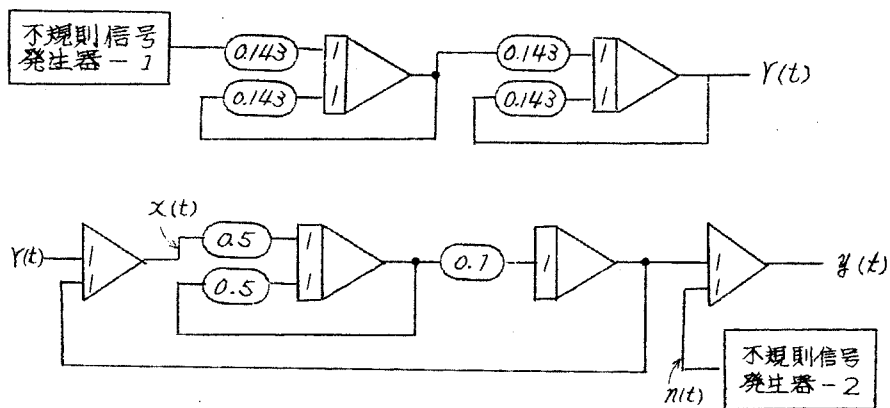
やはり十分な精度が得られる。以上の2つの場合について $N_p=10$ にとって動特性を推定した結果が第5.18図である。これは N_p の選定を極端に誤っても動特性推定が可能であることを示している。



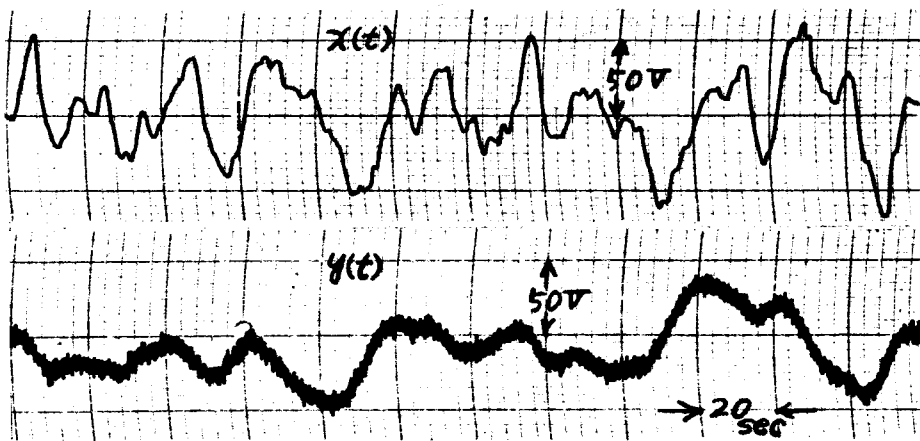
第5.18図 第5.17図に示した自己平衡性のないシステムの動特性推定例、 $N_p=10$, $N_d=450$



a) ブロック図

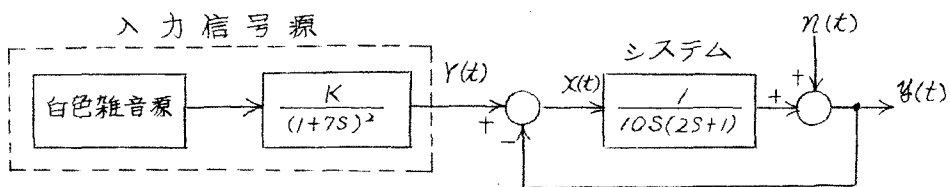


b) アナログ計算機模擬回路

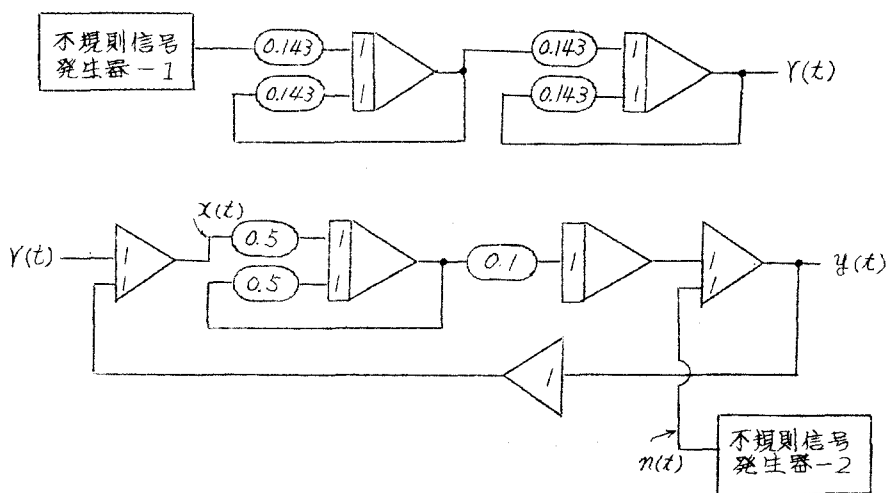


c) 記録波形

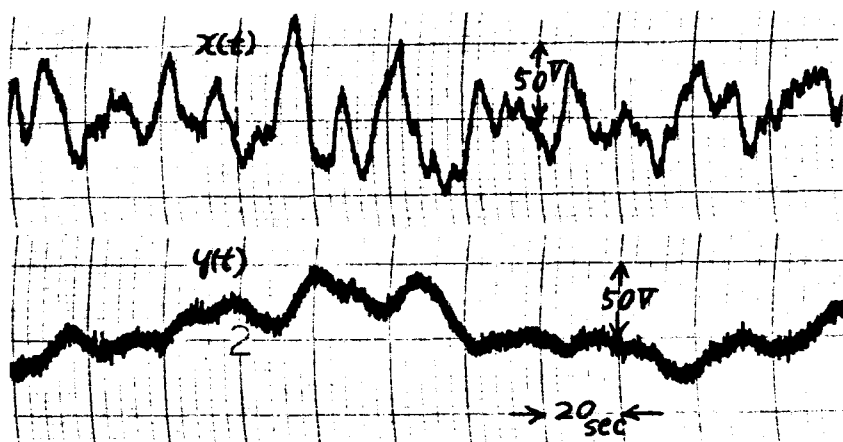
第5.19図 模擬システム(1次遅れ+積分要素を含む場合-その1)



a) ブロック線図



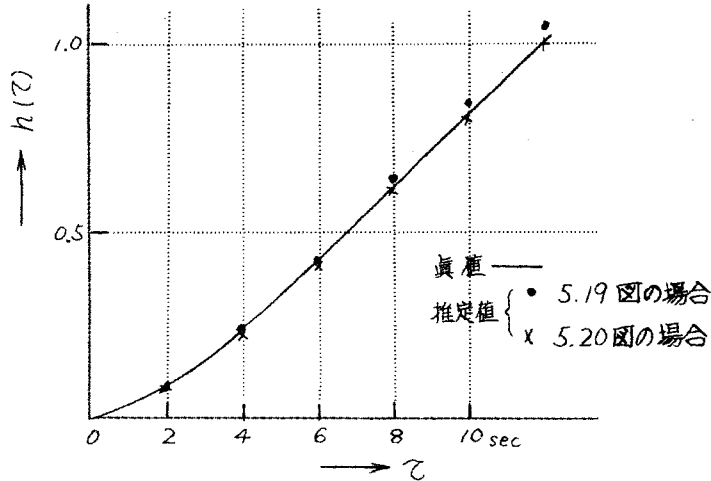
b) アナログ計算機模擬回路



c) 記録波形

第 5.20 図 模擬システム (1 次遅れ + 積分要素を含む場合 - その 2)

第5.19図に示す積分+1次遅れ要素の対象について出力に白色雑音が含まれている場合、および第5.20図に示すように対象はまったく同じであるが制御系のループ中に白色雑音に加わっている場合について動特性を推定した結果が第5.21図である。いずれの場合にも十分な精度で動特性が推定され

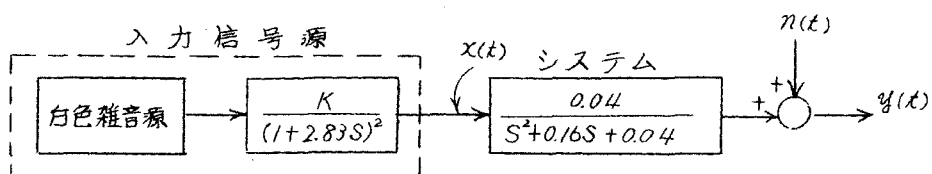


第5.21図 第5.19図および第5.20図に示した模擬システムにおいて1次遅れ+積分要素の動特性推定結果

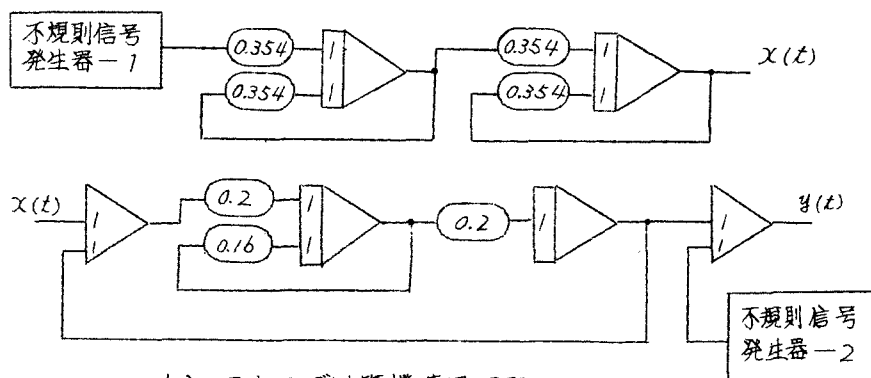
ている。第5.21図の場合に入力 $x(t)$ と雑音 $n(t)$ の間に明らかに相関があるにもかかわらずよい精度が得られているのは、雑音がパワー有限の白色雑音であるため、ループ内を循環して動特性の推定結果に影響を与える低周波成分のパワーはごくわずかしかないということに理由がある。

5.4.3 自己平衡性のあるシステムの動特性推定への適用

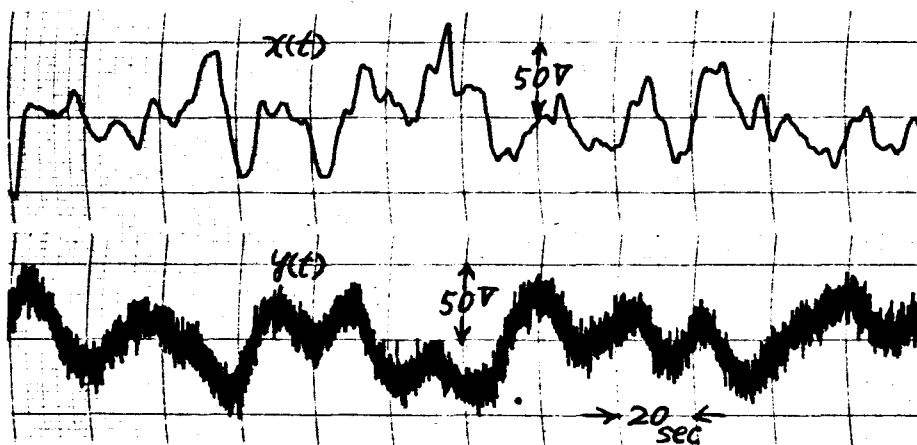
本節でとりあげてきた方法はインディシャル応答の増分 $\Delta h(k)$ の差 $\Delta h(k) - \Delta h(k-1)$ を推定するのであるから、自己平衡性のあるシステムにも適用できるはずである。これを確かめるために第5.22図に示すような2次振動系の動特性を、通常の方法と階差をとる方法の両方法で推定しその結果を比較検討する。第5.23図は第5.22図において $n(t) = 0$ とした場合の結果で、2つの方法の差異は認められない。第5.24図は出力に $\overline{n^2(t)}/\overline{x^2(t)} = 0.08$ なる白色雑音が重畳されている場合の結果である。階差をとるとかなりバラツキが大きくなっているが、これは雑音の分散が見かけ上2倍になるためと、推定された $\hat{\Delta g}(k)$ からインディシャル応答を求める際に、



a) ブロック線図

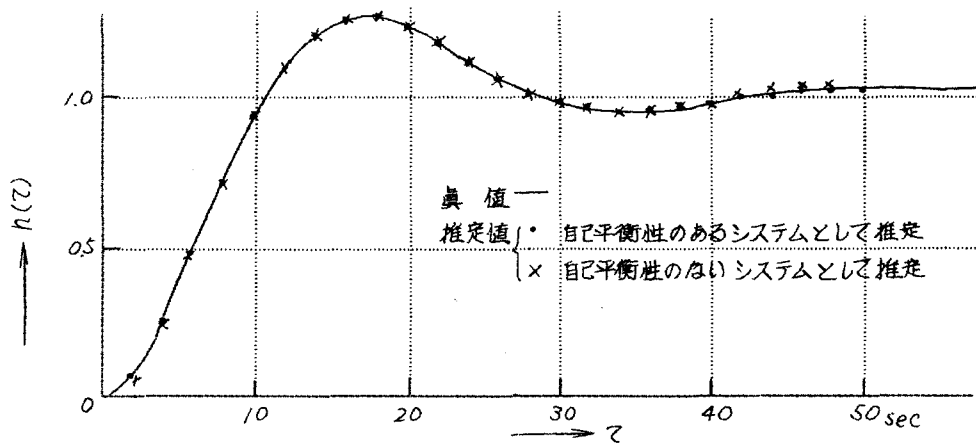


b) アナログ計算機模擬回路

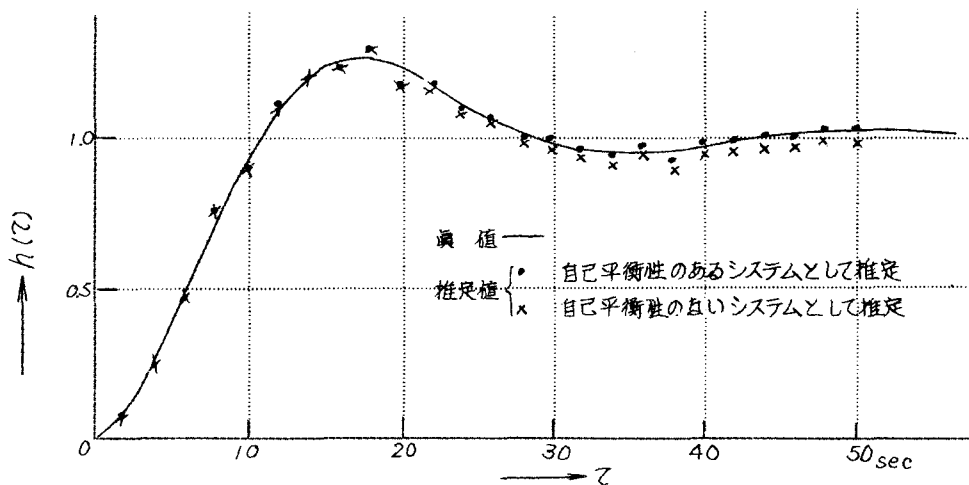


c) 記録波形

第5.22図 模擬システム



第5.23図 第5.22図に示した模擬システムの動特性推定結果
—その1, $n(t)=0$, $T=2\text{sec}$, $N_p=25$, $N_d=250$



第5.24図 第5.22図に示した模擬システムの動特性推定結果
—その2, $\bar{n}^2(t)/\bar{x}^2(t)=0.08$, $T=2\text{sec}$, $N_p=25$, $N_d=1000$

$$\hat{h}(\ell T) = \sum_{m=1}^{\ell} \sum_{j=1}^m \Delta \hat{q}(j) \quad \dots\dots\dots (5.34)$$

なる加算を2度行なっているためと考えられる。

§ 5.5 模擬プロセスの動特性推定例^(*)

これまで最小2乗法について基礎的検討を加えるのが目的であったため、比較的簡単な模擬システムで動特性推定の実験を行なってきた。ここでは実在するプロセスをアナログ計算機を用いて模擬し、その動特性を推定してみる。

5.5.1 対象のプロセス

模擬の対象となるプロセスはあるボイラの蒸気圧力制御系である。第5.25図a)はこのボイラに計装されている蒸気圧力制御系の概略を示したもので、出力は主さい止弁入口蒸気圧力、入力(この場合は外乱)は蒸気流量、制御量は燃料供給量である。燃料量設定信号として、蒸気圧力偏差を打ち消すためのPI調節計からの信号のほかに蒸気流量に比例した信号が用いられているのがこの制御系の特徴である。

5.5.2 アナログ計算機による模擬

第5.25図a)に示したボイラ蒸気圧力制御系をブロック線図で描くと第5.25図b)のようになる。

ボイラの基礎方程式はその変化分だけに着目すると、

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_s &= k_s w_s \\ \dot{V}_p &= K(1 + 1/T_{1s})P_r \\ \dot{V}_f - \dot{V}_p + \dot{V}_s \\ Q_{in} &= K_f e^{-Ls} \dot{V}_f \\ Q_{out} &= w_s \\ P_D &= (Q_{in} - Q_{out})/T_B s \\ P_r &= P_D - k_p w_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.35)$$

*) 関西電力姫路第1火力発電所 #3 ボイラ、6.3節参照

ここで

$$\begin{array}{ll}
 \text{変数} & \left\{ \begin{array}{l}
 Y_s : \text{蒸気流量に比例した信号 (scale)} \\
 Y_p : \text{蒸気圧力偏差調節信号 (scale)} \\
 Y_f : \text{供給燃料量設定信号 (scale)} \\
 W_s : \text{蒸気流量 (t/h)} \\
 Q_{in} : \text{爐内で発生する熱量, これを発生できる蒸気量} \\
 \quad \text{で表わす (t/h)} \\
 Q_{out} : \text{蒸気により持ち去られる熱量, これを蒸気量で} \\
 \quad \text{表わす (t/h)} \\
 P_D : \text{ドラム圧力 (kg/cm}^2\text{)} \\
 P_T : \text{タービン入力圧力 (kg/cm}^2\text{)}
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{定数} & \left\{ \begin{array}{l}
 K_s : \text{比例定数 (scale/t/h)} \\
 K : \text{調節計の利得 (scale/kg/cm}^2\text{)} \\
 T_I : \text{調節計の積分時定数 (min)} \\
 K_f : \text{燃料操作部の利得 (t/h/scale)} \\
 L : \text{燃料操作部および爐の時間遅れ (min)} \\
 T_B : \text{ボイラの蓄熱時定数 (min t/h/kg/cm}^2\text{)} \\
 K_p : \text{主蒸気管の蒸気圧力降下係数 (kg/cm}^2\text{t/h)}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

である。これらの定数の値は各種試験および調査の結果を用いて、付録 5.3 に述べる方法で算出した。その数値を挙げると、

$$\begin{aligned}
 K_s &= 0.019 \text{ scale/t/h}, & K &= 0.5 \text{ scale/kg/cm}^2 \\
 1/T_I &= 0.8/\text{min}, & K_f &= 6.5 \text{ t/h/scale} \\
 L &= 0.133 \text{ min}, & 1/T_B &= 0.053 \text{ kg/cm}^2\text{t/h} \cdot \text{min} \\
 K_p &= 0.045 \text{ kg/cm}^2\text{t/h} \text{ (ただし } W_s = 370 \text{ t/h)}
 \end{aligned}$$

である。

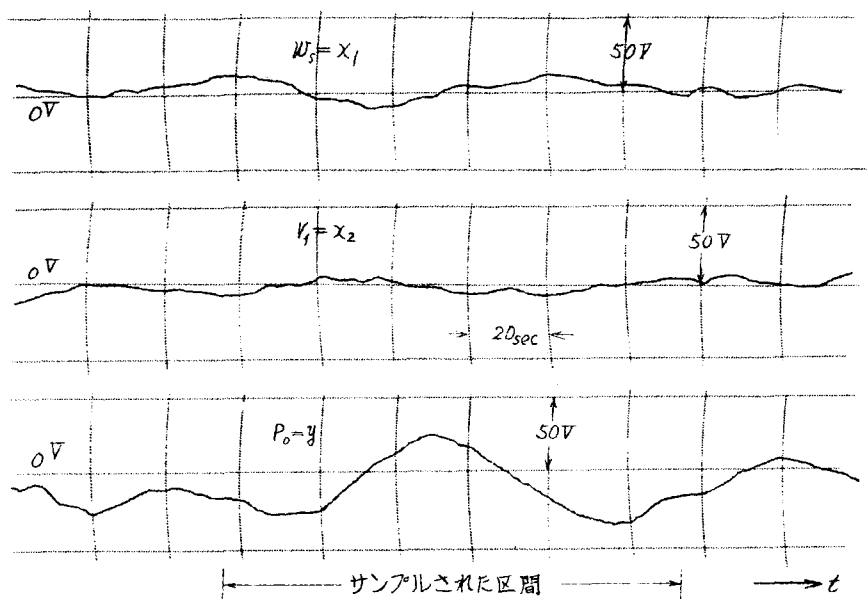
調節計の調整条件を、少し変更し

$$\begin{aligned}
 K &= 0.554 \text{ scale/t/h} \\
 T_I &= 1 \text{ min}
 \end{aligned}$$

とした場合の数値を用い 第 5.25 図 b) をさらに伝達関数によるプロット

Block diagram of a control system for a stirred tank reactor. The input is $w_s(t/h)$, which splits into three paths. The first path goes through a gain block of 0.0154 to a summing junction. The second path goes through a gain block of 0.045 to another summing junction. The third path goes through a gain block of $\frac{0.053}{s}$ to a third summing junction. The first summing junction also receives $r_s(\text{scale})$ and $r_f(\text{scale})$ as positive inputs. Its output goes through a delay block of $65e^{-0.13s}$ to a fourth summing junction. The fourth summing junction also receives $q_{in}(t/h)$ as a positive input and $q_{out}(t/h)$ as a negative input. Its output goes through a gain block of $0.554(1 + \frac{1}{s})$ to a fifth summing junction. The fifth summing junction also receives $p_d(\text{kg/cm}^2)$ as a positive input and $p_t(\text{kg/cm}^2)$ as a negative input. The output of the fifth summing junction is $r_p(\text{scale})$, which is fed back to the first summing junction.

第5.26図 (つづく)

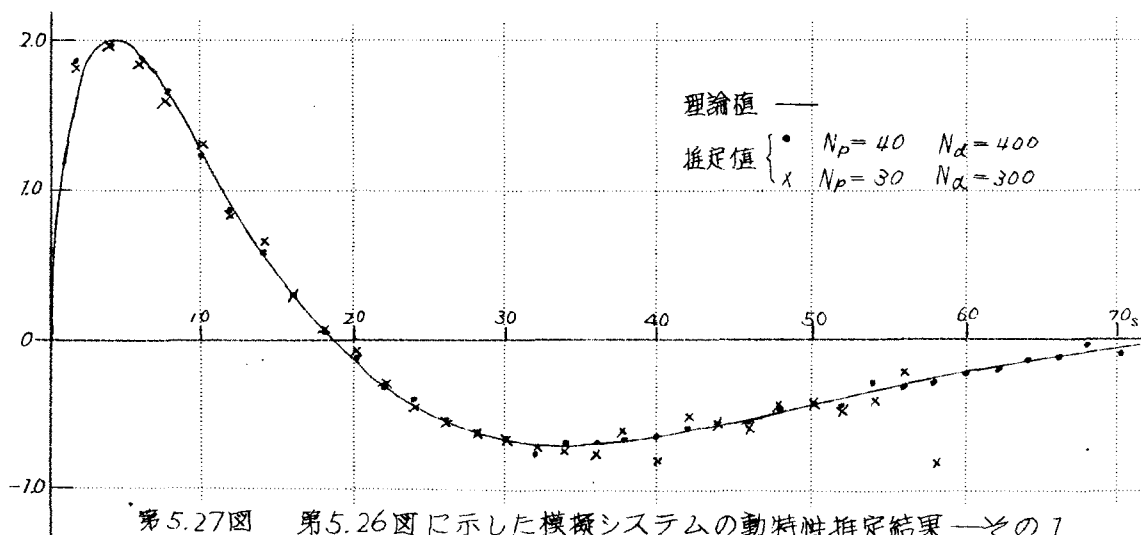


(c) 記録波形

第5.26図 模擬プロセス

5.5.3 動特性推定例 - 1

まず、蒸気圧力制御系全体の動特性を推定してみる。この場合には蒸気流量が入力、タービン入口蒸気圧が出力の1入力、1出力システムとして扱うことができる。第5.27図は動特性の推定結果である。実線は真値すなわち



第5.27図 第5.26図に示した模擬システムの動特性推定結果 — その1

蒸気流量に相当する信号を階状に変化させたときのアナログ計算機の応答であり、○印は第5.26図(C)に示すような不規則に変動する入出力から最小2乗法を適用して動特性を推定した結果である。○印は $N_p=40$, $N_d=400$ にとつた場合で真値とよく一致している。×印は $N_p=30$, $N_d=300$ にとつた場合で、応答の終りの部分で大きなバラツキが認められる。これは5.3.2において指摘したように N_p の選定が不適当なためである。

なお、このようにして推定された応答波形のフーリエ変換を計算すれば容易に系の周波数伝達関数が求まる。

5.5.4 動特性推定例-2

実際のボイラでは、ボイラの蓄熱時定数 T_B あるいは炉の時間遅れなどが問題になる。これらを直接推定することができれば、きわめて好都合である。そこで、燃料量設定信号および蒸気流量の2つを入力、ドラム圧力を出力として、これらの間の動特性を推定してみる。この場合にはドラムは積分要素であるから、2入力1出力でしかも自己平衡性のないシステムとして扱わなければならない。 $T=3\text{sec}$ にとり第5.26図(C)に示した波形をサンプリングした結果が第5.5表である。これから出力の階差をとり $N_p=3$, $N_d=30$

第5.5表 第5.26図に示した信号のサンプル値

信号 サンプル点	$x_1(k)$ $x_1 = w_s$	$x_2(k)$ $x_2 = r_f$	$y(k)$ $y = P_o$
$k=-5$	-10.8	3.7	-16.0
-4	-11.6	3.9	-17.7
-3	-10.9	3.3	-20.0
-2	-10.9	2.9	-21.7
-1	-9.8	1.9	-23.2
0	-7.7	0.6	-24.0
1	-7.2	-0.1	-23.3
2	-5.0	-1.7	-22.3
3	0.4	-4.6	-21.0
4	3.9	-6.3	-16.8
5	4.2	-6.0	-9.9
6	4.3	-5.2	-2.8
7	5.1	-4.9	3.0
8	7.1	-5.1	7.5
9	9.0	-5.3	11.8

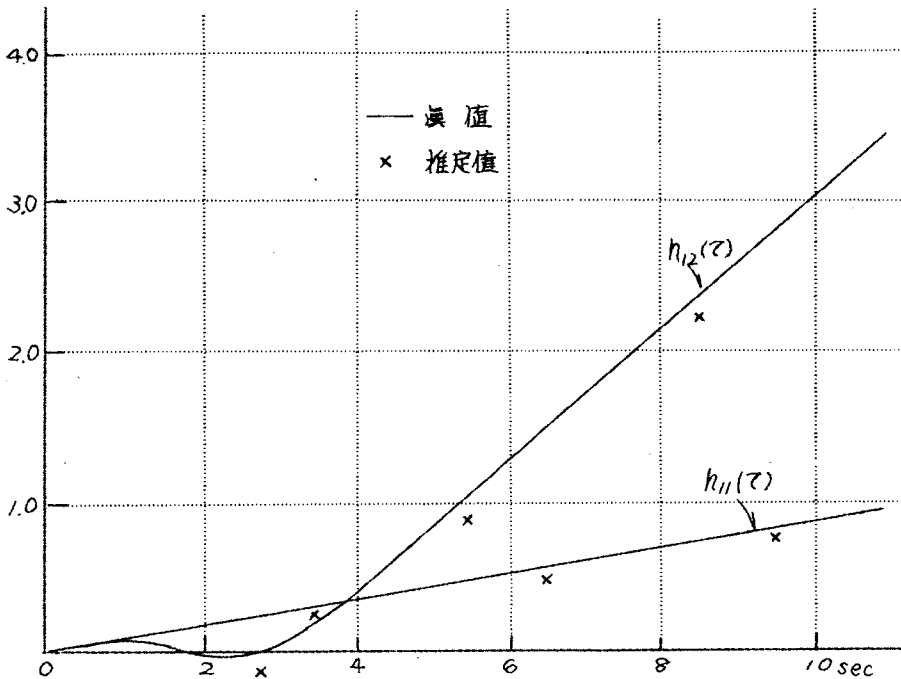
10	9.5	- 4.8	16.5
11	6.8	- 2.3	21.5
12	3.9	0.0	24.5
13	2.7	1.3	24.4
14	2.1	2.2	22.6
15	- 0.6	3.6	20.3
16	- 3.5	5.1	17.0
17	- 5.3	5.9	12.1
18	- 5.4	5.5	6.0
19	- 5.4	4.5	- 0.1
20	- 5.5	4.0	- 5.0
21	- 7.1	4.2	- 8.5
22	- 8.9	4.8	- 11.5
23	- 11.7	5.9	- 14.4
24	- 14.2	6.7	- 18.2
25	- 13.4	5.4	- 23.4
26	- 11.1	3.4	- 28.2
27	- 10.0	1.9	- 30.7
28	- 9.2	0.8	- 31.3
29	- 7.6	- 0.6	- 30.8
30	- 5.7	- 1.5	- 29.0
31	- 4.9	- 2.1	- 25.9
32	- 3.7	- 2.3	- 22.2
33	- 3.4	- 2.5	- 18.4
34	- 1.4	- 3.2	- 14.9

に選んで動特性を推定した結果が 第5.6表 である。第5.28図は推定結果を真値と比較した結果である。第5.26図のブロック線図からも明らかなように、2つの入力 y_4 , w_5 の間には相当の相関関係があるにもかかわらず、

第5.6表 第5.26図に示した模擬プロセスの動特性推定結果

l	$\Delta g_{11}(l)$	$\Delta h_{11}(l)$	$h_{11}(l)$	l_1	$\Delta g_{12}(l)$	$\Delta h_{12}(l)$	$h_{12}(l)$
1	-0.26	-0.26	-0.26	1	0.16	0.16	0.16
2	0.025	-0.23	-0.46	2	-1.21	-1.06	-0.90
3	-0.030	-0.26	-0.76	3	-0.26	-1.31	-2.21

両者はよく一致している。



第5.28図 第5.26図に示した模擬システムの動特性推定結果-その2

§5.6 結 言

最小2乗法について、基礎的考察を加えた結果、つぎのような諸点が明らかにされた。

- 1) 最小2乗法では、システムの情報として得られる連続なデータのサンプル値のみを取り扱う。そのサンプル周期は試作したサンプル周期決定装置で測定されるサンプル誤差の評価関数が入力について5%、出力について1%程度になるように選定すれば十分である。このとき動特性の推定値（最小2乗解）を不偏推定量であるとみなしてよいことが理論的にも解明された。
- 2) 動特性の推定値を計算する際には、観測点の個数 N_x および動特性の表現点の個数 N_p をプリセットする必要がある。入力が低域広帯域特性、雑音が白色性をもつ場合について N_x と推定値の分散との関係を入力対雑音比をパラメータにとって表わしたのが第5.8図である。雑音のパワーが既知ならばこの図が参考になる。一般には雑音の性質はまったく未知である場合が多い

から、 N_d の選定は試行錯誤的に行なわなければならない。 N_p はあらかじめ見当をつけておくことが望ましいが、これが不可能な場合には N_d を十分大きくとって、やはり試行錯誤的に推定を行なう。

- 3) 自己平衡性のないシステムの動特性は、出力の代わりに、その階差をとるという方法で容易に推定できるということが、模擬システムを対象とした実験により確かめられた。この方法を自己平衡性のあるシステムに適用することもできる。その場合、雑音の分散は見かけ上2倍になるので、通常の方法と同じ精度を期待するならば、観測点の個数を2倍にとる必要がある。
- 4) 栗丘のボイラの蒸気圧力制御系をアナログ計算機で模擬し、その動特性を推定するという模擬的実験を行なった。模擬プロセス全体およびプロセス中に含まれる2入力1出力の自己平衡性のない系の動特性を推定した結果は満足すべきものであった。

第5章の参考文献

- (1) B.M. Oliver, J.R. Pierce & C.E. Shannon : *Proc. IRE*, 36, 1330 (1948)
- (2) 藤井, 鈴木, 西村 ; 日本自動制御協会学術講演会 113 (昭41)
- (3) 鈴木, 藤井 ; 制御工学投稿予定
- (4) H.M. Paynter ; *ICAC* 37 (1956)
- (5) 鈴木, 梶本, 藤井, 西村 ; 制御工学, 9, 351 (昭40)
- (6) 鈴木, 安部, 藤井, 西村 ; 電学誌, 84, 1924 (昭39)
- (7) 文献(3)
- (8) 鈴木, 峠, 藤井, 西村 ; 計測自動制御学会論文集, 1, 166 (昭40)
- (9) 鈴木, 古谷, 藤井 ; 計測自動制御学会論文集, 2, 289 (昭41)
- (10) Y. Suzuki, T. Furuya & K. Fujii ; *Tech. Rep. of Osaka Univ.* 16, 545 (1966)
- (11) 鈴木, 藤井 ; 電学誌, 87-2 (昭42)
- (12) 鈴木, 藤井, 西村 ; 制御工学, 8, 182 (昭39)
- (13) M. Nishimura, K. Fujii & Y. Suzuki ; *Tech. Rep. of Osaka Univ.* 13, 313 (1963)

第 6 章 実在するプロセスの動特性推定

§ 6.1 緒 言

動特性推定法の究極の目的は、実在のシステムの動特性を解明することにある。これまでに述べてきた最小 2 乗法が十分実用性のあることは、前章で述べた模擬システムの動特性推定結果から明らかであるが、本章では、さらに、実際に操業状態にあるプロセスの動特性推定を行ない、あらためてその実用性を確認する。

その一つは自己平衡性のあるプロセスの動特性を推定した例であり、他の一つは 2 入力 1 出力で自己平衡性のないプロセスの動特性を推定した例である。

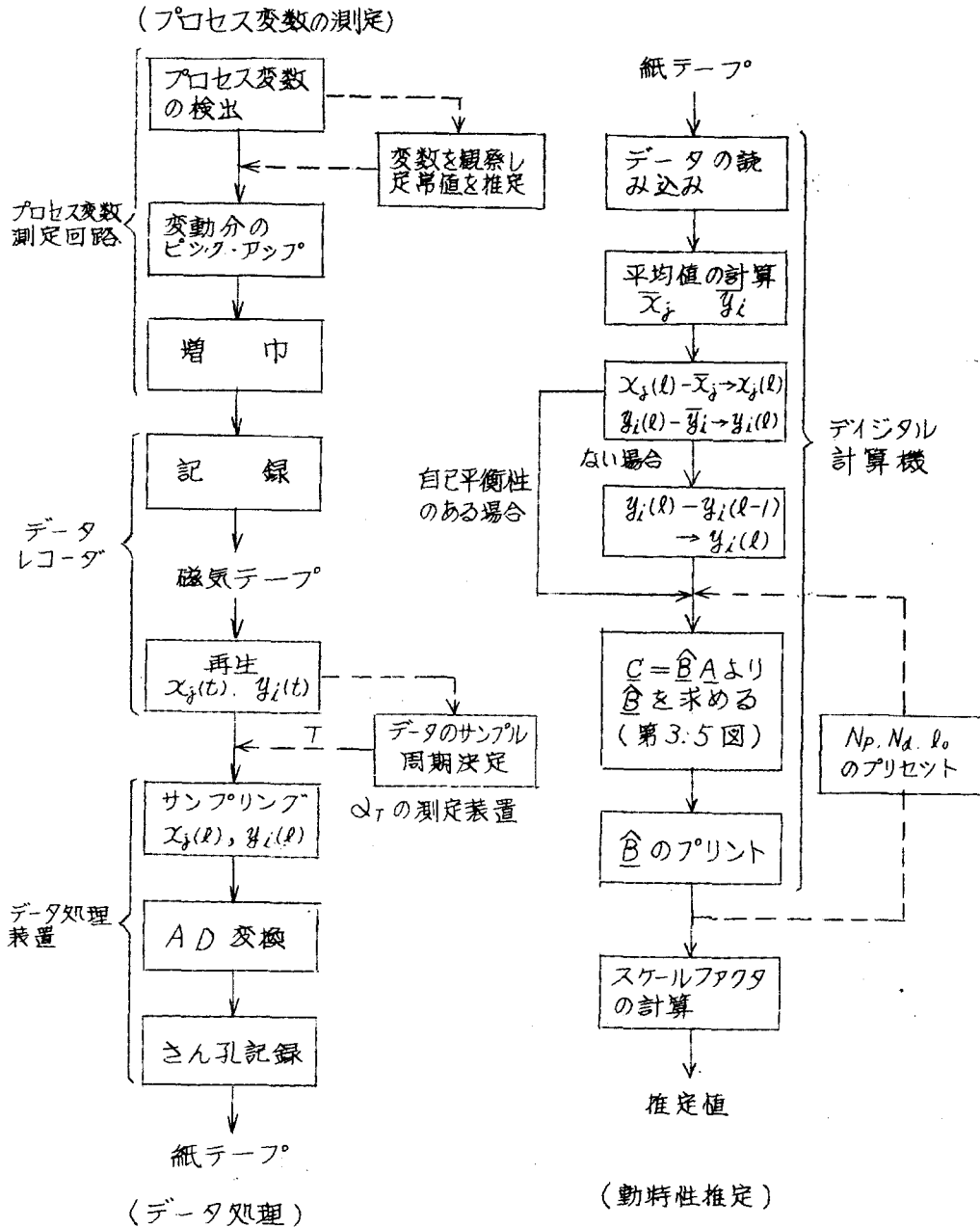
§ 6.2 動特性推定の手順⁽¹⁾

本節では実際のシステムの動特性推定を行なう実体的方法について説明する。第 6.1 図は必要な手順をフローチャートで示したものである。

運転状態にあるシステムの変数について考えると、その変動の大きさは、定常値に比べればかなり小さいのが普通であり、しかもこの定常値はシステムの運転条件に応じて大幅に変わることが多い。したがって変数の変動を十分な精度で測定するためには、定常値について見当をつけ、これを差し引いた変動分だけを増巾するということが必要である。このようにして測定された変数の変動の模様を、データレコーダを用いて磁気テープに記録する。レコーダとしては記録再生の際にテープ送り速度の変換が可能なものを用いると、再生データの時間軸を適当に伸縮できるので都合がよい。

現場に必要な作業はこのデータの収集だけである。得られたデータの中で、入力に相当するものを $x_j(t)$ ($j=1, 2, \dots, N_x$) 出力を $y_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, N_y$) と表わすことにする。

さて、最小 2 乗法を適用するためにはこれらのデータをサンプルして離散的なデータに変換しておかなければならない。サンプル周期 T は、 $x_j(t)$ ($j=1, 2, \dots, N_x$) の中で最も変動の激しいものについて 4.2 で説明したサンプル周期決定装置で α_T を測定し、これが 5% 程度になるように選定すればよい。データ処理装置ではこの周期 T の間に $x_j(t)$ ($j=1, 2, \dots, N_x$) $y_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, N_y$) を 1 回づつ順次サンプルし、A-D 変換した後、紙テープにさ



第6.1図 動特性推定の手順

ん孔記録する。以上でデジタル計算機による所定の計算の可能なデータが完成するわけである。

デジタル計算機では、まず読み込まれたデータについて

$$\begin{aligned} x_j(l) - \bar{x}_j &\rightarrow x_j(l) \\ y_i(l) - \bar{y}_i &\rightarrow y_i(l) \end{aligned} \quad l = 1, 2, \dots, N_0 \quad (6.1)$$

ここで

$$\bar{x}_j = \frac{1}{N_0} \sum_{l=1}^{N_0} x_j(l), \quad \bar{y}_i = \frac{1}{N_0} \sum_{l=1}^{N_0} y_i(l)$$

なる演算が行なわれる。この演算はデータからさらに正確な変動分を取り出すために必要である。

つぎに求めるべきシステムの動特性を表わすパラメータの個数 N_p 、データの個数 N_d 、および計算に用いるデータの番地を指定すれば、後は計算機で自動的に第3.5図に示したフローチャートにしたがって計算が行なわれ、最小2乗解 $\hat{B}$ がプリントされる。

パラメータの個数 N_p は対象の整定時間についておおよそ見当をつけ、 $N_p \times T$ がほぼ整定時間に等しくなるように選ぶ。対象の整定時間がまったく不明な場合には、まず N_p を仮定して計算を行ない、プリントされる $\hat{B}$ を観察して逆に必要な N_p の大きさの見当をつける。

データの個数 N_d は、最初 N_p の10倍程度にとり、まったく異なる2つのデータ（時間的に重複しないデータ）から個々に動特性を計算し、両者が一致すれば計算結果の精度は十分であるとみなす。もし両者がばらつくならば雑音の影響が完全に除去されていないと考えられるので N_d をさらに大きくとって計算をくり返す。

最後にこのようにして得られた解のスケール・ファクタを求めれば、対象の動特性が定量的に推定できる。このスケール・ファクタは、プロセスの変数とデータレコーダに記録する際、あらかじめレコーダの各チャンネルに基準電圧を記録するとともに、それが同じチャンネルに記録されているプロセス変数の何単位に相当するかを調べておけば容易に算出できる。

§ 6.3 ボイラ蒸気圧力制御系の動特性推定例⁽¹⁾⁽²⁾

対象は関西電力姫路第一発電所[#]3ボイラの蒸気圧力制御系である。主機の概要を第6.1表に示す。5.5ではこの蒸気圧力制御系をアナログ計算機で模擬し、その動特性を推定するという模擬実験を行なった。制御系の概略もすでに第5.25図に示した。

第6.1表 主機の概要（関西電力姫路第一発電所）

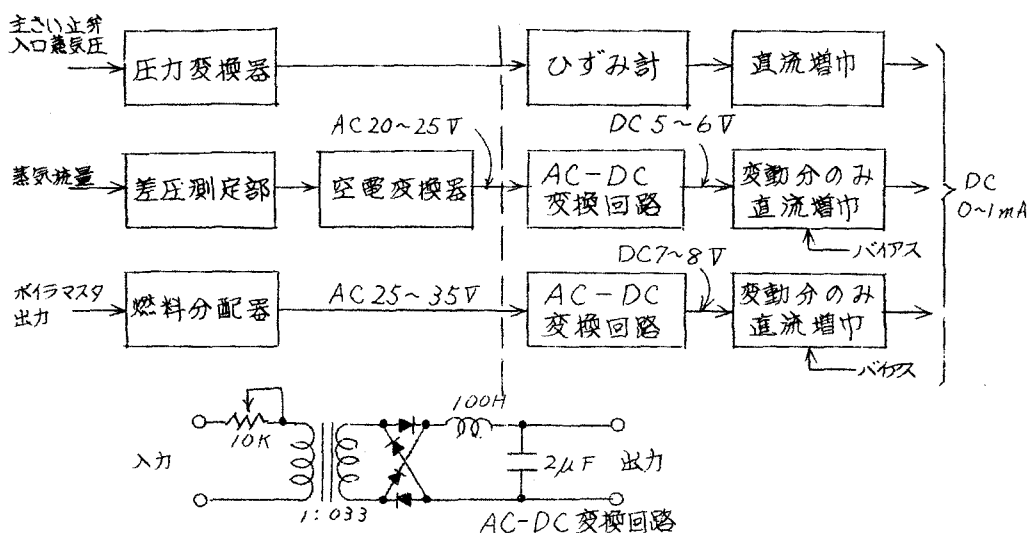
ボ イ ラ		蒸 気 タ ー ビ ン	
形 式	石川島FW単胴輻射形再熱式	形 式	二汽筒複流排気式再熱形
蒸 発 量	430 t/h	定格出力	125,000 KW
蒸気圧力	131 kg/cm ² g	蒸気圧力	127 kg/cm ² g
蒸気温度	541°C（過熱器出口） 541°C（再熱器出口）	蒸気温度	538°C（主さい止弁前） 538°C（再熱さい止弁前）
給水温度		排気圧力	722 mm Hg
設計燃料	石炭 5,000 Kcal/kg 重油 10,000 Kcal/kg	回転数	3600 r.p.m
燃焼方式	石炭、重油混焼	台 数	1 基
台 数	1 かん	製 造 者	石川島芝浦タービン
製 造 者	石川島重工業		

6.3.1 プロセス変数の測定

圧力制御系の変数として考えられる主なものは、タービン入口蒸気圧、蒸気流量および供給燃料量の3つであるが、供給燃料量は直接測定することが不可能であつたのでその設定信号をとつた。

第6.2図は測定回路の概略を示したもので、右側から左側はもともとボイラに計装されているものを示す。これらの変数の変動分はすべて0~1mAの電気信号に変換された後、データレコーダによつて磁気テープに記録された。第6.2表には測定に使用したレコーダの規格、性能を示してある。

なおプロセス変数の記録は、再生時に時間軸を短縮できるよう3inch/secという最小のテープ速度を選んで行なった。



第 6.2 図 プロセス変数測定回路

第 6.2 表 データレコーダの規格

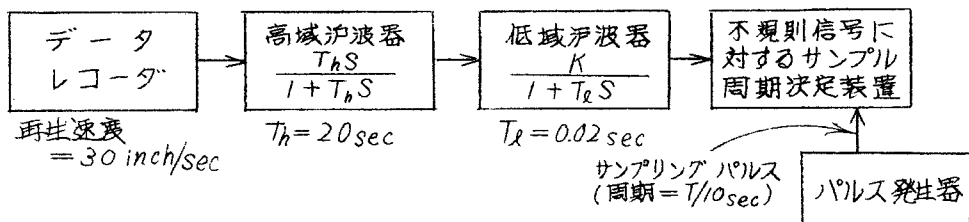
項 目	規 格
製造者、型 名	SONY, FMR-44
信 号 入 力	$\pm 1V \sim 10V$ ピーク
入力インピーダンス	$5K\Omega$ 以上、不平衡
信 号 出 力	最大 $\pm 1V$ ピーク
歪 率	2% 以下
ド リ フ ト	3% 以下
S N 比	40dB 以上
クロストーク	-40dB 以下
周波数特性ほか	別表参照

別 表

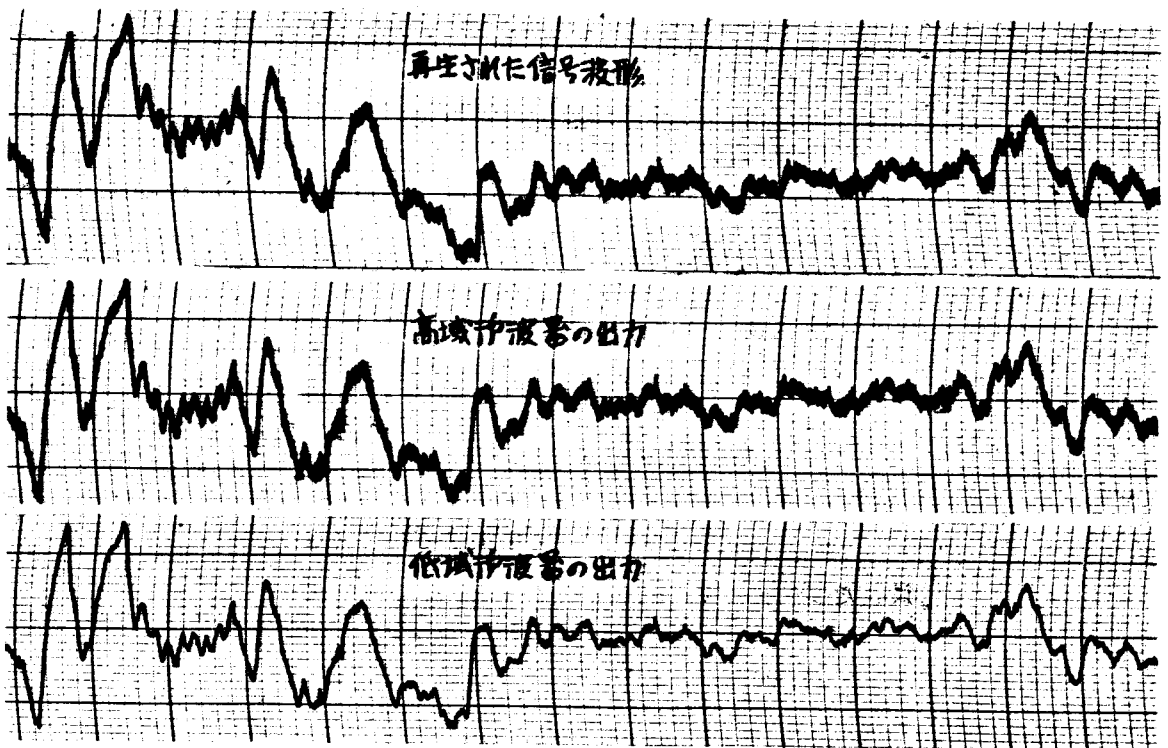
テープ速度	データの帯域	テープ速度誤差	回転ムラ	連続記録時間
30 inch/sec	$0 \sim 5^{Kc}, \pm 1dB$	$\pm 0.3\%$ 以内	RMS値 0.15% 以下	15 分
15	$0 \sim 2.5$	"	"	30 分
6	$0 \sim 1$	"	"	1 時間 15 分
3	$0 \sim 0.5$	"	0.25% 以下	2 時間 30 分

6.3.2 データ処理

操業状態においては、対象のボイラの蒸気圧力制御系の動的挙動を支配する外的要因はタービン調速機の弁開度である。負荷の変動によってこの弁開度が増減し、蒸気流量が変動して蒸気圧力制御系を動作させる。したがって蒸気流量を入力、蒸気圧力を出力、供給燃料量を制御量と考えることができる。これは5.5において説明した通りである。そこで蒸気流量と蒸気圧力あるいは供給燃料量との間の動特性を調べることにした。



a) α_T の測定系



b) 信号波形

第6.3図 α_T の測定

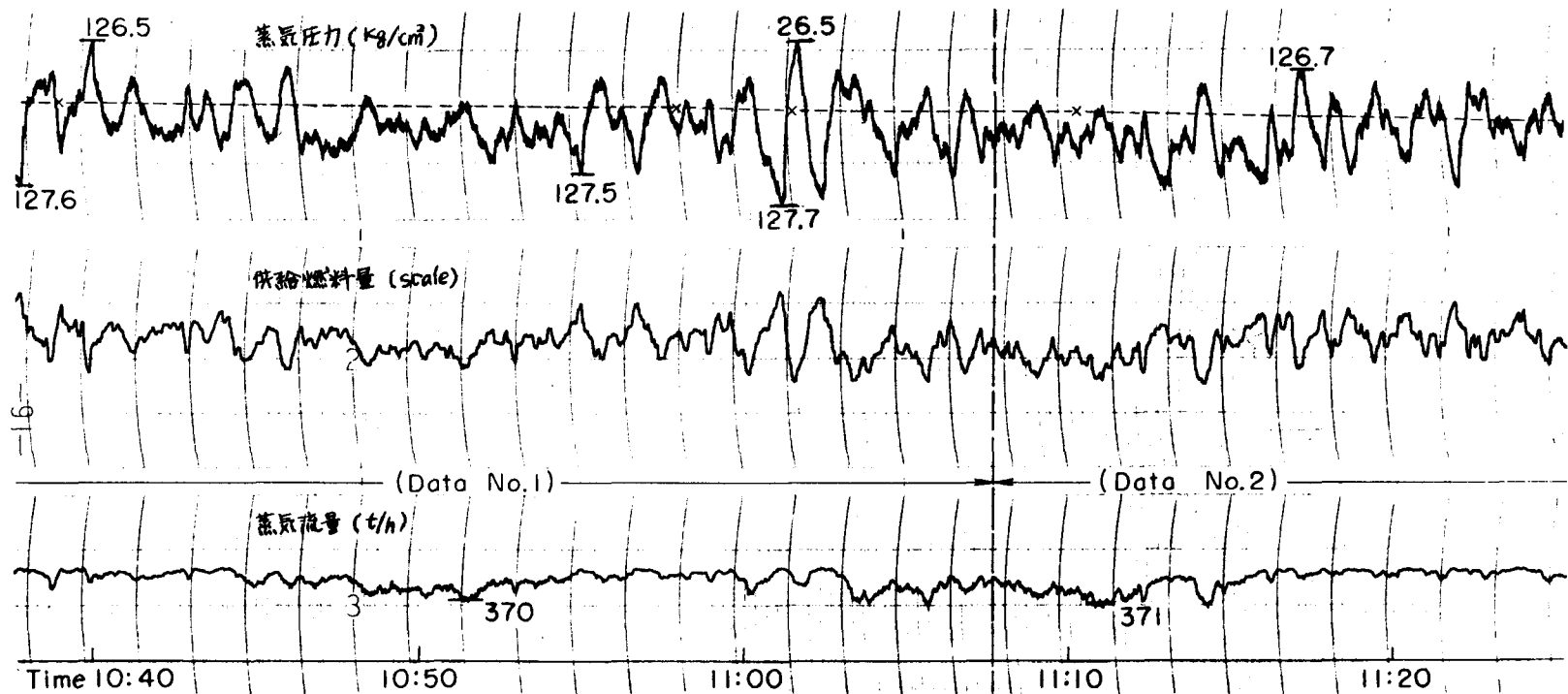
蒸気流量の変化は蒸気管路に抵抗があるため、ただちに蒸気圧力の変化となって現われるので、出力（蒸気圧力）は入力（蒸気流量）とほとんど同じような変動をする。このためサンプル周期は出力について α_T を測定し、これが 1% 程度になるように選定する必要がある。第 6.3 図 (a) は α_T の測定系のブロック線図である。ここでデータレコーダの再生速度は最高の 30 inch/sec すなわち記録時の 10 倍にとっている。したがって再生データの時間軸は実際の 1/10 に短縮され、さわめて短時間で測定が可能である。第 6.3 図 (a) の高域濾波器は、プロセス変数測定回路に起因するゆるやかなレベル変動と、データの再生時に重畳されるデータレコーダの直流レベルとを除去するために挿入されたものである。低域濾波器は測定データに含まれている高い周波数成分を除去するために挿入されたものである。この高い周波数成分はプロセスの本来の信号に重畳している雑音とみられる。これらの濾波器を挿入した効果の一例を第 6.3 図 (b) に示してある。これらの濾波器によって不要な成分を除去された信号をサンプル周期決定装置に加えて測定を行なった結果、サンプル周期が 4 sec のとき、 α_T の値は 1~1.2% となることがわかった。

つぎに、データ処理を行なう際のデータレコーダの再生速度を選定することが必要である。再生速度を記録速度の k 倍にとると、時間軸が実際の $1/k$ となるためデータのサンプル周期は T/k sec となる。この T/k sec の間にプロセスの入出力データをサンプルし、AD 変換して紙テープにさん孔することができなければならない。使用した装置では 1 個のデータ処理には約 750 msec が必要なので $k=2$ すなわち再生速度を 6 inch/sec に選んでデータ処理を行なった。

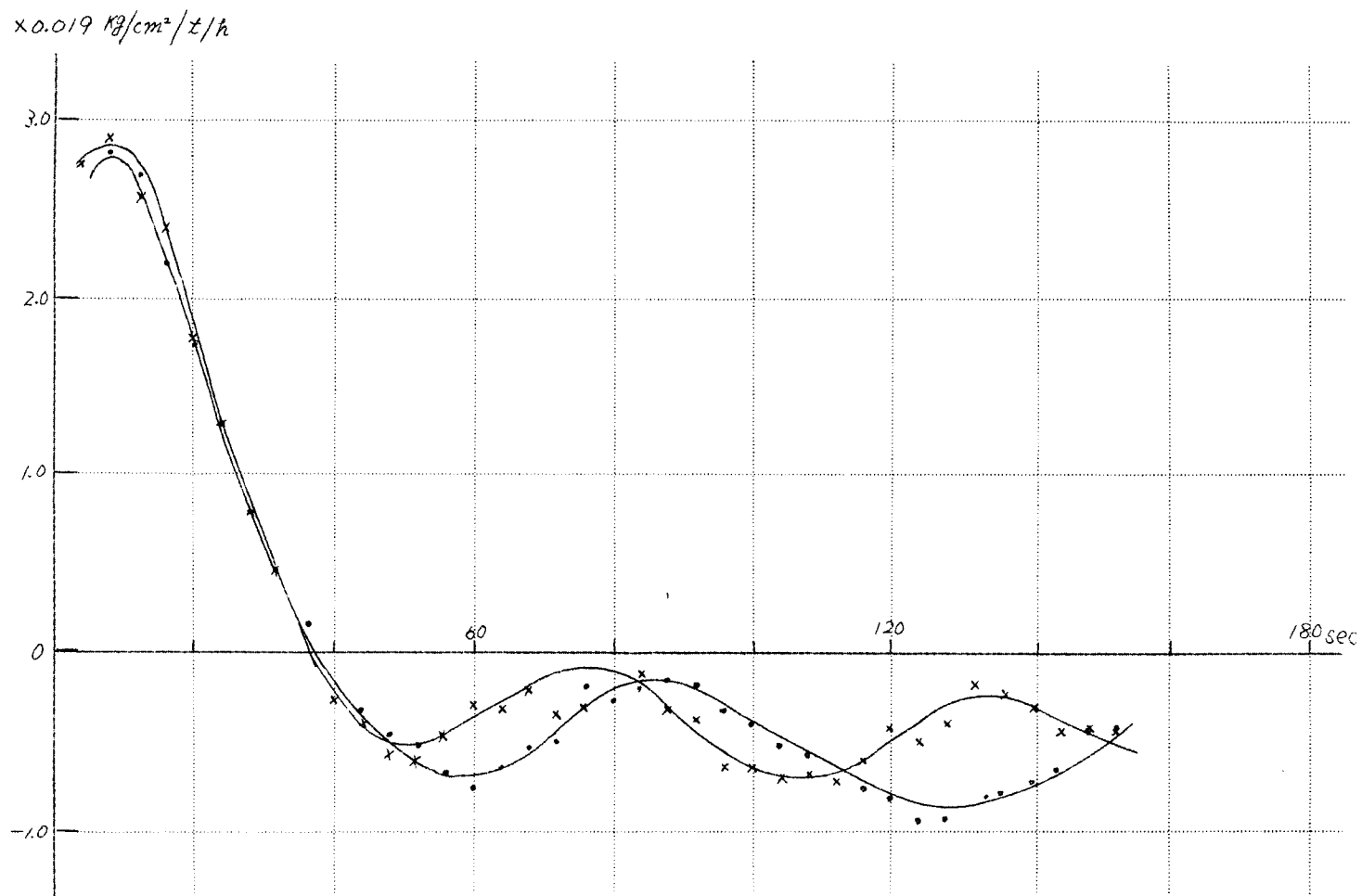
6.3.3 動特性の推定結果

第 6.4 図は、測定中データレコーダに記録すると同時にペン書きオシロで記録したプロセス変数の測定結果で、図中に使用したデータの範囲を示している。

これらについて動特性を計算した結果が、第 6.5 および 6.6 図である。第 6.5 図は蒸気流量の階段状変化に対する蒸気圧力の応答を、第 6.6 図は同じく供給燃料の応答をそれぞれ 2 例ずつ示している。いずれもデータのサンプル周期は上述のように 4 sec、パラメータの個数 N_p は 38 (約 2.5 分に

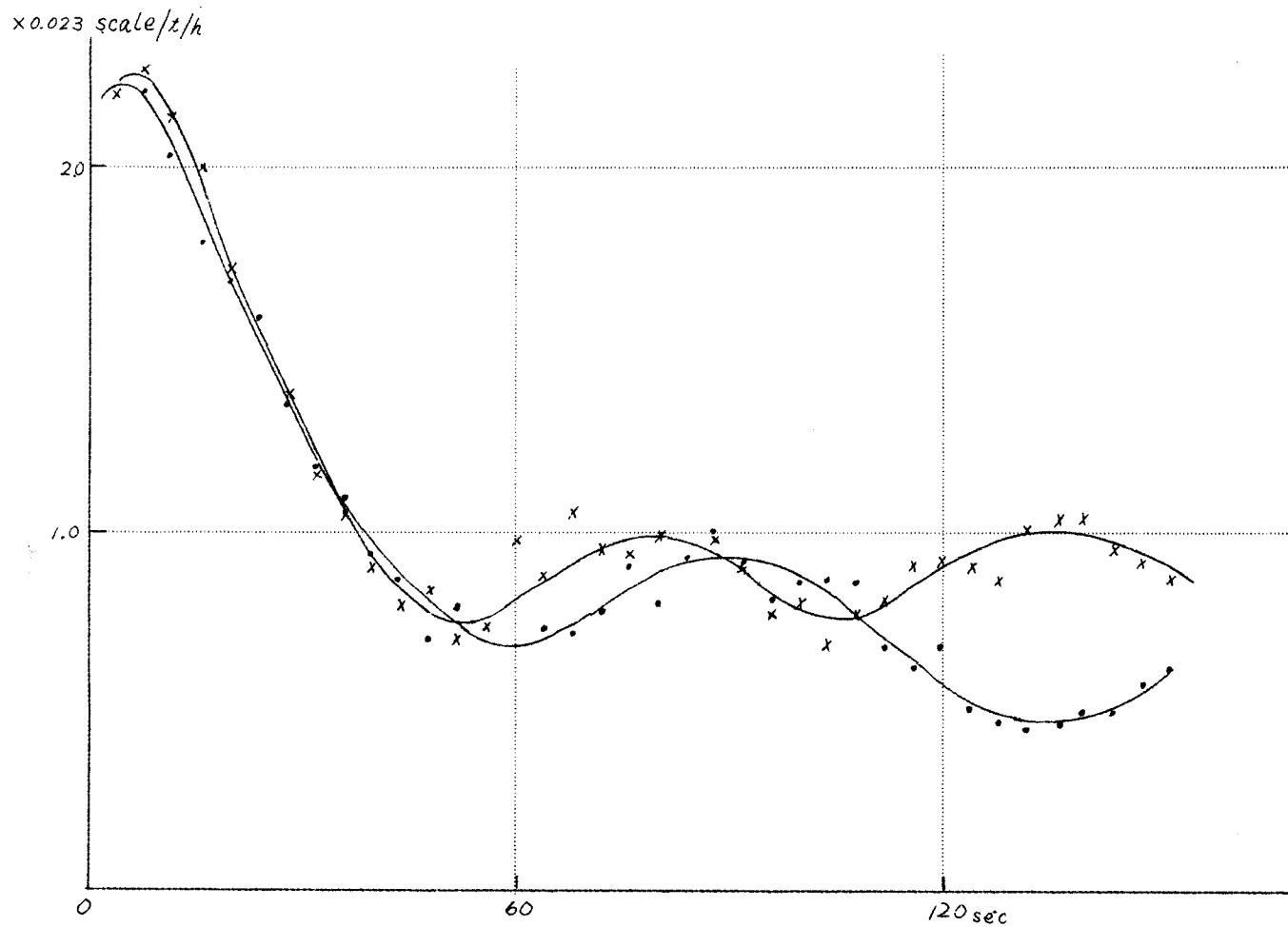


第6.4図 ボイラ変数の記録例



第6.5図 ボイラ動特性の推定結果 — 蒸気流量の階段状変化に対する主さい止弁入口蒸気圧力の応答

・データの前半より推定した結果 ×データの後半より推定した結果



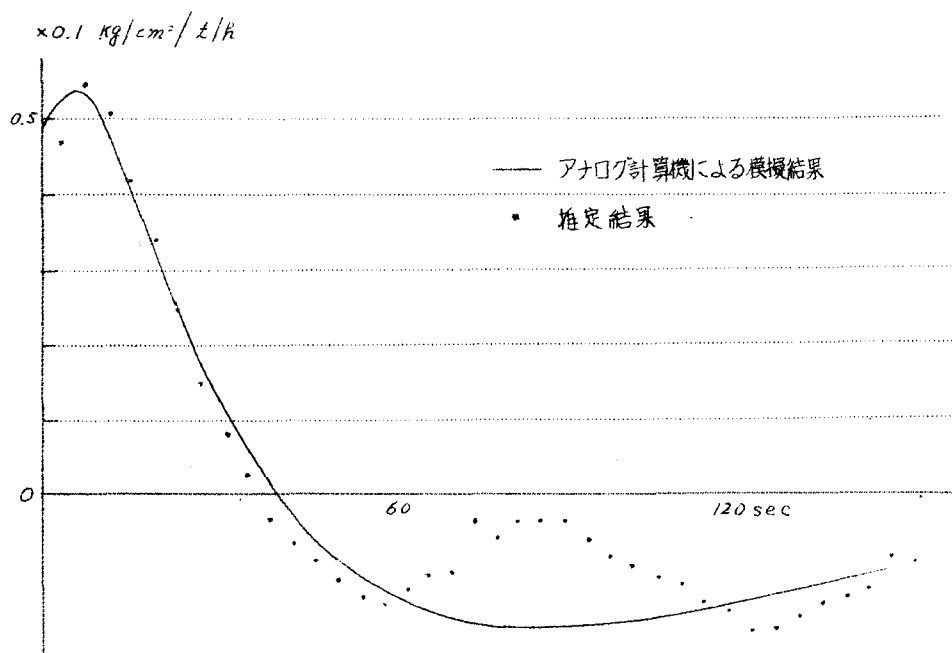
第 6.6 図 ボイラ動特性の推定結果 — 蒸気流量の階段状変化に対する燃料供給量設定値
(ボイラスタ信号) の応答, • データの前半より推定した結果 × データの後半より推定した結果

相当), 出力観測値の個数 N_d は 710 (約 47 分に相当) に選んだ, これらの N_p , N_d の値は使用した計算機 (NEAC 2206) の記憶容量 (4096 語) とにらみ合わせて選んだものである。この場合計算所要時間は 3 分程度である。

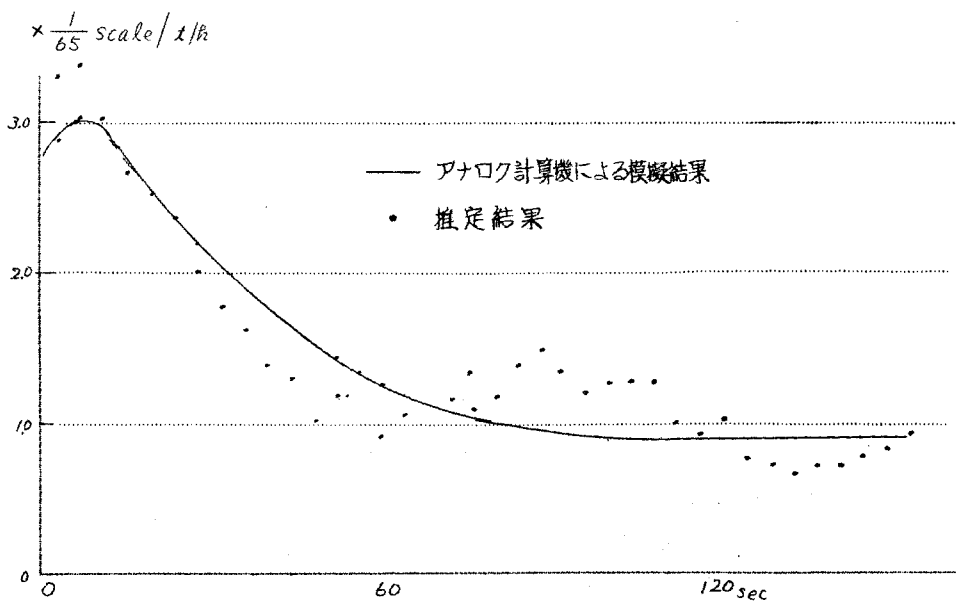
使用したデータが第 6.4 図に示したように, 時間的に隣接したまったく異なるデータであるにもかかわらず, それぞれの応答について 2 つの計算結果は最初の行き過ぎが現われる部分までほとんど完全に一致している。

6.3.4 検 討

5.5 で述べた模擬回路において, 蒸気流量の階段状変化に対する蒸気圧力および供給燃料設定信号の応答を求め, 上の計算結果と比較したのが第 6.7 および 6.8 図である。この場合模擬回路における PI 調節計のパラメータ K および T_I は実際の値に対応させているので模擬回路の応答 (実線) は第 5.27 図の場合に比べてかなり遅くなっている。第 6.7 図において振巾の大きいところでは両曲線はよく合っているが, 振巾が小さくなると計算結果の方が振動



第 6.7 図 ボイラ動特性の模擬結果と推定結果の比較
— 蒸気流量の階段状変化に対する主さい止弁入口蒸気圧の応答 —



第 6.8 図 ボイラ動特性の模擬結果と推定結果の比較
— 蒸気流量の階級状変化に対する燃料供給量
設定値 (ボイラマスタ信号) の応答 —

的になる。これは主として、模擬方法すなわち分布定数のプロセスの特性を近似むだ時間と積分だけで表わすことに原因があると推定されるが、詳細は不明である。第 6.8 図では両曲線の傾向は似ているが、振巾が少しずれている。模擬回路でパラメータを変えて検討した結果、調節計の利得 K を 20 % 程度増せば両曲線がよく合うことが確かめられた。

§ 6.4 ボイラ・ドラム水位制御系の動特性推定例⁽³⁾

ここで示すのは、2 入力でしかも自己平衡性のないプロセスの動特性推定を行なった例である。対象は関西電力堺港発電所の #1 および #2 ボイラのドラム水位制御系である。主機の概要を第 6.3 表に示す。

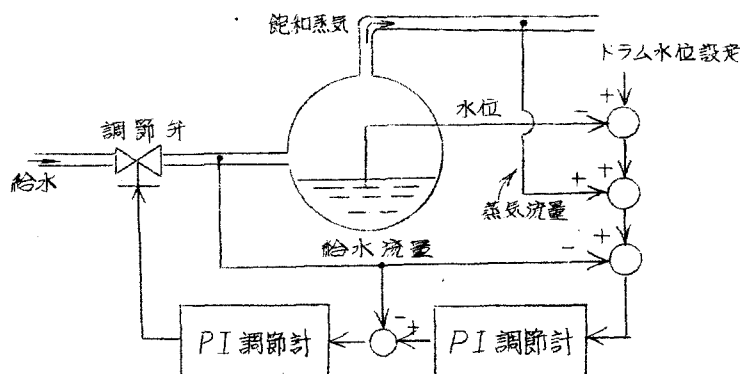
第 6.3 表 関西電力堺港発電所 #1 および #2 ユニット主機の概要

ボ イ ラ		蒸 気 タービ ン	
形 式	屋外式放射再熱強制循環	形 式	串形 3 車室 4 流 排気再熱再圧
蒸 発 量	860 t/h	定格出力	250 MW
蒸気圧力	176 kg/cm ² g	蒸気圧力	169 kg/cm ² g

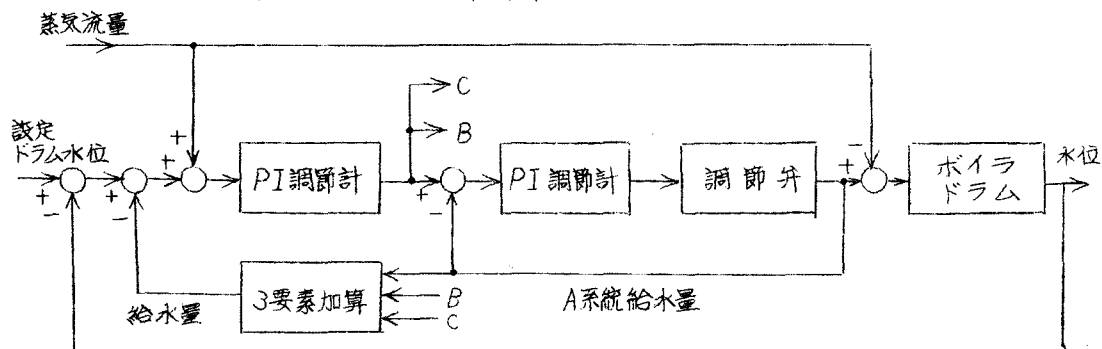
蒸気温度	571°C (過熱器出口)	蒸気温度	566°C (主さい止弁前)
	543°C (再熱器出口)		538°C (再熱さい止弁前)
給水温度	275 °C	排気圧力	722 mm Hg
設計燃料	重油 1.0.000 Kcal/kg	回転数	3600 rpm
燃焼方式	重油専焼	台数	1 基
台数	1 かん	製造会社	#1 ユニット 日立製作所
製造会社	三菱重工業		#2 ユニット 三菱重工業

6.4.1 ドラム水位制御系の概略および変数の測定

第 6.9 図 (a) は給水制御系の概略を示したもので、これをブロック線図に書くと同図 (b) のようになる。前節でとりあげた圧力制御系と同様、ここでも水位変動を検出して PI 動作制御を行なうループのほかに、蒸気流量を用いて D 動作的に給水量を制御するループが付加されている



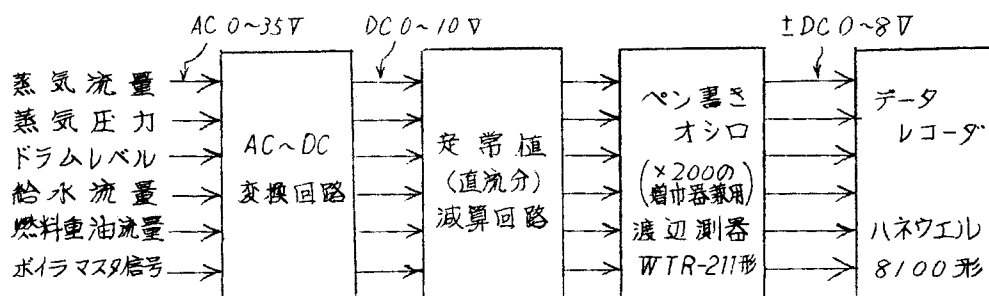
a) ボイラドラム水位制御系の概略



b) ブロック線図

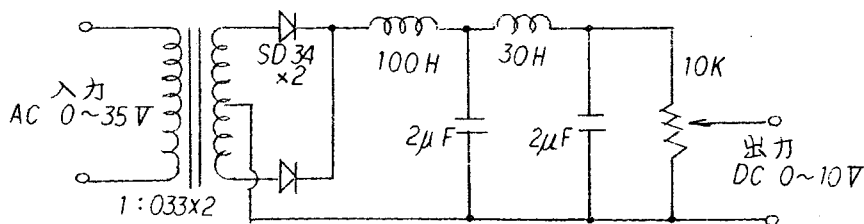
第 6.9 図 ボイラドラム水位制御系

第6.10図 は変数測定回路の概略を示したものである。当発電所のボイラ自動制御系における各種の変数は、すべてAC 0~35ボルトの電気信号に変換されて取り扱われている。必要な変数は同図 b) に示すようなAC-DC変換回路によりDC 0~10ボルト変換される。変数の変動分は同図 c) に示した直流分減算回路すなわち整流回路の出力電圧にほぼ見合った数の水銀電池(1.3ボルト)を逆極性となるように挿入することにより取り出すことができる。この変動分は、変数の監視のために使用されているペン書きオシロ内蔵の直流増巾器を兼用することにより最高200倍まで増巾され、データレコーダにより磁気テープに記録される。ペン書きオシロでペンがフルスケ

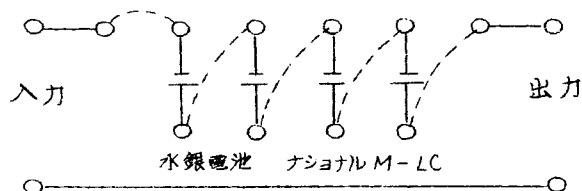


a) 変数の変動分の測定記録方式

磁気テープ
スコッチ #499



b) AC~DC 変換回路



c) 直流分減算回路

第6.10図 変数測定回路

ール振れた場合の（ペン駆動用）直流増巾器の出力電圧は + あるいは -8 ボルトとなるので、あらかじめ、データレコーダの入力感度と8ボルトでフルスケールとなるように校正しておけば、ペン書きオシロにより記録紙上のフルスケール以内に描かれた変数の変動は正しく磁気テープ上に記録される。変数の記録は3時間連続して行なわれ、これが1巻のテープに収められる。

使用したペン書きオシロおよびデータレコーダの主な規格性能を第6.4表に示す。

第6.4表 ペン書きオシロおよびデータレコーダのおもな規格性能

項 目	ペン書きオシロ	データレコーダ
製造会社, 形 名	渡辺測器 WTR211-6C	Honeywell 8108
信 号 入 力	$\pm 40mV$ ピーク最小	$\pm 2V$ ピーク最小 ~ $\pm 10V$ ピーク最大
入力インピーダンス	10K Ω 最小, 単極片線接地	10K Ω , 単極片線接地
信 号 出 力	$\pm 8V$ ピーク (ペンの振れ $\pm 20mm$)	$\pm 2V$ ピーク, $\pm 5mA$ 最大
直 線 性	0.5% 以下	2% 以下
ド リ フ ト	零点 0.5% 以下 感度 0.5% 以下	中心周波数 2% 以下 感 度 2% 以下
S N 比	40 db 以下	} 別表参照
周 波 数 特 性	0 ~ 0.1 Kc	

別 表

テープ速度	中心周波数	データの帯域	S N 比		連続記録時間
			補償あり	補償なし	
30 inch/sec	54 Kc	0 ~ 10 Kc	45 db	42 db	25 分
15	27	0 ~ 5	45	42	50 分
3 3/4	6.75	0 ~ 1.25	42	36	3時間15分
1 7/8	3.375	0 ~ 0.625	42	36	6時間30分

測定は第6.5表に示すような日程および出力レベルで行なわれた。出力レベルを変えてあるのは、その大小による応答特性の違いを調べるためである。第6.11 ~ 16 図は記録結果の一部を示したものである。

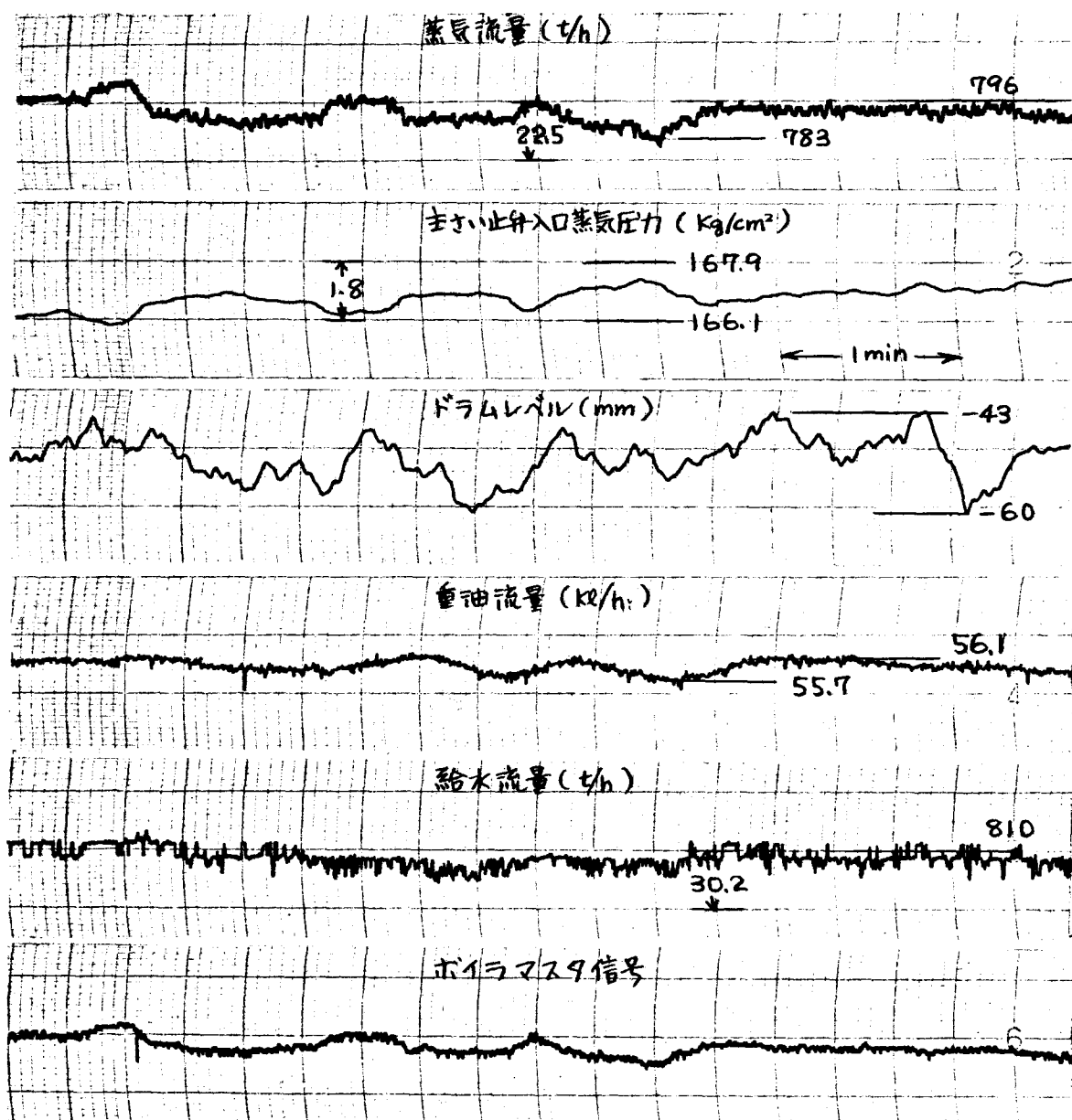
第6.5表 測定内容

番 号	日	時	ユニット	出 力
No. 1	40. 9. 7	14.21 ~ 17.25	# 1	250 MW
2	9. 8	2.02 ~ 5.54	1	160
3	9. 21	14.50 ~ 18.00	2	250
4	9. 22	0.15 ~ 3.15	2	90
5	41. 3 14	16.29 ~ 19.21	1	250
6	3. 13	14.46 ~ 17.31	1	90

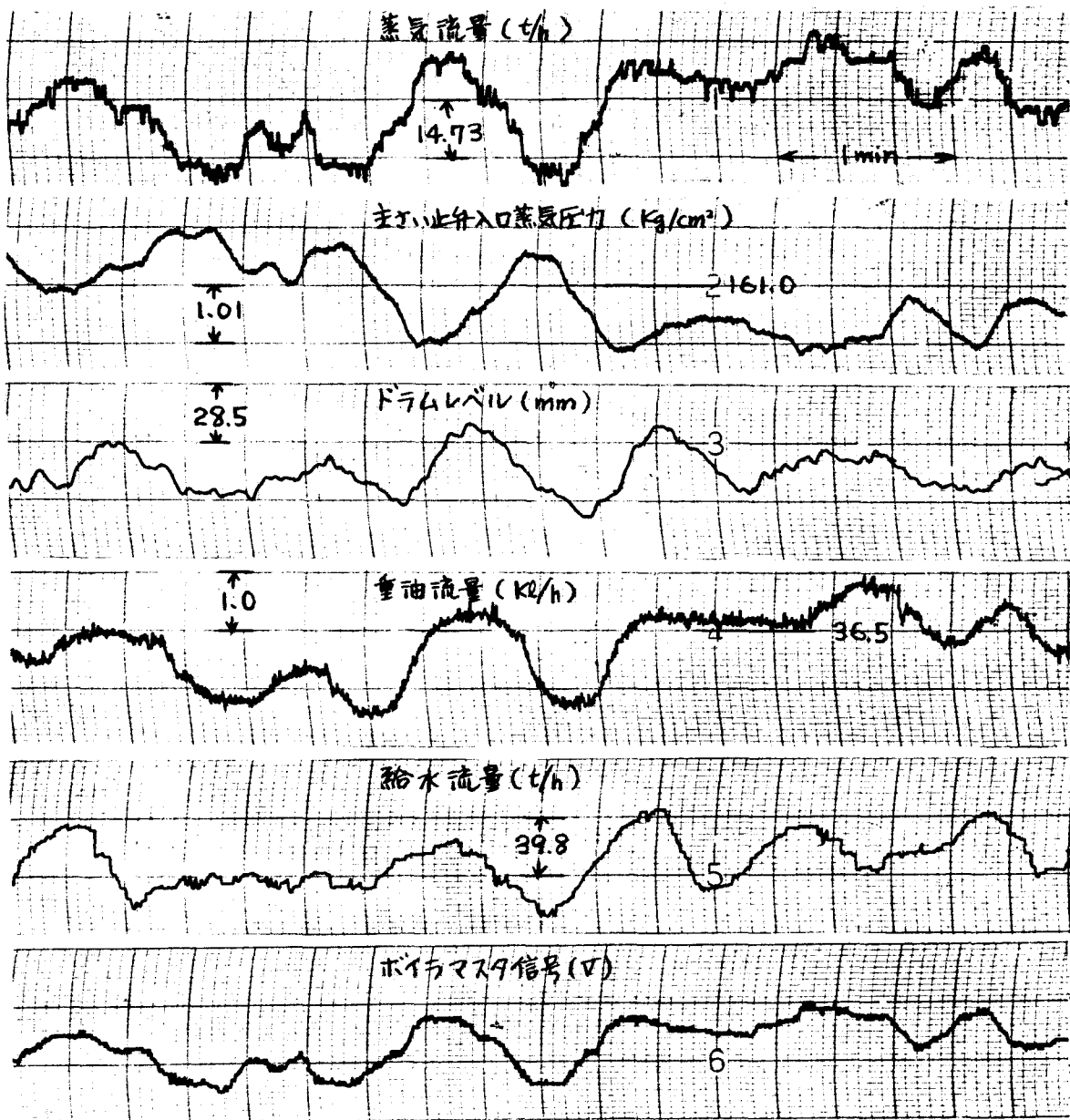
6.4.2 動特性の推定結果

ドラム水位変動の要因としては、ボイラ水の比重量変化すなわちボイラ内の圧力、温度などの変化によるもの、物質収支の不均衡によるドラム保有水量の変化などが考えられる。蒸気流量と給水量は、この2つの要因に影響を与える主要な変数である。これに反して、その他のボイラ変数、たとえば燃料供給量を変化した場合の水位上昇はドラム圧力増大による水位降下と打ち消し合い、その影響は蒸気流量と給水量のそれに比べて、かなり小さいと考えられる。そこで蒸気流量、給水量を入力と考え、その他の要因をすべて無視して雑音と考えるとドラムは第6.17図のようなブロック線図に表わすことができる。

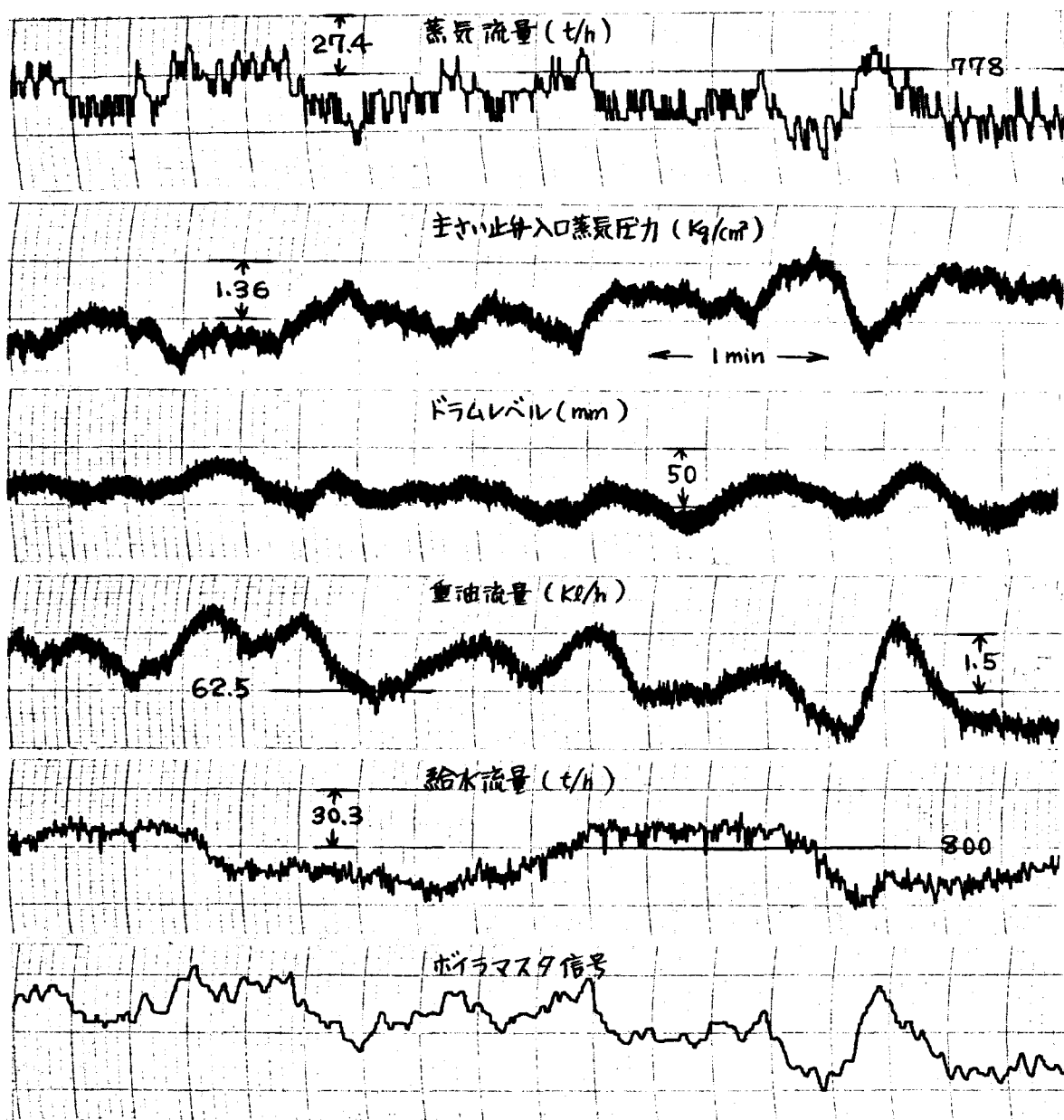
これら入力に対するドラム水位の応答を、正常な運転状態で得たデータから計算することはきわめて困難である。その一つの理由は、いずれかの入力を階級状に変えた場合ドラム水位は一定の傾斜で増加あるいは減少する性質（すなわち自己平衡性がない）をもっているということにあり、他の一つは第6.9図に示したように給水制御系に負荷変動を蒸気流量で検出し、D 動作的に給水流量を制御するループが追加されているため、2つの入力間すなわち蒸気流量と給水流量の間に著しい干渉があるということにある。しかし、自己平衡性のないシステムに対する動特性推定の手法を適用すると、5.5.4項の例題でも示したように、上記のような水位応答特性を容易に求めることができる。



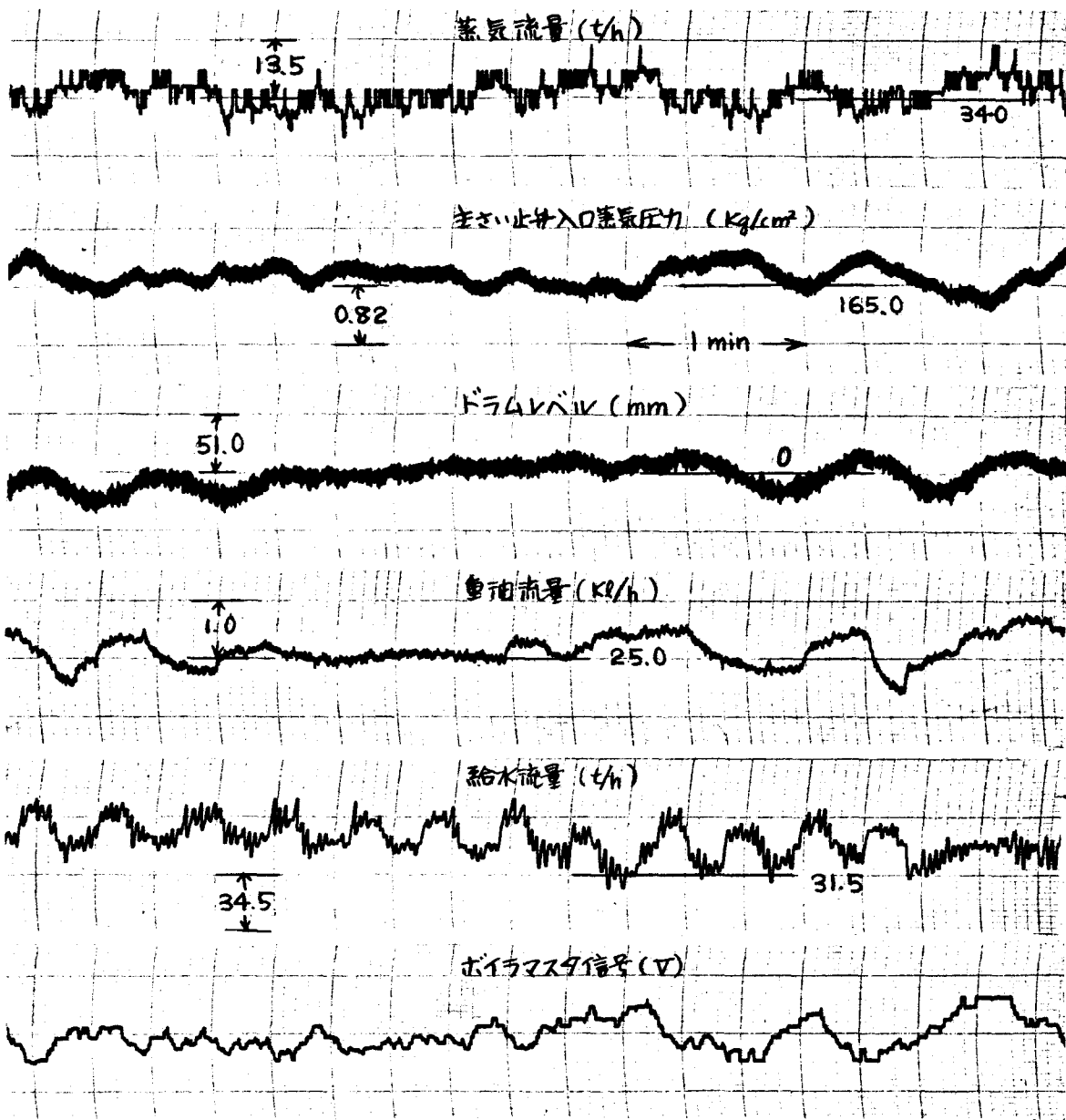
第 6.77 図 No.7 記録波形



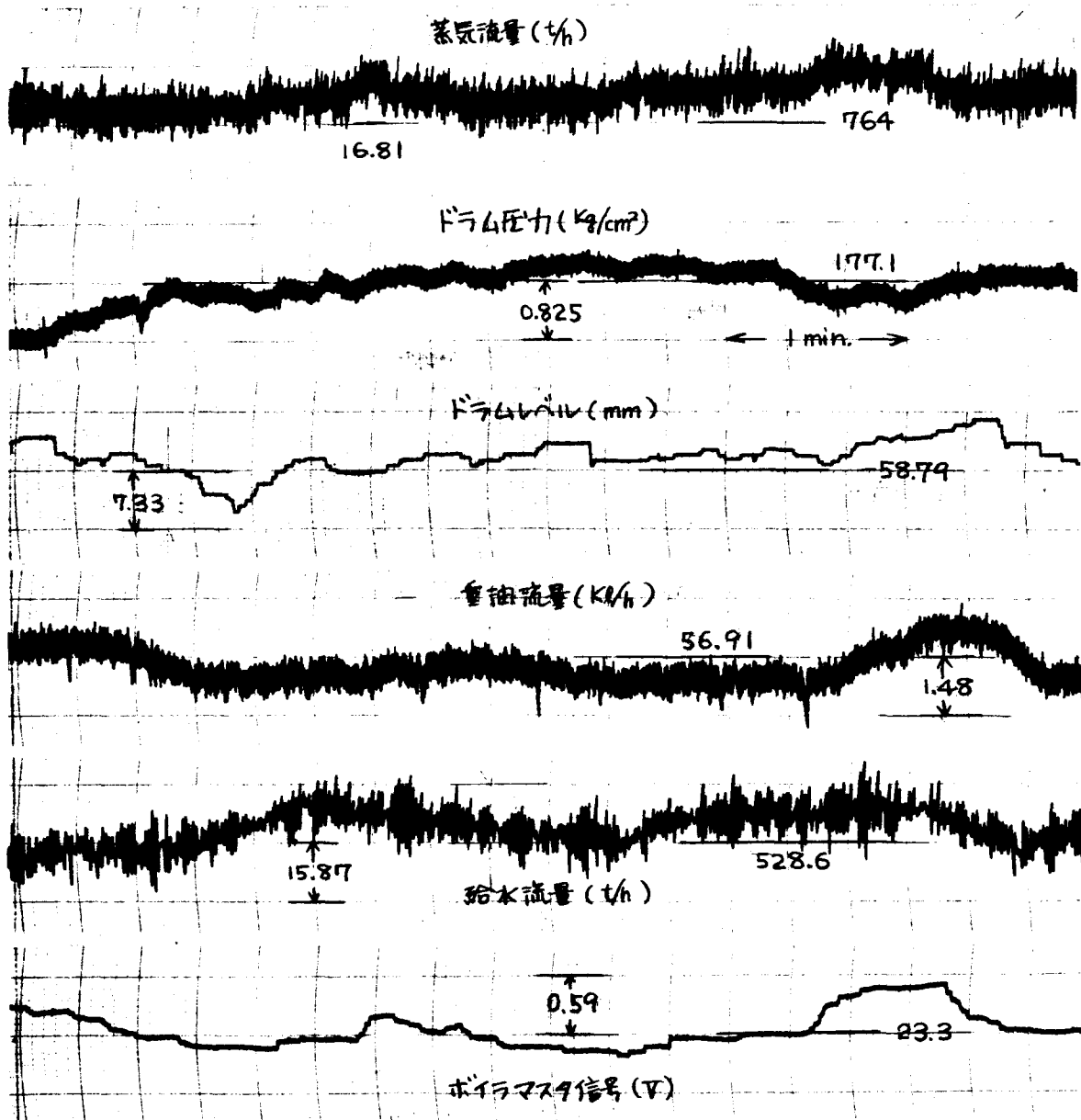
第 6.12 図 No. 2 記録波形



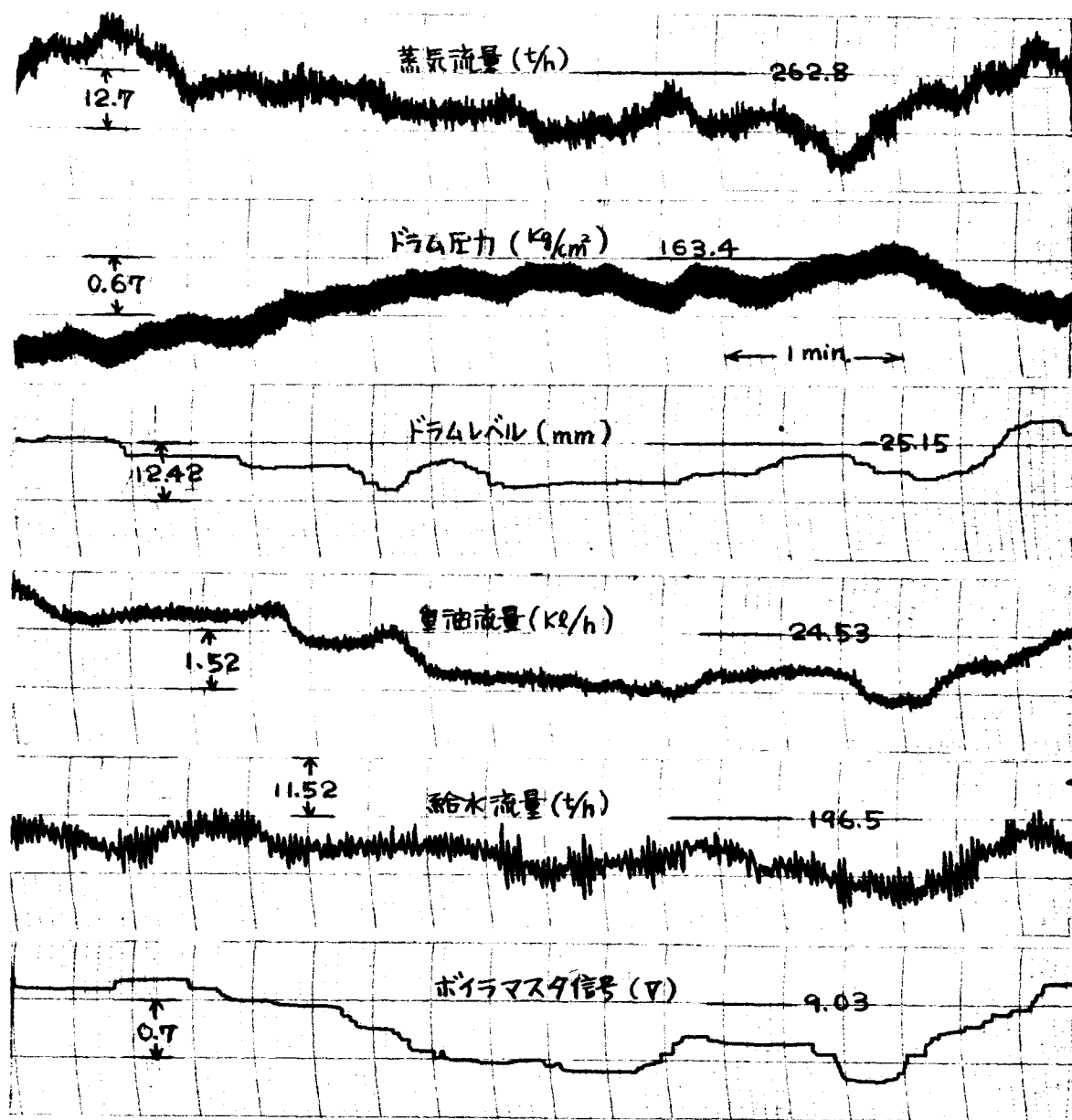
第6.13図 No.3 記録波形



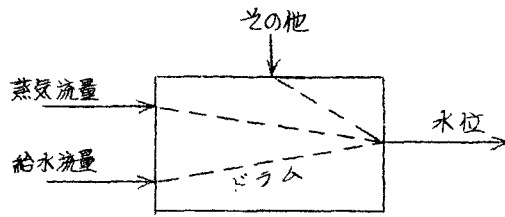
第6.14図 No.4 記録波形



第 6.15 図 No.5 記録波形

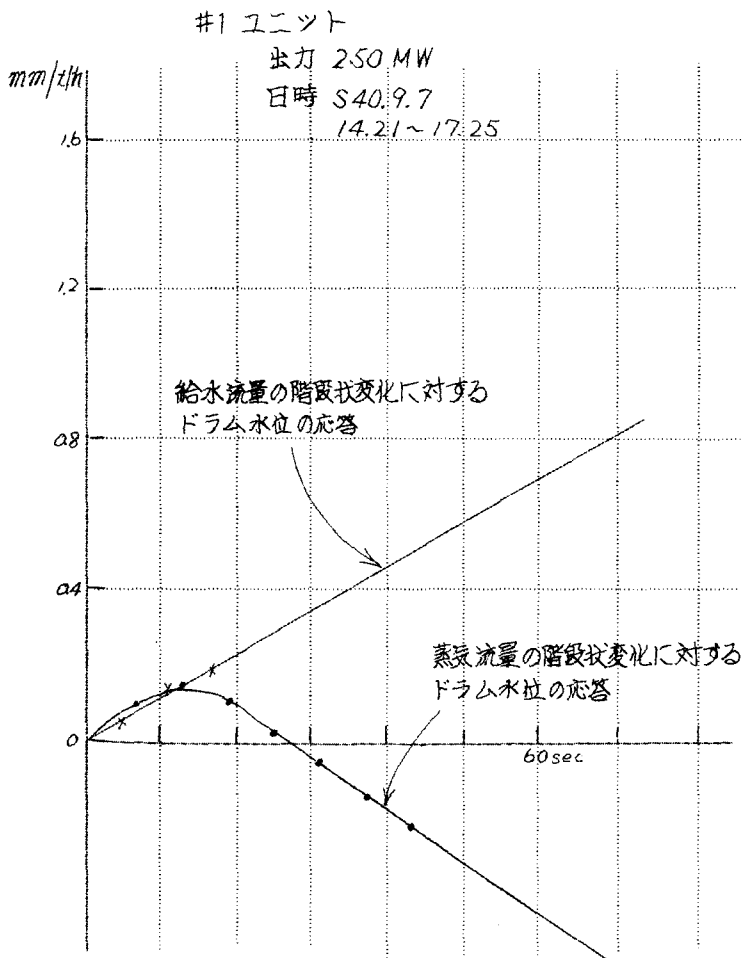


第 6.16 図 No.6 記録波形

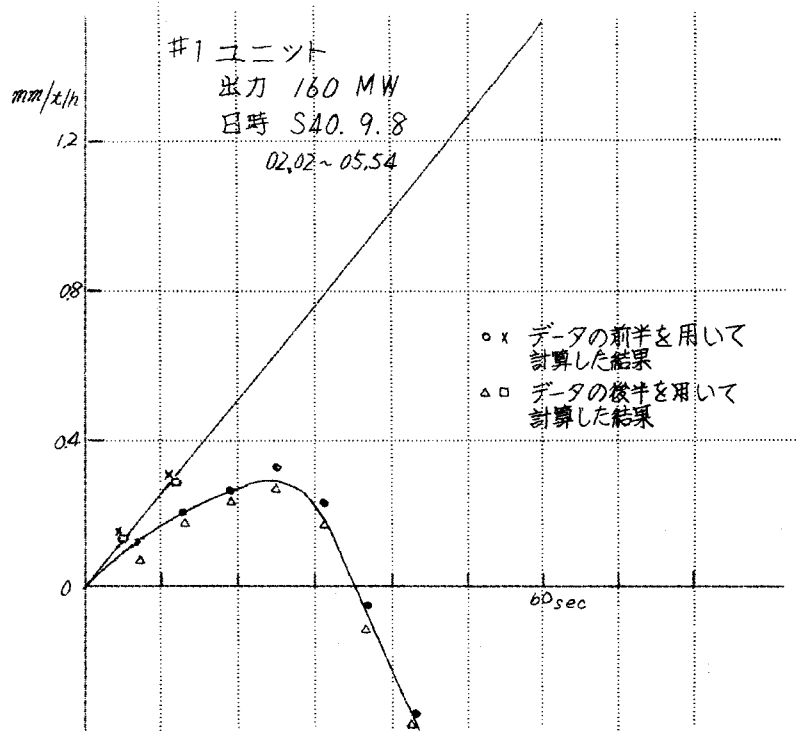


第6.17図 ボイラドラム

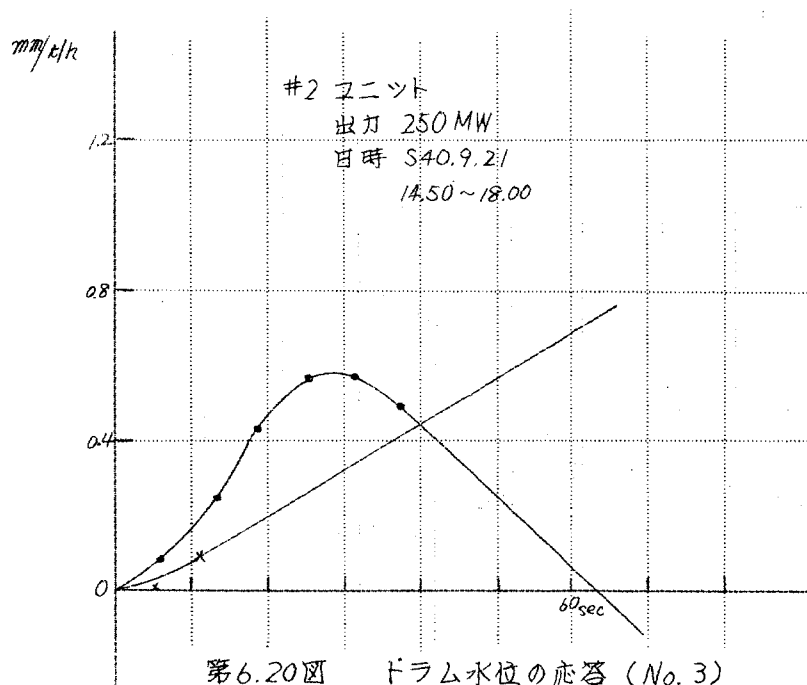
第6.11～16図 (No.7～6) のデータより蒸気流量および給水流量の階級状変化に対するドラム水位の応答を計算した結果が第6.18～23図である。



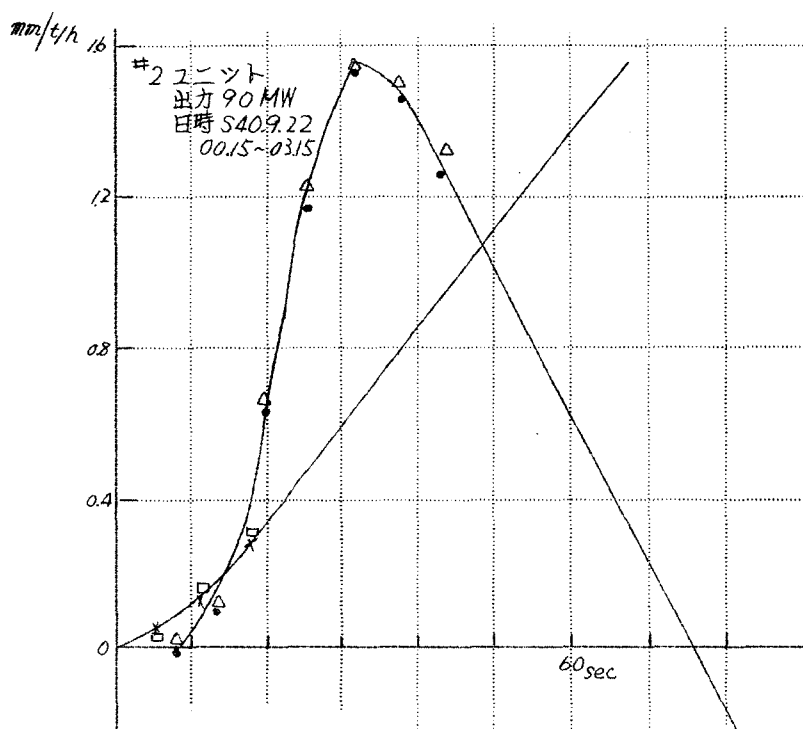
第6.18図 ドラム水位の応答 (No.1)



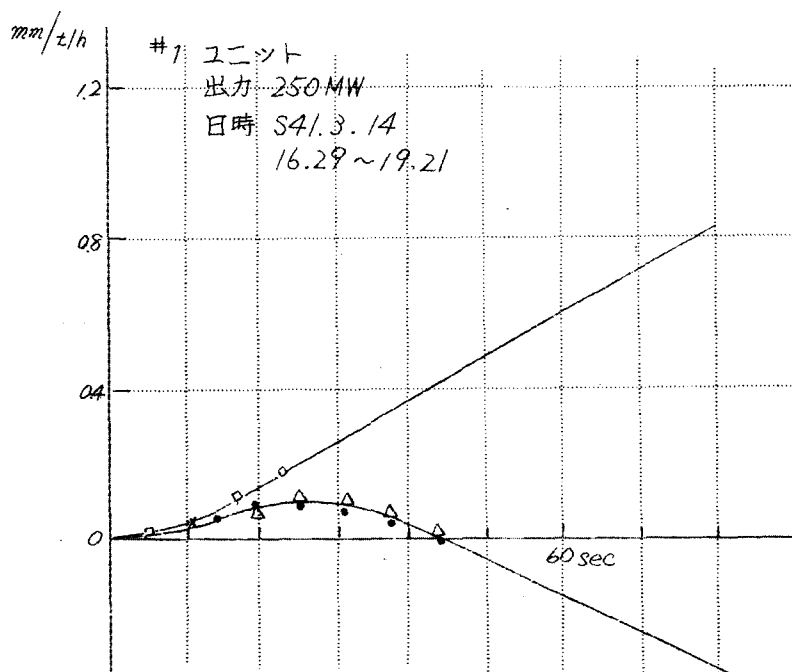
第 6.19 図 ドラム水位の応答 (No. 2)



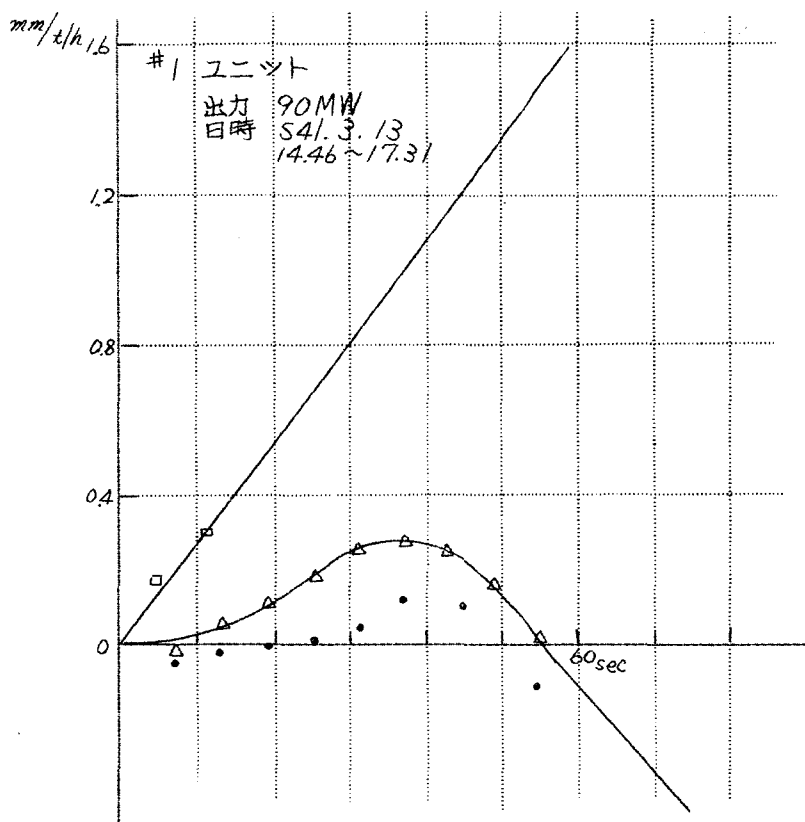
第 6.20 図 ドラム水位の応答 (No. 3)



第 6.21 図 ドラム水位の応答 (No. 4)



第 6.22 図 ドラム水位の応答 (No. 5)



第6.23図 ドラム水位の応答 (No. 6)

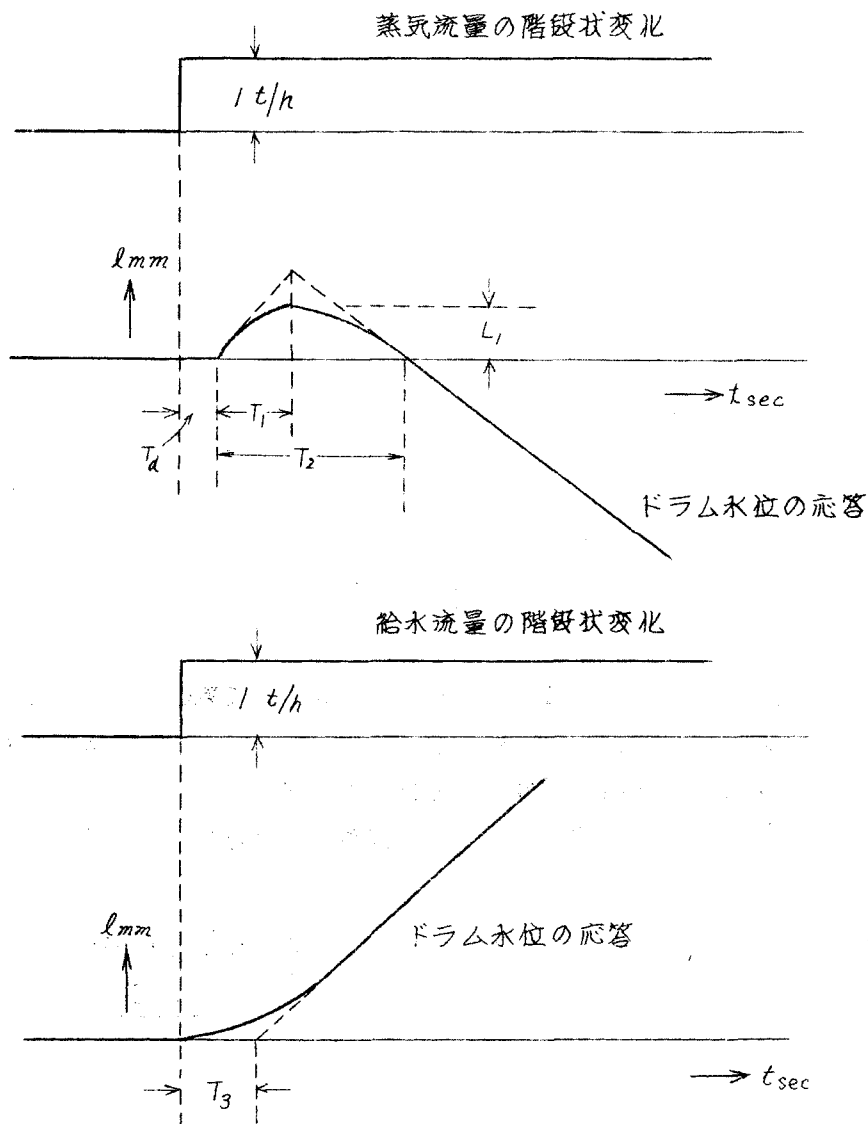
計算に用いられたデータはいずれも3時間連続して集録されているので、第6.19図および第6.21～23図にはデータの前半を用いて計算した結果（○×印）と後半を用いて計算した結果（△ロ印）をいっしょにして示してある。第6.18図および第6.20図は集録されているデータの適当な部分（顕著な変動のある部分）を選んで計算した結果である。

第6.6表 推定された応答より水位変化速度を求めた結果, 単位= $\text{mm/t/h} \cdot \text{min}$

番号	ユニット	出力	蒸気流量の階級状変化	給水流量の階級状変化
No. 1	# 1	250MW	0.78	0.68
2	1	160	2.18	1.51
3	2	250	0.76	0.75
4	2	90	1.83	1.49
5	1	250	0.48	0.67
6	1	90	1.06	1.62

第6.6表は第6.18～23図に示した応答波形よりドラム水位変化速度を求めた結果をまとめたものである。

第6.7表は第6.18～23図に示した応答波形について第6.24図に示すような特性量を考え、これらを求めた結果をまとめたものである。



第6.24図 ドラム水位応答についての特性量

第 6.7 表 推定された応答より特性量を求めた結果

番号	ユニット	出力	T_d	T_1	T_2	L_1
No. 1	# 1	250 MW	0 sec	16 sec	28 sec	0.14 mm
2	1	160	0	22	36	0.32
3	2	250	6	20	58	0.60
4	2	90	6	25	68	1.52
5	1	250	6	20	38	0.11
6	1	90	10	28	48	0.26

6.4.3 考 察

計算により求められたドラム水位応答(第 6.18~23 図)の形状は、いずれも蒸気流量の階段状変化に対しては逆応答のある積分特性、給水量の階段状変化に対しては単なる積分特性を示している。従来、動特性試験により得られた結果と傾向が一致している。第 6.19 図 および 第 6.21~23 図には前項で述べたように異なるデータより求められた 2 つの計算結果を同時に示してあるが両者はきわめてよく一致している。

応答波形よりドラム水位変化速度を求めた結果(第 6.6 表)についてみると定格出力 250 MW における水位変化速度は #1 ユニット、#2 ユニットとも $0.7 \sim 0.75 \text{ mm/t/h. min}$ 程度と推定される。低負荷時すなわち、出力 160 MW、90 MW における水位変化速度は、定格出力時の 2 倍強となっている。No. 5 および 6 のデータより求めた蒸気流量を階段状に変えたときの水位変化速度は他のそれに比べてかなり小さくなっているが、いずれも約 15 倍すれば、他の対応する値に近くなるので、蒸気流量の振巾のスケーリングに問題があると思われる。

なお、理論式

$$\frac{1}{T_d} = \frac{1}{A} \frac{U_o' U_o''}{U_o'' - U_o'}$$

ここで T_d : ドラム水位変化の時定数

A : ドラム水面面積

U_o' : 飽和水比体積

v_0'' : 飽和蒸気比体積

より $v_0' = 0.00182 \text{ (m}^3/\text{kg)}$ } ドラム圧力 180 kg/cm^2 のとき
 $v_0'' = 0.00780 \text{ (m}^3/\text{kg)}$ }

$$A = 1.524 \text{ m (ドラム内径)} \times 20.940 \text{ m (ドラム全長)} \times \frac{2}{3} = 21.3 \text{ (m}^2\text{)}$$

として計算すると、

$$\frac{1}{T_d} = 0.113 \times 10^{-3} \text{ (m/kg)}$$
$$= 1.88 \text{ mm/l/h} \cdot \text{min}$$

となる。

応答波形より、数種の実験値を求めた結果（第6.7表）についてみると、No.1 および No.2 では $T_d = 0$ 、No.3～6では T_d は6秒程度となっている。No.1～2ではレベルは1個所で検出しているのに対し、他は2個所で検出し平均をとっているという点で条件が異なっているが、これが上記のような相違を生ずる原因となるかどうかは不明である。

T_1 は20秒前後と考えてよい、 T_2 は逆応答のピーク (ℓ_1) が異なっているため相当のバラツキがある。

#2 ユニットにおける ℓ_1 の大きさは #1 ユニットのそれの5～6倍となっているが、その理由は不明である。#1 ユニットについての結果すなわち No.1 と No.5、No.2 と No.6 については、それほど大きな差異は認められないが、これは当然かも知れない。定格出力時と低出力時すなわち No.1 と No.2、No.3 と No.4、No.5 と No.6 を比べると、いずれも低出力時の逆応答の大きさが、定格出力時の2.5倍程度となっている。

§6.5 結 言

実際に操業状態にあるプロセス（火力発電所において運転中のボイラ）の動特性推定を行なった結果

- 1) ボイラ蒸気圧力制御系の動特性推定結果は、別途の動特性試験を行なって求めた定数を用いて模擬した結果とほぼ一致する。
- 2) ボイラ・ドラム水位制御系において、ドラムを自己平衡性のないプロセスとして取り扱い、その動特性を推定した結果は、統系の動特性試験による結

果あるいは理論的に求められた動特性に類似している。また推定された伝真荷時におけるドラム時定数は、ドラムの幾何学的構造から考えて妥当なものである。などの実が認められ、筆者の提案する動特性推定法が実際のプロセスに十分適用可能であるとの見通しを得た。

その他、本実験で得られた動特性推定に際しての指針を列举すると

- 3) プロセス変数の測定に際し、あらかじめ変動分だけを取り出して記録するという方式は、 SN 比の改善という実で著しい効果がある。
- 4) プロセス変数をデータレコーダによつて磁気テープに記録しておくことが望ましい。こうすると測定後、任意の時に、適当に時間軸を変換して再生できるので非常に融通性に富み、サンプル周期の選定あるいはデータの観察などを自由に行なえる。これはまた、データ処理を能率化するのにも役立つ。
- 5) プロセス変数の測定は、できる限り長時間連続して行なうことが望ましい。動特性の推定に用いるデータは、その中から適当な部分を選択してとる。一般的にいえば、できるだけ定常的な操業状態（逆にいえば極端に大きな変動のない状態）のデータを選択するのが対象の非線形性の影響、他の制御系からの干渉などを避ける意味で望ましい。
- 6) 動特性の計算に関しては、まず動特性表現式の個数 N_p を仮定し、観測式の個数 N_d を計算機の記憶容量の範囲でできるだけ大きくとつて計算を行ない、その結果を見て N_p を増減し、また計算をくり返すという試行錯誤^V的方法をとるのがよい。
などである。

第6章の参考文献

- (1) 鈴木, 栃本, 峠, 藤井, 西村, 内田, 田代 ; 制御工学, 9, 529 (昭40)
- (2) Y. Suzuki, K. Fujii & M. Nishimura ; Tech Rep of Osaka Univ
16, 357 (1965)
- (3) 西村, 藤井, 鈴木, 古谷, 乾, 北方, 内田 ; 計測自動制御学会学術講演
会 232 (昭41)
- (4) 竹内 ; 電力中研学位論文集 24 (昭38)

第 7 章 結 論

正常運転状態においてシステムの動特性を推定するための手法として最小2乗法について基礎的研究を行ない、これを実際のプロセスに適用して実用性を確かめた。本章では、これらの理論および実験的考察から得られた結果を総括的に整理することにする。

最小2乗法は、対象のシステムの出力について想定した観測時間内の2乗平均誤差が最小となるように動特性を推定する方法であり、以下に列举するような利点と特徴をもっている。

- 1) システムの入出力数、自己平衡性の有無、入力の統計的性質に関係なく、任意の線形システムに適用可能である。ただし自己平衡性のない場合は、出力の代わりにその階差関数をとる。(第2章および第5章の実験結果)
- 2) 動特性の推定量は積分方程式で与えられるが、その厳密な解法が見いだされていないので、これを代数方程式で近似して解くことが必要である。このためシステムの動特性は、自己平衡性のある場合にはインディシャル応答の一定周期ごとの増分、自己平衡性のない場合にはインパルス応答の同様な増分を用いて近似的に表現される。これらは(各応答の増分の個数すなわち動特性表現式の個数) × (入力数) × (出力数) 個の未知数となるので、その求解には汎用のデジタル計算機が利用される。(第3章およびその付録)
- 3) システムの入力と雑音が独立であるならば、推定結果の集合平均は、観測時間の長さに関係なく真値に一致する。(§2.3 および §3.4)
- 4) 推定結果の分散は入力対雑音比に依存する。(§3.4 および §5.3.1)
- 5) 以上のより雑音がほとんどなければ、システムの入力を利用してしかもきわめて短時間に動特性を推定することが可能である。(実験結果 §5.2.4 および §5.4.2)
- 6) 計算の手順したがって計算時間は相関法のそれとほとんど変わらない。(4.5) 入力が定常不規則性をもつ場合、観測時間を十分長くとれば、相関法に一致する。(4.3)

逆に、相関法を、入力の定常不規則性が満たされていない場合、あるいは観測時間が短い場合に適用するのは妥当でない。(実験結果 4.5)

- 7) 雑音が正規性白色雑音の場合、多重回帰理論における最尤推定量と一致する。

(§3.4)

- 8) 2) に述べたような計算法をとる関係で、入出力データのサンプル周期の選定はとくに重要である。サンプル周期は試作した装置(第4章の付録)で測定されるサンプリング誤差の評価関数が入力について5%、出力について1%程度になるように選定する。(§5.2)

この方法を実際に操業状態にあるボイラに適用した場合

- 9) ボイラ蒸気圧力制御系の動特性推定結果は、別途の動特性試験を行なって求めた定数を用いて模擬した結果とほぼ一致する。
- 10) ボイラドラム水位制御系においてドラムを自己平衡性のないプロセスとして取り扱い、その動特性を推定した結果は、従来の動特性試験による結果あるいは理論的に求められた動特性に類似している。また、推定された既負荷時におけるドラム時定数は、ドラムの幾何学的構造から考えて妥当なものである。

などの実が認められ、実際のプロセスに十分適用可能であるとの見通しを得た。

なお、本論文では、正常な運転状態にあるシステムは、入出力の変動は比較的小さいため、多くの場合線形として取り扱うことができるという立場から、非線形性のあるシステムについては言及していない。このようなシステムの動特性を推定する方法を見いだすことは、今後の重要な課題である。

謝 辞

本研究の実施にあたり親しく御指導、御鞭達を賜わった大阪大学工学部西村正太郎教授、藤井克彦教授に心より感謝の意を表わすものであります。また、論文作成にあたって御懇篤なる御討論と御指導をいただくとともに種々御高配を賜わった大阪大学基礎工学部桜井良文教授に深く謝意を表します。また本論文につき御懇篤なる御検討をいただいた大阪大学工学部山村豊教授、犬石嘉雄教授、山中十代衛教授に厚くお礼申し上げます。

また本研究の端緒を与え、絶えずその進展を御鞭達下さった大阪大学基礎工学部山口次郎教授、電気試験所野田克彦部長および本研究の実施にあたり御援助と御協力を得た関西電力火力部内田義久氏に厚くお礼申し上げます。

本研究を行なうにあたって種々の御援助を得た西村研究室、藤井研究室の諸氏に深く謝意を表します。とくに本研究に直接御協力を得た大阪大学大学院梅本隆司、峠達男、古谷忠義の諸君および卒業研究に際してこの研究に協力された卒業生の諸君に心より感謝いたします。

付 録

第 2 章 の 付 録

(2.13) 式の証明

(2.12) 式において $t_0 = 0$ とおいても一般性を失わない。

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \underline{e}(t) \underline{e}(t) dt \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[\underline{y}(t) - \widetilde{\underline{y}}(t) \right] \left[\underline{y}(t) - \widetilde{\underline{y}}(t) \right] dt \\
 &= \sum_{i=1}^{N_y} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left\{ y_i(t) - \sum_{m=1}^{N_x} \int_0^{T_s} \widetilde{g}_{im}(\tau_1) x_m(t-\tau_1) d\tau_1 \right. \\
 &\quad \times \left. \left\{ y_i(t) - \sum_{n=1}^{N_x} \int_0^{T_s} \widetilde{g}_{in}(\tau_2) x_n(t-\tau_2) d\tau_2 \right\} \right\} dt \\
 &= \sum_{i=1}^{N_y} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left\{ y_i^2(t) - 2 \sum_{m=1}^{N_x} y_i(t) \int_0^{T_s} \widetilde{g}_{im}(\tau_1) x_m(t-\tau_1) d\tau_1 \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m,n=1}^{N_x} \int_0^{T_s} \widetilde{g}_{im}(\tau_1) x_m(t-\tau_1) d\tau_1 \int_0^{T_s} \widetilde{g}_{in}(\tau_2) x_n(t-\tau_2) d\tau_2 \right\} dt \\
 &= \sum_{i=1}^{N_y} \left\{ \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} y_i^2(t) dt - 2 \sum_{m=1}^{N_x} \int_0^{T_s} \widetilde{g}_{im}(\tau_1) d\tau_1 \left[\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} y_i(t) x_m(t-\tau_1) dt \right] \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m,n=1}^{N_x} \int_0^{T_s} \widetilde{g}_{im}(\tau_1) d\tau_1 \int_0^{T_s} \widetilde{g}_{in}(\tau_2) d\tau_2 \left[\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x_m(t-\tau_1) x_n(t-\tau_2) dt \right] \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^{N_y} \left\{ C_{ii}(0) - 2 \sum_{m=1}^{N_x} \int_0^{T_s} \widetilde{g}_{im}(\tau_1) C_{im}(\tau_1) d\tau_1 \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m,n=1}^{N_x} \int_0^{T_s} \widetilde{g}_{im}(\tau_1) d\tau_1 \int_0^{T_s} \widetilde{g}_{in}(\tau_2) a_{mn}(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 \right\}
 \end{aligned}$$

(村 2.1)

ここで

$$C_{ii}(0) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} y_i^2(t) dt$$

$$C_{im}(\tau_1) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} y_i(t) x_m(t-\tau_1) dt$$

$$a_{mn}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x_m(t - \tau_1) x_n(t - \tau_2) dt$$

J を最小にする $\widehat{G}(\tau)$ を $\underline{G}(\tau)$ とすれば、一般に

$$\widetilde{G}(\tau) = \underline{G}(\tau) + \nu F(\tau)$$

ここで $\nu F(\tau)$ は $\underline{G}(\tau)$ の変分を表わす

これを (付 2.1) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} J(\underline{G} + \nu F) &= \sum_{i=1}^{N_y} \left\{ C_{ii}(0) - 2 \sum_{m=1}^{N_x} \int_0^{T_s} [\widehat{g}_{im}(\tau_1) + \nu f_{im}(\tau_1)] C_{im}(\tau_1) d\tau_1 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m,n=1}^{N_x} \int_0^{T_s} [\widehat{g}_{im}(\tau_1) + \nu f_{im}(\tau_1)] d\tau_1 \int_0^{T_s} [\widehat{g}_{in}(\tau_2) + \nu f_{in}(\tau_2)] a_{mn}(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 \right\} \\ &= J(\underline{G}) - 2\nu \sum_{i=1}^{N_y} \sum_{m=1}^{N_x} \int_0^{T_s} f_{im}(\tau_1) C_{im}(\tau_1) d\tau_1 \\ &\quad + 2\nu \sum_{i=1}^{N_y} \sum_{m,n=1}^{N_x} \int_0^{T_s} f_{im}(\tau_1) d\tau_1 \int_0^{T_s} \widehat{g}_{in}(\tau_2) a_{mn}(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 \\ &\quad + \nu^2 \sum_{i=1}^{N_y} \sum_{m,n=1}^{N_x} \int_0^{T_s} f_{im}(\tau_1) d\tau_1 \int_0^{T_s} f_{in}(\tau_2) a_{mn}(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{i=1}^{N_y} \sum_{m=1}^{N_x} \int_0^{T_s} f_{im}(\tau_1) d\tau_1 \left\{ C_{im}(\tau_1) - \sum_{n=1}^{N_x} \int_0^{T_s} \widehat{g}_{in}(\tau_2) a_{mn}(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 \right\} \\ J_2 &= \sum_{i=1}^{N_y} \sum_{m,n=1}^{N_x} \int_0^{T_s} f_{im}(\tau_1) d\tau_1 \int_0^{T_s} f_{in}(\tau_2) a_{mn}(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 \end{aligned}$$

とおくと、

$$J(\underline{G} + \nu F) = J(\underline{G}) - 2\nu J_1 + \nu^2 J_2$$

任意の F に対し J が最小になるための必要条件は

$$\left[\frac{\partial}{\partial \nu} J(\underline{G} + \nu F) \right]_{\nu=0} = 0$$

すなわち

$$J_1 = 0$$

これより

$$C_{im}(\tau_1) - \sum_{n=1}^{N_x} \int_0^{T_s} \hat{g}_{in}(\tau_2) a_{mn}(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 = 0 \quad \begin{matrix} 0 \leq \tau_1, \tau_2 < T_s \\ i = 1, 2, \dots, N_y \text{ (付2.2)} \\ j = 1, 2, \dots, N_x \end{matrix}$$

を得る。これをまとめてマトリクスの形に書けば (2.13) 式が得られる。

このとき

$$J(\hat{Q} + \nu F) = J(\hat{Q}) + \nu^2 J_2$$

しかるに $J_2 \geq 0$ であるから

$$J(\hat{Q} + \nu F) = J(\hat{Q}) + \nu^2 J_2 \geq J(\hat{Q})$$

すなわち (付2.2) 式は十分条件でもある。

第 3 章 の 付 録

プログラム (FORTRAN IV⁽¹⁾による)

```

C      SYSTEM DYNAMICS ESTIMATION USING LEAST SQUARES METHOD

      DIMENSION X(5,1000),Y(5,1000),AVEX(5),AVEY(5),VARX(5),VARY(5)
      INP(5,5,10),NSUM(10),NC(10),K1(10),KDIFF1(10),K2(10),KDIFF2(10)
      2SOL(100),RESP(100)
      COMMON N,A(100,100),U(1000),V(1000),M,EM,L0C,NP1,NP2,IIQ,JJO
      1B(100,1),NPK,KKO
C..... READ OBJECT AND PRESET PARAMETERS ....
      KR=1
      1 READ(5,1000)
1000 FORMAT(72H
      1
      READ(5,1001) NX,NY,NDMAX
1001 FORMAT(3I5)
      READ(5,1002) NR,(((NP(KX,KY,KR),KX=1,NX),KY=1,NY),NSUM(KR),NC(KR),
      1K1(KR),KDIFF1(KR),K2(KR),KDIFF2(KR),KR=1,NR)
1002 FORMAT(14I5)
      IF(KR.GT.1) GO TO 2
      WRITE(6,1003)
1003 FORMAT(1H1)
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,1004) NX,NY,NDMAX
1004 FORMAT(1H0,15X15HNO OF INPUTS =I5/1H , 15X15HNO OF OUTPUTS =I5/1H
      1,15X15HNO OF DATA =I5)
C..... RUN.....
      2 NC=NC(KR)
      M=NSUM(KR)
      EM=M
      K1=K1(KR)
      KDIFF1=KDIFF1(KR)
      K2=K2(KR)
      KDIFF2=KDIFF2(KR)
      WRITE(6,1005) KR,NC,M
1005 FORMAT(1H0,2X7HRUN NO.12/1H ,15X22HNO OF OBSERVATION =I5/1H ,15
      1X22HOBSERVED DATA LENGTH =5I)
C... CALCULATE LOCATION (DATA ORIGIN) AND CHECK ....
      L0C=0
      DO 100 KY=1,NY
      DO 100 KX=1,NX
      NPK=NP(KX,KY,KR)
100 IF(NPK.GT.L0C) L0C=NPK

```

```

ND=L0C+M+KDIFF1+KDIFF2
IF(ND.GT.1000) G0 T0 22
ND=ND+11
IF(ND*NC.GT.NDMAX) G0 T0 23
DO 3 KC=1,NC
ND=L0C+M+KDIFF1+KDIFF2
EN=ND
WRITE(6,1006) KC
1006 F0RMAT(1H0,5X16H0BSERVATION N0.12)
C.... READ DATA AND CALCULATE AVERAGE AND VARIANCE ...
READ(5,1007)((X(KX,KD),KX=1,NX),(Y(KY,KD),KY=1,NY),KD=1,ND)
1007 F0RMAT(12F6.2)
WRITE(6,1008)
1008 F0RMAT(1H0,10X34HDATA          AVERAGE          VARIANCE)
DO 101 KX=1,NX
AVEX(KX)=0.0
DO 102 KD=1,ND
102 AVEX(KX)=AVEX(KX)+X(KX,KD)
AVEX(KX)=AVEX(KX)/EN
VARX(KX)=0.0
DO 103 KD=1,ND
103 VARX(KX)=VAR(KX)+(X(KX,KD)-AVEX(KX))**2
VARX(KX)=VARX(KX)/EN
101 WRITE(6,1009) KX,AVEX(KX),VARX(KX)
1009 F0RMAT(1Hb,10X2HX(11,1H),5XF9.4,7XF9.4)
DO 104 KY=1,NY
AVEY(KY)=0.0
DO 105 KD=1,ND
105 AVEY(KY)=AVEY(KY)+Y(KY,KD)
AVEY(KY)=AVEY(KY)/EN
VARY(KY)=0.0
DO 106 KD=1,ND
106 VARY(KY)=VARY(KY)+(Y(KY,KD)-AVEY(KY))**2
VARY(KY)=VARY(KY)/EN
104 WRITE(6,1010) KY,AVEY(KY),VARY(KY)
1010 F0RMAT(1Hb,10X2HY(11,1H),5XF9.4,7XF9.4)
G0 T0 (5,4) K1
C.... HIGH PASS FILTER ....
4 WRITE(6,1011) KDIFF1
1011 F0RMAT(1H0,15X26HHIGH PASS FILTER REQUESTED/1H ,17X40H....DATA DIF
1FERENTIATED WITH DIFFERENCE=12//1H ,20X19HDATA          VARIANCE)
ND=ND-KDIFF1
EN=ND
DO 107 KX=1,NX
DO 108 KD=1,ND KDA=KD+KDIFF1

```



```

108 X(KX,KD)=X(KX,KDA)-X(KX,KD)
   VARX(KX)=0.0
   DO 109 KD=1,ND
109 VARX(KX)=VARX(KX)+X(KX,KD)** 2
   VARX(KX)=VARX(KX)/EN
107 WRITE(6,1012) KX,VARX(KX)
1012 FORMAT(1Hb,20X2HX(I1,1H),6XF9.4)
   DO 110 KY=1,NY
   DO 111 KD=1,ND KDA=KD+KDIFF1
111 Y(KY,KD)=Y(KY,KDA)-Y(KY,KD)
   VARY(KY)=0.0
   DO 112 KD=1,ND
112 VARY(KY)=VARY(KY)+Y(KY,KD)** 2
   VARY(KY)=VARY(KY)/EN
110 WRITE(6,1013) KY,VARY(KY)
1013 FORMAT(1Hb,20X2HY(I1,1H),6XF9.4)
   GO TO 50
C..... NORMALIZE .....
   5 DO 113 KX=1,NX
   DO 113 KD=1,ND
113 X(KX,KD)=X(KX,KD)-AVEX(KX)
   DO 114 KY=1,NY
   DO 114 KD=1,ND
114 Y(KY,KD)=Y(KY,KD)-AVEY(KY)
   50 GO TO (7,6) K2
C..... TAKE OUTPUT DIFFERENCE .....
   6 WRITE(6,1014) KDIFF2
1014 FORMAT(1H0,15X37HUNREGULATED CHARACTERISTICS PERCEIVED/1H,17X41H.
   1...OUTPUTS DIFFERENTIATED WITH DIFFERENCE=I2//1H,20X19HOUTPUTS
   2 VARIANCE)
   ND=ND-KDIFF2
   EN=ND
   DO 115 KY=1,NY
   DO 116 KD=1,ND KDA=KD+KDIFF2
116 Y(KY,KD)=Y(KY,KDA)-Y(KY,KD)
   VARY(KY)=0.0
   DO 117 KD=1,ND
117 VARY(KY)=VARY(KY)+Y(KY,KD)** 2
   VARY(KY)=VARY(KY)/EN
   WRITE(6,1013) KY,VARY(KY)
C..... DYNAMICS ESTIMATION .....
   7 WRITE(6,1015)
1015 FORMAT(1H0,15X40HESTIMATED RESULTS FROM THIS OBSERVATION)
   DO 3 LY=1,NY
   NDIM=0

```

```

      DO 8 KX=1,NX
      8 NDIM=NDIM+NP(KX,LY,KR)
      .... CHECK ....
      IF(NDIM.GT.100) GO TO 24
      ..... MATRIX A ..... I
      LX=1
      LLO=0
      9 IX=1
      IIO=0
      JX=LX
      JJO=LLO
      10 DO 118 KD=1,ND
      U(KD)=X(IX,KD)
      118 V(KD)=X(JX,KD)
      IF(LX.NE.1) GO TO 11
      N=1
      GO TO 12
      11 N=2
      12 NP1=NP(IX,LY,KR)
      NP2=NP(JX,LY,KR)
      CALL MATRX1
      IF(IX.EQ.NX) GO TO 13
      IX=IX+1
      IIO=IIO+NP1
      JX=JX+1
      JJO=JJO+NP2
      GO TO 10
      13 IF(LX.EQ.NX) GO TO 14
      LLO=LLO+NP(LX,LY,KR)
      LX=LX+1
      GO TO 9
      ..... MATRIX B .....
      14 KX=1
      KKO=0
      15 DO 119 KD=1,ND
      U(KD)=Y(LY,KD)
      119 V(KD)=X(KX,KD)
      NPK=NP(KX,LY,KR)
      CALL MATRX2
      IF(KX.EQ.NX) GO TO 16
      KX=KX+1
      KKO=KKO+NPK
      GO TO 15
      ..... COMPUTE NORMAL EQUATION ...
      16 CALL MATINB ( A,NDIM,100,B,-1,DET)

```

C.... PRINTS

```
KX=1
KKO=0
17 NPK=NP(KX,LY,KR)
SUMSOL=0.0
DO 120 LP=1,NPK
JJ=KKO+LP
SOL(LP)=B(JJ,1)
SUMSOL=SUMSOL+SOL(LP)
120 RESP(LP)=SUMSOL
WRITE(6,1016)KX,LY
1016 FORMAT(1H1,5X2HX(11,7H) VS Y(11,1H)/1H ,10X4OHNO LEAST-SQUARE
1S ESTIMATES)
GO TO (19,18) K2
18 WRITE(6,1017)
1017 FORMAT(1H ,5X16HIMPULSE RESPONSE)
GO TO 20
19 WRITE(6,1018)
1018 FORMAT(1H ,5X13HSTEP RESPONSE)
20 WRITE(6,1019)(LP,SOL(LP),RESP(LP),LP=1,NPK)
1019 FORMAT(1Hb,10X12,14XF9.4,14XF9.4)
IF(KX.EQ.NX) GO TO 3
KX=KX+1
KKO=KKO+NPK
GO TO 17
3 CONTINUE
C.... REWIND TAPE AND GO TO SUCCEEDING RUN.....
IF(KR.EQ.NR) GO TO 21
KR=KR+1
REWIND 5
GO TO 1
21 STOP
22 WRITE(6,1020)
1020 FORMAT(1H0,25HOBERVED DATA LENGTH OVER)
GO TO 21
23 WRITE(6,1021)
1021 FORMAT(1H0,21HN0 OF DATA NOT ENOUGH)
GO TO 21
24 WRITE(6,1022)
1022 FORMAT(1H0,24HPARAMETER DIMENSION OVER)
GO TO 21
END
```

SUBROUTINE MATRX1

COMMON N,A(100,100),U(1000),V(1000),M,EM,LUC,NP1,NP2,IIO,JJO

1B(100,1),NPK,KKO

```
      IF(NP1-NP2) 301, 302, 303
303  ASSIGN 308 TO KEY1
      ASSIGN 322 TO KEY2
      GO TO 304
302  ASSIGN 312 TO KEY1
      ASSIGN 322 TO KEY2
      GO TO 304
301  ASSIGN 312 TO KEY1
      ASSIGN 316 TO KEY2
304  LL=1
305  II=1
      LI=L0C-1
      L2=L0C-LL
      SUM=0.0
      DO 306 K=1,M
      L1T=L1+K
      L2T=L2+K
306  SUM=SUM+U(L1T)*V(L2T)
      JJ=LL
307  I=II+110
      J=JJ+JJ0
      A(I,J)=SUM/EM
      A(J,I)=A(I,J)
      GO TO KFY1,(308,312)
308  IF(II.EQ.NP2) GO TO 309
313  L1T=L1+M
      L2T=L2+M
      SUM=SUM+U(L1)*V(L1)-U(L1T)*V(L2T)
      II=II+1
      JJ=JJ+1
      L1=L1-1
      L2=L2-1
      GO TO 307
309  IF(LL.EQ.NP1-NP2) GO TO 310
311  LL=LL+1
      GO TO 305
310  ASSIGN 312 TO KEY1
      GO TO 311
312  IF(JJ.NE.NP1) GO TO 313
      IF(LL.NE.NP1) GO TO 311
      GO TO (324,314),N
314  LL=2
320  JJ=1
```

```

L1=L $\bar{O}C$ -LL
L2=L $\bar{O}C$ -1
SUM=0.0
D $\bar{O}$  315 K=1,M
L1T=L1+K
L2T=L2+K
315 SUM=SUM+U(L1T)*V(L2T)
II=LL
318 I=II+II $\bar{O}$ 
J=JJ+JJ $\bar{O}$ 
A(I,J)=SUM/EM
A(J,I)=A(I,J)
G $\bar{O}$  T $\bar{O}$  KEY2,(316,322)
316 IF(JJ.EQ.NP1) G $\bar{O}$  T $\bar{O}$  317
323 L1T=L1+M
L2T=L2+M
SUM=SUM+U(L1)*V(L2)-U(L1T)*V(L2T)
II=II+1
JJ=JJ+1
L1=L1-1
L2=L2-1
G $\bar{O}$  T $\bar{O}$  318
317 IF(LL.EQ.NP2-NP1) G $\bar{O}$  T $\bar{O}$  319
321 LL=LL+1
G $\bar{O}$  T $\bar{O}$  320
319 ASSIGN 322 T $\bar{O}$  KEY2
G $\bar{O}$  T $\bar{O}$  321
322 IF(II.NE.NP2) G $\bar{O}$  T $\bar{O}$  323
IF(LL.NE.NP2) G $\bar{O}$  T $\bar{O}$  321
324 RETURN
END

```

```

SUBROUTINE MATRX2
COMMON N,A(100,100),U(1000),V(1000),M,EM,L $\bar{O}C$ ,NP1,NP2,II $\bar{O}$ ,JJ $\bar{O}$ 
1B(100,1),NPK,KK $\bar{O}$ 

```

```

D $\bar{O}$  401 LL=1,NPK
L1=L $\bar{O}C$ -1
L2=L $\bar{O}C$ -LL
SUM=0.0
D $\bar{O}$  402 K=1,M
L1T=L1+K
L2T=L2+K
402 SUM=SUM+U(L1T)*V(L2T)
J=LL+KK $\bar{O}$ 

```

```

401 B(J,1)=SUM/EM
    RETURN
    END

```

... EXPLANATION

```

OBJECT...KANDEN SAKAI(THIS IS AN EXAMPLE)
NX.....NO OF SYSTEM INPUTS
NY.....NO OF SYSTEM OUTPUTS
NDMAX...NO OF SYSTEM DATA MEASURED
NR.....NO OF RUNS(TRIALS)
NC.....NO OF OBSERVATIONS IN A RUN
NSUM....NO OF OBSERVATION POINTS (EFFECTIVE DATA LENGTH IN AN OBS
        ERVATION)
NP.....NO OF PARAMETERS REPRESENT SYSTEM DYNAMICS
K1.....1, NORMALIZING DATA
        2, HIGH PASS FILTERING DATA
K2.....1, SELF-REGULATORY SYSTEM
        2, UNREGULATORY SYSTEM
KDIFF1...DIFFERENCE USED FOR HIGH-PASS FILTERING DATA
KDIFF2...DIFFERENCE USED FOR DIFFERENTIATING OUTPUTS DATA OF UNREG
        ULATORY SYSTEM

```

第4章の付録

(4.16) 式の導出

$$\begin{aligned}\sigma_r^2(\tau) &= E\left\{\int r_{xx}(\tau)\right\}^2 - r_{xx}^2(\tau) \\ &= \frac{1}{T_0^2} \int_{t_0}^{t_0+T_0} dt_1 \int_{t_0}^{t_0+T_0} E\left[X(t_1)X(t_2)X(t_1+\tau)X(t_2+\tau)\right] dt_2 - r_{xx}^2(\tau) \\ &\quad \text{(付4.1)}\end{aligned}$$

$X(t)$ が正規性不規則過程である場合には

$$E\left[X(t_1)X(t_2)X(t_1+\tau)X(t_2+\tau)\right] = r_{xx}^2(t_2-t_1) - r_{xx}(t_2-t_1+\tau)r_{xx}(t_1-t_2+\tau) \quad \text{(付4.2)}$$

なる関係が成立する。⁽²⁾ (付4.2) 式を (付4.1) 式に代入し、 $t_2-t_1=t$ なる変数変換を行なうと

$$\sigma_r^2(\tau) = \frac{1}{T_0^2} \int_{t_0}^{t_0+T_0} dt_1 \int_{t_0-t_1}^{t_0+T_0-t_1} \left[r_{xx}^2(t) + r_{xx}(t+\tau)r_{xx}(-t+\tau) \right] dt \quad \text{(付4.3)}$$

となる。(付4.3) 式において積分順序を変更し、 t_1 についての積分をさきに行なえば、(4.16) 式が得られる。

第5章の付録

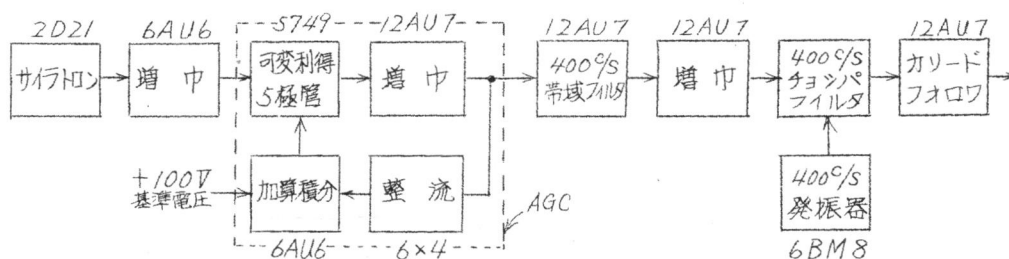
付録5.1

アナログ計算機

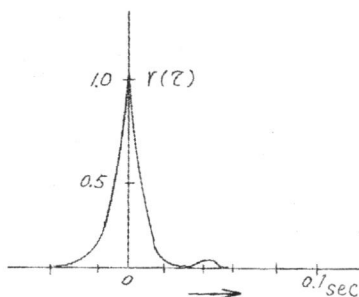
付5.1表 使用したアナログ計算機のおもな規格, 性能

項 目	規 格
製造者 型 名	日立 ALS 1000
演 算 電 圧	100V
単 体 精 度	$\pm 0.05\%$ 以内
積分器保持特性	$\pm 0.006 \text{ V/min}$
増や器ドリフト (倍率1のとき)	$\pm 50 \mu\text{V}/8\text{h}$
総合演算精度 ($\omega = 1 \text{ rad/sec}$ の サークルテスト30sec後)	振巾誤差 $\pm 0.2\%$ 以内 周波数誤差 $\pm 0.1\%$ 以内

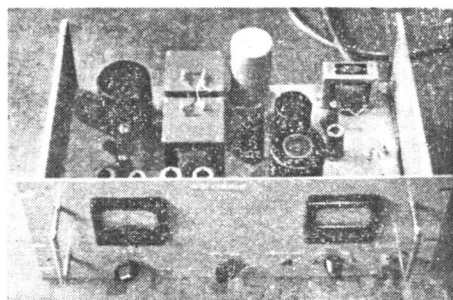
雑音発生器



a) ブロック線図



b) 出力の自己相関関数

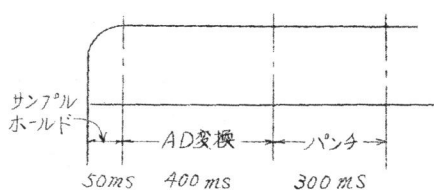


付5.1図 不規則信号発生器

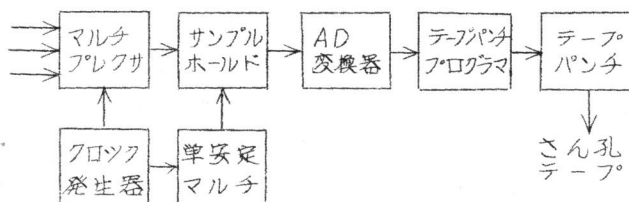
試作した雑音発生器のブロック線図を付5.1図 a) に示す。雑音源はサイ
 ラトロン 2D 21 のショットノイズである。 b) は出力の自己相関関数を計
 算した結果の 1 例であり、おおよそ $0 \sim 35 \text{ c/s}$ で一様なスペクトルをもっ
 ているとみなすことができる。

データ処理装置

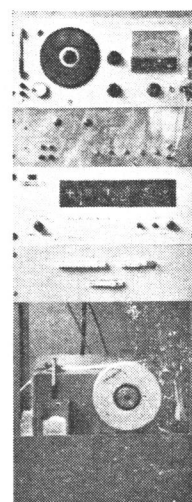
データ処理装置のタイムチャートを付5.2図 a) に示す。AD 変換に要す
 る時間は最大 0.4 sec 。1 データ (5 文字) のさん孔に要する時間は約 0.3
 sec である。同図 b) は装置のブロック線図である。



a) タイムチャート



b) ブロック線図



付 5.2 図 データ処理装置

付録 5.2

任意の定常不規則信号 $f(t)$ の自己相関関数を $r_{ff}(\tau)$ 、スペクトル密度を
 $\Phi_{ff}(s)$ とすれば周知のように、両者の間には、

$$\Phi_{ff}(s) = \mathcal{L}[r_{ff}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} r_{ff}(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad (\text{付 5.1})$$

$$r_{ff}(\tau) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi_{ff}(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \Phi_{ff}(s) e^{s\tau} ds \quad (\text{付 5.2})$$

なる関係がある。⁽³⁾

(5.19) 式の証明

(付5.1) 式において $S=0$ とおけば

$$\Phi_{ff}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{ff}(\tau) d\tau \quad (\text{付5.3})$$

上式の右辺は自己相関関数の0次モーメント ψ_{ff} の定義にほかならないから、

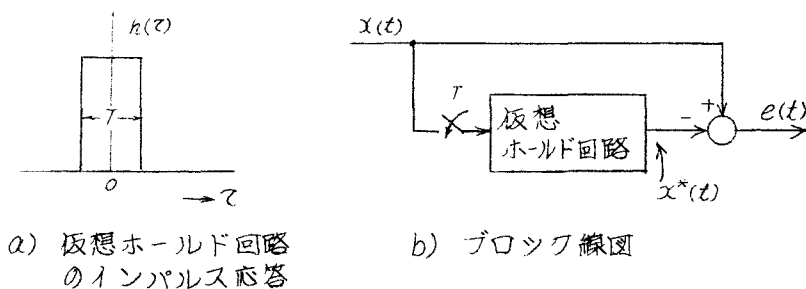
$$\psi_{ff} = \Phi_{ff}(0) \quad (\text{付5.4})$$

なる関係が得られる。

つぎに、サンプリング誤差

$$e(t) = x(t) - x^*(t)$$

について考えてみる。 $x^*(t)$ はサンプル値列 $x(k)$ を付5.3図 a) に示すような真の時間領域におよぼインパルス応答 $g_h(\tau)$ を有する仮想のホールド



付5.3図 サンプリング誤差 $e(t) = x(t) - x^*(t)$ の説明

回路に通して得られる信号と考えることができる。したがって $e(t)$ と $x(t)$, $x^*(t)$ の間には付5.3図 b) のブロック線図に示すような関係が成り立つ。

$e(t)$ のスペクトル密度は

$$\Phi_{ee}(S) = \Phi_{xx}(S) - \Phi_{xx^*}(S) - \Phi_{x^*x}(S) + \Phi_{x^*x^*}(S) \quad (\text{付5.5})$$

と表わすことができるが、仮想ホールド回路の伝達関数

$$G_h(S) = \frac{e^{\frac{ST}{2}} - e^{-\frac{ST}{2}}}{S} \quad (\text{付5.6})$$

とスペクトル密度の間に

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Phi}_{xx^*}(S) &= \frac{1}{T} G_h(S) \bar{\Phi}_{xx}(S) \\ \bar{\Phi}_{x^*x}(S) &= \frac{1}{T} G_h(-S) \bar{\Phi}_{xx}(S) = \frac{1}{T} G_h(S) \bar{\Phi}_{xx}(S) \end{aligned} \right\} \quad (\text{付 5.7})$$

なる関係がある⁽⁴⁾ので、結局 (付 5.5) 式を

$$\bar{\Phi}_{ee}(S) = \left[1 - \frac{2}{T} G_h(S) \right] \bar{\Phi}_{xx}(S) + \bar{\Phi}_{x^*x^*}(S) \quad (\text{付 5.8})$$

と書くことができる。

さて、(付 5.4) 式の関係を利用するため (付 5.8) 式において、 $S=0$ とおけば

$$V_{ee} = \bar{\Phi}_{ee}(0) = \left[1 - \frac{2}{T} G_h(0) \right] \bar{\Phi}_{xx}(0) + \bar{\Phi}_{x^*x^*}(0) \quad (\text{付 5.9})$$

$G_h(0)=T$ を代入すれば

$$V_{ee} = \bar{\Phi}_{x^*x^*}(0) - \bar{\Phi}_{xx}(0) \quad (\text{付 5.10})$$

となる。一方、 ΔV_{xx} の定義より

$$\Delta V_{xx} = V_{x^*x^*} - V_{xx}$$

(付 5.4) 式の関係を利用すれば

$$\Delta V_{xx} = \bar{\Phi}_{x^*x^*}(0) - \bar{\Phi}_{xx}(0) \quad (\text{付 5.11})$$

である。(付 5.10)、(付 5.11) 式より求める関係

$$\Delta V_{xx} = V_{ee}$$

が得られる。

α_D および α_T の計算法

1) α_D の計算

$$\alpha_D = \frac{V_{ee}}{V_{xx}} = \frac{\bar{\Phi}_{ee}(0)}{\bar{\Phi}_{xx}(0)} = \frac{[\bar{\Phi}_{ee}(S)]_{S=0}}{[\bar{\Phi}_{xx}(S)]_{S=0}} \quad (\text{付 5.12})$$

$\bar{\Phi}_{xx}(S)$ は与えられている。 $\bar{\Phi}_{ee}(S)$ を計算するには、(付 5.8) 式を利

用する。

同式の右辺の第2項は、ホールド回路の伝達関数 $G_h(s)$ ，サンプル値列 $x(k)$ のスペクトル密度 $\Phi_{x_\ell x_\ell}(s)$ を用いて

$$\Phi_{x^* x^*}(s) = G_h(s) G_h(-s) \Phi_{x_\ell x_\ell}(s) \quad (\text{付 5.13})$$

と表わすことができる。 $\Phi_{x_\ell x_\ell}(s)$ を計算するには

$$\Phi_{x_\ell x_\ell}(z) = [A(z) + A(z^{-1}) - Y_{xx}(0)] / T \quad (\text{付 5.14})$$

ここで $A(z) = \mathcal{F}[\Phi_{xx}(s)]^+$

$$A(z^{-1}) = \mathcal{F}[\Phi_{xx}(s)]^+_{z=z^{-1}}$$

$$Y_{xx}(0) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi_{xx}(s)]^+_{z=0} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} [\Phi_{xx}(s)]^+ ds \quad (\text{付 5.15})$$

なる公式が利用できる。⁽⁵⁾

2) α_T の計算

$$\alpha_T = \frac{\overline{e^2(t)}}{\overline{x^2(t)}} = \frac{Y_{ee}(0)}{Y_{xx}(0)} \quad (\text{付 5.16})$$

$Y_{xx}(0)$ を計算するには (付 5.15) 式が利用できる。 $Y_{ee}(0)$ の計算は、つぎのようにすれば、比較的簡単になる。

$$\begin{aligned} Y_{ee}(0) &= \overline{e^2(t)} = \overline{[x(t) - x^*(t)]^2} \\ &= \overline{x^2(t)} - \overline{x(t)x^*(t)} - \overline{x^*(t)x(t)} - \overline{x^{*2}(t)} \end{aligned} \quad (\text{付 5.17})$$

$x^*(t)$ は仮想ホールド回路の出力であるから、明らかに

$$\left. \begin{aligned} \overline{x(t)x^*(t)} &= \overline{x^*(t)x(t)} \\ \overline{x^{*2}(t)} &= \overline{x^2(t)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{付 5.18})$$

なる関係が成立する。これを (付 5.17) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} \overline{e^2(t)} &= 2[\overline{x^2(t)} - \overline{x(t)x^*(t)}] \\ &= 2[Y_{xx}(0) - Y_{x x^*}(0)] \end{aligned} \quad (\text{付 5.19})$$

が得られる。(付5.2)式において $S=0$ とおいた関係を利用すれば、

$$\overline{e^2(t)} = 2 \left\{ \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} [\Phi_{xx}(S) - \Phi_{xx}^*(S)] dS \right\} \quad (\text{付5.20})$$

(付5.7)式を代入すれば

$$\overline{e^2(t)} = 2 \left\{ \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \left[1 - \frac{G_h(S)}{T} \right] \Phi_{xx}(S) dS \right\} \quad (\text{付5.21})$$

となる。これに(付5.6)式を代入し変形すると、

$$\begin{aligned} \overline{e^2(t)} &= 2 \left\{ \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \left(1 - \frac{e^{\frac{ST}{2}} - e^{-\frac{ST}{2}}}{ST} \right) \Phi_{xx}(S) dS \right\} \\ &= 2 \left\{ \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \left(1 - \frac{1 - e^{-\frac{ST}{2}}}{ST} - \frac{1 - e^{\frac{ST}{2}}}{-ST} \right) \Phi_{xx}(S) dS \right\} \quad (\text{付5.22}) \end{aligned}$$

である。(付5.22)式の右辺の第3項において $S \rightarrow -S$ なる変換を行ない、さらに $\Phi_{xx}(S)$ が偶関数であることを考慮すれば、第3項の積分は第2項の積分と一致するので(付5.22)式は、さらに、

$$\overline{e^2(t)} = 2 \left\{ \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \left(1 - \frac{1 - e^{-\frac{ST}{2}}}{\frac{ST}{2}} \right) \Phi_{xx}(S) dS \right\} \quad (\text{付5.23})$$

と書きかえられる。複積分関数は右半面で正則となるので、留数の定理を用いて容易に積分を計算することができる。

α_T を決定する装置

(付5.23)式において $T/2 = T'$ をサンプル周期とみなし、

$$\frac{1 - e^{-ST'}}{S} = G_0(S) \quad (\text{付5.24})$$

をホールド回路の伝達関数と考え、(付5.23)式は

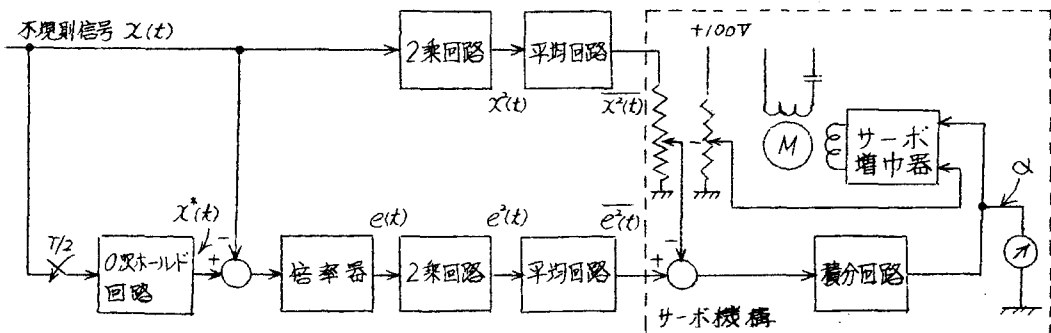
$$\overline{e^2(t)} = 2 \left\{ \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \left[1 - \frac{G_0(S)}{T'} \right] \Phi_{xx}(S) dS \right\} \quad (\text{付5.25})$$

と書くことができ(付5.21)式とまったく同じ形になる。 $G_0(S)$ はサンプル周期が T' である0次ホールド回路の伝達関数にほかならない。これらのことから、仮想ホールド回路の出力ともとの信号との誤差の2乗平均値

は、仮想ホールド(付5.6)式のかわりに(付5.24)式で示されるような0次ホールド回路を用いたときの2乗平均誤差に等しいことが結論される。

したがって与えられた信号に対して、ある定められた2乗平均誤差をもつようなサンプル周期を求めるには0次ホールド回路を用いて2乗平均誤差がその値になるようなサンプル周期を見だし、その2倍をとればよいことになる。

試作装置の構成をブロック線図で表わすと付5.4図のようになる。信号 $x(t)$ および $x(t)$ と0次ホールド回路の出力との誤差 $e(t)$ はそれぞれ2乗された後、低域濾波器による平均回路で平均化される。積分回路を含



付5.4図 Q_T の測定装置

るサーボ機構においては、定常状態で積分回路の入力は0になっているはずであるから、積分回路の出力を α とし、サーボ機構の基準電圧が100Vであることを考慮すれば

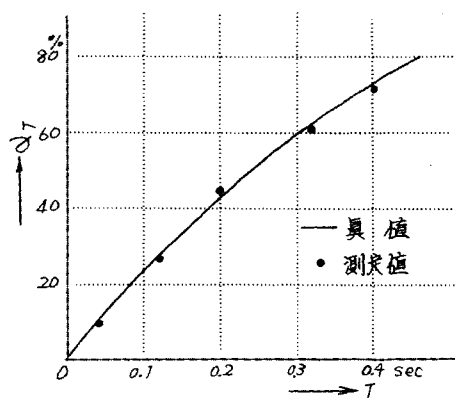
$$\overline{e^2(t)} - \frac{\alpha}{100} \overline{x^2(t)} = 0$$

したがって

$$\alpha = 100 \times \frac{\overline{e^2(t)}}{\overline{x^2(t)}} \quad (\text{付5.26})$$

となるので、積分回路の定常状態の出力は信号 $x(t)$ の2乗平均値に対する相対的な2乗平均誤差 α を%で表わすことになる。

付5.5図は試作した装置により、 $\omega_0 = 5 \text{ rad/sec}$ なる低域汚波形の信号(第5.1表参照)について、サンプル周期 T を変えて Q_T を測定した結果



付 5.5 図 試作装置による ϕ_T の測定例

$$\Phi_{xx}(s) = \frac{25}{25 - s^2}$$

を示したものである。理論値と比較すると精度は約 5% であることがわかる。

付録 5.3

ボイラ圧力制御系の各種定数の算出

R_s : 蒸気流量 $W_s = 363 \text{ t/h}$ のとき $Y_s = 6.8 \text{ scale}$

ゆえに $R_s = Y_s / W_s = 0.019 \text{ scale/t/h}$

K : 調節計の出力は圧力 1 kg/cm^2 の変化に対し 0.5 目盛変わる。

ゆえに $K = 0.5 \text{ scale/kg/cm}^2$

T_L : 1.25 min

K_f : 計算結果よりデータ 1 について、蒸気流量 W_s の平均値 $= 370 \text{ t/h}$

燃料量設定値 Y_f の平均値 $= 5.7 \text{ scale}$

ゆえに $K_f = 370 / 5.7 = 65 \text{ t/h/scale}$

L および T_B : 圧力制御系の制御ループを開放した状態で、燃料供給量設定値を階段状に変化した場合のボイラ圧力の応答特性を調査した。その結果をまとめたのが、付 5.2 表である。

これより

$$L = 8 \text{ sec} = 0.133 \text{ min}$$

$$1/T_B = 0.275 \text{ kg/cm}^2 / 0.5 \text{ scale} \cdot 10 \text{ sec}$$

付5.2表 ボイラ動特性試験結果

日付 昭39.10.27

実験番号	出 力 MW	ボイラマス 出力変化中 Scale	蒸気圧力 降 下 率 kg/cm ² /0.5Scale/10sec	遅 れ sec
1 - 1	125	0.5	0.283	8
1 - 2	"	0.45	0.19	推定不能
1 - 3	"	0.5	0.2	"
2 - 1	115	0.5	0.3	"
2 - 2	"	0.5	0.275	10
2 - 3	"	0.5	0.263	9
3 - 1	100	0.3	推定不能	推定不能
3 - 2	"	0.4	0.266	6
3 - 3	"	0.5	0.288	7

平 均 0.275 8
(ただし最大値と最小値は除外)

また蒸気流量 300 t/h のとき、燃料供給量設定値は 4.8 scale であるから 1 scale は 62.5 t/h に相当
ゆえに

$$\begin{aligned} 1/T_B &= 0.275 \times 6/0.5 \times 62.5 \text{ kg/cm}^2/\text{t/h} \cdot \text{min} \\ &= 0.053 \text{ kg/cm}^2/\text{t/h} \cdot \text{min} \end{aligned}$$

参考のため定格出力および容量で正規化すると

$$\begin{aligned} 1/T_B &= 0.053 \text{ kg/cm}^2/\text{t/h} \cdot \text{min} \\ &\times \frac{430 \text{ t/h}}{131 \text{ kg/cm}^2} \\ &= 0.174/\text{min} \end{aligned}$$

$$T_B = 5.7 \text{ min}$$

R_p : タービン入口圧力 P_T とドラム圧力 P_D との圧力差は蒸発量 w_s の2乗に比例し

$$P_T = P_D - c w_s^2 \quad (\text{付5.27})$$

ここで C : 比例定数 $\text{kg/cm}^2/(\text{t/h})^2$

調査結果によれば

蒸気流量 $W_s = 363 \text{ t/h}$ のとき

ドラム圧力 $P_D = 135 \text{ kg/cm}^2$

タービン入口圧力 $P_T = 127 \text{ kg/cm}^2$

である。

よって

$$C = \frac{135-127}{(363)^2} = 0.607 \times 10^{-4} \text{ kg/cm}^2/(\text{t/h})^2$$

(付5.27)式において圧力変化分のみに着目すると

$$\Delta P_T = \Delta P_D - 2C W_s \Delta W_s$$

$$= \Delta P_D - K_p W_s$$

したがって蒸気流量のベースが 370 t/h のとき

$$K_p = 2 \times 0.607 \times 10^{-4} \times 370$$

$$= 0.045 \text{ kg/cm}^2/\text{t/h}$$

付録の参考文献

- (1) C. P. Lecht ; *The Programmer's FORTRAN II and IV : A Complete Reference* (1966)
- (2) J. H. Laning & R. H. Battin ; *Random Process in Automatic Control*, 161 (1956)
- (3) J. G. Truxal ; *Automatic Feedback Control System Synthesis*, 421 (1956)
- (4) J. R. Ragazzini & G. F. Franklin ; *Sampled-Data Control Systems*, 266 (1958)
- (5) 文献(4), 259