むだ時間を含む線形定常システムの可制御性，可観測性と簡約

柏原敏伸

内容梗概

本論文は筆者が大阪大学大学院博士課程（物理系専攻制御工学科）に在学中に行った，むだ時間を含む線形定常システムに関する研究を述べたものである．

緒論および各章の最初の節では本研究分野における従来の研究，本研究の意義と得られた結果を概説している．各章の最後の節では，その章で得られた主な結果と今後の問題点がまとめられている．

第１章は，むだ時間を含む線形定常システムが functionally reproducible すなわち出力関数可制御であるための条件と invertible すなわち入力関数可観測であるための条件を求めている．

1.2節では，1章で考察するシステムを定義し，reproducibility と invertibility を定義している．

1.3節では，システムが1.2節で定義した reproducibility のうち $C^{i+1}_{[t_0,t_0+(k+1)h]}$ クラス reproducibility の性質をもつための条件を求めている．

1.4節では，kh delay reproducible であるための条件と kh delay invertible であるための条件を求めている．

第2章は第1章で扱ったシステムよりも一般的なむだ時間を含む線形定常システムについて，2種類の可制御性，可観測性を定義し，積分器あるいは遅延素子の個数が最小であることとの関係を論じている．また，等価なシステムのうち積分器の個数あるいは遅延素子の個数が最小であるシステムを求める方法についても考察している．

2.2節では2章で扱うむだ時間を含む線形定常システムを定義している．

2.3節では2種類の可制御性と可観測性を定義し，そのための条件を与えている．

2.4節では2つのシステムが等価であるための条件を示し，与えられたシステムと等価なシステムを積分器と遅延素子で構成する場合，積分器の個数あるいは遅延素子の個数を最小にする方法について考察している．そして積分器の個数あるいは遅延素子の個数が最小であることと2.3節で考察した可制御性，可観測性との関係を与えている．

むすびでは本研究で得られた結果および今後に残された問題点をまとめて述べている.

目　次

緒　論

システムのある意味での能力を表わすと考えられるものにfunctional reproducibilityすなわち出力関数可制御性やinvertibilityすなわち入力関数可観測性がある．前者は任意の出力関数を発生できるということであり，サーボメカニズム的な可制御性を意味する[8]．またこれは，いま考えているシステムに別のシステムを継続接続した場合，つけ加えたシステムを十分に操作できることを保障する．後者は出力を観測することにより，どのような入力が加わったかを知りうることであり，そのシステムが観測器として使用できることを意味する．通常の線形定常システムについては，これらの性質を持つための必要十分条件が求められ，[1),3),4)]入力と出力の次元が等しい場合にはこれらが一致することが明らかにされている[5)]．むだ時間を含む線形定常システムについては，これらの条件は求められていない．第1章では，これについて論文[1]を中心に述べている．

与えられたシステムと等価なシステムのうちで，ある意味で最も簡単なものを求めることは理論的にも実際的にも重要な意味をもつ．有限次元の線形定常システムについては最小性，可制御性，可観測性が定義され，最小性は可制御性，可観測性と密接な関係をもつことが明らかにされており，最小であるシステムの構成法も知られている[8)]．むだ時間を含む線形定常システムについても種々の可制御性が定義され，そのための条件が求められており，[9),10),11)]可制御性，可観測性と既約性の関係についても論じられている[7)]．システムが簡潔に表現されているかどうかの指標として，そのシステムを積分器と遅延素子で構成するときに必要な積分器の個数あるいは遅延素子の個数を用いたものは見あたらない．第2章では上の意味で簡潔に表現されたシステムを求めることと，そのようなシステムの性質について論文[2]，[3]を中心に述べている．

関連文献

[1]　柏原：むだ時間を含む線形定常システムのReproducibilityとInvertibility，計測自動制御学会論文集　第9巻　第1号，83/90，昭48-02

[2]　柏原：むだ時間を含む線形定常システムの簡約について，信学会回路とシステム理論研資，CST 73-49，(1973-12)

[3] 柏原：むだ時間を含む線形定常システムの簡約について，投稿中

第1章　むだ時間を含む線形定常システムのreproducibilityとinvertibility

1.1　序

システムのある意味での能力を表わすといえるものにfunctional reproducibilityやinvertibilityがある。前者は出力関数可制御性を意味し任意の出力関数を発生できることであり、後者は入力関数可観測性を意味し出力を観測することにより、どのような入力が加わったかを知り得ることである。Functional reproducibilityはサーボメカニズム的な可制御性を意味するが、[8] decouplingとも密接な関係を持ち、また、システムがこの性質を持てば、後に継続接続されたシステムを十分に操作できることにもなる。invertibilityは、そのシステムが観測器として用い得るかどうかの指標になる。

有限次元の線形定常システムについては、これらの性質について研究されており、種々の結果が得られている。文献1では連続入力により任意の無限回微分可能な出力関数を発生できるための条件がシステムのパラメータで与えられている。文献4では、システムのパラメータをもとにして、あるアルゴリズムを実行し、得られた結果を用いて、連続入力により作成可能な出力関数のクラスを示している。文献3ではL integral invertibilityを定義し、そのための条件をシステムのパラメータから構成される行列の階数の差で表わし、n integral invertibleでないときはinvertibleでないことを示している。文献1の結果と文献3の結果は入力と出力の次元が等しい場合は一致することが示されている。[5]

本章では、むだ時間を含む線形定常システムについて今々のfunctional reproducibilityおよびinvertibilityを定義し、そのための条件を求める。定理1では、ある回数連続微分可能であり、かつ、適当な初期微係数を持つような任意の出力関数を連続入力により発生できるための必要十分条件をシステムのパラメータであらわす。条件は文献3の結果と同様、システムのパラメータから構成される行列の階数の差で表わされる。定理2,3,4,5では、ある時刻までは零であり無限回微分可能な任意の出力関数を連続入力により発生できるための条件と、出力を観測することによりどのような入力が加わったかを、ある時間おくれて知り得るための条件を周波数領域

で求め，入力と出力の次元が等しい場合には，これらが一致することを示す．また，むだ時間を零にした時に得られる通常の線形定常システムとの関係についても述べる．

1.2 reproducibility と invertibility

本章で扱うシステムは，つぎの差分微分方程式系で表わされるものとする．

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h) + Cu(t) \\ y(t) = Dx(t) \end{cases} \qquad (1,1)$$

ここで x は n 次元内部変数ベクトル，y は p 次元出力ベクトル，u は r 次元入力ベクトルであり，A, B, C, D は実行列，h はむだ時間を表わす正の定数である．本章では，入力関数は連続関数に限り，$u(t)=0,\ (t<t_0)$ とし，システムの初期関数は零，すなわち $x(t)=0,\ (t\leq t_0)$ としておく．

本章では，l を任意の正整数とするとき，区間 $[t_0, t_1]$ において l 回連続微分可能であり，かつ，t_0 における値ならびに t_0 における l 回までの（l 回を含む）微係数がすべて零であるような関数のクラスを，通常の表記法ではないが，$C^l_{[t_0,t_1]}$ と書くことにする．

さて $C^\infty_{[t_0,t_1]}$ の任意の関数を出力関数とし得るためには，(1,1) 式であらわされるシステムで $B=0$ とおいた有限次元システムの出力関数が任意の無限回微分可能な関数に等しくできることが必要であるが，明らかに，これは十分でもある．すなわち初期時刻 t_0 から時間おくれなしに十分なめらかな任意の関数を出力し得るための条件は，むだ時間のない通常のシステムについて得られた条件と一致するわけで，時間おくれなしに関数を出力したい場合には，実用上はこれで十分だと考えられる．この場合むだ時間の項の影響は，出力関数のなめらかさと定義される時間区間とが関係するところにあらわれ，右側 inverse は有限区間内では容易に構成しうる．

つぎのように $C^l_{[t_0,t_1]}$ クラス reproducibility を定義する．

［定義 1.1］　(1,1) 式であらわされるシステムについて，l を任意の正整数とするとき，入力 $u(t)$ を連続関数の中から適当に選ぶことにより，

出力 $y(t)$ を $C^{l}_{[t_0,t_1]}$ に属する任意の関数に等しくできるとき，システムは $C^{l}_{[t_0,t_1]}$ クラス reproducible であるという.

むだ時間を含むシステムの場合には，ある時間おくれて任意の関数を出力できる場合や，ある時間おくれて入力関数を知りうることがある.

［定義 1.2］ t_1 を任意の正定数とするとき，入力 $u(t)$ を連続関数のなかから適当に選ぶことにより出力 $y(t)$ を $t_0 \leq t \leq t_0+t_1$ で零であり無限回微分可能である任意の関数に等しくできるとき，(1,1)式であらわされるシステムは t_1 delay reproducible であるという.

［定義 1.3］ (1,1)式であらわされるシステムについて，t_1 を負でない実数とし，t_2 を任意の $t_2 > t_0+t_1$ なる実数とするとき，区間 $[t_0, t_2]$ において出力を観測することにより区間 $[t_0, t_2-t_1]$ の入力を知ることができるとき，システムは t_1 delay invertible であるという.

1.3 $C^{j+1}_{[t_0,t_0+(k+1)h]}$ クラス reproducibility

本節では，j, k, を任意の非負整数とするとき，(1,1)式であらわされるシステムが $C^{j+1}_{[t_0,t_0+(k+1)h]}$ クラス reproducible であるための条件を求める.

(1,1)式であらわされるシステムの出力は，つぎのように書ける.[6),7)]

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} DK(t-\tau)Cu(\tau)d\tau \qquad (1,2)$$

ここで $K(t)$ はつぎのような関数である.

$$K(t) = \begin{cases} 0 & , (t<0) \\ \sum_{i=0}^{k} K_i(t), & (0 \leq t \leq (k+1)h) \end{cases}$$

$$K_i(t) = \begin{cases} e^{At} & (i=0,\ t \geq 0) \\ e^{At}\int_{ih}^{t} e^{-A\tau}BK_{i-1}(\tau-h)d\tau, & (i \geq 1,\ t \geq ih) \\ 0 \qquad , & (t < ih) \end{cases}$$

非負整数 i について $(i+1)n \times n$ 行列 $\overline{K_i}(t)$ をつぎのようにおく.

$$\begin{cases} \overline{K}_0(t) = K_0(t) \\ \overline{K}_i(t) = \begin{bmatrix} K_i(t) \\ K_{i-1}(t-h) \\ \vdots \\ K_0(t-ih) \end{bmatrix}, \quad (i \geq 1) \end{cases}$$

$\overline{K}_i(t)$ は，つぎの関係式をみたす．

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\overline{K}_i(t) = A_i \overline{K}_i(t), \ (t \geq ih) \\ \overline{K}_i(t) = 0 \qquad , \ (t < ih) \end{cases} \tag{1,3}$$

ここで A_i はつぎのような $(i+1)n \times (i+1)n$ 行列である．

$$A_0 = A$$
$$A_i = \begin{bmatrix} A & B & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & B & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A & B \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A \end{bmatrix}, \quad (i \geq 1)$$

出力 y は積分回数と時間おくれを表わす項の和として，つぎの補題のようにあらわされる．

［補題1.1］ 任意の非負整数 k, j に対して (1,1) 式であらわされるシステムの出力は，区間 $[t_0, t_0+(k+1)h]$ で，つぎのように書ける．

$$y(t) = \sum_{i=0}^{k} \left\{ \sum_{l=1}^{j+1} \int_{t_0}^{t-ih}\int_{t_0}^{\tau_l}\cdots\int_{t_0}^{\tau_2} D_i A_i^{l-1} C_i u(\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2\cdots d\tau_l \right.$$
$$\left. + \int_{t_0}^{t-ih}\int_{t_0}^{\tau_{j+1}}\int_{t_0}^{\tau_j}\cdots\int_{t_0}^{\tau_1} G_i^j(\tau_1,\tau_0)\,u(\tau_0)\,d\tau_0\,d\tau_1\cdots d\tau_{j+1} \right\} \tag{1,4}$$

ここで $p \times n(i+1)$ 行列 D_i，$(i+1)n \times r$ 行列 C_i，$p \times r$ 行列 $G_i^j(t,\tau)$ は，つぎのようなものである．

$$D_0 = D,\ C_0 = C,\ D_i = [D, 0, 0, \cdots, 0], \quad C_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ C \end{bmatrix}$$

$$G_i^j(t,\tau) = D_i A_i^{j+1} \bar{K}_i(t+ih-\tau)C$$

［証明］ (1,2)式，(1,3)式と，$\bar{K}_i(jh)C = C_i$ であることを用いて計算することにより容易に証明できる．（証明終）

補題1.2 を述べるため，つぎのようにベクトル，行列および演算子を定義する．$l \geq 1, i \geq 0, s \geq 0, j \geq 0, k \geq 0$ なる整数 l, i, s, j, k に対して，$u_l^i(t)$ を r ベクトルとして，

$$\bar{u}_j^s = \begin{bmatrix} u_1^s \\ u_2^s \\ \vdots \\ u_{j+1}^s \end{bmatrix}, \quad \bar{\bar{u}}_j^k = \begin{bmatrix} \bar{u}_j^0 \\ \bar{u}_j^1 \\ \vdots \\ \bar{u}_j^k \end{bmatrix},$$

$J_{li} = D_l A_l^i C_l$ として，

$$\bar{M}_{jl} = \begin{bmatrix} J_{l0}, 0 & \cdots & 0 \\ J_{l1}, J_{l0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{lj}, J_{lj-1}, & \cdots & ,J_{l0} \end{bmatrix}, \quad \bar{M}_j^k = \begin{bmatrix} M_{j0}, 0 & \cdots & 0 \\ M_{j1}, M_{j0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{jk}, M_{jk-1}, & \cdots & ,M_{j0} \end{bmatrix},$$

正整数 m に対して，

$$\begin{cases} G_{i1}^j(t,\tau) = G_i^j(t,\tau), \\ G_{im}^j(t,\tau) = \sum_{l=0}^{m-2} D_i A_i^{j+l+2-m} C_i \dfrac{(t-\tau)^l}{l!} + \displaystyle\int_\tau^t G_i^j(t,\tau_1)\frac{(\tau_1-\tau)^{m-2}}{(m-2)!}d\tau_1, \quad (m \geq 2) \end{cases}$$

とおいて

$$\hat{G}_l^j(t,\tau) = \left[G_{l1}^j(t,\tau), G_{l2}^j(t,\tau), \cdots, G_{l\,j+1}^j(t,\tau)\right],$$

$$N_{jl}(t,\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hat{G}_l^j(t,\tau) \end{bmatrix}, \quad (N_{jl} \text{は } p(j+1) \times r(j+1) \text{ 行列})$$

$$\overline{N}_j^k(t,\tau)=\begin{bmatrix} N_{j0}(t,\tau), & 0, & \cdots, & 0\\ N_{j1}(t,\tau), & N_{j0}(t,\tau), & \cdots, & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{jk}(t,\tau), & N_{jk-1}(t,\tau), & \cdots, & N_{j0}(t,\tau)\end{bmatrix},$$

$$P_{li}=\int_{t_0}^{t-ih}\int_{t_0}^{\tau_l}\cdots\int_{t_0}^{\tau_2}(\cdot)\,d\tau_1\,d\tau_2\cdots d\tau_l$$ とおいて

$$L_{li}=P_{li}\,I,$$

$$\overline{L}_{ji}=\left[L_{1i}, L_{2i}, \cdots L_{j+1\,i}\right]$$

$$\overline{\overline{L}}_{jk}=\left[\overline{L}_{j0}, \overline{L}_{j1}, \cdots \overline{L}_{jk}\right]$$

ここでIは単位行列を表わす.

［補題1.2］ k, jを非負整数とするとき, $t_0\leq t\leq t_0+(k+1)h$において(1,2)式が連続解$u(t)$, $u(t)=0$, $(t\leq t_0)$を持つための必要十分条件は, つぎの式が同じ$y(t)$に対して連続解$\overline{\overline{u}}_j^k(t)$, $\overline{\overline{u}}_j^k(t)=0$, $(t\leq t_0)$を持つことである.

$$y(t)=\overline{\overline{L}}_{jk}\left\{\overline{M}_j^k\,\overline{\overline{u}}_j^k(\tau_1)+\int_{t_0}^{\tau_1}\overline{N}_j^k(\tau_1,\tau_0)\,\overline{\overline{u}}_j^k(\tau_0)\,d\tau_0\right\} \qquad (1,5)$$

(証明) 必要性. (1,2)式の解を$u^a(t)$とする. $u_i^l=0$, $((i,l)\neq(0,1))$, $u_1^0=u^a$とおいた$\overline{\overline{u}}_j^k$が(1,5)式を満足することは$G_{i1}^j=G_i^j$と補題1.1より明らかである.

十分性. (1,5)式をみたす$\overline{\overline{u}}_j^k$, $\overline{\overline{u}}_j^k(t)=0$, $(t\leq t_0)$より$u(t)$をつぎのようにおく.

$$u(t)=\sum_{s=0}^{k}\left\{\sum_{m=2}^{j+1}\int_{t_0}^{t-sh}\int_{t_0}^{\tau_{m-1}}\cdots\int_{t_0}^{\tau_2}u_m^s(\tau_1)\,d\tau_1\cdots d\tau_{m-1}+u_1^s(t-sh)\right\} \qquad (1,6)$$

$\overline{\overline{u}}_j^k(t)=0$, $(t\leq t_0)$より(1,6)式の$u(t)$は連続. この$u(t)$が(1,2)式をみたすことは, 代入することにより容易に示される. (証明終)

［定理1.1］　j, kを任意の非負整数とするとき，(1,1)式であらわされるシステムが$C^{j+1}_{[t_0, t_0+(k+1)h]}$クラスreproducibleであるための必要十分条件は，つぎの式が成立することである．

$$\mathrm{rank}\,\overline{M}^k_j - \mathrm{rank}\,\overline{M}^k_{j-1} = p(k+1) \qquad (1,7)$$

ここで$\overline{M}^k_{-1}=0$とし，rankは行列の階数をあらわす．

（証明）　十分性．　(1,7)式から，ある$r(k+1)(j+1)\times p(k+1)$行列Tが存在して

$$\overline{M}^k_j T = \begin{bmatrix} Q_k \\ Q_{k-1} \\ \vdots \\ Q_0 \end{bmatrix}$$

となる．ここでQ_iは$p(j+1)\times p(k+1)$行列であり，$p\times p(k+1)$行列Q_i'を用いて，

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Q_i' \end{bmatrix}$$

と書け，

$$\overline{Q} = \begin{bmatrix} Q_k' \\ Q_{k-1}' \\ \vdots \\ Q_0' \end{bmatrix}$$

とおくと$p(k+1)\times p(k+1)$行列$\overline{Q}$は正則である．yは$j+1$回連続微分可能，かつ，$y^{(l)}\big|_{t=t_0}=0$，$(l=0,1,\cdots,j+1)$であるから，$y_{il}(t)$をおのおのpベクトルとして，

$$\overline{\overline{y}}_{jk} = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{j+1,0} \\ y_{11} \\ \vdots \\ y_{j+1\,1} \\ \vdots \\ y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{j+1\,k} \end{bmatrix}$$

とおいたものについて $y_{j+1\,0}=y^{(j+1)}$, $y_{il}=0,\ ((i,l)\neq(j+1,0))$ としたものを $\bar{\bar{y}}^{a}_{jk}$ とおくと $\bar{L}_{jk}\bar{\bar{y}}^{a}_{jk}=y$ となる．ここで $y^{(l)}$ は y の l 回導関数をあらわす．

$$\bar{\bar{y}}^{a}_{jk}(t)=\bar{M}^{k}_{j}\bar{\bar{u}}^{k}_{j}(t)+\int_{t_0}^{t}\bar{N}^{k}_{j}(t,\tau)\bar{\bar{u}}^{k}_{j}(\tau)d\tau \qquad (1,8)$$

という方程式を考える．ω を $p(k+1)$ ベクトルとして (1,8) 式に $\bar{\bar{u}}^{k}_{j}=T\omega$ を代入し恒等的に零である行をとりのぞくと，つぎの式が導びかれる．

$$\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\y^{(j+1)}\end{bmatrix}=\bar{Q}\,\omega(t)+\int_{t_0}^{t}\bar{G}(t,\tau)\omega(\tau)d\tau \qquad (1,9)$$

ここで $\bar{G}(t,\tau)$ は t,τ について連続関数である．$\bar{Q}$ が正則であることより (1,9) 式は連続解 ω^{a} を持ち，$y^{(j+1)}\big|_{t=t_0}=0$ より $\omega^{a}(t_0)=0$．よって $\bar{\bar{u}}^{k}_{j}=T\omega^{a}$ は (1,8) 式を満足し $\bar{\bar{u}}^{k}_{j}(t)=0,\ (t\leq t_0)$ となる．(1,8) 式の両辺に $\bar{L}_{jk}$ をほどこすと (1,5) 式が導かれる．ゆえに補題 1.2 より十分性が証明された．

必要性．証明のためにつぎのようにベクトルと行列を定義する．整数 s に対し，

$$\hat{u}^{s}_{i}=\int_{t_0}^{t-sh}\int_{t_0}^{\tau_{i+1}}\cdots\int_{t_0}^{\tau_2}u(\tau_1)d\tau_1d\tau_2\cdots d\tau_{i+1}$$

とおいて

$$\hat{\bar{u}}^{s}_{j}=\begin{bmatrix}\hat{u}^{s}_{j}\\\hat{u}^{s}_{j-1}\\\vdots\\\hat{u}^{s}_{0}\end{bmatrix},\quad \hat{\bar{\bar{u}}}^{k}_{j}=\begin{bmatrix}\hat{\bar{u}}^{0}_{j}\\\hat{\bar{u}}^{1}_{j}\\\vdots\\\hat{\bar{u}}^{k}_{j}\end{bmatrix},\quad \hat{\bar{\bar{u}}}^{k}_{j}=\begin{bmatrix}\hat{\bar{u}}^{0}_{j}\\\hat{\bar{u}}^{-1}_{j}\\\vdots\\\hat{\bar{u}}^{-k}_{j}\end{bmatrix}$$

$i\geq 0,\ 0\leq l\leq j$ なる整数 i,l に対して $p\times r(j+1)$ 行列 $\bar{D}^{l}_{ij}$ を，

$$\bar{D}^{l}_{ij}=\left[D_iA_i^{j-l}C_i,\ D_iA_i^{j-l-1}C_i,\cdots D_iC_i,\ 0,\cdots 0\right]$$

とする．

(1,4) 式で G_i を含む項の全体を Φ_{00} とおくと，Φ_{00} は $j+2$ 回連続微分可能であり，

$$y(t)=\left[\bar{D}^0_{0j}, \bar{D}^0_{1j}, \cdots \bar{D}^0_{kj}\right]\hat{\hat{u}}^k_j + \Phi_{00}$$

となる．$t_0 \leqq t \leqq t_0+h$ において，$k \geqq s \geqq 0$ なる整数 s と正整数 i に対して $\hat{u}^s_j(t)=0$，$(s \geqq 1)$ であることから，

$$\begin{cases} y(t+sh)=\left[\bar{D}^0_{sj}, \bar{D}^0_{s-1j}, \cdots, \bar{D}^0_{0j}, 0, \cdots, 0\right]\hat{\hat{u}}^k_j + \Phi_{0s} \\ \int_{t_0}^{t+sh}\int_{t_0}^{\tau_i}\cdots\int_{t_0}^{\tau_2} y(\tau_1)d\tau_1\cdots d\tau_i = \left[\bar{D}^i_{sj}, \bar{D}^i_{s-1j}, \cdots, \bar{D}^i_{0j}, 0, \cdots, 0\right]\hat{\hat{u}}^k_j + \Phi_{is} \end{cases} \tag{1,10}$$

となる．ここで Φ_{0s}，Φ_{is} は，すべて $j+2$ 回連続微分可能な関数である．

$$\begin{cases} \hat{y}^0_s = y(t+sh) \\ \hat{y}^i_s = \int_{t_0}^{t+sh}\int_{t_0}^{\tau_i}\cdots\int_{t_0}^{\tau_2} y(\tau_1)d\tau_1\cdots d\tau_i, \quad (i \geqq 1) \end{cases}$$

とおいて

$$\bar{y}_s = \begin{bmatrix} \hat{y}^j_s \\ \hat{y}^{j-1}_s \\ \vdots \\ \hat{y}^0_s \end{bmatrix}, \qquad \bar{\bar{y}} = \begin{bmatrix} \bar{y}_0 \\ \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_k \end{bmatrix}$$

とおいて (1,10) 式をまとめて書くと，

$$\bar{\bar{y}} = \bar{M}^k_j \hat{\hat{u}}^k_j + \Phi \tag{1,11}$$

となる．ここで Φ は $j+2$ 回連続微分可能な関数である．

さて，(1,7) 式が成立しないとすると $p \times p(j+1)(k+1)$ 行列 Q，

$$Q=\left[Q_{00}, Q_{10}, \cdots, Q_{j0}, Q_{01}, Q_{11}, \cdots, Q_{j1}, \cdots \cdots, Q_{0k}, Q_{1k}, \cdots Q_{jk}\right]$$

が存在して $Q\bar{M}^k_j = 0$ となる．ここで各 Q_{il} は $p \times p$ 行列であり $Q_{j0} \neq 0$ である．(1,11) 式の両辺に Q をほどこすと，

$$Q\bar{\bar{y}} = Q\Phi \tag{1,12}$$

となるが，(1, 12)式の左辺は，

$$Q\bar{\bar{y}} = Q_{j0}y(t) + \sum_{\substack{i \geq 1 \\ (i,l) \neq (j,0)}} Q_{il}\int_{t_0}^{t+lh}\int_{t_0}^{\tau_i}\cdots\int_{t_0}^{\tau_2} y(\tau_1)d\tau_1\cdots d\tau_i$$

$$+ \sum_{l} Q_{0l}\, y(t+lh)$$

と書ける．yが任意の$j+1$回連続微分可能な関数になりうるためには$Q\bar{\bar{y}}$は$j+2$回連続微分可能でない場合が必要になるが，(1, 12)式より，それは不可能となる．よって(1, 7)式が成立しない場合は$C^{j+1}_{[t_0,\, t_0+(k+1)h]}$クラス reproducible でない．（証明終）

つぎの系が成立する．系1，系2は$l \geq 1$のとき$D_l C_l = 0$となることより明らかである．また系3は1.2節で述べたように明らかである．

系1　任意の$t_1 > t_0$に対して(1, 1)式であらわされるシステムが$C^1_{[t_0,\, t_1]}$クラス reproducible であるための必要十分条件は，$\operatorname{rank} DC = p$が成立することである．

系2　任意の$t_1 > t_0$に対して(1, 1)式であらわされるシステムが$C^2_{[t_0,\, t_1]}$クラス reproducible であるための必要十分条件は

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} DC, & 0 \\ DAC, & DC \end{bmatrix} - \operatorname{rank} DC = p$$

となることである．

系3　任意の$t_1 > t_0$に対して(1, 1)式であらわされるシステムが$C^\infty_{[t_0,\, t_1]}$クラス reproducible であるための必要十分条件は，

$$\operatorname{rank} M_{n-1,0} - \operatorname{rank} M_{n-2,0} = p$$

となることである．

以上のように$C^1_{[t_0,\, t_1]}$クラス，$C^2_{[t_0,\, t_1]}$クラス，$C^\infty_{[t_0,\, t_1]}$クラス reproducible であることは，(1, 1)式からむだ時間の項を除いた線形定常システムの性質だけから決定される．

1.4　kh delay reproducibility と invertibility

本節ではkを非負整数とするとき(1, 1)式であらわされるシステムが，

k 也 delay reproducible であるための条件および k 也 delay invertible であるための条件を求める. (1,1)式で表わされるシステムは, 線形離散システムと共通した性質を持っており, 線形離散システムにおける l delay Invertible の条件において, 体が実数体から s の有理関数体に変更されたものが考えられる. 非負整数 k に対して $p(k+1)\times r(k+1)$ 行列 $M_k(s)$ をつぎのようにおく

$$M_k(s)=\begin{bmatrix} D(sI-A)^{-1}C & 0 & \cdots & ,0 \\ D\{(sI-A)^{-1}B\}(sI-A)^{-1}C, & D(sI-A)^{-1}C & , \cdots & ,0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D\{(sI-A)^{-1}B\}^{k}(sI-A)^{-1}C, & D\{(sI-A)^{-1}B\}^{k-1}(sI-A)^{-1}C, & \cdots & ,D(sI-A)^{-1}C \end{bmatrix}$$

[定理 1.2] k を非負整数とするとき (1,1) 式であらわされるシステムが k 也 delay reproducible であるための必要十分条件は, つぎの式が成立することである.

$$\mathrm{rank}_s M_k(s)-\mathrm{rank}_s M_{k-1}(s)=p \tag{1,13}$$

ここで $M_{-1}(s)=0$ であり, rank_s は s の有理関数体の上での行列の階数をあらわす

(証明) 十分性. (1,13)式より $0\le i\le k$ なる整数 i に対して $r\times p$ 行列 $T_i(s)$ が存在し, つぎの式が成立する.

$$M_k(s)\begin{bmatrix} T_0(s) \\ T_1(s) \\ \vdots \\ T_k(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Q(s) \end{bmatrix} \tag{1,14}$$

ここで $Q(s)$ は正則な $p\times p$ 行列である. $r\times p$ 行列 $\bar{T}(s)$ をつぎのように作る.

$$\bar{T}(s)=\left(\sum_{i=0}^{k} T_i(s)e^{-sih}\right)\left[I+e^{-sh}Q^{-1}(s)D(sI-A-Be^{-sh})^{-1}R(s)\right]^{-1}Q^{-1}(s), \tag{1,15}$$

ここで

$$R(s)=\sum_{i=0}^{k} B\{(sI-A)^{-1}B\}^{k-i}(sI-A)^{-1}C\,T_i(s)$$

$\overline{T}(s)$は(1,1)式であらわされるシステムのkh delay 右側inverseである．すなわち(1,1)式であらわされるシステムの伝達関数を$P(s)$とおくと，

$$P(s)\overline{T}(s) = e^{-khs}$$

$\overline{T}(s)$は実現可能ではないが，無限回微分可能な入力関数に対する$\overline{T}(s)$の出力関数と考えられるものは計算することが出来て，それは連続となる．無限回微分可能であり$t_0 \leq t \leq t_0+kh$で$y(t)=0$となる$y(t)$に対して，$y(t+kh)$を$\overline{T}(s)$の入力と考えると対応する出力は連続となり，それを(1,1)であらわされるシステムの入力とすれば，出力は$y(t)$となる．

必要性　(1,13)式が成立しないとすると$0 \leq i \leq k$なる整数iに対して，$p \times p$行列$T_i(s)$，$T_k(s) \neq 0$が存在して

$$\left[T_0(s), T_1(s), \cdots T_k(s)\right] M_k(s) = 0 \qquad (1,16)$$

となる．$[t_0, t_0+(k+1)h]$において考えると

$$\begin{cases} y = D(sI-A)^{-1}Cu + D\{(sI-A)^{-1}B\}(sI-A)^{-1}Ce^{-sh}u + \cdots + D\{(sI-A)^{-1}B\}^{k}(sI-A)^{-1}Ce^{-skh}u \\ e^{-sh}y = D(sI-A)^{-1}Ce^{-sh}u + \cdots + D\{(sI-A)^{-1}B\}^{k-1}(sI-A)^{-1}Ce^{-skh}u \\ \quad\vdots \\ e^{-skh}y = D(sI-A)^{-1}Ce^{-skh}u \end{cases} , \ (t \leq t_0+(k+1)h), \ (1,17)$$

となっていると考えてよい．(1,17)式の両辺に順に$T_k(s)$, $T_{k-1}(s)$, $\cdots$ $T_0(s)$をほどこすと$[t_0, t_0+(k+1)h]$において$y(t)=0$, $(t \leq t_0+kh)$より，$e^{-shi}y=0$, $i=1,2,\cdots,k$となっていると考えられることと，(1,16)式とより，$T_k(s)\,y=0$となる．ゆえにyは$[t_0+kh, t_0+(k+1)h]$において，$T_k(s)$の出力を零とするような関数以外にはなり得ない．(証明終)

kh delay reproducibilityと双対な関係にあるkh delay invertibilityについても同様につぎの定理が成立する．証明は省略する．

［定理1.3］　(1,1)式であらわされるシステムがkh delay invertibleであるための必要十分条件は，つぎの式が成立することである．

$$\mathrm{rank}_s M_k(s) - \mathrm{rank}_s M_{k-1}(s) = r \qquad (1,18)$$

$D\{(sI-A)^{-1}\}^{n}(sI-A)^{-1}C$ 以降の項は入力に関する新しい情報をもたらさない．よってつぎの定理が導かれる．証明は省略する．

［定理 1.4］ (1,1)式であらわされるシステムが invertible であるための必要十分条件は，つぎの式が成立することである．

$$\mathrm{rank}_s M_n(s) - \mathrm{rank}_s M_{n-1}(s) = p \qquad (1,19)$$

$r=p$ の場合 (1,13)式と(1,18)式が一致することにより，つぎの定理は明らかである

［定理 1.5］ $r=p$ の場合 kth delay invertible であることと kth delay reproducible であることとは同値である．

以上の定理により，つぎの系が導かれる

系 4.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A+B)x(t) + Cu(t) \\ y(t) = Dx(t) \end{cases} \qquad (1,20)$$

であらわされるシステムが functionally reproducible (invertible) であれば，(1,1) 式であらわされるシステムは nth delay reproducible (invertible) である．

（証明） (1,1)式であらわされるシステムが nth delay reproducible でないとき，(1,20)式であらわされるシステムが functionally reproducible でないことを示す．

(1,13) 式が $k=n$ の場合に成立しないとすると，文献5と同様にして，つぎの式が成立する．

$$[\lambda_0(s), \lambda_1(s), \cdots, \lambda_n(s)] \begin{bmatrix} P_0(s), & P_1(s), & \cdots & P_n(s), & P_{n+1}(s), & \cdots, & P_{2n-1}(s) \\ 0, & P_0(s), & \cdots & P_{n-1}(s), & P_n(s), & \cdots, & P_{2n-2}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \\ 0, & 0, & \cdots, & P_0(s), & P_1(s), & \cdots & P_{n-1}(s) \end{bmatrix} = 0 \qquad (1,21)$$

ここで $\lambda_0(s), \lambda_1(s), \cdots, \lambda_n(s)$ は，それぞれ s の有理関数を要素とする p 次行ベクトルであり，すべては零でなく，$\lambda_i(\infty)=0$, $i=0,1,\cdots,n$ である．また $P_i(s)$ は，$P_i(s) = D\{(sI-A)^{-1}B\}^{i}(sI-A)^{-1}C$ で定義される行列である．

(1, 21) 式より任意の非負整数 i に対して

$$\left[\lambda_0(s), \lambda_1(s), \cdots, \lambda_n(s)\right] \begin{bmatrix} P_{i+n}(s) \\ P_{i+n-1}(s) \\ \vdots \\ P_i(s) \end{bmatrix} = 0 \qquad (1, 22)$$

となり，これより十分大きな絶体値を持つ s に対して，つぎの式が成立する．

$$\left(\lambda_0(s)+\lambda_1(s)+\cdots+\lambda_n(s)\right) \sum_{i=0}^{\infty} P_i(S) = \left(\lambda_0(s)+\cdots+\lambda_n(s)\right) D(sI-A-B)^{-1}C = 0 \qquad (1, 23)$$

つぎに $\lambda_0(s)+\lambda_1(s)+\cdots+\lambda_n(s)=0$ のときを考えると，

$$\lambda_n(s) = -\lambda_0(s) - \lambda_1(s) - \cdots - \lambda_{n-1}(s). \qquad (1, 24)$$

(1, 24) 式を (1, 21) 式に代入すると，

$$\left[\lambda_0(s), \lambda_1(s), \cdots, \lambda_{n-1}(s)\right] \begin{bmatrix} P_0, & P_1, & \cdots & P_{n-1}, & P_n-P_0, & P_{n+1}-P_1, & \cdots, & P_{2n-1}-P_{n-1} \\ 0, & P_0, & \cdots & P_{n-2}, & P_{n-1}-P_0, & P_n-P_1, & \cdots, & P_{2n-2}-P_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \\ 0, & 0, & \cdots, & P_0, & P_1-P_0, & P_2-P_1, & \cdots, & P_n-P_{n-1} \end{bmatrix} = 0 \qquad (1, 25)$$

(1, 25) 式の行列は，つぎのように変換される．

$$\begin{bmatrix} I, & -I, & 0, & \cdots & 0 \\ 0, & I, & -I, & \cdots & 0 \\ 0, & 0, & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -I \\ 0, & 0, & 0 & \cdots & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0, & P_1, & \cdots & P_{n-1}, & P_n-P_0, & \cdots, & P_{2n-1}-P_{n-1} \\ 0, & P_0, & \cdots, & P_{n-2}, & P_{n-1}-P_0, & \cdots, & P_{2n-2}-P_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0, & 0, & \cdots, & P_0, & P_1-P_0, & \cdots, & P_n-P_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I, & I, & \cdots & I \\ 0, & I, & \cdots & I \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \cdots, & I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P_0, & P_1, & \cdots & P_{n-1}, & P_n, & \cdots & P_{2n-1} \\ 0, & P_0, & \cdots & P_{n-2}, & P_{n-1}, & \cdots & P_{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0, & 0, & \cdots, & P_0, & P_1, & \cdots & P_n \end{bmatrix} \qquad (1, 26)$$

ゆえに (1, 25) 式は，$\lambda_0'(s), \lambda_1'(s), \cdots \lambda_{n-1}'(s)$ によりつぎのように書ける．

$$\left[\lambda_0'(s), \lambda_1'(s), \cdots, \lambda_{n-1}'(s)\right] \begin{bmatrix} P_0, & P_1, & \cdots, & P_{n-1}, & P_n, & \cdots, & P_{2n-1} \\ 0, & P_0, & \cdots, & P_{n-2}, & P_{n-1}, & \cdots, & P_{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0, & 0, & \cdots, & P_0, & P_1, & \cdots, & P_n \end{bmatrix} = 0, \quad (1,27)$$

ここで,

$$\left[\lambda_0(s), \lambda_1(s), \cdots, \lambda_{n-1}(s)\right] = \left[\lambda_0'(s), \lambda_1'(s), \cdots \lambda_{n-1}'(s)\right] \begin{bmatrix} I, & -I, & 0, & \cdots & 0 \\ 0, & I, & -I, & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -I \\ 0, & 0, & 0 & \cdots & I \end{bmatrix}, \quad (1,28)$$

(1,27)式より(1,23)式と同様にして,つぎの式が成立する.

$$\left(\lambda_0'(s) + \lambda_1'(s) + \cdots + \lambda_{n-1}'(s)\right) D(sI - A - B)^{-1} C = 0 \qquad (1,29)$$

以上をくりかえすことにより s の有理関数を要素とする p 次ベクトル, $\lambda(s) \neq 0$ が存在して

$$\lambda(s) D(sI - A - B)^{-1} C = 0 \qquad (1,30)$$

が十分大きな絶対値をもつ s に対して成立する. ゆえに(1,20)式であらわされるシステムは functionally reproducible でない. invertibility についても同様である. (証明終)

1.5 結言

システムがむだ時間を含むとき, ある種の reproducibility と invertibility の性質を持つための条件を求めた. その条件は通常の線形定常システムや線形離散システムにおける条件と密接な関係をもつ. inherent integration の回数を求めること, それが有限であるための条件を求めることは今後の問題である.

第2章　むだ時間を含む線形定常システムの簡約について

2.1 序

入出力関係が等しいシステムのうちで最も簡単なものを求めることは，理論的にも実際的にも重要な問題である．通常の線形定常システムについては，この問題は最小実現を求める問題として論じられており，最小実現は可制御性，可観測性と密接な関係をもつことが明らかにされている.[8)]

むだ時間を含む線形定常システムについても種々の可制御性が定義されそのための条件が求められている.[9),10),11)] これらの可制御性は，システムの動きを決定するのに十分な情報という意味での状態に関するものでは，かならずしもない．また，むだ時間を含む線形定常システムの次元を最小にすることについても考察されており，既約であることがある種の可制御性，可観測性と密接な関係を持つことも示されている.[7)]

本章では，むだ時間を含む線形定常システムが簡潔に表現されているかどうかの指標として，そのシステムを積分器と遅延素子で構成する場合に必要な積分器の個数あるいは遅延素子の個数を用いることにし，それらの個数を最小にすることを考える．また可制御性，可観測性として関数空間可制御性,† 関数空間可観測性と時刻列可制御性，時刻列可観測性を定義し遅延素子の個数あるいは積分器の個数が最小であることが，これらの可制御性，可観測性と密接な関係を持つことを示す．本章の内容は，回路網理論における抵抗端子対数を最小にする問題あるいはリアクタンス素子を最小にする問題，遅延線と集中定数素子によるfilterの実現問題と密接な関係をもっている.[14),15),16)]

本章では，2.2節で述べる理由により1章で扱ったシステムよりも拡張されたシステムを扱う

2.2 むだ時間を含む線形定常システム

(1,1)式であらわされるシステムを積分器と遅延時間hの遅延素子で構成する場合，必要な積分器の個数は次元数のnであるが，遅延素子の個数

† 文献10に見られる．

は陽にはあらわれていない．また(1, 1)式であらわされるシステムの積分器の個数あるいは遅延素子の個数を減少させるとき得られるシステムは，(1,1)式で表現できるとは限らない．そこで本章では(1,1)式を少し拡張した，つぎの式であらわされるシステムを扱うことにする．

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \tilde{A}_1 x(t) + \tilde{A}_2 z(t-h) + \tilde{B}_1 u(t) \\ z(t) = \tilde{A}_3 x(t) + \tilde{A}_4 z(t-h) + \tilde{B}_2 u(t) \\ y(t) = \tilde{C}_1 x(t) + \tilde{C}_2 z(t-h) \end{cases} \qquad (2,1)$$

ここでx, zは，それぞれn次，m次の内部変数ベクトル，uはr次元入力ベクトル，yはp次元出力ベクトル，hはむだ時間を表わす正の定数であり，$\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \tilde{A}_4, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2$は実行列である．本章では，$x(t)$は積分器の値，$z(t)$は遅延素子の入力端の値を示し，(2,1)式のシステムは，n個の積分器とm個の遅延素子で構成されると考え，nを積分器の個数，mを遅延素子の個数と呼ぶことにする．

(1,1)式のシステムは(2,1)式であらわされるシステムに含まれる．

(2,1)式であらわされるシステムは，$x(t_0)$と区分連続な初期関数$z(t)$, $(t_0-h \leq t < t_0)$を決めると，区分的に連続な入力uに対しt_0以降の動きが決定する．

2.3　可制御性と可観測性

本節では可制御性と可観測性について述べる．

遅延素子の状態空間は，長さhの区間の上の関数空間であると考えられるが，それに関連して，つぎのように関数空間可制御性[10]と関数空間可観測性を定義する．[10]

［定義2.1］　(2,1)式であらわされるシステムについて，εを任意の$0<\varepsilon<h$なる定数とし，$x(t_0)=0$, $z(t)=0$, $(t<t_0)$とする．ある時刻t_1が存在して，区間$[0, h]$で定義された任意の無限回微分可能な関数$f(t)$に対して，$z(t)=f(t-t_1)$, $(t_1+\varepsilon \leq t \leq t_1+h)$となるような入力$u$が存在するとき，システムは関数空間可制御であるという．

［定義2.2］　(2,1)式であらわされるシステムについて，εを$0<\varepsilon<h$なる定数とし，$u(t)=0,(t\geq t_0)$，$x(t_0)=0$，$z(t)=0,(t_0-\varepsilon\leq t<t_0)$とし，$z(t)$は$t_0-h\leq t<t_0$で無限回微分可能であるとする．このとき，$y(t)=0,(t\geq t_0)$であることから$z(t)=0,(t<t_0)$が導かれると，システムは関数空間可観測であるという．

積分器の値xに関して，つぎのように時刻列可制御性と時刻列可観測性を定義する．これらは通常の線形定常システムの可制御性，可観測性と密接な関係をもつ．

［定義2.3］　(2,1)式であらわされるシステムについて$x(t_0)=0$，$z(t)=0,(t<t_0)$とする．入力を適当に選ぶことにより，ある時刻t_1以降の時刻列$x(t_1+ih)$，$i=0,1,2,\cdots$を任意の値にできるとき，システムは時刻列可制御であるという．

［定義2.4］　(2,1)式のシステムについて$x(t_0-h)=0$，$z(t)=0,(t<t_0)$ $u(t)=0,(t\geq t_0)$とする．$\sum_{i=0}^{\infty}x_{0i}\delta(t-t_0-ih)$を積分器に入力するとき，$y(t)=0,(t\geq t_0)$となるのは$x_{0i}=0$，$i=0,1,\cdots$である場合に限るとき，システムは時刻列可観測であるという．

つぎにこれらの性質をもつための条件を示す．つぎのように行列を定義する．

$$\begin{cases} F(s)=\tilde{A}_4+\tilde{A}_3(sI-\tilde{A}_1)^{-1}\tilde{A}_2 \\ G(s)=\tilde{B}_2+\tilde{A}_3(sI-\tilde{A}_1)^{-1}\tilde{B}_1 \\ H(s)=\tilde{C}_2+\tilde{C}_1(sI-\tilde{A}_1)^{-1}\tilde{A}_2 \end{cases} \qquad (2,2)$$

$$\begin{cases} \hat{F}(e^{sh})=\tilde{A}_1+\tilde{A}_2(e^{sh}I-\tilde{A}_4)^{-1}\tilde{A}_3 \\ \hat{G}(e^{sh})=\tilde{B}_1+\tilde{A}_2(e^{sh}I-\tilde{A}_4)^{-1}\tilde{B}_2 \\ \hat{H}(e^{sh})=\tilde{C}_1+\tilde{C}_2(e^{sh}I-\tilde{A}_4)^{-1}\tilde{A}_3 \end{cases} \qquad (2,3)$$

$F(s)$，$G(s)$，$H(s)$，$\hat{F}(e^{sh})$，$\hat{G}(e^{sh})$，$\hat{H}(e^{sh})$は，それぞれ$m\times m$，$m\times r$，$p\times m$，$n\times n$，$n\times r$，$p\times n$行列である．

［定理2.1］ i) (2.1)式であらわされるシステムが関数空間可制御であるための必要十分条件は，つぎの式が成立することである．

$$\mathrm{rank}_s \bar{D}(s) = m \tag{2.4}$$

ii) (2.1)式のシステムが関数空間可観測であるための必要十分条件はつぎの式が成立することである．

$$\mathrm{rank}_s \bar{E}(s) = m \tag{2.5}$$

ここで $\bar{D}(s)$, $\bar{E}(s)$ は，つぎのような $m \times mr$, $pm \times m$ 行列である．

$$\bar{D}(s) = \left[G(s), F(s)G(s), \cdots F^{m-1}(s)G(s) \right] \tag{2.6}$$

$$\bar{E}(s) = \begin{bmatrix} H(s) \\ H(s)F(s) \\ \vdots \\ H(s)F^{m-1}(s) \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

（証明） i)の十分性． (2.4)式が成立するとき区間 $[t_0 + h(m-1)+\varepsilon, t_0+mh]$ で $z(t)$ が無限回微分可能な任意の関数 f に等しくなるように u を決める．区間 $[t_0, t_0+mh]$ では，z はつぎのようにあらわされると考えてよい．

$$z = \sum_{i=0}^{m} F^i(s) G(s) e^{-sih} u \tag{2.8}$$

時間領域での表現にするため，$F^j(s)G(s)$ をつぎのようにあらわす．

$$F^j(s)G(s) = \bar{D}_j + \bar{C}_j (sI - \bar{A}_j)^{-1} \bar{B}_j \quad , j = 0, 1, \cdots, m-1 \tag{2.9}$$

ここで，$\bar{D}_j$, $\bar{C}_j$, $\bar{A}_j$, $\bar{B}_j$ は実行列である．さらに $\bar{X}_j(t)$ をつぎのように定義する．

$$\bar{X}_j(t) = e^{\bar{A}_j t}, \quad j = 0, 1, \cdots, m-1 \tag{2.10}$$

$u(t_0) = 0$ のとき，$z(t)$ は $[t_0, t_0+mh]$ でつぎのように書ける．

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \bar{D}_k u(t-kh) + \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_0}^{t-kh} \bar{C}_k \bar{X}_k (t-kh-\tau) \bar{B}_k u(\tau) d\tau, \quad (t_0 \le t \le t_0+mh) \tag{2.11}$$

つぎのように演算子 $\mathcal{A}$ を定義する．$u_0(t), u_1(t), \cdots, u_{m-1}(t)$ を，それぞれ，r 次ベクトルとして，

$$\mathcal{A}(u_0, u_1, \cdots, u_{m-1}) = \sum_{k=0}^{m-1} \bar{D}_k u_{m-1-k}(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_0}^{t} \bar{C}_k \bar{X}_k(t-\tau) \bar{B}_k u_{m-1-k}(\tau) d\tau \qquad (2,12)$$

$\mathcal{A}$ は，$\bar{D}(s)$ であらわされるシステムの入出力関係を時間領域で表現したものである．初期値および，すべての階の初期微係数が零である無限回微分可能な任意の関数 $f(t)$ に対して，(2,4) 式より，

$$\mathcal{A}(u_0, u_1, \cdots, u_{m-1}) = f(t) \qquad (2,13)$$

は，連続解をもつ．[1), 3)] それを $u_j^1(t)$, $j=0,1,\cdots,m-1$ とおく．$u_j^1(t)=0$, $(t \leq t_0,\ t > t_0+h)$, $j=0,1,\cdots,m-1$ とおくことにする．

さて，線形定常システムの可制御領域は時間区間によらないから，つぎの式をみたすような m 個の r 次ベクトル $u_0^2, u_1^2, \cdots, u_{m-1}^2$ が存在する．

$$\begin{cases} u_0^2 = 0 \\ \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \bar{X}_{m-1-k}(\tau) \bar{B}_{m-1-k} u_k^2(\tau) d\tau = -\sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_0}^{t_0+h} \bar{X}_{m-1-k}(kh-jh) \bar{X}_{m-1-k}^{-1}(\tau) \bar{B}_{m-1-k} \\ \quad \cdot u_j^2(\tau) d\tau - \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_0}^{t_0+h} \bar{X}_{m-1-k}(kh-jh) \bar{X}_{m-1-k}^{-1}(\tau) \bar{B}_{m-1-k} u_j^1(\tau) d\tau, \quad k=1,2,\cdots m-1 \\ u_k^2(t) = 0, \ (t > t_0+\varepsilon,\ t \leq t_0), \ k=0,1,2,\cdots,m-1 \end{cases} \qquad (2,14)$$

$u_j^3(t) = u_j^1(t) + u_j^2(t)$, $j=0,1,\cdots,m-1$ とおくと $u_j^3(t)=0$, $(t \leq t_0,\ t > t_0+h)$, $j=0,1,\cdots,m-1$ となり u_j^3 は，つぎの式をみたす．

$$\mathcal{A}(u_0^3, u_1^3, \cdots, u_{m-1}^3) + \sum_{k=0}^{m-2} \bar{C}_k \bar{X}_k(t) \sum_{j=0}^{m-2-k} \int_{t_0}^{t_0+h} \bar{X}_k^{-1}(\tau-(m-1-k-j)h) \bar{B}_k u_j^3(\tau) d\tau = f(t)$$
$$(t_0+\varepsilon \leq t \leq t_0+h), \qquad (2,15)$$

さて，

$$u^4(t) = \sum_{j=0}^{m-1} u_j^3(t-jh) \qquad (2,16)$$

とおき，(2,11) 式に代入すると $u^4(t_0)=0$ より

$$z(t)=\sum_{k=0}^{m-1}\bar{D}_k U^4(t-kh)+\sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_0}^{t-kh}\bar{C}_k\bar{X}_k(t-kh-\tau)\bar{B}_k U^4(\tau)\,d\tau,\ (t_0\leq t\leq t_0+mh) \tag{2,17}$$

となるが，$[t_0+(m-1)h,\ t_0+mh]$ では，つぎのようになる．

$$\begin{aligned}
z(t)=&\sum_{k=0}^{m-1}\bar{D}_k U^3_{m-1}(t-(m-1)h)+\sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_0}^{t-kh}\bar{C}_k\bar{X}_k(t-kh-\tau)\bar{B}_k U^3_{m-1-k}(\tau-(m-1-k)h)d\tau\\
&+\sum_{k=0}^{m-2}\int_{t_0}^{t-kh}\bar{C}_k\bar{X}_k(t-kh-\tau)\bar{B}_k\Big(\sum_{j=0}^{m-2-k}U^3_j(\tau-jh)\Big)d\tau\\
=&\sum_{k=0}^{m-1}\bar{D}_k U^3_{m-1-k}(t-(m-1)h)+\sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_0}^{t-(m-1)h}\bar{C}_k\bar{X}_k(t-(m-1)h-\tau)\bar{B}_k U^3_{m-1-k}(\tau)d\tau\\
&+\sum_{k=0}^{m-2}\sum_{j=0}^{m-2-k}\int_{t_0}^{t-(j+k)h}\bar{C}_k\bar{X}_k(t-(j+k)h-\tau)\bar{B}_k U^3_j(\tau)d\tau\\
=&\sum_{k=0}^{m-1}\bar{D}_k U^3_{m-1-k}(t-(m-1)h)+\sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_0}^{t-(m-1)h}\bar{C}_k\bar{X}_k(t-(m-1)h-\tau)\bar{B}_k U^3_{m-1-k}(\tau)d\tau\\
&+\sum_{k=0}^{m-2}\sum_{j=0}^{m-2-k}\int_{t_0}^{t_0+h}\bar{C}_k\bar{X}_k(t-(j+k)h-\tau)\bar{B}_k U^3_j(\tau)d\tau,\ (t_0+(m-1)h\leq t\leq t_0+mh)
\end{aligned} \tag{2,18}$$

$t-(m-1)h$ を t とおきなおすと (2,18)式の右辺は (2,15)式の左辺と一致する．よって U^4 を入力とすれば $z(t+(m-1)h)=f(t)$, $(t_0+\varepsilon\leq t\leq t_0+h)$, となる．

i)の必要性．(2,4) 式が成立しないとすると，任意の非負整数 i に対して

$$\lambda(s)F^i(s)G(s)=0 \tag{2,19}$$

となるような s の有理関数を要素とする m 次行ベクトル $\lambda(s)\neq 0$ が存在する．$\lambda(\infty)=0$ であるとしてよい．伝達関数が $\lambda(s)$ であるようなシステムに $z(t)$ を入力したとき，零状態応答は零に等しい．今，(2,1) 式のシステムが関数空間可制御であるとすると，ある時刻 t_1 が存在して，$z(t)$ は，$[t_1+\varepsilon,\ t_1+h]$ で任意の無限回微分可能な関数に等しくできる．$\lambda(s)$ であらわされるシステムが $t_1+\varepsilon$ においていかなる状態にあるとしても $[t_1+\varepsilon,\ t_1+h]$ の区間で任意の入力に対して出力が零になるということはない．ゆえに (2,4) 式が成立しないときは関数空間可制御でない．

ii)の十分性　$H(s)F^j(s)$ をつぎのようにあらわす．

$$H(s)F^{j}(s)=\bar{\bar{D}}_j+\bar{\bar{C}}_j(sI-\bar{\bar{A}}_j)^{-1}\bar{\bar{B}}_j\ ,\ j=0,1,\cdots,m-1 \qquad (2,20)$$

ここで $\bar{\bar{D}}_j,\bar{\bar{C}}_j,\bar{\bar{A}}_j,\bar{\bar{B}}_j$ は実行列である．さらに

$$\bar{\bar{X}}_j(t)=e^{\bar{\bar{A}}_j t},\ j=0,1,\cdots,m-1 \qquad (2,21)$$

とおく．

$x(t_0)=0$ であり，初期関数 $z(t),(t_0-h\leq t<t_0)$ が $z(t)=\varphi(t+h),(t_0-h\leq t<t_0)$ とあらわされているとする．ここで $\varphi(t)$ は区間 $[t_0,t_0+h]$ で無限回微分可能であり，$\varphi(t)=0,(t_0+h-\varepsilon\leq t<t_0+h)$ である．零入力応答 $y(t)=0,(t\geq t_0)$ から，$\varphi(t)=0,(t\geq t_0)$ が結論できればよい．

区間 $[t_0,t_0+mh]$ では，(2.1) 式のシステムの零入力応答は，つぎのようにあらわされる．ただし $\varphi(t)=0,(t<t_0,\ t\geq t_0+h-\varepsilon)$ とおく．

$$y(t)=\sum_{j=0}^{m-1}\bar{\bar{D}}_j\varphi(t-jh)+\sum_{j=0}^{m-1}\int_{t_0}^{t-jh}\bar{\bar{C}}_j\bar{\bar{X}}_j(t-jh-\tau)\bar{\bar{B}}_j\varphi(\tau)d\tau,\ (t_0\leq t<t_0+mh) \qquad (2,22)$$

$y(t)=0,(t\geq t_0)$ であるとき，

$$\bar{\bar{D}}_j\varphi(t-jh)+\int_{t_0}^{t-jh}\bar{\bar{C}}_j\bar{\bar{X}}_j(t-jh-\tau)\bar{\bar{B}}_j\varphi(\tau)d\tau=0,\ (t_0+jh\leq t<t_0+(j+1)h),$$
$$j=0,1,\cdots,m-1 \qquad (2,23)$$

となっていることをつぎに示す．$j=0$ で成立することは明らかである．$j\leq k$ で成立しているとすると

$$\int_{t_0}^{t_0+h-\varepsilon}\bar{\bar{C}}_j\bar{\bar{X}}_j(t-jh-\tau)\bar{\bar{B}}_j\varphi(\tau)d\tau=0\ ,\ (t_0+(j+1)h-\varepsilon\leq t<t_0+(j+1)h)$$
$$j=0,1,\cdots,k \qquad (2,24)$$

となるが，(2,24) 式は t の解析関数であるので任意の t について成立する．
よって，$$\int_{t_0}^{t_0+h}\bar{\bar{C}}_j\bar{\bar{X}}_j(t-jh-\tau)\bar{\bar{B}}_j\varphi(\tau)d\tau=0,\ (t\geq t_0+(j+1)h),\ j=0,1,\cdots,k \qquad (2,25)$$

となる．(2,25) 式を用いると (2,22) 式は，$t_0+(k+1)h\leq t<t_0+(k+2)h$ では，

$$y(t)=\bar{\bar{D}}_{k+1}\varphi(t-(k+1)h)+\sum_{j=0}^{k+1}\int_{t_0}^{t-jh}\bar{\bar{C}}_j\bar{\bar{X}}_j(t-jh-\tau)\bar{\bar{B}}_j\varphi(\tau)d\tau=0,\ (t_0+(k+1)h\leq t<t_0+(k+2)h) \qquad (2,26)$$

これより

$$\bar{\bar{D}}_{k+1}\varphi(t-(k+1)h)+\int_{t_0}^{t_0-(k+1)h}\bar{\bar{C}}_{k+1}\bar{\bar{X}}_{k+1}(t-(k+1)h-\tau)\bar{\bar{B}}_{k+1}\varphi(\tau)d\tau=0,$$
$$(t_0+(k+1)h\leq t<t_0+(k+2)h),\quad(2,27)$$

となり，(2, 23)式は $k+1$ でも成立する．以上により(2, 23)式が導かれた．(2,23)式で $t-jh$ を新らしく t とおくと，

$$\bar{\bar{D}}_j\varphi(t)+\int_{t_0}^{t}\bar{\bar{C}}_j\bar{\bar{X}}_j(t-\tau)\bar{\bar{B}}_j\varphi(\tau)\,d\tau=0,\ (t_0\leq t<t_0+h),\ j=0,1,\cdots,m-1\quad(2,28)$$

となる．(2, 28)式は，伝達関数が $\bar{E}(s)$ であるようなシステムに $\varphi(t)$ を入力した時，その零状態応答が零であることを示す．ゆえに(2, 5)式より，$\varphi(t)=0$, $(t_0\leq t<t_0+h)$ が結論される[1), 3)]．

ii)の必要性． (2, 5)式が成立しないとすると任意の非負整数 i に対して

$$H(s)F^i(s)\eta(s)=0,\quad(2,29)$$

となるような s の有理関数を要素とする m 次列ベクトル $\eta(s)\neq0$ が存在する．$\eta(\infty)=0$ であるとしてよい．伝達関数が $\eta(s)$ であるようなシステムの零状態応答 $w(t)$ で，無限回微分可能であり，$w\neq0$, $w(t)=0$, $(t\leq t_0,\ t\geq t_0+h-\varepsilon)$ となるようなものが存在する．$z(t)=w(t+h)$, $(t_0-h\leq t<t_0)$ とおいたとき，(2, 1)式であらわされるシステムの零入力応答は零に等しい．ゆえに(2, 5)式が成立しないときは関数空間可観測でない． （証明終）

［定理2.2］ i) (2, 1)式であらわされるシステムが時刻列可制御であるための必要十分条件は，つぎの式が成立することである．

$$\mathrm{rank}_e\,\hat{D}(e^{sh})=n\quad(2,30)$$

ii) (2, 1)式であらわされるシステムが時刻列可観測であるための必要十分条件は，つぎの式が成立することである．

$$\mathrm{rank}_e\,\hat{E}(e^{sh})=n\quad(2,31)$$

ここで rank_e は e^{sh} の有理関数体の上での行列の階数をあらわし，$\hat{D}(e^{sh})$ $\hat{E}(e^{sh})$ は，つぎのような $n\times nr$, $pn\times n$ 行列である．

$$\hat{D}(e^{sk})=\left[\hat{G}(e^{sk}),\hat{F}(e^{sk})\hat{G}(e^{sk}),\cdots,\hat{F}^{n-1}(e^{sk})\hat{G}(e^{sk})\right] \tag{2,32}$$

$$\hat{E}(e^{sk})=\begin{bmatrix}\hat{H}(e^{sk})\\ \hat{H}(e^{sk})\hat{F}(e^{sk})\\ \vdots\\ \hat{H}(e^{sk})\hat{F}^{n-1}(e^{sk})\end{bmatrix} \tag{2,33}$$

(証明)　i)の十分性．(2,30)式より後述の定理2.3を用いると，e^{sk}の有理関数を要素とする任意のn次ベクトル$\lambda(e^{sk})$に対して，

$$\lambda(e^{sk})(sI-\hat{F}(e^{sk}))^{-1}\hat{G}(e^{sk})=0, \tag{2,34}$$

ならば

$$\lambda(e^{sk})=0 \tag{2,35}$$

である．

$$x=(sI-\hat{F}(e^{sk}))^{-1}\hat{G}(e^{sk})u \tag{2,36}$$

であるが，これをつぎのようにあらわす．

$$(sI-\hat{F}(e^{sk}))^{-1}\hat{G}(e^{sk})=\tilde{J}(s)+\tilde{H}(s)(e^{sk}I-\tilde{F}(s))^{-1}\tilde{G}(s), \tag{2,37}$$

ここで$\tilde{J}(s)$, $\tilde{H}(s)$, $\tilde{F}(s)$, $\tilde{G}(s)$は，それぞれ分母の次数が分子の次数より小さくないようなsの有理関数を要素とする行列であり，$\tilde{F}(s)$は$m'\times m'$行列であるとする．

非負整数lに対して，つぎのように$n(l+1)\times(l+m'+1)r$行列$\tilde{M}_l(s)$を定義する．

$$\tilde{M}_l(s)=\begin{bmatrix}\tilde{J}, & \tilde{H}\tilde{G}, & \cdots, & \tilde{H}\tilde{F}^{l-1}\tilde{G}, & \cdots, & \tilde{H}\tilde{F}^{l+m'-1}\tilde{G}\\ 0, & \tilde{J}, & \cdots & \tilde{H}\tilde{F}^{l-2}\tilde{G}, & \cdots, & \tilde{H}\tilde{F}^{l+m'-2}\tilde{G}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0, & 0, & \cdots, & \tilde{J}, & \cdots, & \tilde{H}\tilde{F}^{m'-1}\tilde{G}\end{bmatrix} \tag{2,28}$$

$\tilde{M}_l(s)$の行が実数体の上で一次独立であることが容易に証明できる．

非負整数iに対して$n(i+1)\times r(i+1)$行列$\hat{M}_i(s)$をつぎのように定義する．

$$\begin{cases} \hat{M}_0(s) = \hat{\tilde{J}}(s) \\ \hat{M}_i(s) = \begin{bmatrix} \tilde{J}, \tilde{H}\tilde{G}, \cdots, \tilde{H}\tilde{F}^{i-1}\tilde{G} \\ 0, \tilde{J}, \cdots, \tilde{H}\tilde{F}^{i-2}\tilde{G} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0, 0, \cdots, \tilde{J} \end{bmatrix}, \quad (i \geq 1) \end{cases} \tag{2,39}$$

$\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{nm'+m'}$ をおのおの n 次実行ベクトルとすると

$$[\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{nm'+m'}]\, \hat{M}_{nm'+m'}(s) = 0 \tag{2.40}$$

ならば

$$\lambda_0 = 0. \tag{2,41}$$

となっていることが，つぎのように証明できる．今，逆に，$\lambda_0 \neq 0$ なる n 次実行ベクトル $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{nm'+m'}$ が存在して $\bar{\lambda} = [\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{nm'+m'}]$ とおくと，

$$\bar{\lambda}\, \bar{M}_{nm'+m'}(s) = 0 \tag{2,42}$$

となっているとする．このとき $j = 1, 2, \cdots, nm'+m'$ に対して，

$$\bar{\lambda}_j = [0_n, 0_n, \cdots, 0_n, \lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{nm'+m'-j}] \tag{2,43}$$

とおくと

$$\bar{\lambda}_j \hat{M}_{nm'+m'}(s) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, nm'+m' \tag{2,44}$$

となる．ここで 0_n は n 次零ベクトルである．

$$\bar{\bar{\lambda}} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} \\ \bar{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \bar{\lambda}_{nm'+m'} \end{bmatrix} \tag{2,45}$$

とおくと，$\lambda_0 \neq 0$ であるから $\bar{\bar{\lambda}}$ の行は独立である．$\bar{\bar{\lambda}}$ の右側から nm' 列をとり出した行列の行は一次従属であるから $nm'+m'+1$ 次行ベクトル $\mu \neq 0$ が存在して，

$$\mu \bar{\bar{\lambda}} = [\tilde{\lambda} \vdots \underbrace{0 \cdots 0}_{nm'\text{個}}] \tag{2,46}$$

となる．ここで$\tilde{\lambda}$は零ではない．よって，

$$[\tilde{\lambda} \vdots 0 \cdots 0]\hat{M}_{nm'+m'} = 0, \quad \tilde{\lambda} \neq 0 \tag{2.47}$$

となるが，これは

$$\tilde{\lambda}\tilde{M}_{nm'}(s) = 0, \quad \tilde{\lambda} \neq 0 \tag{2.48}$$

を意味する．よって(2.40)式が成立するとき，$\lambda_0 = 0$でなければならない．

以上により

$$\begin{bmatrix} R^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

は，伝達関数が$\hat{M}_{nm'+m'}(s)$であるシステムの可到達領域に含まれる．ゆえに，任意の$v_0 \in R^n$に対して$u_0, u_1, \cdots, u_{nm'+m'}$, $u_j(t) = 0$, $(t \leq t_0 + \varepsilon, t \geq t_0 + h - \varepsilon)$, $(j = 0, 1, \cdots, nm'+m')$なる$r$ベクトルが存在して，$(0 < \varepsilon < \frac{1}{2}h)$,

$$\begin{bmatrix} u_{nm'+m'} \\ u_{nm'+m'-1} \\ \vdots \\ u_1 \\ u_0 \end{bmatrix}$$

を$\hat{M}_{nm'+m'}(s)$なるシステムに入力した時，その零状態応答の$t_0 + h$での値が

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる．

rベクトルu'を，

$$u'(t) = \sum_{j=0}^{nm'+m'} u_j(t - jh) \tag{2.49}$$

とおき，(2.1)式であらわされるシステムに入力すると，

$$\begin{cases} x(t_0+jh)=0, \quad (j=0,1,\cdots,nm'+m') \\ x(t_0+(nm'+m'+1)h)=v_0 \end{cases} \tag{2,50}$$

となることをつぎに示す．
伝達関数が $\tilde{H}(s)\tilde{F}^{j}(s)\tilde{G}(s)$ であるシステムに u_i を入力したときの零状態応答の $t=t_1$ での値を $\tilde{H}\tilde{F}^{j}\tilde{G}u_i\big|_{t=t_1}$ であらわすことにする．
$t\leq t_0+(nm'+m'+1)h$ において x はつぎのようにあらわされる．

$$\begin{aligned} x &= \Big(\tilde{J}+\sum_{i=0}^{nm'+m'} e^{-sih}\tilde{H}\tilde{F}^{i-1}\tilde{G}\Big)\Big(\sum_{i=0}^{nm'+m'} e^{-sih}u_i\Big) \\ &= \tilde{J}u_0+\sum_{k=1}^{nm'+m'} e^{-skh}\Big(\tilde{J}u_k+\sum_{j=0}^{k-1}\tilde{H}\tilde{F}^{k-1-j}\tilde{G}u_j\Big), \\ &\qquad (t\leq t_0+(nm'+m'+1)h) \end{aligned} \tag{2,51}$$

$A_F, B_F, C_F, J_F, A_G, B_G, C_G, J_G$ を実行列として $\hat{F}(e^{sh}), \hat{G}(e^{sh})$ を，つぎのようにあらわす．

$$\begin{cases} \hat{F}(e^{sh}) = J_F + C_F(e^{sh}I-A_F)^{-1}B_F \\ \hat{G}(e^{sh}) = J_G + C_G(e^{sh}I-A_G)^{-1}B_G \end{cases} \tag{2,52}$$

すると，$\tilde{J}, \tilde{F}, \tilde{G}, \tilde{H}$ は，つぎのようにあらわされる．

$$\begin{cases} \tilde{J}(s) = (sI-J_F)^{-1}J_G \\ \tilde{F}(s) = \begin{bmatrix} A_G, & 0 \\ B_F(sI-J_F)^{-1}C_G, & A_F+B_F(sI-J_F)^{-1}C_F \end{bmatrix} \\ \tilde{G}(s) = \begin{bmatrix} B_G \\ B_F(sI-J_F)^{-1}J_G \end{bmatrix} \\ \tilde{H}(s) = \big[\,(sI-J_F)^{-1}C_G,\ (sI-J_F)^{-1}C_F\,\big] \end{cases} \tag{2,53}$$

$u_0, u_1, \cdots, u_{nm'+m'}$ の作り方から

$$\begin{cases} \tilde{J} u_0 \Big|_{t=t_0+h} = 0 \\ \left(\tilde{J} u_j + \sum_{i=0}^{j-1} \tilde{H} \tilde{F}^i \tilde{G} u_{j-1-i} \right) \Big|_{t=t_0+h} = 0, \ (j=1,2,\cdots, nm'+m'-1) \end{cases} \qquad (2.54)$$

となっているが，(2, 53) 式を用いると，

$$\tilde{J} u_j + \sum_{i=0}^{j-1} \tilde{H} \tilde{F}^i \tilde{G} u_{j-1-i}$$

$$= (sI - J_F)^{-1} \left\{ J_G u_j + \sum_{l=0}^{j-1} C_G A_G^l B_G u_{j-1-l} + C_F A_F^{j-1} B_F \tilde{J} u_0 + \sum_{k=0}^{j-2} C_F A_F^k B_F \left(\tilde{J} u_{j-1-k} + \sum_{l=0}^{j-2-k} \tilde{H} \tilde{F}^l \tilde{G} u_{j-2-k-l} \right) \right\}$$

$$(j=1,2,\cdots, nm'+m') \qquad (2.55)$$

であることから (2, 54) 式は，継続接続したシステムのサブシステムの状態が $t=t_0+h$ で零になることを意味し，$u_j(t)=0$, $(t \geq t_0+h)$, $j=0,1,\cdots,nm'+m'$ より，(2, 54) 式は $t \geq t_0+h$ で成立する．ゆえに (2, 50) 式が成立する．$x(t_0+(nm'+m'+k)h)$, $k=2,3,\cdots$ については明らかに任意にできる．

i) の必要性．(2, 30) 式が成立しないとすると，後述の定理 2.3 より，e^{-sh} の多項式を要素とする n 次行ベクトル $\lambda(e^{sh}) = \sum_{i=0}^{l} \lambda_i e^{-sih}$, $(\lambda_0 \neq 0$, $\lambda_l \neq 0)$ が存在して，つぎの式が成立する．

$$\lambda(e^{sh}) (sI - \hat{F}(e^{sh}))^{-1} \hat{G}(e^{sh}) = 0 \qquad (2, 56)$$

これより

$$(\lambda_0 + \lambda_1 e^{-sh} + \cdots + \lambda_l e^{-slh}) x = 0 \qquad (2.57)$$

であるが，x が $t_1 + jh$, $(j=0,1,\cdots,l)$ で任意の値をとりうるとすると，(2, 57) 式の左辺の $t=t_1+lh$ での値は零でない場合があるはずである．ゆえに (2, 30) 式が成立しない場合は時刻列可制御でない．

ii) の十分性　(2, 1) 式のシステムが時刻列可観測でないとすると，(2, 31) 式が成立しないことを示す．時刻列可観測でないとすると $x(t_0-0)=0$, $z(t)=0$, $(t<t_0)$, $u(t)=0$, $(t \geq t_0)$ であるとき $\sum_{i=0}^{\infty} x_{0i} \delta(t-t_0-ih)$, $x_{00} \neq 0$ を積

分器に入力しても y は零に等しい．ここで x_{0i} は n 次実ベクトルである．

任意の正整数 l に対して $\hat{H}(sI-\hat{F})^{-1}(\sum_{i=0}^{l} x_{0i} e^{-sih})$ のインパルス応答は，$t_0 \leq t < t_0+(l+1)h$ で零に等しい．さて $\hat{H}(sI-\hat{F})^{-1}$ をつぎのように表現する．

$$\hat{H}(e^{sh})(sI-\hat{F}(e^{sh}))^{-1} = \bar{J}(s)+\bar{H}(s)(e^{sh}I-\bar{F}(s))^{-1}\bar{G}(s) \qquad (2,58)$$

ここで，$\bar{J}, \bar{H}, \bar{F}, \bar{G}$ は分母の次数が分子の次数より小さくない s の有理関数を要素とする行列であり，$\bar{F}$ は $m'' \times m''$ 行列であるとする．

区間 $[t_0, t_0+(l+1)h]$ では，

$$\bar{J}(s)x_{00}+\sum_{i=0}^{l} e^{-sih}\left(\bar{J}(s)x_{0i}+\sum_{j=0}^{i-1}\bar{H}(s)\bar{F}^{j}(s)\bar{G}(s)x_{0\,i-j-1}\right) \qquad (2,59)$$

であらわされるシステムのインパルス応答は零に等しい．ゆえに区間 $(t_0+ih, t_0+(i+1)h)$ で $\bar{J}x_{0i}+\sum_{j=0}^{i-1}\bar{H}\bar{F}^{j}\bar{G}x_{0\,i-j-1}$ であらわされるシステムのインパルス応答は零に等しい．このことよりつぎの式が導かれる．

$$\begin{bmatrix} \bar{J}, & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{H}\bar{G}, & \bar{J} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{H}\bar{F}^{l-1}\bar{G}, & \bar{H}\bar{F}^{l-2}\bar{G}, & \cdots, & \bar{J} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{00} \\ x_{01} \\ \vdots \\ x_{0l} \end{bmatrix} = 0 \qquad (2,60)$$

ここで l は任意の正整数である．(2,60)式で $l=nm''+m''$ とおくと定理 2.2 の i)の十分性の証明で用いたのと同じ議論により，つぎの式をみたす $n(nm''+1)$ 次列実ベクトル $\tilde{x}$ が存在する．$\tilde{x} \neq 0$

$$\begin{bmatrix} \bar{J}, & 0, & \cdots & 0 \\ \bar{H}\bar{G}, & \bar{J}, & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{H}\bar{F}^{nm''-1}\bar{G}, & \bar{H}\bar{F}^{nm''-2}\bar{G}, & \cdots & \bar{J} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{H}\bar{F}^{nm''+m''-1}\bar{G}, & \bar{H}\bar{F}^{nm''+m''-2}\bar{G}, & \cdots, & \bar{H}\bar{F}^{m''-1}\bar{G} \end{bmatrix}\tilde{x} = 0 \qquad (2.61)$$

$\tilde{x}$ を n 次列ベクトル x'_{0j}, $j=0,1,\cdots,nm''$ によりつぎのように書く．

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x'_{00} \\ x'_{01} \\ \vdots \\ x'_{0nm''} \end{bmatrix}. \qquad (2,62)$$

$$\eta'(e^{sh}) = \sum_{j=0}^{nm''} x'_{0j} e^{-sjh} \qquad (2,63)$$

とおいて（2,59）式にほどこすと（2,61）式より，

$$\hat{H}(e^{sh})(sI-\hat{F}(e^{sh}))^{-1}\eta'(e^{sh}) = 0 \qquad (2,64)$$

となる．後述の定理2.3より（2,64）式は$\hat{C}\eta'=0$，$\eta'\neq 0$を意味し（2,31）式は成立しない．

ii）の必要性．（2,31）式が成立しないときe^{-sh}の多項式を要素とするn次ベクトル$\eta(e^{sh}) = \sum_{i=0}^{l} \eta_i e^{-sih}$，$\eta_0 \neq 0$が存在して，

$$\hat{H}(e^{sh})(sI-\hat{F}(e^{sh}))^{-1}\eta(e^{sh}) = 0 \qquad (2,65)$$

となることが後述の定理2.3よりわかる．ゆえに$\sum_{i=0}^{l} \eta_i \delta(t-t_0-ih)$を積分器に加えたとき出力yは零に等しい．よって(2,31)式が成立しないとき時刻列可観測測でない　（証明終）

2.4　等価性，最小性と可制御性，可観測性

入出力関係が等しいシステムは互いに等価であるといわれるが，等価なシステムのうち積分器の個数あるいは遅延素子の個数の最小数を求めること，および，それらが最小個数であるシステムの性質を考える．

（2,1）式であらわされるシステムを簡単に，

$$S = \begin{pmatrix} n, & \tilde{A}_1, & \tilde{A}_2, & \tilde{B}_1 \\ m, & \tilde{A}_3, & \tilde{A}_4, & \tilde{B}_2 \\ & \tilde{C}_1, & \tilde{C}_2 & \end{pmatrix}$$

と書くことにする．必要があれば下添字をつけ，

$$S_j=\begin{pmatrix} n_j & \tilde{A}_{1j} & \tilde{A}_{2j} & \tilde{B}_{1j} \\ m_j & \tilde{A}_{3j} & \tilde{A}_{4j} & \tilde{B}_{2j} \\ & \tilde{C}_{1j} & \tilde{C}_{2j} & \end{pmatrix}$$

と書き，このシステムにおいて(2,2)式，(2,3)式，(2,6)式，(2,7)式，(2,32)式，(2,33)式で定義される $F, G, H, \hat{F}, \hat{G}, \hat{H}, \bar{D}, \bar{E}, \hat{D}, \hat{E}$ を，それぞれ，$F_j, G_j, H_j, \hat{F}_j, \hat{G}_j, \hat{H}_j, \bar{D}_j, \bar{E}_j, \hat{D}_j, \hat{E}_j$ と書くことにする.

［定理2.3］　つぎの i), ii) はともにシステム S_1, S_2 が等価であるための必要十分条件である.

i)
$$\begin{cases} C_{11}(sI-A_{11})^{-1}B_{11} = C_{12}(sI-A_{12})^{-1}B_{12} \\ H_1(s)F_1^k(s)G_1(s) = H_2(s)F_2^k(s)G_2(s), \quad k=0,1,\cdots,m_1+m_2-1 \end{cases} \tag{2.66}$$

ii)
$$\begin{cases} C_{21}(e^{sh}I-A_{41})^{-1}B_{21} = C_{22}(e^{sh}I-A_{42})^{-1}B_{22} \\ \hat{H}_1(e^{sh})\hat{F}_1^k(e^{sh})\hat{G}_1(e^{sh}) = \hat{H}_2(e^{sh})\hat{F}_2^k(e^{sh})\hat{G}_2(e^{sh}), \quad k=0,1,\cdots,n_1+n_2-1 \end{cases} \tag{2.67}$$

（証明）　i)の必要性．任意の入力に対して $t_0 \le t < t_0+h$ で2つのシステムの出力が等しいことから(2,66)式の上の式が導かれる．同様に $i=1,2,\cdots$ について $t_0 \le t < t_0+ih$ で出力が等しいことから(2,66)式の下の式が容易に証明できる.

i)の十分性．(2,66)式より任意の非負整数 i について $H_1F_1^iG_1=H_2F_2^iG_2$ となることが容易に証明できる．これより任意の区間で出力は等しい.

ii)　(2,66)式と(2,67)式は同値であることが，それぞれを展開して係数を比較することにより容易に証明できる.　（証明終）

定理2.3より積分器の個数あるいは遅延素子の個数を減少させることは，通常の有限次元線形定常システムの簡約と同様な方法により可能である.

［定理2.4］　i)　システム S と等価なシステムの遅延素子の最小個数 m_0 は，つぎのようにあらわされる.

$$m_0 = \operatorname{rank}_s \bar{E}(s)\bar{D}(s) \tag{2.68}$$

ii) システムSと等価なシステムの積分器の最小個数n_0は,つぎのようにあらわされる.

$$n_0 = \mathrm{rank}_e \hat{E}(e^{sh})\hat{D}(e^{sh}) \qquad (2.69)$$

(証明)　i) m_0個より少ない個数の遅延素子よりなるシステムでSと等価なものは存在しないことが,通常の線形定常システムにおける簡約と同様の方法により定理2.3を用いて証明できる.m_0個の遅延素子よりなるシステムでSと等価なものを導びくアルゴリズムが存在する.例えば,文献12には任意の体の上で定義された有限次元線形システムの簡約アルゴリズムが紹介されているが,そのアルゴリズムは,任意の環の上ででも働くことが容易に証明される.ii)についても同様である.　(証明終)

定理2.1,定理2.2,定理2.4より,つぎの定理は明らかである.

[定理2.5]　i) システムSが等価なシステムのうちで遅延素子の個数が最小のものであるための必要十分条件は,システムSが関数空間可制御,かつ,関数空間可観測となることである.

ii) システムSが等価なシステムのうちで積分器の個数が最小のものであるための必要十分条件は,システムSが時刻列可制御,かつ,時刻列可観測となることである.

互いに等価なシステムのうちで遅延素子の個数が最小であるようなシステムの間の関係,および積分器の個数が最小であるようなシステムの間の関係は,通常の線形定常システムの場合と全く同様にして,つぎのように与えられる.証明は省略する.

[定理2.6]　i) システムS_1, S_2,が等価であり,かつ,等価なシステムのうちで遅延素子の個数が最小なシステムであるとする.このときsの有理関数を要素とする正則行列$T(s)$が存在して,つぎの関係式が成立する.

$$\begin{cases} F_1(s) = T(s)F_2(s)T^{-1}(s) \\ G_1(s) = T(s)G_2(s) \\ H_1(s) = H_2(s)T^{-1}(s) \end{cases} \qquad (2.70)$$

ii) システム S_1, S_2 が互いに等価であり，かつ，等価なシステムのうちで積分器の個数が最小なシステムであるとする．このとき e^{sh} の有理関数を要素とする正則行列 $\hat{T}(e^{sh})$ が存在して，つぎの関係式が成立する．

$$\begin{cases} \hat{F}_1(e^{sh}) = \hat{T}(e^{sh})\hat{F}_2(e^{sh})\hat{T}^{-1}(e^{sh}) \\ \hat{G}_1(e^{sh}) = \hat{T}(e^{sh})\hat{G}_2(e^{sh}) \\ \hat{H}_1(e^{sh}) = \hat{H}_2(e^{sh})\hat{T}^{-1}(e^{sh}) \end{cases} \tag{2.71}$$

2.5 結言

むだ時間を含む線形定常システムについて２種類の可制御性，可観測性を定義し，それらがシステムの積分器の個数あるいは遅延素子の個数の最小性と密接な関係をもつことを示した．また，システムの積分器の個数あるいは遅延素子の個数を減少させることに関しては，むだ時間を含む線形定常システムを２変数の関数と考えることにより，任意の体の上で定義された有限次元システムについての簡約の手法が適用できることを示した．本章で述べた可制御性，可観測性と安定化可能性との間にどのような関係があるのか明らかでない．[13] 積分器と遅延素子の両方の個数を減少させる方法は，わからない．また，最小個数の積分器あるいは遅延素子より構成されるシステムのうちに安定なものがあるかどうか明らかでない．

むすび

むだ時間を含む線形定常システムの可制御性,可観測性と簡約に関する問題を考察した.

1章では,いくつかの出力関数可制御性と入力関数可観測性を定義し,そのための条件を求めた. inherent integration に関しては,まだ考察されていない.

2章では2種類の可制御性と可観測性を定義し,そのための条件を求めた.また等価なシステムのうちの積分器の個数の最小数および遅延素子の個数の最小数を求め,最小個数の積分器あるいは遅延素子より構成されるシステムを求める方法についても紹介した.積分器あるいは遅延素子の個数が最小であることが上で述べた可制御性可観測性と必要十分であることを示し,最小個数の積分器をもつシステムの間および最小個数の遅延素子をもつシステムの間には,通常の線形定常システムの場合と同様な関係があることを示した.遅延素子あるいは積分器の個数が,等価なシステムのうちで最小であるような,安定なシステムが存在するかどうか明らかでない.また,積分器と遅延素子の両方の個数を減少させる方法を求めることは今後に残されている.

謝　辞

日ごろ御指導いただく藤沢俊男教授に感謝する．有益なご助言をいただいた保田豊助教授，前田浩一助手，井上雄二郎助手熱心にご検討下さった森沢清氏，山田一氏，森井茂樹氏に感謝する．

参考文献

1) R. W. Brockett & M. D. Mesarović : The Reproducibility of Multivariable Systems, J. Math. Anal. Appl., vol. 11, 548/563, July (1965)

2) J. L. Massey & M. K. Sain : Inverses of Linear Sequential Circuits, IEEE Trans. Computer, C-17-4, 330/337, April (1968)

3) M. K. Sain & J. L. Massey : Invertibility of Linear time-invariant Dynamical Systems, IEEE Trans. Automatic Control, AC-14-2, 141/149, April (1969)

4) L. M. Silverman : Inversion of Multivariable Systems, IEEE Trans. Automatic Control, AC-15, 270/276, June (1969)

5) S. P. Panda : A Direct proof of Equivalence of Invertibility of Multivariable Linear Systems, Int. J. Control, 13-5, 931/936, (1971)

6) R. Bellman & K. L. Cooke : Differential-Difference Equations, P181 Academic Press, New York (1963)

7) 前田治一：むだ時間を含む線形定常システムの既約性，計測自動制御学会論文集，8-1，87/95 （昭47·2）

8) R. W. Brockett : Finite Dimensional Linear Systems, John Wiley, New York, 1970

9) L. Weiss : On the Controllability of Delay Differential Systems, SIAM J. Control, vol. 5, No. 4, 575/587, 1967

10) A. K. Choudhury : A Contribution to the Controllability of time lag Systems, Int. J. Control, vol. 17, No. 2, 365/373, 1973

11) R. B. Zmood : On Euclidean space and Function space Controllability of control systems with delay, ORA 026450, Technical Report, Computer, Information and Control Engineering, College of Engineering, University of Michigan

12) R. E. Kalman, et. al. : Topics in mathematical system theory, P288 McGraw-Hill, New York, 1969

13) 前田治一 & 山田一：むだ時間を含む線形システムの安定化について，回路とシステム理論研資 CST-73-50 （1973-12）

14) 大野克郎 & 安浦亀之助：S行列による多端子網構成理論，電気通信学会雑誌，第36巻10号，564/570，昭28-10

15) T. Koga : Synthesis of a resistively terminated cascade of uniform lossless transmission lines and lumped passive two-ports, IEEE Trans. Circuit Theory, Vol.18, 444/455, July 1971

16) D. C. Youla, J. D. Rhodes & P. C. Marston : Driving-point synthesis of resister-terminated cascades of lumped lossless passive 2-ports and commensurate TEM lines, IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-19, No. 6, 648/664, Nov. 1972