



Title	塑性節点法の開発とその応用に関する研究
Author(s)	藤久保, 昌彦
Citation	大阪大学, 1988, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/1344
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

塑性節点法の開発とその応用に関する研究

昭和 62 年 10 月

藤 久 保 昌 彦

目次

緒論	1
 第 1 編 塑性節点法の理論	
第 1 章 静的弾塑性解析理論	6
1.1 緒言	6
1.2 塑性節点法の基本的仮定	6
1.3 塑性条件の種類—応力表示型塑性条件と合応力表示型塑性条件—	8
1.4 塑性化判定点の塑性条件と要素の塑性変形	9
1.4.1 塑性化判定点の塑性条件	9
1.4.2 塑性化した要素の仮想仕事と塑性節点変位	11
1.5 静的弾塑性剛性方程式の定式化	14
1.5.1 微小変形の場合の剛性方程式	14
1.5.2 大変形の場合の剛性方程式	16
1.6 要素の塑性変形と剛性に関する考察	19
1.6.1 塑性変形と弾塑性剛性マトリックスの精度と収束性	19
1.6.2 塑性関節、塑性関節線およびすべり線機構と塑性節点変位	20
1.6.3 塑性節点法の理論的位置づけ	24
1.7 結言	24
第 2 章 歪硬化体の弾塑性解析理論	26
2.1 緒言	26
2.2 塑性条件と歪硬化係数	27
2.2.1 応力表示型塑性条件と歪硬化係数	27
2.2.2 合応力表示型塑性条件と歪硬化係数	28
(1) 断面の塑性挙動の取り扱い	28
(2) 梁・柱要素	29
(3) シェル要素	36
2.3 歪硬化体の弾塑性剛性方程式の定式化	39

2.3.1 塑性条件および塑性負荷条件	39
2.3.2 節点変位歪硬化係数の導出	41
(1) 基本手順	41
(2) 1次元要素	42
(3) 2次元、3次元要素	44
2.3.3 弾塑性剛性方程式	45
2.4 結言	47
第3章 熱弾塑性解析理論	48
3.1 緒言	48
3.2 温度変化を考慮した弾性剛性方程式の定式化	48
3.2.1 応力と歪の増分関係式	48
3.2.2 弾性剛性方程式	50
3.3 温度変化を考慮した弾塑性剛性方程式の定式化	51
3.3.1 塑性条件および塑性負荷条件	51
3.3.2 弾塑性剛性方程式	52
3.4 結言	54
第4章 動的弾塑性解析理論	55
4.1 緒言	55
4.2 動的影響を考慮した弾性剛性方程式の定式化	55
4.2.1 動的外力と節点力	55
(1) 慣性力	55
(2) 減衰力	56
(3) 全節点力	57
4.2.2 動的弾性剛性方程式	57
4.3 動的影響を考慮した弾塑性剛性方程式の定式化	58
4.3.1 動的外力と節点力	58
(1) 慣性力	58
(2) 減衰力	60
(3) 全節点力	60
4.3.2 動的弾塑性剛性方程式	61

4.4 結言	64
第5章 歪硬化体の動的熱弾塑性解析理論	65
5.1 緒言	65
5.2 弾性剛性方程式	65
5.3 弾塑性剛性方程式の定式化	66
5.3.1 塑性条件および塑性負荷条件	66
5.3.2 弾塑性剛性方程式	67
5.4 結言	71
第6章 径間荷重を受ける骨組構造物の静的弾塑性解析理論	72
6.1 緒言	72
6.2 要素径間荷重と要素内内力	73
6.3 弾塑性剛性方程式の定式化	75
6.3.1 塑性条件および塑性負荷条件	75
6.3.2 径間塑性関節を有する要素の塑性変形	76
(1) 塑性節点変位の定式化	76
(2) 変分原理を用いた塑性変形特性の考察	79
6.3.3 弾塑性剛性方程式	81
6.4 要素径間変位の計算法	84
6.4.1 径間たわみ	84
6.4.2 径間軸変位	86
6.5 径間塑性関節の移動	86
6.6 結言	87

第2編 塑性節点法による解析

第7章 代表的な有限要素への塑性節点法の適用法	88
7.1 緒言	88
7.2 平面要素	88
7.2.1 一様歪三角形要素	89
7.2.2 長方形双1次要素	91

7.3 板曲げ要素	94
7.3.1 Cloughらの適合三角形要素	94
7.3.2 Bazeleyらの非適合三角形要素	97
7.3.3 Morleyの非適合三角形要素	100
7.4 3次元塊体要素	104
7.4.1 一様歪四面体要素	104
7.4.2 8節点六面体アイソパラメトリック要素	107
7.5 結言	109
第8章 完全弾塑性体の静的弾塑性解析	111
8.1 緒言	111
8.2 骨組構造物の微小弾塑性解析	111
8.2.1 集中荷重を受ける一端固定他端支持梁	112
8.2.2 軸力と等分布横荷重を受ける一端固定他端支持梁	113
8.2.3 2つの逆方向集中横荷重を受ける両端固定梁	113
8.2.4 3層ラーメン	115
8.2.5 山形ラーメン	115
8.3 平板の微小弾塑性解析	117
8.3.1 引張および集中横荷重を受ける帯板の塑性崩壊	117
8.3.2 面内曲げ荷重を受ける矩形板の塑性崩壊	118
8.3.3 横圧を受ける正方形板の塑性曲げ崩壊	120
(1) Bazeleyらの要素およびCloughらの要素による解析	120
(2) Morleyの要素による解析	125
8.4 平板の弾塑性大たわみ解析	126
8.4.1 中央集中横荷重を受ける帯板の弾塑性大たわみ挙動	127
8.4.2 横圧を受ける矩形板の弾塑性大たわみ挙動	128
8.4.3 面内圧縮を受ける正方形板の座屈崩壊	129
8.5 3次元塊体の微小弾塑性解析	130
8.5.1 直方体の2軸曲げおよびねじり	130
8.5.2 厚肉長円管の両端閉じ押し広げ	131
8.6 結言	133

第9章 歪硬化体の静的弾塑性解析	136
9.1 緒言	136
9.2 骨組構造物の微小弾塑性解析	136
9.2.1 解析の手順	136
9.2.2 軸力および集中横荷重を受ける矩形断面片持梁	137
9.2.3 矩形断面部材からなる門型ラーメン	139
9.2.4 I形断面部材からなる2層ラーメン	140
9.3 平板の弾塑性解析	141
9.3.1 解析の手順	141
9.3.2 横圧を受ける正方形板の塑性曲げ崩壊	142
9.3.3 面内圧縮を受ける正方形板の座屈崩壊	143
9.4 結言	144
第10章 熱弾塑性および動的弾塑性解析	146
10.1 緒言	146
10.2 熱弾塑性解析	146
10.2.1 解析の手順	146
10.2.2 長方形双1次平面要素の熱弾塑性解析への適用性	147
10.2.3 平板の突合せ溶接継手の残留応力の解析	148
10.3 動的弾塑性解析	150
10.3.1 解析の手順	150
10.3.2 両端固定梁の衝撃曲げ崩壊	151
10.3.3 正方形板の衝撃曲げ崩壊	154
10.4 結言	155
総括	157
謝辞	162
参考文献	163
本研究に関連した発表論文	165
付録1 大たわみを考慮した平面シェル要素の弾性剛性方程式	166
付録2 塑性関節、塑性関節線およびすべり線機構を有する要素の 弾塑性剛性方程式	169

付録3	Eggerの降伏関数を用いる解析の手順	172
	(1) パラメータA, Bの決定に必要な曲げモーメント・曲率関係式の定式化	172
	(2) 収束計算の手順	174
付録4	面内力と曲げモーメントを受けるシェルの全断面塑性条件式	178
付録5	一様歪有限要素の剛性と塑性仕事	181

系者言論

1950年代に緒を發した有限要素法は、その後の理論的拡充と電子計算機の大容量、高速化を背景に著しい進歩を遂げ、今日では構造工学において欠くことの出来ない解析手法として定着している。しかし、技術革新の進展と共に構造物の安全性、信頼性に対する社会的要求は近年益々増加しており、現実の設計の場においても単に弾性応力解析のみならず、材料あるいは幾何学的非線形性を考慮したいわゆる構造非線形問題の解析が重要となってきた。

有限要素法による構造非線形問題の解法は、原理的には既に確立していると言っても過言ではない。しかし、既存の解析法を現実の具体的問題に適用した場合、莫大な計算時間を要する結果、経済性の壁に阻まれるケースが多々生じる。このため計算効率のより優れた非線形問題の解析法の開発が切に望まれている。

既述のように構造非線形性は塑性化などの材料非線形性と座屈、大たわみなどの幾何学的非線形性に大別できる。本研究ではこの内、材料非線形性に焦点を当て、効率良い弾塑性解析法の開発を試みる。

さて、構造物あるいはその構成部材の塑性挙動を解析する方法には基本的に二つある。その一つは外力の作用下で応力が降伏条件を満足した点については、塑性理論に基づく応力・歪関係式を適用し、構造物内部に生じる塑性域の広がりや逐次追跡する方法である。今一つの方法は塑性域の広がりや塑性関節、塑性関節線あるいはすべり線に縮約して取り扱ういわゆる塑性解析法である。前者は有限要素法に一早く取り入れられ精度の良い弾塑性解析法として発展している¹⁾。しかし要素の弾塑性剛性マトリックスを、要素内部の塑性および塑性域における応力・歪関係を考慮して数値積分によって求めるため、一般に計算時間を非常に要する。一方、後者の方法は有限要素法が発展する以前に剛完全塑性体に対する解析的な計算法として基礎理論が確立されたものであり、極限状態における崩壊形式を仮定して塑性崩壊強度が求められる^{2), 3)}。しかし、崩壊形式をどのように仮定するかは難しい問題であり、その仮定の仕方は解析精度に直接影響する。また対象とし得る構造形状にも限界がある。しかしこの方法によれば、塑性変形を塑性関節や塑性関節線などの形に単純化して取り扱うことにより、構造物の塑性挙動を概念的に簡潔に、しかも短時間に把握することができる。

以上の背景のもとに、近年、有限要素法と塑性解析法とを組み合わせ、汎用的かつ効

率良い弾塑性解析法の開発が試みられている。

例えば、平板の塑性曲げ崩壊解析に対して、堀田⁴⁾およびBäcklund⁵⁾は、要素境界に直角方向の回転角自由度を節点変位とする三角形板曲げ有限要素を取り上げ、その境界辺の曲げモーメントが全断面塑性モーメントに達すると境界辺を塑性関節線とする方法を提案している。すなわち塑性化した境界辺において隣接要素間の節点回転角を独立にすることにより、境界辺に直角方向の回転角の不連続場、すなわち塑性関節線機構を導入している。この場合、得られる崩壊荷重および崩壊形式は要素分割の粗さと方向の影響を受けるが、その後、山本ら⁶⁾は要素自体をその中線で再分割できる機能を付加することで、この分割パターン依存度を緩和している。

渡辺ら⁷⁾はハイブリッド応力法を基に境界辺上の中点に節点を有する平面要素および板曲げ要素を開発し、その要素境界へ節点変位の不連続量としてのすべり線および塑性関節線機構を導入している。

以上の解析法は、いずれも塑性解析法における塑性関節線やすべり線の生成条件と機能をそのまま踏襲し、有限要素法と組み合わせたものと位置づけることができる。しかし、塑性解析法本来の変形機構の導入を意図する結果、適用し得る有限要素は限定される。

一方、McNiceとKemp⁸⁾は同じく板の塑性曲げ崩壊解析に対して、長方形板曲げ要素の角部の節点で塑性化を判定し、塑性化した節点では節点回転角を隣接要素間で独立にして不連続場を取り入れている。この不連続場は要素の角部に生じるため塑性関節線との対応性は持たない。したがって、この方法は有限要素法に塑性変形の縮約という塑性解析法概念のみを取り入れたものと言える。すなわち有限要素法では要素間の変形の連続性は第一義的に節点で要求される。そこで要素の塑性変形による変形増加を節点変位の増加として処理し、結果的に塑性変形の縮約を図っている。この意味でMcNiceらは、任意の有限要素に対して塑性解析的手法を導入するための一つの考え方を示している。しかしながら、塑性条件における内力の相関関係とこれに伴う塑性化後の内力比の変化は考慮できず、理論的合理性の点で問題がある。

これに対し、上田らは骨組構造物の弾塑性解析を対象に、塑性ポテンシャル理論に基づく新しい塑性関節機構を考案し、塑性解析法を1次元部材に一般的に適用できる解析理論（塑性関節法）を展開している^{9), 10)}。そして、これを用いて大たわみを伴う場合を含めて3次元骨組構造物の塑性強度を解析している。

塑性関節法では要素として、たわみを3次式で、軸変位およびねじり角を1次式で内挿

した1次元有限要素を用いる。そして荷重は分布荷重の場合も等価な集中荷重に置き換えて、常に集中力として要素の節点に負荷する。このような要素および荷重系においては節点の一般化応力は節点力に一致すると同時に要素内で極大となる。そこで塑性関節法では、要素の塑性化を節点のみで判定し、節点力が部材の全断面塑性条件（組合せ応力状態の場合を含む）を満足すると節点は塑性関節になるとする。そして塑性関節では負荷の続く限り塑性条件が満足されるものとする。また塑性変形は塑性条件を塑性ポテンシャルと見なし、塑性流れ理論に従って節点変位の形で定義される。このことは塑性変形が節点のみに縮約されることを表す。以上の結果として、要素の弾塑性剛性マトリックスが要素内で剛性積分を行うことなくマトリックス演算のみで短時間に導出される。このように塑性関節法は骨組構造物の有限要素法解析に適した形に塑性関節機構を定式化し、計算効率の向上を図った解析法と言える。またその合理的な塑性変形の縮約法は有限要素法に塑性解析的取り扱いを組み込む上で極めて有効な手段と考えられる。

以上の見解の基に、本研究では、有限要素法と塑性解析法を組み合わせ任意の構造物の弾塑性解析を効率良く行なうために、1次元有限要素に対して提案された塑性関節法を任意の有限要素に適用できるよう一般化した理論を展開する。そして有限要素法に塑性変形の縮約という塑性解析的取り扱いを一般的に取り入れるための方法を明らかにする。また、塑性関節法を含めて従来の塑性解析的有限要素法では、材料を完全弾塑性体と仮定した場合の静的弾塑性挙動のみが解析対象とされたが、本研究では歪硬化や熱さらには動的影響を考慮した弾塑性解析のための理論展開も実施し、適用範囲の大幅な拡大を図る。

本理論の最大の特徴は、要素内部は常に弾性挙動し、塑性変形は節点に縮約されて節点変位の形で現れる点にある。すなわち、塑性挙動は節点のみに生じる。この意味で本理論を“塑性節点法(Plastic Node Method, P.N.M.)”と名付けることにする。この塑性節点法によれば、任意の有限要素の弾塑性剛性マトリックスをマトリックス演算のみで短時間に導出できる。また塑性条件に対する制約はなく、組合せ応力下における内力の塑性相関関係を考慮した精度の良い弾塑性解析を行える。

なお、1次元有限要素に対する塑性関節法では、塑性化は節点のみで判定されたが、一般的な有限要素を考えた場合、要素内の応力場は変位あるいは応力に関する内挿関数の精度に依存する近似解であるため、節点のみで塑性化を判定することは精度的に必ずしも最適でない。そこで塑性節点法では、要素の塑性化の判定位置を要素の応力場の特性や各荷重段階における応力状態に応じて要素内で適宜選択できるように自由度を加え、得られる

崩壊荷重の精度の向上を図ることとする。

以下では、まず塑性節点法の基礎理論として完全弾塑性体の静的弾塑性解析理論を展開する。そして要素の塑性変形と弾塑性剛性方程式の基本的な導出手順を明らかにする。次にこの基礎理論を歪硬化体の弾塑性解析および熱や動的影響を考慮した弾塑性解析に応用するためさらに拡張し、定式化する。最後に具体的な幾つかの例題を解析して“塑性節点法”の適用性を明らかにする。また本研究では要素として変位型有限要素を主たる対象に取り上げ議論を進める。

なお本研究の初期には要素の塑性化の判定位置を節点に限定した上で理論展開を行い、これを“塑性節点法”と名付けた。その後、塑性化の判定位置を節点を始め要素内部でも選定できるよう理論を拡張し、この理論を“塑性選点法 (Plastic Collocation Method, P.C.M.)”と改称した。関連発表論文では両方の名称が表題に用いられているが、塑性化の判定法を後者ではより一般化した点を除けば、両解析法とも塑性変形を節点に縮約するための定式化の手順は全く同じである。この特徴ある塑性変形の取り扱い方を明確に表す意味で、本論文ではここに展開する理論を改めて“塑性節点法 (P.N.M.)”と呼ぶこととする。

本論文は大きく分け2編で構成され、第1編では塑性節点法の理論を以下の6章にわたって述べる。

第1章では、塑性節点法の基礎理論を静的弾塑性解析を対象に展開する。ここでは材料を完全弾塑性体と仮定する。塑性節点法の特徴は要素の塑性変形を節点のみに縮約する点にある。始めにこのような塑性変形の定式化の手順を述べた後、微小変形の場合と大変形を考慮する場合の各々に対して静的弾塑性剛性方程式を導出する。さらに要素の塑性変形と剛性を分析し、これらの結果を基に、塑性節点法の解析精度と弾塑性解析理論における位置づけを考察する。

第2章では、歪硬化体の弾塑性解析のための基礎理論を展開する。塑性節点法では塑性変形は節点変位の次元で生じるため、通常の塑性歪に対する歪硬化係数は直接導入できない。そこで、要素内部に実際に塑性歪が分布する時生じる歪硬化の影響を、節点の塑性変形に対する剛性に縮約するため、塑性節点変位に対して有効な歪硬化係数を新たに提案し、理論を定式化する。

第3章では、塑性節点法による熱弾塑性解析理論を示す。一般に熱弾塑性解析では熱歪

の生成と弾性、塑性各々の挙動に関する材料定数の温度依存性とを考慮する必要がある。一方塑性節点法では要素内部は常に弾性で塑性挙動は節点のみに生じる。したがって、材料定数の温度依存性を弾性と塑性で独立に扱って剛性方程式を定式化することになる。

第4章では、塑性節点法による動的弾塑性解析理論を示す。ここでは慣性力の取り扱い方が特に重要な問題であり、幾つかの考え方に基づく基礎式を明らかにする。

第5章では、第4章までの理論を統合し、歪硬化、熱および動的影響のすべてを考慮した弾塑性解析のための基礎式を示す。

第6章では、塑性節点法の静的弾塑性解析理論を要素の径間に荷重を受ける梁・柱要素に応用することにより、径間に任意の荷重を受ける骨組構造物の塑性崩壊荷重、崩壊メカニズムおよび径間変位を、部材結合部のみに節点を配した最少の要素分割で精度良く求めることのできる理論を展開する。

また第2編では、前編の理論を基に種々の問題の解析を行ない、その結果を下記の4章で述べ、塑性節点法の適用性を検証する。

第7章では、既に実用に供されている様々な有限要素の中から第8章以降の解析に用いる要素を中心に幾つか抽出し、各有限要素の応力場の特徴や、これらに対する塑性節点法の具体的な適用法を述べる。

第8章では、骨組構造物から3次元塊体に至る種々の構造物に対して、材料を完全弾塑性体と仮定した場合の静的弾塑性解析を行ない、塑性節点法の基本的な適用性の検証を行なう。

第9章では、歪硬化体から成る骨組構造物と平板の弾塑性挙動を第2章の理論を基に解析し、その適用性を明らかにする。

第10章では、熱弾塑性および動的弾塑性解析例として、溶接残留応力の解析と梁や平板の衝撃曲げ崩壊解析を行なう。

最後に、本論文の総括を示す。

第1編

塑性節点法の理論

第 1 章 静的弾塑性解析理論

1.1 緒言

本章では塑性節点法の基礎理論として、完全弾塑性体の静的弾塑性解析理論を述べる。

通常、塑性理論に基づく有限要素法による弾塑性解析の場合、要素内に広がる塑性化領域に塑性歪が分布するとして要素の剛性が評価される。これに対し塑性節点法では、任意の有限要素に対して塑性変形を節点に縮約して塑性挙動を評価する。

まず 1.2 節では、このような塑性節点法の理論展開全般にわたる基本的仮定を示す。

1.3 節では、塑性節点法で用いる塑性条件の種類を述べる。

1.4 節では、塑性流れ理論に基づいて、節点に生じる塑性変形を定式化する。

1.5 節では、1.4 節までの結果と完全弾塑性体の塑性負荷条件を用いて、微小変形の場合と大変形を考慮する場合の各々について弾塑性剛性方程式を定式化する。

1.6 節では、要素の塑性変形と剛性について考察を加える。まず節点に縮約される塑性変形と剛性評価上等価な塑性歪場を明らかにし、これを用いて塑性節点法で求められる弾塑性剛性マトリックスの妥当性や通常の有限要素法で得られるものとの対応性を調べる。続いて、特定の有限要素の節点を塑性化判定点として塑性節点法を適用した場合、塑性解析法で言う塑性関節、塑性関節線およびすべり線機構が節点に形成されることを明らかにする。これらの結果を基に塑性節点法の弾塑性解析理論としての位置づけを明らかにする。

1.2 塑性節点法の基本的仮定

塑性節点法は有限要素法に新しい塑性変形機構を取り入れた弾塑性解析法である。その理論展開全般にわたる基本的仮定を以下に示す。

- [1] 弾性範囲では、通常の有限要素法をそのまま用いる。
- [2] 要素の塑性化は、要素内部に設けた塑性化判定点の応力あるいは合応力が塑性条件を満足するかどうかで判定する。
- [3] 塑性化した要素の塑性変形は節点のみに縮約されて生じ、要素内部は常に弾性挙動する。
- [4] 節点における塑性挙動は塑性流れ理論によって表される。

この内、仮定[3]は要素の変形を次のように評価することを意味する。例としてFig.1.

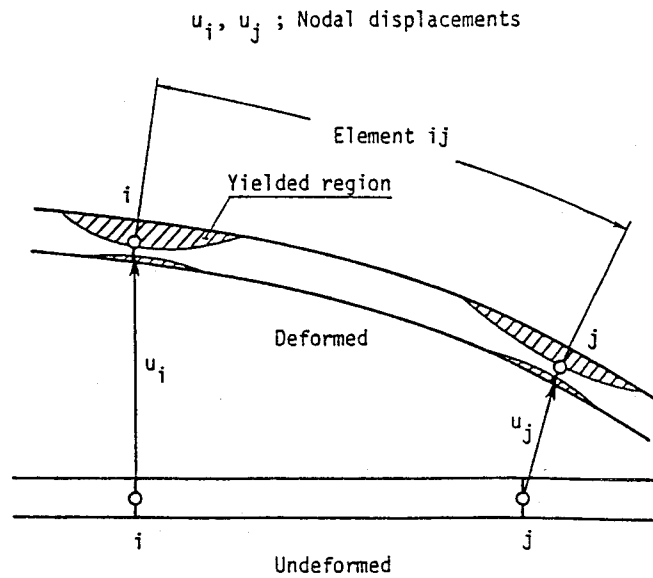


Fig. 1.2.1 FEM Model

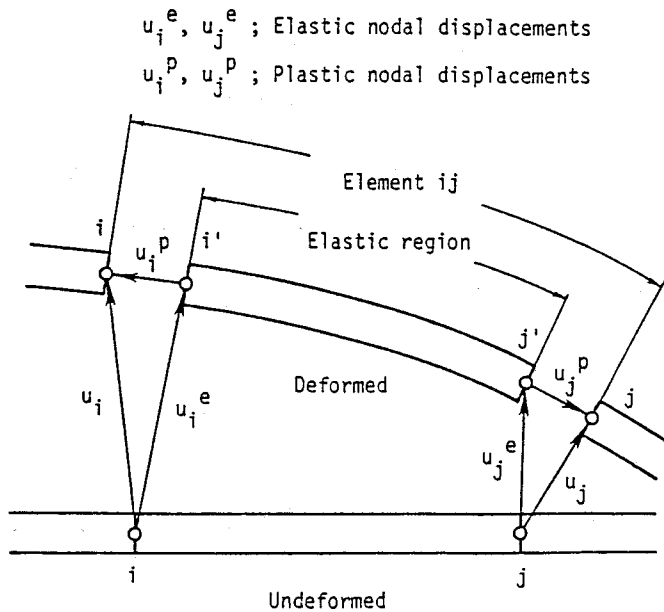


Fig. 1.2.2 PNM Model

2.1およびFig.1.2.2に示す2つの節点 i, j を有する1次元要素を考える。通常の有限要素法による弾塑性解析では Fig.1.2.1の如く、要素内部に広がる塑性化領域に塑性歪が分布するとして理論が組み立てられる。これを理想化して、塑性節点法では Fig.1.2.2のように弾性変形は弾性要素の挙動でそのまま評価し、この弾性領域の端部節点（以後、内節点） i', j' と、本要素が隣接要素と結合される実節点 i, j の間に塑性変形を縮約する

ことになる。仮定[4]はこの節点に縮約される塑性変形 u_i^p, u_j^p の定式化に用いる塑性理論を定義している。

ところで内節点 i', j' は、要素が弾性的の場合実節点 i, j に一致する。すなわち内節点と実節点間には本来、領域としての広がり存在しない。これを考慮して内節点と実節点の節点力に関する今一つの基本的仮定を設ける。すなわち、

[5] Fig.1.2.2の実節点 i, j と内節点 i', j' で節点力は等しい。

なお本章においては、さらに材料を完全弾塑性体と仮定する。

1.3 塑性条件の種類 — 応力表示型塑性条件と合応力表示型塑性条件 —

ここでは理論展開に先立ち、塑性節点法で用いる塑性条件の種類と定義を示す。

MisesやTresca の降伏条件を始めとする通常の塑性条件は材料の個々の点で定義され、幾つかの応力成分の関数の形で与えられる。ここで言う応力とは単位面積あたりの内力としての物理的応力を指す。一方、骨組あるいはシェル構造の場合では、応力を全断面にわたって、あるいは板厚方向に積分した合応力をそれぞれの一般化応力として、これらに対する曲率などの一般化歪を定義できるため、しばしば合応力成分で表された塑性条件を用いて部材断面の塑性挙動が定式化される。本論文では、後者の形式の塑性条件を、以後、“合応力表示型塑性条件”と呼ぶことにする。そして、これと区別して、前者を“応力表示型塑性条件”と呼ぶことにする。合応力表示型塑性条件を用いる解析では断面内の個々の点の塑性挙動は得られないが、断面単位で塑性化を追跡するため計算効率の向上を図ることができる。また構造物の崩壊機構の大局的な把握が可能となる。

塑性節点法ではこれら2種類の塑性条件を有限要素の種類に応じて使い分ける。すなわち骨組要素やシェル要素（平面要素、板曲げ要素を含む）の場合、断面内の複数個の点で応力表示型塑性条件を基に塑性化を判定することも可能であるが、本理論ではこれらの要素に対しては、合応力表示型塑性条件を適用する。他方、アイソパラメトリック塊体要素のように要素の応力場の合応力表示が一般に不可能な要素に対しては、応力表示型塑性条件を用いて精度の良い塑性挙動の追跡を行う。したがって、本論文では要素の塑性化の判定位置を“塑性化判定点”と呼ぶが、この判定点は前者の要素の場合、要素内部の一断面を意味する。一方、後者の要素の場合、要素内部の一点を指すことになる。

なお本章では、合応力表示型塑性条件として、全断面塑性条件を採用する。すなわち、

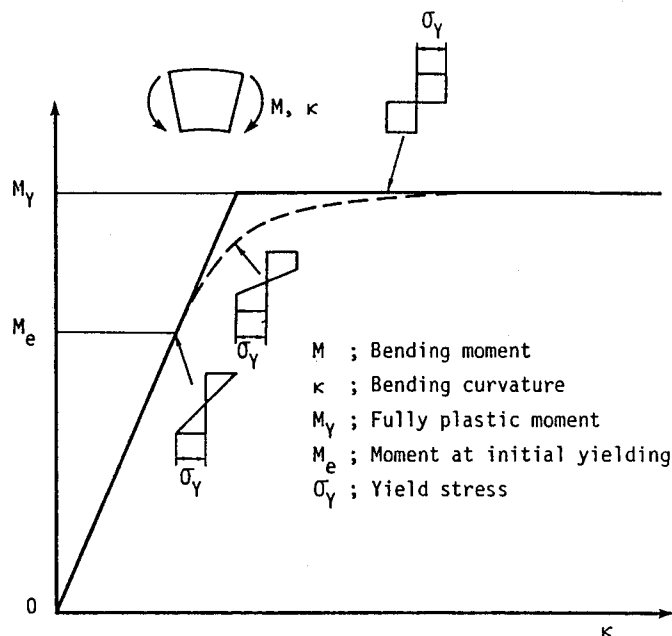


Fig. 1.3.1 Typical moment-curvature relationship of beam members (Perfectly elastic-plastic materials)

合応力が全断面塑性条件を満足するまでは断面は全域弾性とする。材料を完全弾塑性体と仮定しているため、Fig.1.3.1の梁の曲げ崩壊の例では、曲げモーメント・曲率関係を実線のように理想化することになる。断面の一部が塑性化する初期降伏状態から塑性化を考慮する破線の場合は歪硬化と類似の定式化が必要となるため、次章において述べることにする。

1.4 塑性化判定点の塑性条件と要素の塑性変形

1.4.1 塑性化判定点の塑性条件

n 個の節点を有する一つの微小変形有限要素を考える。要素の節点力 $\{x\}$ および節点変位 $\{u\}$ はそれぞれ次のように表せる。

$$\{x\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (1.4.1)$$

$$\{u\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \quad (1.4.2)$$

ここで、 $\{x_i\}$ 、 $\{u_i\}$ ($i = 1, \dots, n$) は各節点の節点力および節点変位ベクトルを示している。

この要素の i 番目の塑性化判定点の応力あるいは合応力ベクトルを $\{\sigma_i\}$ とすると、こ

の塑性化判定点の塑性条件 f_i は次式の形で表される。

$$f_i(\{\sigma_i\}, \sigma_0) = 0 \quad (1.4.3)$$

今、応力 $\{\sigma_i\}$ の各成分を座標軸とする応力空間を考えると、式(1.4.3)はこの応力空間での閉じた超曲面（降伏曲面）で表される。 σ_0 はこの降伏曲面の大きさを表す正のパラメータであり、応力表示型塑性条件では材料の降伏応力 σ_y に一致する。合応力表示型塑性条件では種々の定義が可能であるが、その詳細は後述する。本章では材料を完全弾塑性体と仮定する。したがって σ_0 は一定値である。

さて、仮定[3]より、塑性節点法では要素内部は常に弾性挙動する。この弾性領域の挙動を規定する節点変位（Fig.1.2.2の u_i^0 , u_j^0 に対応）を弾性節点変位 $\{u^0\}$ と表すことにすると、 $\{\sigma_i\}$ および節点力 $\{x\}$ と $\{u^0\}$ の関係は、弾性状態、塑性状態に拘らずそれぞれ次式で与えられる。

$$\{\sigma_i\} = [D^0][B_i]\{u^0\} \quad (1.4.4)$$

$$\{x\} = [K^0]\{u^0\} \quad (1.4.5)$$

ここで、 $[D^0]$ ；弾性の応力・歪マトリックス

$[B]$ ；節点変位・歪マトリックス

$[B_i]$ ； $[B]$ に塑性化判定点 i の座標を代入したマトリックス

$[K^0] = \int_V [B]^T [D^0] [B] dV$ ；弾性剛性マトリックス

今、適当な境界条件により要素に剛体変位が生じないよう拘束した状態での弾性節点変位を $\{u^{0*}\}$ 、これに関係する列のみに縮小した $[B_i]$ および $[K^0]$ をそれぞれ $[B_i^*]$ および $[K^{0*}]$ で表すと、次の両式は $\{\sigma_i\}$ と $\{x\}$ の関係を考える上で、式(1.4.4)および式(1.4.5)と同値である。

$$\{\sigma_i\} = [D^0][B_i^*]\{u^{0*}\} \quad (1.4.6)$$

$$\{x\} = [K^{0*}]\{u^{0*}\} \quad (1.4.7)$$

両式を用いて $\{u^{0*}\}$ を消去すると、次の関係を得る。

$$\begin{aligned} \{\sigma_i\} &= [A_i]\{x\} \\ &= \{\sigma_i(\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_j\})\} \quad (j \leq n) \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

ここで、 $[A_i] = [D^0][B_i^*]([K^{0*}]^T [K^{0*}])^{-1} [K^{0*}]^T$

すなわち $\{\sigma_i\}$ は、一般に要素の j 個 ($j \leq n$) の節点の節点力の関数の形で表される。

式(1.4.8)を式(1.4.3)に代入すると、塑性条件 f_i は次のように節点力の関数 F_i に改

められる。

$$F_i = F_i(\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_j\}, \sigma_0) = 0 \quad (j \leq n) \quad (1.4.9)$$

塑性節点法では、この節点力で表された塑性条件 F_i を塑性化判定点 i の塑性条件として定義する。すなわち、節点力が式(1.4.9) を満足すると判定点 i が塑性化し、以後節点力は式(1.4.9)を満たしつつ変動するものとする。

なお、式(1.4.6)および(1.4.7)における剛体変位の拘束法は、第7章にて幾つかの要素を例に具体的に示す。

1.4.2 塑性化した要素の仮想仕事と塑性節点変位

今、一つの要素が微小変形し、節点力 $\{x + d x\}$ の作用下で釣り合い状態にあり、要素内では k 個の塑性化判定点が塑性化しているものとする。この状態で仮想節点変位増分 $\{\delta d u\}$ を与えた場合に内力がなす内部仮想仕事 δW_i と外力がなす外部仮想仕事 δW_e を考える。

一般に内部仮想仕事 δW_i は、応力が弾性歪に対してなす弾性仕事 δW_i^e と塑性歪に対してなす塑性仕事 δW_i^p の和として表せる。

$$\delta W_i = \delta W_i^e + \delta W_i^p \quad (1.4.10)$$

$$\text{ここで、} \quad \delta W_i^e = \int_V \{\delta d \varepsilon^e\}^T \{\sigma + d \sigma\} dV$$

$$\delta W_i^p = \int_{V^p} \delta d \bar{\varepsilon}^p (\bar{\sigma} + d \bar{\sigma}) dV$$

$\{\sigma\}$; 応力, $\{\varepsilon^e\}$; 弾性歪

$\bar{\sigma}$; 相当応力, $\bar{\varepsilon}^p$; 相当塑性歪

V ; 要素の全域, V^p ; 要素の塑性域

さて、塑性節点法では要素は節点を除いて弾性挙動すると考える。したがって弾性仕事 δW_i^e は、弾性剛性マトリックス $[K^e]$ と弾性節点変位 $\{u^e + d u^e\}$ を用いて表すことができる。すなわち、

$$\delta W_i^e = \{\delta d u^e\}^T [K^e] \{u^e + d u^e\} \quad (1.4.11)$$

一方、塑性変形が節点に縮約されて塑性節点変位 $\{u^p\}$ として生じると考えると、塑性仕事 δW_i^p は、節点力 $\{x + d x\}$ と仮想塑性節点変位増分 $\{\delta d u^p\}$ の積で与えられる。

$$\delta W_i^p = \{\delta d u^p\}^T \{x + d x\} \quad (1.4.12)$$

ところで、式(1.4.9)の塑性条件 F_i は節点力 $\{x_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, j$) なる一般化

応力に関する塑性条件と解釈できる。仮定[4]に従い、この F_i を 塑性ポテンシャルと見なして塑性流れ理論を適用すると、 i 点の塑性化に関する塑性節点変位増分 $\{d u^p\}$ が、一般化塑性歪増分に相当する量として、次式のように得られる。

$$\{d u^p\} = d \lambda_i \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial \{x_1\}} \quad \frac{\partial F_i}{\partial \{x_2\}} \quad \cdots \quad \frac{\partial F_i}{\partial \{x_n\}} \right\}^T \quad (1.4.13)$$

ここで、 $d \lambda_i$; 正のスカラー量

今、これを次式のように表す。

$$\{d u^p\} = d \lambda_i \{\phi_i\} \quad (1.4.14)$$

$$\text{ここで、} \quad \{\phi_i\} = \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial \{x_1\}} \quad \frac{\partial F_i}{\partial \{x_2\}} \quad \cdots \quad \frac{\partial F_i}{\partial \{x_n\}} \right\}^T = \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial x} \right\}$$

但し $\{\phi_i\}$ において、 F_i に関与しない節点力に関する微分項は零である。

式(1.4.14)を用いると、 k 個の塑性化判定点が塑性化した要素でなされる式(1.4.12)の塑性仕事 δW_i^p は、各点の塑性化に起因する塑性仕事のスカラー和として次式で与えられる。

$$\delta W_i^p = \sum_{i=1}^k \delta d \lambda_i \{\phi_i\}^T \{x + d x\} \quad (1.4.15)$$

式(1.4.11)および(1.4.15)を式(1.4.10)に代入すると、内部仮想仕事 δW_i は結局次式となる。

$$\delta W_i = \{\delta d u^o\}^T [K^o] \{u^o + d u^o\} + \sum_{i=1}^k \delta d \lambda_i \{\phi_i\}^T \{x + d x\} \quad (1.4.16)$$

一方、節点力がなす外部仮想仕事 δW_o は、

$$\delta W_o = \{\delta d u\}^T \{x + d x\} \quad (1.4.17)$$

式(1.4.16)および(1.4.17)より仮想仕事の原理 $\delta W_o = \delta W_i$ は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \{\delta d u\}^T \{x + d x\} = \\ \{\delta d u^o\}^T [K^o] \{u^o + d u^o\} + \sum_{i=1}^k \delta d \lambda_i \{\phi_i\}^T \{x + d x\} \end{aligned} \quad (1.4.18)$$

ところで、上式右辺第一項の $[K^o] \{u^o + d u^o\}$ は Fig.1.2.2の内節点 i' 、 j' における等価節点力を表すが、仮定[5]より本理論ではこれを実節点 i 、 j における節点力 $\{x + d x\}$ に等しいとする。したがって、

$$\{\delta d u\}^T \{x + d x\} = (\{\delta d u^o\} + \sum_{i=1}^k \delta d \lambda_i \{\phi_i\})^T \{x + d x\} \quad (1.4.19)$$

これより任意の仮想節点変位増分 $\{\delta d u\}$ に対して仮想仕事の原理が成り立つための節点変位増分の関係は次式となる。

$$\{d u\} = \{d u^e\} + \sum_{i=1}^k d \lambda_i \{\phi_i\} \quad (1.4.20)$$

すなわち要素の全節点変位増分 $\{d u\}$ は、弾性節点変位増分 $\{d u^e\}$ と次の塑性節点変位増分 $\{d u^p\}$ の和で与えられる。

$$\{d u^p\} = \sum_{i=1}^k d \lambda_i \{\phi_i\} = [\Phi] \{d \lambda\} \quad (1.4.21)$$

ここで、 $[\Phi] = [\{\phi_1\} \{\phi_2\} \dots \{\phi_k\}]$

$$\{d \lambda\} = \{d \lambda_1 \ d \lambda_2 \ \dots \ d \lambda_k\}^T$$

この塑性節点変位増分 $\{d u^p\}$ は、式(1.4.14) から知られるように、塑性化した各判定点の応力あるいは合応力に関与するすべての節点力の作用方向に分散して現れる。そして塑性化要素の変位場は、弾性節点変位 $\{u^e\}$ で挙動が規定される弾性領域の節点に、各荷重段階で生じる式(1.4.21)の $\{d u^p\}$ の累積値としての塑性節点変位 $\{u^p\}$ が縮約されたFig.1.2.2のようなモードで表されることになる。

以上のように塑性節点法によれば任意の有限要素の塑性変形を塑性理論を基に合理的に縮約できる。また塑性条件 F_i に関する制約はなく、塑性化点の内力の塑性相関関係を自動的に考慮できる。但し、式(1.4.21)の導出過程において要素の塑性仕事を式(1.4.15)で評価している。一様歪平面要素などの特定の要素の場合、この塑性仕事が要素内部に実際に塑性歪が分布するとした場合になされる仕事と完全に一致することが後に示される。しかし一般には両者は必ずしも一致しない。したがって、式(1.4.15)および式(1.4.21)の精度は具体的な解析結果を通して検証することにする。

なお、式(1.4.21)のベクトル $\{\phi_i\}$ の具体的な導出手順を以下に示しておく。

まず $\{\phi_i\}$ を次のように展開する。

$$\begin{aligned} \{\phi_i\} &= \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial x} \right\} \\ &= \frac{\partial F_i}{\partial \sigma_{xi}} \left\{ \frac{\partial \sigma_{xi}}{\partial x} \right\} + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial \tau_{xyi}} \left\{ \frac{\partial \tau_{xyi}}{\partial x} \right\} \\ &= [A_i] \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial \sigma_i} \right\} \end{aligned} \quad (1.4.22)$$

ここで、 $[A_i] = [\{\frac{\partial \sigma_{xi}}{\partial x}\} \{\frac{\partial \sigma_{yi}}{\partial x}\} \cdots \{\frac{\partial \tau_{xyi}}{\partial x}\}]$

$$\{\frac{\partial F_i}{\partial \sigma_i}\} = \{\frac{\partial F_i}{\partial \sigma_{xi}} \frac{\partial F_i}{\partial \sigma_{yi}} \cdots \frac{\partial F_i}{\partial \tau_{xyi}}\}^T$$

上式において、 $\{\partial F_i / \partial \sigma_i\}$ は i 点の応力 $\{\sigma_i\}$ から容易に求められる。一方、 $[A_i]$ は次のように i 点の応力増分 $\{d\sigma_i\}$ とこれに対応する節点力増分 $\{dx\}$ の関係を表すマトリックスである。

$$\{d\sigma_i\} = [A_i]^T \{dx\} \quad (1.4.23)$$

ところで、式(1.4.4)および(1.4.5)を増分型に改めると $\{d\sigma_i\}$ と $\{dx\}$ はそれぞれ弾性節点変位増分 $\{du^e\}$ により次のように表される。

$$\{d\sigma_i\} = [D^e][B_i]\{du^e\} \quad (1.4.24)$$

$$\{dx\} = [K^e]\{du^e\} \quad (1.4.25)$$

したがって式(1.4.8)を導いたと同様に $\{du^e\}$ を消去すれば、式(1.4.23)の $[A_i]$ を得る。このようにして各荷重段階における $[A_i]$ および $\{\partial F_i / \partial \sigma_i\}$ が求まると、式(1.4.22)より、 $\{\phi_i\}$ が定まる。

微小変形の場合では、式(1.4.24)および(1.4.25)の $[B_i], [K^e]$ は一定であり $[A_i]$ も一定となる。他方、要素内部での歪の非線形性（幾何学的非線形性）を考慮する場合では $[B_i], [K^e]$ とも変形の関数となるため、 $[A_i]$ は各荷重段階で変化する。これについては1.5.2項で述べる。

1.5 静的弾塑性剛性方程式の定式化

1.5.1 微小変形の場合の剛性方程式

要素内の k 個の塑性化判定点が塑性化した有限要素の弾塑性剛性方程式を導出する。変形は微小とする。要素の節点力増分 $\{dx\}$ と弾性節点変位増分 $\{du^e\}$ の関係は次式で与えられる。

$$\{dx\} = [K^e]\{du^e\} \quad (1.5.1)$$

全節点変位増分 $\{du\}$ は、式(1.4.20)および(1.4.21)より、

$$\{du\} = \{du^e\} + [\Phi]\{d\lambda\} \quad (1.5.2)$$

上式を式(1.5.1)に代入すると節点力増分 $\{dx\}$ は次式のように表される。

$$\{d x\} = [K^*](\{d u\} - [\Phi]\{d \lambda\}) \quad (1.5.3)$$

一方、塑性化した判定点 i ($i = 1, 2, \dots, k$) に除荷が生じる場合、

$$d F_i < 0 \quad (1.5.4)$$

となるが、負荷状態では次の塑性負荷条件が成立せねばならない。

$$d F_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (1.5.5)$$

すなわち、

$$\begin{aligned} d F_i &= \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial x} \right\}^T \{d x\} + \frac{\partial F_i}{\partial \sigma_{oi}} d \sigma_{oi} \\ &= \{\phi_i\}^T \{d x\} + \frac{\partial F_i}{\partial \sigma_{oi}} d \sigma_{oi} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k) \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

本章では材料を完全弾塑性体と仮定しているので $d \sigma_{oi} = 0$ である。したがって上式は、

$$d F_i = \{\phi_i\}^T \{d x\} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (1.5.7)$$

式(1.4.21)の $[\Phi]$ を用いると、この塑性負荷条件は次のように表される。

$$[\Phi]^T \{d x\} = \{0\} \quad (1.5.8)$$

これに式(1.5.3)の $\{d x\}$ を代入すると、次式を得る。

$$[\Phi]^T [K^*](\{d u\} - [\Phi]\{d \lambda\}) = \{0\} \quad (1.5.9)$$

すなわち、

$$([\Phi]^T [K^*] [\Phi]) \{d \lambda\} = [\Phi]^T [K^*] \{d u\} \quad (1.5.10)$$

上式は塑性節点変位増分の大きさを表す正値ベクトル $\{d \lambda\}$ に関する連立一次方程式となっている。これを解くと $\{d \lambda\}$ が $\{d u\}$ の関数として次のように求まる。

$$\{d \lambda\} = ([\Phi]^T [K^*] [\Phi])^{-1} [\Phi]^T [K^*] \{d u\} \quad (1.5.11)$$

これを式(1.5.3)に再び代入すると、弾塑性剛性方程式が結局次のように求められる。

$$\{d x\} = [K^p] \{d u\} \quad (1.5.12)$$

ここで、 $[K^p] = [K^*] - [K^*] [\Phi] ([\Phi]^T [K^*] [\Phi])^{-1} [\Phi]^T [K^*]$

；弾塑性剛性マトリックス（対称マトリックス）

例えば塑性化判定点 i のみが塑性化した場合、 $[K^p]$ は次式となる。

$$[K^p] = [K^*] - \frac{[K^*] \{\phi_i\} \{\phi_i\}^T [K^*]}{\{\phi_i\}^T [K^*] \{\phi_i\}} \quad (1.5.13)$$

式(1.5.12)あるいは(1.5.13)のように、本理論では要素の塑性変形が節点に縮約される結果、弾塑性剛性マトリックス $[K^p]$ がマトリックス演算のみで得られ、要素内の剛性積

分は一切不要である。

なお、 $[K^0]$ に含まれる $[\Phi]$ は荷重と共に値が変化する。したがって、式(1.5.12)は非線形方程式であるが、本理論では一荷重増分間では $[\Phi]$ の値は変化しないとし、線形化して計算を行う。また、除荷は式(1.5.4)により判定できるが、本理論では $d\lambda_i$ の正負で次のように判定する。

塑性化判定点 i の塑性化に関係する塑性仕事 $d\lambda_i \{\phi_i\}^T \{x + dx\}$ は負荷状態では正值でなければならない。一方、降伏曲面の凸面性より $\{\phi_i\}^T \{x + dx\}$ は常に正值である。したがって、除荷、負荷の判定は以下のようになる。

$$d\lambda_i \geq 0 \quad ; \quad \text{負荷}$$

$$d\lambda_i < 0 \quad ; \quad \text{除荷}$$

もし除荷の生じた場合、その塑性化判定点を弾性に戻して再計算する必要がある。

1.5.2 大変形の場合の剛性方程式

座屈崩壊解析などの場合、一般に要素内部で歪の非線形性（幾何学的非線形性）が考慮される。このような大変形を伴う弾塑性解析のための静的弾塑性剛性方程式を塑性節点法により定式化する。

まず仮想仕事の原理を基に、基礎となる弾性剛性方程式を導く。

節点力 $\{x + dx\}$ の作用下で応力 $\{\sigma + d\sigma\}$ を生じた弾性要素が平衡状態にあるためには、任意の仮想節点変位増分 $\{\delta du\}$ に対して、次式が成立せねばならない。

$$\{\delta du\}^T \{x + dx\} = \int_V \{\delta d\varepsilon\}^T \{\sigma + d\sigma\} dV \quad (1.5.14)$$

ここで $\{\delta d\varepsilon\}$ は $\{\delta du\}$ により要素に生じる仮想歪増分を表す。

幾何学的非線形性を考慮しているので、歪 $\{\varepsilon\}$ と節点変位 $\{u\}$ の関係は一般に次式のように表される。

$$\{\varepsilon\} = ([B^L] + [B^{NL}])\{u\} = [B]\{u\} \quad (1.5.15)$$

ここで、 $[B^L]$ および $[B^{NL}]$ は節点変位・歪マトリックス $[B]$ の線形および非線形項を表す。 $[B^{NL}]$ が変形の関数であることを考慮すると、歪増分 $\{d\varepsilon\}$ および仮想歪増分 $\{\delta d\varepsilon\}$ はそれぞれ次式となる（付録1参照）。

$$\{d\varepsilon\} = [\bar{B}]\{du\} + d[B^{NL}]\{du\} \quad (1.5.16)$$

$$\{\delta d\varepsilon\} = [\bar{B}]\{\delta du\} + 2[B^{NL}]\{\delta du\} \quad (1.5.17)$$

ここで、 $d[B^{NL}] ; \{d u\}$ による $[B^{NL}]$ の変化量

$$[\bar{B}] = [B^L] + 2[B^{NL}]$$

また応力増分 $\{d \sigma\}$ と歪増分 $\{d \varepsilon\}$ の関係は、

$$\{d \sigma\} = [D^e] \{d \varepsilon\} \quad (1.5.18)$$

ここで、 $[D^e]$; 弾性の応力・歪マトリックス

式(1.5.16)～式(1.5.18)を式(1.5.14)に代入し、増分の2次以上の項を微小として無視すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \{\delta d u\}^T \{x + d x\} &= \{\delta d u\}^T \{F\} + \{\delta d u\}^T [K_b] \{d u\} \\ &\quad + \{\delta d u\}^T [K_l] \{d u\} \end{aligned} \quad (1.5.19)$$

$$\text{ここで、} \quad \{F\} = \int_V [\bar{B}]^T \{\sigma\} dV$$

$$[K_b] = \int_V [\bar{B}]^T [D^e] [\bar{B}] dV$$

$$[K_l] \{d u\} = \int_V 2 d[B^{NL}]^T \{\sigma\} dV$$

上式の $[K_l]$ は初期応力マトリックスを表し、これと $[K_b]$ の和が弾性(接線)剛性マトリックスとなる。今、これを $[K_l^e]$ で表すと上式は、

$$\{\delta d u\}^T \{x + d x\} = \{\delta d u\}^T (\{F\} + [K_l^e] \{d u\}) \quad (1.5.20)$$

となる。これより、弾性剛性方程式が次のように導かれる。

$$\{d x\} + \{R\} = [K_l^e] \{d u\} \quad (1.5.21)$$

$$\text{ここで、} \quad \{R\} = \{x\} - \{F\}$$

$\{R\}$ は荷重修正項を表す。すなわち式(1.5.21)では荷重増分による変形増加を線形予測しているために、新しい変形状態での内力と外力の平衡が保証されていない。 $\{R\}$ はその不平衡量を表している。

式(1.5.21)の具体的な形を平面シェル要素を例に付録1に示す。以下、塑性節点法により弾塑性剛性方程式を導出する。

塑性化した要素の節点変位増分 $\{d u\}$ は弾性成分と塑性成分の和となる。

$$\{d u\} = \{d u^e\} + \{d u^p\} \quad (1.5.22)$$

また、弾性領域の剛性方程式は、

$$\{d x^*\} = [K_l^e] \{d u^e\} \quad (1.5.23)$$

$$\text{ここで、} \quad \{d x^*\} = \{d x\} + \{R\}$$

ところで、塑性化判定点 i の応力増分 $\{d\sigma_i\}$ は式(1.5.16)および(1.5.18)より次式で与えられる。

$$\{d\sigma_i\} = [D^0][\bar{B}_i]\{du^0\} \quad (1.5.24)$$

但し $[\bar{B}_i]$ は、式(1.5.6)の $[B]$ に i 点の座標を代入したものである。また式(1.5.6)の右辺第2項は微小項として無視している。

式(1.5.23)および(1.5.24)より1.4.1項に述べた手順で $\{du^0\}$ を消去すると、次の関係式を得る。

$$\{d\sigma_i\} = [\bar{A}_i]\{dx^*\} \quad (1.5.25)$$

ここで、 $[\bar{A}_i]$ ；式(1.4.8)の $[B_i]$ を $[\bar{B}_i]$ に、 $[K^0]$ を $[K_i^0]$ に置き換えたマトリックス($[\bar{B}_i]$ が変形の関数であるため各荷重段階で変化する。)

これより i 点の応力 $\{d\sigma_i\}$ に関する節点力増分は、荷重修正項を含めた $\{dx^*\}$ であることが分かる。したがって i 点が塑性化した時の塑性節点変位増分 $\{du^p\}$ は、 F_i を $\{x^*\}$ の関数と考え、次式となる。

$$\{du^p\} = d\lambda_i\{\phi_i\} \quad (1.5.26)$$

ここで、 $\{\phi_i\} = \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial x^*} \right\}$

$\{\phi_i\}$ は式(1.4.22)の $[A_i]$ に式(1.5.25)の $[\bar{A}_i]$ を代入して得られる。

k 個の塑性化判定点が塑性化した時の $\{du^p\}$ は、式(1.4.21)と同様に、

$$\{du^p\} = [\Phi]\{d\lambda\} \quad (1.5.27)$$

一方、塑性負荷条件は $\{dx^*\}$ に関する次式となる。

$$[\Phi]^T\{dx^*\} = \{0\} \quad (1.5.28)$$

以上の式(1.5.22), (1.5.23), (1.5.27)および(1.5.28)より、結局弾塑性剛性方程式が次のように求められる。

$$\{dx^*\} = [K_i^p]\{du\}$$

すなわち、

$$\{dx\} + \{R\} = [K_i^p]\{du\} \quad (1.5.29)$$

ここで、 $[K_i^p] = [K_i^0] - [K_i^0][\Phi](\Phi^T[K_i^0]\Phi)^{-1}\Phi^T[K_i^0]$

；弾塑性(接線)剛性マトリックス

このように、大変形を考慮する場合も、式(1.5.12)の $[K^0]$ を $[K_i^0]$ に置き換えるだ

けで、微小変形の場合と同様に弾塑性剛性マトリックスが得られる。

1.6 要素の塑性変形と剛性に関する考察

1.6.1 塑性変形と弾塑性剛性マトリックスの精度と収束性

1.4.1 項に述べた如く、塑性化判定点 i の応力あるいは合応力 $\{\sigma_i\}$ は、一般に要素の複数の節点の節点力の関数となる。 i 点が要素の節点に位置する場合も同様である。したがって、式(1.4.21)で定義した塑性節点変位増分 $\{d u^p\}$ も一般に複数の節点に生じ、これらの節点には、Fig.1.2.2 のような塑性変位場が形成する。具体的な変形モードや各節点に配分される塑性変形量の割合は要素の変位関数、塑性化判定点の位置、そして塑性条件式に依存する。ここでは、以上のような塑性変形機構を導入して求められる弾塑性剛性マトリックスの精度と収束性を検討する。

式(1.5.3)で、弾性剛性マトリックス $[K^e]$ を具体的に記すと次式となる。

$$\{d x\} = \int_V [B]^T [D^e] [B] dV (\{d u\} - [\Phi] \{d \lambda\}) \quad (1.6.1)$$

大変形を考慮する場合、上式の $\{d x\}$ は式(1.5.23)の $\{d x^*\}$ に、また $[B]$ は式(1.5.16)の $[\bar{B}]$ となる。

右辺の節点変位を被積分項に取り込むと、

$$\{d x\} = \int_V [B]^T [D^e] ([B] \{d u\} - [B] [\Phi] \{d \lambda\}) dV \quad (1.6.2)$$

上式の括弧内第1項および第2項はそれぞれ次のように要素内に $[B]$ マトリックスで分布させられると考えた場合の各点の全歪増分 $\{d \varepsilon\}$ と塑性歪増分 $\{d \varepsilon^p\}$ を示している。

$$\{d \varepsilon\} = [B] \{d u\} \quad (1.6.3)$$

$$\{d \varepsilon^p\} = [B] [\Phi] \{d \lambda\} = [B] \{d u^p\} \quad (1.6.4)$$

これより、式(1.5.3)を基に弾塑性剛性方程式を定式化する塑性節点法では、式(1.6.4)に示す塑性歪が要素内に分布すると仮定して、通常の有限要素法と同様の弾塑性剛性マトリックスの評価を行なっていることが明らかとなった。

次に、節点の塑性挙動を規定する式(1.5.8)の塑性負荷条件の示す意味を考える。式(1.5.8)の両辺に $\{d \lambda\}$ を乗じると、

$$\{d \lambda\}^T [\Phi]^T \{d x\} = 0 \quad (1.6.5)$$

これは塑性節点変位増分 $\{d u^p\} (= [\Phi] \{d \lambda\})$ と節点力増分 $\{d x\}$ の直交関係を表

す。上式に式(1.6.1)を代入し、再び式(1.6.4)の塑性歪場 $\{d\varepsilon^p\}$ を考えると次式を得る。

$$\begin{aligned} 0 &= \{d\lambda\}^T [\Phi]^T \int_V [B]^T [D^e] [B] dV (\{du\} - [\Phi]\{d\lambda\}) \\ &= \int_V \{d\lambda\}^T [\Phi]^T [B]^T [D^e] [B] \{du^e\} dV \\ &= \int_V \{d\varepsilon^p\}^T [D^e] [B] \{du^e\} dV = \int_V \{d\varepsilon^p\}^T \{d\sigma\} dV \quad (1.6.6) \end{aligned}$$

最右辺の応力増分 $\{d\sigma\}$ は弾性節点変位増分 $\{du^e\}$ によって要素の弾性領域に生じる応力増分である。他方、 $\{d\varepsilon^p\}$ は塑性節点変位増分 $\{du^p\}$ と $[B]$ マトリックスから求めた仮定の塑性歪増分場を表す。両者の間には理論的対応性はなく、したがって要素内の個々の点では $\{d\sigma\}$ と $\{d\varepsilon^p\}$ の直交性 ($\{d\varepsilon^p\}^T \{d\sigma\} = 0$) は一般に成立しない。しかし式(1.6.6)は、 $\{d\sigma\}$ が $\{d\varepsilon^p\}$ と要素全体として直交するための条件を与えていると解釈できる。また式(1.4.22)および(1.4.23)より塑性化判定点 i では次の関係、

$$\left\{ -\frac{\partial F_i}{\partial x} \right\}^T \{dx\} = \left\{ -\frac{\partial F_i}{\partial \sigma_i} \right\}^T \{d\sigma_i\} = 0 \quad (1.6.7)$$

が常に成立し、この点では塑性歪増分の降伏曲面との直交性が満足される。

以上の式(1.6.6)および(1.6.7)より、要素分割を無限に細かくし要素が一定歪状態に至った極限では、要素全域で塑性歪の直交性と塑性負荷条件が厳密に満足されることが分かる。同時に、式(1.6.2)に関する考察から要素の剛性も厳密なものとなる。これより塑性節点法で得られる塑性変形と要素の剛性の収束性が明らかになった。

なお7.2.1項で示すように、一様歪有限要素の場合、有限要素法と塑性節点法で同一の弾塑性剛性マトリックスが得られ、この時有限要素法で要素に生じる塑性歪増分は式(1.6.4)の $\{d\varepsilon^p\}$ に完全に一致する。他の要素の場合も、要素分割を細かくしていくと一定歪あるいは一定曲率状態に近づくため、塑性節点法による解は、一般に有限要素法と同程度の精度を有すと考えられる。

1.6.2 塑性関節、塑性関節線およびすべり線機構と塑性節点変位

節点力が要素境界の断面合応力としての物理的意味を有する要素の場合、節点の塑性化をその断面の塑性化に対応づけることができる。そして節点の塑性条件 F_i は、その節点の節点力のみ関数として表せる。例えば節点 i の場合、節点力 $\{x_i\}$ の関数として、

$$F_i(\{x_i\}) = 0 \quad (1.6.8)$$

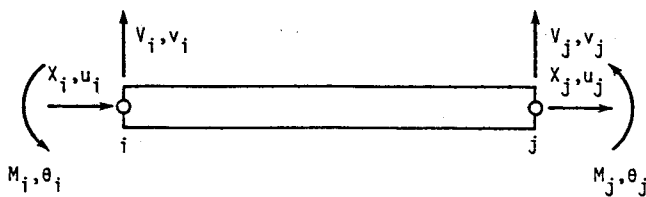


Fig. 1.6.1 Beam-column element

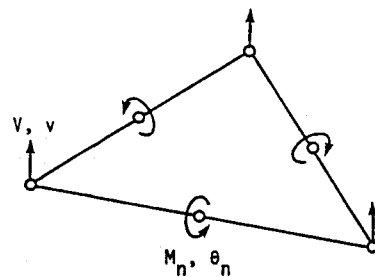
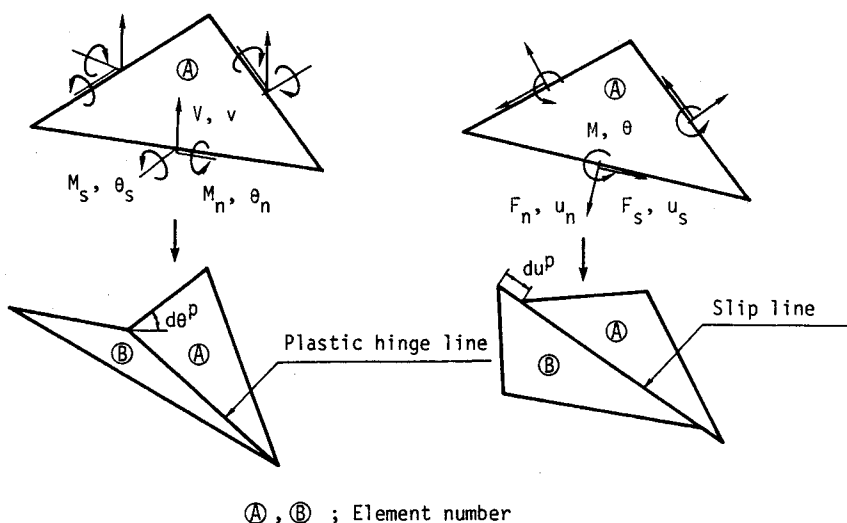


Fig. 1.6.2 Plate bending element by Morley



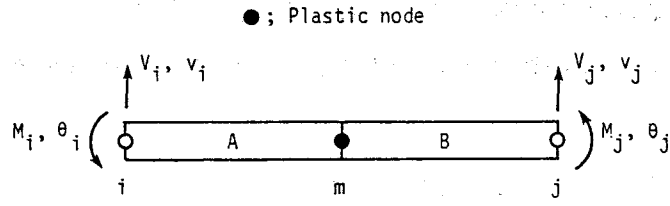
(a) Plate bending element

(b) Plane element

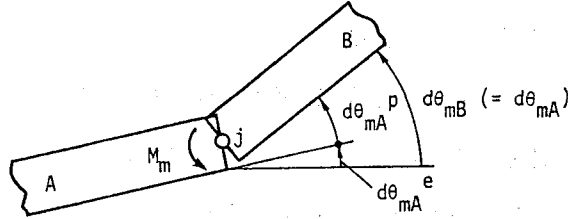
Fig. 1.6.3 Hybrid stress models by Watanabe et al.

以上の特性を有する要素として、Fig.1.6.1の梁・柱要素、Fig.1.6.2のMorleyの板曲げ要素¹¹⁾、そしてFig.1.6.3の渡辺らによる一連のハイブリッドストレスモデル⁷⁾などが挙げられる。Morleyの板曲げ要素およびFig.1.6.3(a)の渡辺らの板曲げ要素では、要素境界边上の midpoint に設けられた節点の節点力モーメント M_n は、境界断面に作用する法線方向の合モーメントに一致する。また節点変位 θ_n はこの方向へのたわみ角を表す。一方、Fig.1.6.3(b)の渡辺らの平面要素では、midpoint 節点の節点力 F_n 、 F_s は境界断面の法線方向および接線方向の合面内力を、節点変位 u_n 、 u_s は各方向への面内変位を表す。本項では、これらの要素の境界節点を塑性化判定点として塑性節点法を適用した場合に生じる塑性変形を考察する。

最も基本的な要素としてFig.1.6.4(a)の梁要素を取り上げ、2つの要素A、B間の節点



(a) Beam element



(b) Discontinuous field

Fig. 1.6.4 Mechanism of plastic node

mが塑性化した場合を考える。この種の要素では、隣接二要素間で断面力（節点力）は連続する。したがって、いずれか一方の要素で塑性化を考慮すれば、両要素とも同じ内力拘束を受ける。ここでは要素A側の節点mを塑性化点とする。

節点mの塑性条件（全断面塑性条件） F_m は、節点力 M_m を用いて次式のように表せる。

$$F_m = \frac{|M_m|}{M_Y} - 1 = 0 \quad (1.6.9)$$

ここで、 M_Y ; 部材の全断面塑性モーメント

式(1.4.14)に上式の F_m を代入すると、要素Aに生じる塑性節点変位増分 $\{d u_A^p\}$ は次式となる。

$$\begin{aligned} \{d u_A^p\} &= \{d v_{iA}^p \quad d \theta_{iA}^p \quad d v_{mA}^p \quad d \theta_{mA}^p\}^T \\ &= d \lambda_m \left\{ \frac{\partial F_m}{\partial V_i} \quad \frac{\partial F_m}{\partial M_i} \quad \frac{\partial F_m}{\partial V_m} \quad \frac{\partial F_m}{\partial M_m} \right\}^T \\ &= d \lambda_m \left\{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{M_m}{|M_m|} \cdot \frac{1}{M_Y} \right\}^T \quad (1.6.10) \end{aligned}$$

すなわち、要素Aには節点mのみに次の塑性たわみ角増分 $d \theta_{mA}^p$ が現れる。

$$d \theta_{mA}^p = \frac{M_m}{|M_m|} \cdot \frac{d \lambda_m}{M_Y} \quad (1.6.11)$$

この $d \theta_{mA}^p$ の幾何学的意味をFig.1.6.4(b)を用いて検討する。

塑性化要素Aの弾性領域の節点たわみ角増分は Fig.1.6.4(b)の $d \theta_{mA}^e$ となる。一方、

弾性要素Bの節点たわみ角増分は、同図の $d\theta_{mB}$ である。ところで、式(1.5.12)より知られるように、要素Aの弾塑性剛性方程式は次の全節点たわみ角増分 $d\theta_{mA}$ を未知数として定式化される。

$$d\theta_{mA} = d\theta_{mA}^e + d\theta_{mA}^p \quad (1.6.12)$$

したがって各要素の剛性方程式を重畳する際、この $d\theta_{mA}$ が $d\theta_{mB}$ と等置される。

$$d\theta_{mA} = d\theta_{mB} \quad (1.6.13)$$

式(1.6.12)および(1.6.13)より次の関係式が成立する。

$$d\theta_{mA}^p = d\theta_{mA} - d\theta_{mA}^e = d\theta_{mB} - d\theta_{mA}^e \quad (1.6.14)$$

すなわち、 $d\theta_{mA}^p$ は両要素の弾性領域間の不連続たわみ角を意味することが分かる。

この種の不連続場を要素間に導入する場合、従来から節点mにおける弾性要素AおよびBのたわみ角を独立にした上で、いずれか一方の節点変位を $dM_m = 0$ なる完全弾塑性体の負荷条件を用いて消去する手法が採られるが^{4)~7)}、こうして得られる弾塑性剛性マトリックスは、式(1.6.9)および(1.6.10)を用いて塑性節点法により得られる剛性マトリックスと完全に一致する。付録2にその証明を示す。

以上の結果、梁要素の節点に塑性節点法を適用した場合、節点にはたわみ角の不連続場、すなわち塑性解析法で言う塑性関節機構が形成されることが明らかとなった。同様の議論は本項の始めに挙げたいずれの要素についても成立する。すなわち、Fig.1.6.2の Morley の板曲げ要素や、Fig.1.6.3(a)の渡辺らの板曲げ要素の境界边上中点節点における節点力 M_n で塑性化を判定すれば Fig.1.6.3(a)下図に示すような塑性関節線を、またFig.1.6.3(b)の渡辺らの平面要素の境界边上中点節点の接線方向節点力 F で塑性化を判定すれば、同図下図に示すすべり線場を表現できることになる。

また、隣接要素間の節点変位を独立にして塑性変形を導入する従来の塑性解析的有限要素法では^{4)~8)} 組合せ応力下における塑性相関関係を考慮できなかったが、塑性節点法ではこれが可能である。したがって、例えば渡辺らの板曲げ要素と平面要素を組み合わせ、すべり線と塑性関節線が同時に形成する場合の解析も行える。

なお、ここでは節点を塑性化判定点とする場合を論じたが、本理論によれば Fig.1.6.1 の梁・柱要素や Fig.1.6.4の梁要素の場合、節点以外の要素の径間に塑性関節が形成した状態の塑性挙動も1要素のみで厳密に解析できる。この詳細は第6章で述べる。

1.6.3 塑性節点法の理論的位置づけ

有限要素法による一般的な弾塑性解析法では、要素内の塑性化した点に塑性理論に基づく応力・歪関係式を導入し、応力および歪の積分によって節点力と節点変位の関係を求め、要素の剛性を評価する。すなわち弾性および塑性挙動は歪のレベルで分離されている。これに対し塑性節点法では、要素の塑性挙動を塑性理論をふまえながら節点の変位で表す。換言すれば、弾性および塑性挙動を節点変位の次元で分離している。したがって、一般に節点変位を未知数として展開される有限要素法に対して、要素の弾塑性剛性マトリックスが積分をすることなくマトリックス演算のみで得られるという効率良い弾塑性解析アルゴリズムを提供することになる。この変位型塑性理論とも呼べる塑性節点法は、1.6.1項で述べたように、要素内部に節点変位・歪マトリックス $[B]$ を用いて塑性歪を分布させた場合と等価な要素剛性が得られるという点で、従来の歪のレベルの塑性理論との理論的対応性を有する。したがって、本解析理論は有限要素法という離散化による近似解析法に適した形に塑性理論を一般化した理論と言える。

一方、塑性節点法で節点に生じる不連続な塑性変位場は要素の特性（特に変位関数）と要素内での塑性化判定位置によって様々な形態をとる。そして前項に示した特定の有限要素の場合、この塑性変位場は塑性解析法で用いられる塑性関節、塑性関節線、そしてすべり線のような不連続場を明確に表現することになる。したがって、本解析理論は従来の塑性関節法^{9), 10)} や塑性関節線法^{4)~7)} などの塑性解析的有限要素法を包含する非常に一般化された解析法であると言える。

1.7 結言

本章では、塑性節点法の基礎理論として、完全弾塑性体の静的弾塑性解析理論を展開した。そして塑性節点法で要素に生じる塑性変形を考察すると共に、本理論の弾塑性解析法における理論的位置づけを明らかにした。塑性節点法の特徴および本章において得られた主な結果は以下の通りである。

- (1) 弾性解析は通常有限要素法に一致する。
- (2) 塑性化判定点の塑性条件を要素の節点力の関数の形に表したものを塑性ポテンシャルとして塑性流れ理論を適用することにより、要素には節点のみに縮約された塑性変形（塑性節点変位）が生じる。そして要素内部は常に弾性挙動する。本理論によれば、任意

の有限要素に対して、塑性変形の縮約という塑性解析的手法を合理的に取り入れた効率良い弾塑性解析を行うことができる。

- (3) 要素の弾塑性剛性マトリックスは、要素内部で剛性積分を行うことなくマトリックス演算のみで導出される。その剛性は、塑性節点変位と要素の節点変位・歪マトリックス [B] から求まる塑性歪が要素内部に分布するとして剛性積分を行った場合と等価である。
- (4) 要素分割を無限に細かくし、要素が一定歪状態に至った極限では、要素全域で塑性歪の直交性と塑性負荷条件が満足され、塑性変形と剛性は、共に厳密なものとなる。
- (5) 要素境界断面の合応力を、その境界上の節点の節点力のみで表すことのできる梁・柱要素、板曲げ要素および平面要素の場合、節点を塑性化判定点として本理論を適用することにより、境界断面に塑性関節、塑性関節線そしてすべり線機構を導入できる。

第2章 歪硬化体の弾塑性解析理論

2.1 緒言

金属材料が塑性化すると、以後塑性歪の増加と共に降伏応力が増大する現象、いわゆる歪硬化が生じる。前章ではこの歪硬化を無視し、材料を完全弾塑性体と仮定して理論展開を行った。このような仮定は、塑性域にわたる歪履歴を経ていない軟鋼のように降伏後ほぼ一定の応力下で塑性変形が進行する材料に対しては実用上有効である。しかし、船舶、海洋構造物および海洋機器の分野において近年広く用いられつつある合金鋼やアルミ合金等のように歪硬化性の顕著な材料の場合、あるいは軟鋼においても塑性歪が大きく生じて歪硬化域に入った場合や、繰り返し荷重下でのBaushinger効果が顕著に現れるような場合、構造物の塑性挙動を正確に知るためには歪硬化を考慮した弾塑性解析を行う必要がある。本章では、塑性節点法による歪硬化体の弾塑性解析理論を展開する。

材料の歪硬化性を表す歪硬化係数 H' は、単軸材料試験より得られるFig.2.1.1の応力・歪線図を基に、塑性化後の応力増分 $d\sigma$ と塑性歪増分 $d\varepsilon^p$ の比として次式で定義される。

$$H' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} \quad (2.1.1)$$

一方、塑性節点法では、要素の塑性変形は節点に縮約されて節点変位の形で生じる。したがって、式(2.1.1)の歪硬化係数を導入するためには、要素内部に生じる塑性歪場を別途

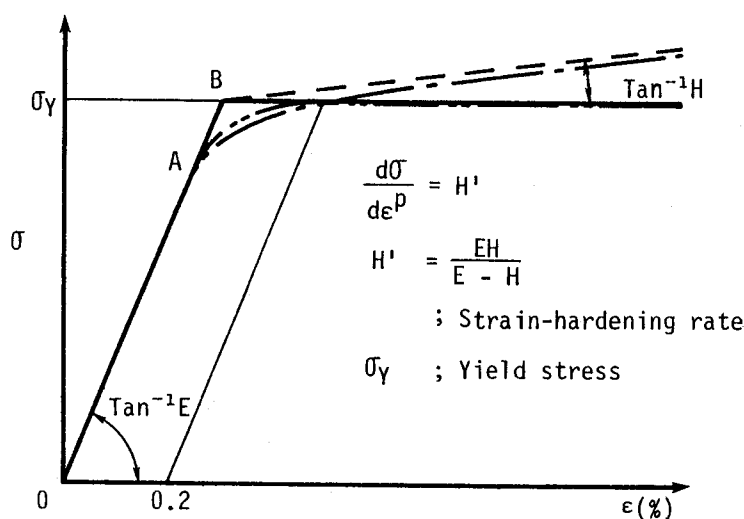


Fig. 2.1.1 Uniaxial stress-strain relationship

評価し、この領域における歪硬化の影響を再び節点に縮約する必要がある。基礎式の定式化にあたってはこの取り扱い方が特に重要な問題となる。

本章では、まず2.2節において、塑性節点法で用いる塑性条件と、それに対応した歪硬化係数について述べる。特に合応力表示型塑性条件については、合応力に対して有効な新しい定義による歪硬化係数を提案する。

2.3節では、要素の塑性歪場の評価法と要素内部に生じる歪硬化の影響の節点への縮約法（塑性節点変位に対して有効な歪硬化係数の決定法）を明らかにし、その結果を基に歪硬化を考慮した弾塑性剛性方程式を定式化する。

なお、前章では合応力表示型塑性条件として全断面塑性条件のみを取り上げたが、ここでは、断面内の初期塑性化から全断面塑性化に至る塑性域の拡大過程を考慮できる塑性条件も新たに採用する。また、歪硬化則として等方硬化則を取り上げる。

2.2 塑性条件と歪硬化係数

1.3節に述べたように、塑性節点法で取り扱う塑性条件は塑性化の判定に用いる応力の種類によって次の2つのタイプに大別できる。

(1) 要素内の個々の点の応力成分で表される塑性条件；応力表示型塑性条件

(2) 要素の断面力成分で表される塑性条件；合応力表示型塑性条件

ここでは各タイプの塑性条件と、これに歪硬化を考慮する場合の歪硬化係数の取り扱い方を、応力あるいは合応力などの一般化応力と、歪あるいは曲率などの一般化歪に対する通常の塑性理論のレベルで述べる。なお、以下一般化応力を $\{\sigma\}$ で、一般化歪を $\{\varepsilon\}$ で表す。

2.2.1 応力表示型塑性条件と歪硬化係数

この形式の塑性条件には、MisesやTrescaの降伏条件がある。アイソパラメトリック塊体有限要素のような場合には、要素内に置かれた個々の塑性化判定点でこのような塑性条件が定義され、一般に次式の形で表される。

$$f = Y(\{\sigma\}) - \sigma_0(\bar{\varepsilon}^p) = 0 \quad (2.2.1)$$

ここで $Y(\{\sigma\})$ は降伏関数を表し、Misesの降伏条件を適用する場合では次式となる。

$$Y^2 = \frac{1}{2} \{ (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2) \} \quad (2.2.2)$$

また降伏曲面の大きさを表すパラメータ σ_0 は、応力表示型塑性条件を考えているので材料の降伏応力 σ_y に一致する。そして歪硬化によって相当塑性歪 $\bar{\epsilon}^p$ とともに次式の関係で増加する。

$$d\sigma_0 = H' d\bar{\epsilon}^p \quad (2.2.3)$$

ここで、 H' ; 材料の歪硬化係数 (Fig.2.1.1参照)

相当塑性歪増分 $d\bar{\epsilon}^p$ は、 σ_0 が実際の塑性仕事増分 $\{\sigma\}^T \{d\epsilon^p\}$ と等しい塑性仕事をなす時の塑性歪増分として次式で定義される。

$$\sigma_0 d\bar{\epsilon}^p = \{\sigma\}^T \{d\epsilon^p\} \quad (2.2.4)$$

応力表示型塑性条件の場合、式(2.2.3) の形で歪硬化係数を考慮することにより、塑性化判定点での材料の応力・歪関係を正確に考慮した解析が行える。これに対し次項の合応力表示型塑性条件の場合には、歪硬化を考慮する上で種々の工夫を要する。

2.2.2 合応力表示型塑性条件と歪硬化係数

(1) 断面の塑性挙動の取り扱い

前章では合応力表示型塑性条件として、材料を完全弾塑性体と仮定した場合の全断面塑性条件を考えた。そして全断面塑性化後も歪硬化は生じないとした。

本章では歪硬化を考慮するに当り、断面の塑性化の判定基準の一つに同じく完全弾塑性体の全断面塑性条件を採用する。そしてこの判定基準を以後“塑性化判定基準-1”と呼ぶことにする。本基準に基づく解析では、Fig.2.2.1 に示す梁の曲げ崩壊の場合、実線-IIのように全断面塑性モーメント M_y を表す点Bまでは断面は弾性で、点Bを過ぎると歪硬化を伴いつつ断面全域が塑性挙動すると考えることになる。

一方、初期塑性状態 (Fig.2.2.1の点A) から塑性化を考慮する塑性化判定基準も新たに設け、これを以後“塑性化判定基準-2”と呼ぶことにする。そして、この基準に基づく解析には、Egger¹²⁾ により提案された初期塑性状態から全断面塑性状態に至る中間塑性状態を考慮し得る合応力表示型塑性条件を採用する。詳細は後述するが、この塑性条件によればFig.2.2.1に破線で示した、より厳密な塑性挙動を解析できる。

ところで合応力表示型塑性条件の場合、歪硬化係数として、断面内の一点でなく断面全

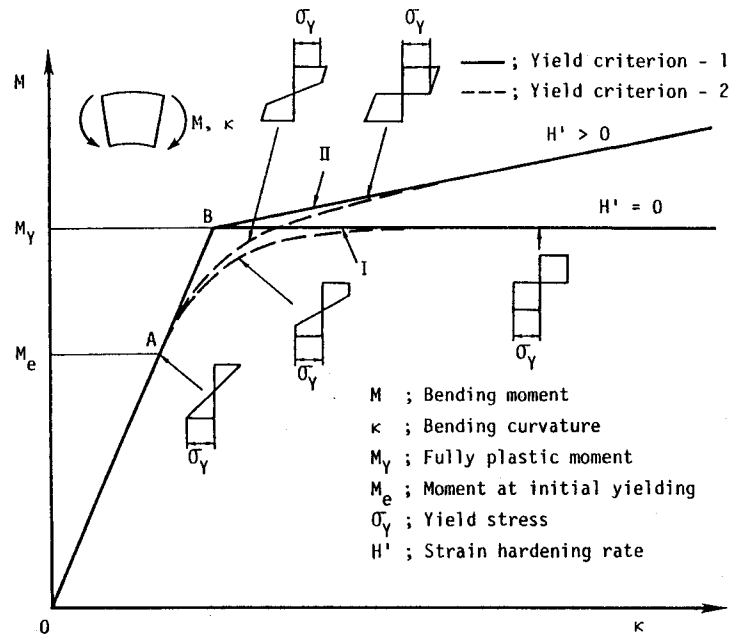


Fig. 2.2.1 Typical moment-curvature relationship of beam members

体の歪硬化の影響を表せるものが必要である。そこで本論文では式(2.1.1)の歪硬化係数 H' を断面内で積分することにより、合応力表示型塑性条件に有効な新しい概念の歪硬化係数を提案する。

以下、梁・柱要素とシェル要素の各々について、上記の各塑性化判定基準に対して用いる合応力表示型塑性条件と歪硬化係数を具体的に示す。なお材料の応力・歪関係としては、Fig.2.1.1に実線および破線で示したbi-linearな関係を取り上げる。

(2) 梁・柱要素

(2-i) 基準降伏関数

軸力を N 、曲げモーメントを M で表すと、梁・柱要素の初期塑性条件は次式で与えられる。

$$|n| + C_f |m| - 1 = 0 \quad (2.2.5)$$

ここで、 $n = N/N_Y$, $m = M/M_Y$

N_Y , M_Y ; 材料の比例限 (Fig.2.1.1の点Aあるいは点B) を降伏応力として求めた全断面塑性軸力およびモーメント

C_f ; 形状係数

上式を2次形式に改めると、

$$Y_0^2 - N_Y^2 = 0 \quad (2.2.6)$$

ここで、 $Y_0^2 = N_Y^2(n^2 + 2C_r\sqrt{n^2m^2} + C_r^2m^2)$

本論文では、軸力の次元で表した上記の Y_0 を初期塑性状態に対する降伏関数と定義する。

一方、全断面塑性条件は要素の断面形状によって異なるため一般的な表示はできないが、矩形中実断面の梁・柱要素の場合、次式となる。

$$n^2 + |m| - 1 = 0 \quad (2.2.7)$$

2次形式に改めると、

$$Y_1^2 - N_Y^2 = 0 \quad (2.2.8)$$

ここで、 $Y_1^2 = N_Y^2(n^2 + 0.5m^2 + \sqrt{0.25m^4 + n^2m^2})$

上式の Y_1 を矩形中実断面要素の全断面塑性状態に対する降伏関数と定義する。他の断面形状の梁・柱要素については、第8章以降の解析例において個々に示すことにする。

なお、軸力 N のみ作用する場合は初期降伏がすなわち全断面降伏を意味する。この時、式(2.2.6)および式(2.2.8)の Y_0 および Y_1 は共に次式となる。

$$Y_0 = Y_1 = N_Y n \quad (2.2.9)$$

(2-ii) 塑性条件と歪硬化係数（全断面塑性状態を塑性化判定基準とする場合；塑性化判定基準-1）

式(2.2.8)の Y_1 を用いると、塑性条件 f は次式の形で表される。

$$f = Y_1(\{\sigma\}) - \sigma_0(\bar{\epsilon}^p) = 0 \quad (2.2.10)$$

ここで、 $\{\sigma\} = \{N \ M\}^T$

$$\sigma_0|_{\bar{\epsilon}^p=0} = N_Y$$

σ_0 は軸力 N_Y の次元を有し、歪硬化とともに増大する。

塑性負荷条件は次式となる。

$$\begin{aligned} df &= dY_1 - d\sigma_0 \\ &= \left\{ \frac{\partial Y_1}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} - H_b' d\bar{\epsilon}^p = 0 \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

ここで、 $H_b' = \frac{d\sigma_0}{d\bar{\epsilon}^p}$

上式の H_b' は、塑性化した各点で定義される式(2.1.1)あるいは式(2.2.3)の H' と異なり、梁・柱要素の断面全体に生じる歪硬化の影響を表す歪硬化係数である。そこで、以後これ

を“断面歪硬化係数”と呼ぶことにする。なお式(2.2.11)の相当塑性歪増分 $d\bar{\epsilon}^p$ は、式(2.2.4)と同様の考え方で、次のように定義される。

$$\sigma_0 d\bar{\epsilon}^p = \{\sigma\}^T \{d\epsilon^p\} \quad (2.2.12)$$

ここで、 $\{d\epsilon^p\} = \{de^p \quad d\kappa^p\}^T$

de^p ; 平均塑性軸歪増分

$d\kappa^p$; 塑性曲率増分

以下、断面歪硬化係数 H_b' を導出する。

合応力表示型塑性条件を用いる解析では、断面の弾塑性挙動を曲げモーメントなどの一般化応力と曲率などの一般化歪によって表現する。したがって、このような塑性条件に有効な断面歪硬化係数 H_b' は、一般化塑性歪によって断面内の各点に生じる歪硬化の影響を断面内で積分し、各一般化応力成分に対して合理的に反映させたものでなければならない。

全断面塑性化後の断面に生じる式(2.2.12)の一般化塑性歪増分 $\{d\epsilon^p\}$ は、式(2.2.10)の f を塑性ポテンシャルと見なして塑性流れ理論を適用すると次式で与えられる。

$$\{d\epsilon^p\} = d\lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \quad (2.2.13)$$

$d\lambda$ は正のスカラー量である。式(2.2.13)を式(2.2.12)に代入すると、

$$\sigma_0 d\bar{\epsilon}^p = \{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} d\lambda \quad (2.2.14)$$

となり、これと式(2.2.10)および $\{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} = \{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial Y_1}{\partial \sigma} \right\} = Y_1$ (Y_1 が2次形式であるため) なる関係を考慮すると、結局 $d\bar{\epsilon}^p = d\lambda$ となる。すなわち式(2.2.13)は、次のように表される。

$$\{d\epsilon^p\} = d\bar{\epsilon}^p \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \quad (2.2.15)$$

一方、全断面塑性状態では歪硬化に起因する合応力増分 $\{d\sigma\}$ が次式で与えられると仮定する。

$$\{d\sigma\} = \{dN \quad dM\}^T = \{H_N' de^p \quad H_M' d\kappa^p\}^T \quad (2.2.16)$$

ここで、 $H_N' = \int_A H' dA$, $H_M' = \int_A H' y^2 dA$

$\int_A dA$; 面積分

y ; 塑性中性軸から断面の深さ方向に測った距離

この $\{d\sigma\}$ に対応するパラメータ σ_0 の増分(降伏曲面の拡大量) $d\sigma_0$ は、式(2.2.11)を用いると、次式で与えられる。

$$d\sigma_0 = dY_1 = \left\{ \frac{\partial Y_1}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} \quad (2.2.17)$$

式(2.2.16)を式(2.2.17)に代入し、さらに式(2.2.15)の關係を用いると、断面歪硬化係数 H_b' が次式のように得られる。

$$H_b' = \frac{d\sigma_0}{d\varepsilon^p} = \left\{ H_N' \left(\frac{\partial f}{\partial N} \right)^2 + H_M' \left(\frac{\partial f}{\partial M} \right)^2 \right\} \quad (2.2.18)$$

上式を式(2.2.11)に代入すると、軸力 N および曲げモーメント M が単独に作用する場合、式(2.2.16)の1行目および2行目の關係が得られる。このように断面歪硬化係数 H_b' を用いれば、次元の異なる各一般化応力に対して合理的に歪硬化の影響を考慮できる。

(2-iii) 塑性条件と歪硬化係数(初期塑性状態を塑性化判定基準とする場合；塑性化判定基準-2)

曲げ変形を伴う部材における、初期塑性状態から全断面塑性状態に至る中間状態を表せる降伏関数として Egger¹²⁾、および安川¹³⁾ は、次式を提案している。

$$Y^2 = \frac{Y_1^2 (\eta^p)^A + Y_0^2 B}{(\eta^p)^A + B} \quad (2.2.19)$$

ここで、 A, B ；断面形状と材料の応力・歪關係から決まるパラメータ

$$(0 \leq A < 1, B > 0)$$

η^p ；断面の塑性変形の大きさを表す正值パラメータ

この降伏関数 Y は $\eta^p = 0$ の時 $Y = Y_0$ に、 $\eta^p \rightarrow \infty$ の時 $Y = Y_1$ となる。したがって、 Y が表す降伏曲面の形状は、 η^p により変化する(軸力のみ作用する場合は、式(2.2.9)より $Y = Y_0 = Y_1$ となり、 Y は η^p と無關係となる)。矩形中実断面(形状係数 $C_f = 1.5$) の場合の降伏曲面の形状変化を Fig. 2.2.2 に示す。このように、降伏関数 Y によれば、 η^p をパラメータとして初期塑性状態から全断面塑性状態に至る過程の塑性相関關係を統一的に表すことができる。このパラメータ η^p を本論文では以下のように定める。

式(2.2.19)は、断面に弾性領域と塑性領域が混在する状態を表す。したがって、断面全体が塑性挙動をするとみなし、式(2.2.19)を塑性ポテンシャルとして扱うことは、厳密には正しくない。しかし、塑性ポテンシャルとして扱った場合、式(2.2.19)を構成する一般化応力 $\{\sigma\}$ に対する一般化塑性歪増分 $\{d\varepsilon^p\}$ が式(2.2.13)より得られ、これらを式(2

.2.12)に代入して、相当塑性歪増分 $d\bar{\epsilon}^p$ を定義できる。そこでパラメータ η^p として、この $\bar{\epsilon}^p$ を用いることにする。Egger らおよび安川らも、同様の手順で η^p を定義して解析理論を定式化し、精度の良い結果を得ている^{(12), (13)}。

塑性条件 f は次式のように表せる。

$$f = Y(\{\sigma\}, \bar{\epsilon}^p) - \sigma_0(\bar{\epsilon}^p) = 0 \quad (2.2.20)$$

ここで、
$$Y^2 = \frac{Y_1^2(\bar{\epsilon}^p)^A + Y_0^2 B}{(\bar{\epsilon}^p)^A + B}$$

$$\sigma_0|_{\bar{\epsilon}^p=0} = N_Y$$

降伏関数 Y が $\{\sigma\}$ だけでなく $\bar{\epsilon}^p$ の関数でもある点が、式(2.2.1)および(2.2.10)と異なっている。

塑性負荷条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} df &= dY - d\sigma_0 \\ &= \left\{ \frac{\partial Y}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} + \frac{\partial Y}{\partial \bar{\epsilon}^p} d\bar{\epsilon}^p - \frac{d\sigma_0}{d\bar{\epsilon}^p} d\bar{\epsilon}^p = 0 \end{aligned}$$

すなわち、

$$\left\{ \frac{\partial Y}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} = \left(\frac{d\sigma_0}{d\bar{\epsilon}^p} - \frac{\partial Y}{\partial \bar{\epsilon}^p} \right) d\bar{\epsilon}^p \quad (2.2.21)$$

ここで、

$$\frac{\partial Y}{\partial \bar{\epsilon}^p} = \frac{AB(\bar{\epsilon}^p)^{A-1}(Y_1^2 - Y_0^2)}{2Y\{(\bar{\epsilon}^p)^A + B\}^2} \quad (\leq 0)$$

式(2.2.21)の $d\sigma_0/d\bar{\epsilon}^p$ は式(2.2.11)の断面歪硬化係数 H_b' に対応し、材料の歪硬化による降伏曲面の拡大を表す。他方、 $-\partial Y/\partial \bar{\epsilon}^p$ (≥ 0) は断面内に塑性域が広がることによる Fig. 2.2.2 の降伏曲面の形状変化を表す。この現象は本来、材料の歪硬化とは意味を異にするが、Egger の降伏関数によれば、 $-\partial Y/\partial \bar{\epsilon}^p$ を $d\bar{\epsilon}^p$ に対する歪硬化係数と見なすことにより、断面内に塑性域が広がる現象をあたかも歪硬化の如く取り扱うことができる。Fig. 2.2.3 に降伏関数 Y と $\bar{\epsilon}^p$ の関係を模式的に示す。材料を完全弾塑性体と仮定する場合は $d\sigma_0/d\bar{\epsilon}^p = 0$ とすればよい。

なお Fig. 2.2.3 のように、 $-\partial Y/\partial \bar{\epsilon}^p$ は初期塑性状態 ($\bar{\epsilon}^p = 0$) および全断面塑性状態 ($\bar{\epsilon}^p \rightarrow \infty$) でそれぞれ次のようになる。

$$-\frac{\partial Y}{\partial \bar{\epsilon}^p} \Big|_{\bar{\epsilon}^p=0} \rightarrow \infty, \quad -\frac{\partial Y}{\partial \bar{\epsilon}^p} \Big|_{\bar{\epsilon}^p \rightarrow \infty} = 0 \quad (2.2.22)$$

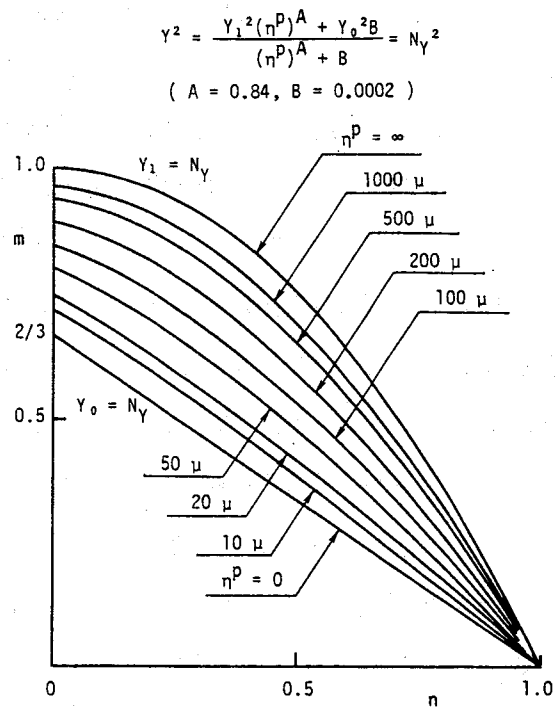


Fig. 2.2.2 Yield surface defined by Egger's yield function (Rectangular beam section)

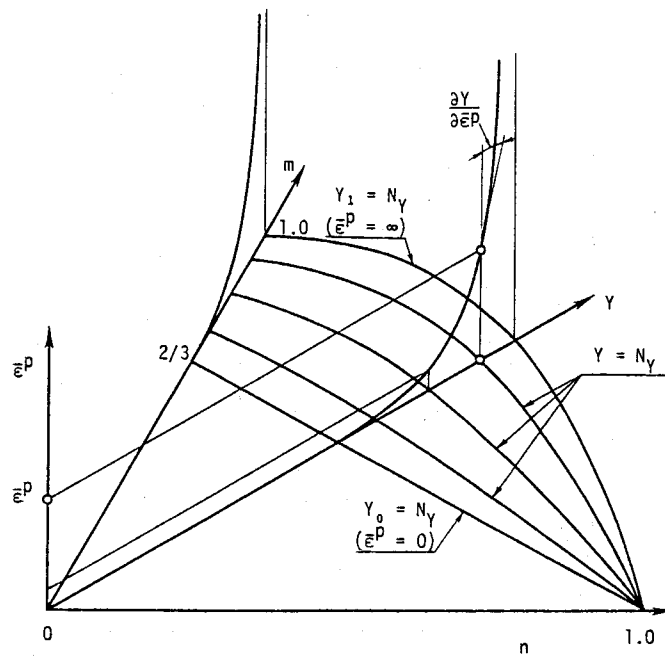


Fig. 2.2.3 Schematic illustration of the relationship between Egger's yield function, Y and generalized equivalent plastic strain, $\bar{\epsilon}^p$

この内、初期塑性時の $-\partial Y / \partial \bar{\epsilon}^p$ の取り扱い方は第9章の解析において具体的に述べる。また、材料の歪硬化を表す $d\sigma_0 / d\bar{\epsilon}^p$ として、式(2.2.18)の全断面塑性状態に対する断面歪硬化係数 H_b' の評価式を用いた場合（但し式(2.2.20)の f を式(2.2.18)に代入したもの）、塑性化領域が小さい段階では歪硬化の影響を過大評価する可能性がある。しかし全断面塑性化する極限では式(2.2.20)の f は式(2.2.10)の f に収束するため、ここでも上記の断面歪硬化係数を採用し、理論解析結果をもとにその適用性を調べる。

断面内に塑性域が広がることによる降伏曲面の形状変化に関するパラメータ A および B は、材料の歪硬化と切り離して以下のように定める。まず材料を完全弾塑性体と仮定した場合の断面の曲げモーメント・曲率線図を層分割法によって精度良く求める。次に式(2.2.21)の塑性負荷条件（但し完全弾塑性体なので $d\sigma_0 / d\bar{\epsilon}^p = 0$ ）を用いて塑性理論をもとに曲げモーメント・曲率関係式を導く（付録3-(1)参照）。そしてこれより得られる曲げモーメント・曲率線図が層分割法による結果と出来るだけ一致するよう試行錯誤的に A および B を定める。

Fig.2.2.4 に矩形中実断面の場合の比較結果を示す。両者はほぼ完全に一致しており、第9章の解析では $A=0.84$ 、 $B=0.0002$ を採用する。なお、本論文ではFig.2.1.1 の実線

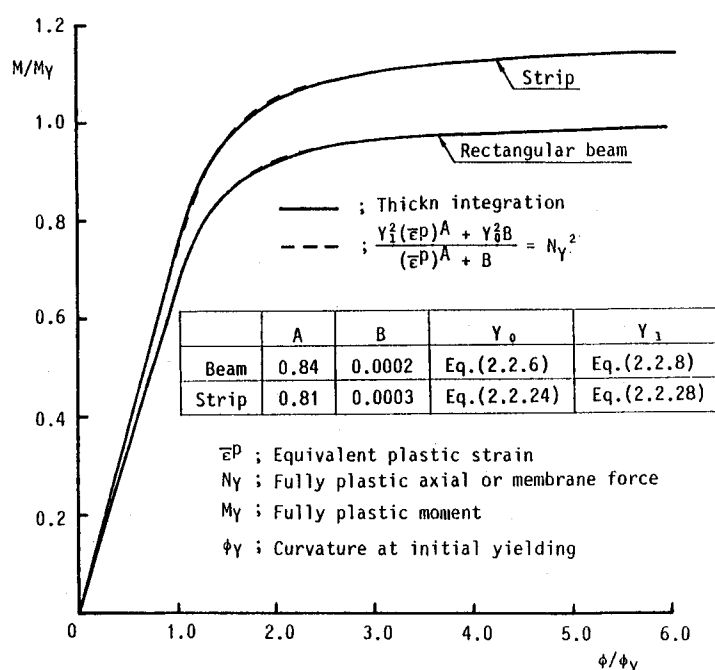


Fig. 2.2.4 Moment-curvature relationship of rectangular beam and strip

の応力・歪関係を用いてAとBを決めるが、一点鎖線のように明瞭な降伏点を示さない応力・歪関係を考慮する場合について、安川らは、二点鎖線で示す 0.2%耐力で傾きが0となるように仮定した曲線を基にAおよびBを定める手法を提案している¹³⁾。

(3) シェル要素

(3-i) 基準降伏関数

シェルの断面の初期塑性条件は、Mises の降伏条件に従う材料の場合、次式で与えられる。

$$Q_n + 3\sqrt{Q_n Q_m} + 2.25 Q_m - 1 = 0 \quad (2.2.23)$$

ここで、

$$Q_n = n_x^2 - n_x n_y + n_y^2 + 3n_{xy}^2$$

$$Q_m = m_x^2 - m_x m_y + m_y^2 + 3m_{xy}^2$$

$$n_x = N_x/N_Y, \quad n_y = N_y/N_Y, \quad n_{xy} = N_{xy}/N_Y$$

$$m_x = M_x/M_Y, \quad m_y = M_y/M_Y, \quad m_{xy} = M_{xy}/M_Y$$

N_x, N_y, N_{xy}, N_Y ; 単位長さ当たりの3面内力成分および材料の比例限を降伏応力として求めた全断面塑性膜力

M_x, M_y, M_{xy}, M_Y ; 単位長さ当たりの3モーメント成分および材料の比例限を降伏応力として求めた全断面塑性モーメント

そこで、本論文ではシェルの初期塑性状態を表す降伏関数 Y_0 を次式のように定義する。

$$Y_0^2 = N_Y^2 (Q_n + 3\sqrt{Q_n Q_m} + 2.25 Q_m) \quad (2.2.24)$$

すなわち $Y_0 = N_Y$ の時、断面は初期塑性化する。

一方、全断面塑性条件として Ilyushin が、Kirchhoff-Love の仮定と Mises の降伏条件に基づく厳密解を明らかにしている。しかし複雑な陰形式の内力相関式であるため、古くからその近似式が導出されている。その主なものを以下に示す。

$$F_1 = Q_n + Q_m + \frac{|Q_{nm}|}{\sqrt{3}} - 1 = 0 \quad (2.2.25)$$

$$F_2 = Q_n + 0.5 Q_m + \sqrt{0.25 Q_m^2 + Q_{nm}^2} - 1 = 0 \quad (2.2.26)$$

$$F_3 = Q_n + 0.5 Q_m - \frac{0.25(Q_n Q_m - Q_{nm}^2)}{Q_n + 0.48 Q_m} + \sqrt{0.25 Q_m^2 + Q_{nm}^2} - 1 = 0 \quad (2.2.27)$$

ここで、 $Q_{nm} = n_x m_x + n_y m_y - 0.5(n_x m_y + n_y m_x) + 3n_{xy} m_{xy}$

F_1 は Ilyushin自身が導出した近似式で、 Q_n, Q_m, Q_{nm} の線形関係式の中では最適近似式である。しかし、Ivanovによる F_2 や F_3 より精度が劣ることをRobinsonが指摘している¹⁴⁾。また F_3 が最も厳密解に近いが、実際に F_2 および F_3 を用いた解析例ではほとんど崩壊荷重に差はない。そこで本論文ではシェルの全断面塑性条件として式(2.2.26)の F_2 を採用し、降伏関数 Y_1 を単位長さ当たりの面内力の次元で次式のように定義する。

$$Y_1^2 = N_y^2(Q_n + 0.5Q_m + \sqrt{0.25Q_m^2 + Q_{nm}^2}) \quad (2.2.28)$$

$Y_1 = N_y$ の時、断面は全断面塑性化する。付録4に、式(2.2.26)の具体的な導出手順を示す。

なお、面内力のみ作用する場合($Q_m = Q_{nm} = 0$)では、降伏関数 Y_0 および Y_1 は共に次式となる。

$$Y_0 = Y_1 = N_y Q_n \quad (2.2.29)$$

また、板曲げ問題のように曲げモーメントのみ作用する場合($Q_n = Q_{nm} = 0$)、 Y_0 および Y_1 は、それぞれ次式となる。

$$\begin{aligned} Y_0 &= 1.5N_y Q_m \\ Y_1 &= N_y Q_m \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

(3-ii) 塑性条件と歪硬化係数(全断面塑性状態を塑性化判定基準とする場合；塑性化判定基準-1)

降伏関数 Y_1 を用いると、塑性条件 f は次式で表される。

$$f = Y_1(\{\sigma\}) - \sigma_0(\bar{\epsilon}^p) = 0 \quad (2.2.31)$$

ここで、 $\{\sigma\} = \{N_x \ N_y \ N_{xy} \ M_x \ M_y \ M_{xy}\}^T$

$$\sigma_0|_{\bar{\epsilon}^p=0} = N_y$$

塑性負荷条件は次式となる。

$$\begin{aligned} df &= dY_1 - d\sigma_0 \\ &= \left\{ \frac{\partial Y_1}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} - H_s' d\bar{\epsilon}^p = 0 \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

ここで、 $H_s' = \frac{d\sigma_0}{d\bar{\epsilon}^p}$

H_s' は、シェルの単位長さの断面全体に生じる歪硬化の影響を表す断面歪硬化係数である。

また相当塑性歪増分 $d\bar{\epsilon}^p$ は、次式より得られる。

$$\sigma_0 d\bar{\epsilon}^p = \{\sigma\}^T \{d\epsilon^p\} \quad (2.2.33)$$

ここで、 $\{d\epsilon^p\} = \{d\epsilon_x^p, d\epsilon_y^p, d\epsilon_{xy}^p, d\kappa_x^p, d\kappa_y^p, d\kappa_{xy}^p\}^T$

$d\epsilon_x^p, d\epsilon_y^p, d\epsilon_{xy}^p$; 塑性膜歪増分

$d\kappa_x^p, d\kappa_y^p, d\kappa_{xy}^p$; 塑性曲率増分

次に断面歪硬化係数 H_s' を導く。シェル要素の場合、各一般化応力成分と、これと対をなす一般化塑性歪成分の関係を、梁・柱要素における式(2.2.16)のように設定することは不可能である。そこで、まず一般化応力場を代表する量として次の相当合応力 $\bar{N}$ と $\bar{M}$ を定義する。

$$\bar{N}^2 = N_y^2(n_x^2 - n_x n_y + n_y^2 + 3n_{xy}^2) = N_y^2 Q_n \quad (2.2.34)$$

$$\bar{M}^2 = M_y^2(m_x^2 - m_x m_y + m_y^2 + 3m_{xy}^2) = M_y^2 Q_m$$

上式を式(2.2.28)から式(2.2.30)の Y_1 に代入すると、式(2.2.31)の塑性条件 f は $\bar{N}$ と $\bar{M}$ の関数として表せる。そこで $\bar{N}$ と $\bar{M}$ に対応する相当塑性膜歪増分 $d\bar{\epsilon}^p$ と相当塑性曲率増分 $d\bar{\kappa}^p$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} d\bar{\epsilon}^p &= d\bar{\epsilon}^p \frac{\partial f}{\partial \bar{N}} \\ d\bar{\kappa}^p &= d\bar{\epsilon}^p \frac{\partial f}{\partial \bar{M}} \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

そして、 $d\bar{N}$ と $d\bar{\epsilon}^p$ および $d\bar{M}$ と $d\bar{\kappa}^p$ の間に次の関係を仮定する。

$$\begin{aligned} d\bar{N} &= H' t d\bar{\epsilon}^p \\ d\bar{M} &= \frac{H' t^3}{12(1-\nu^{p2})} d\bar{\kappa}^p \quad (\nu^p=0.5, t; \text{板厚}) \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

第一式は膜力のみ作用する場合、厳密に成立する。第二式は弾性状態の帯板の曲げモーメント・曲率関係式におけるヤング率およびポアソン比を H' および ν^p に置き換えた近似式である。式(2.2.35)と(2.2.36)を用いると、歪硬化による σ_0 の増加は次式となる。

$$\begin{aligned} d\sigma_0 &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} \\ &= H' t \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{N}} \right)^2 + \frac{t^2}{12(1-\nu^{p2})} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{M}} \right)^2 \right\} d\bar{\epsilon}^p \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

これより次の断面歪硬化係数 H_s' ($=d\sigma_0 / d\bar{\epsilon}^p$) を得る。

$$H_s' = H' t \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{N}} \right)^2 + \frac{t^2}{12(1-\nu^{p2})} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{M}} \right)^2 \right\} \quad (2.2.38)$$

上式の精度は、第9章の解析例を通じて検証する。

(3-iii) 塑性条件と歪硬化係数（初期塑性状態を塑性化判定基準とする場合；塑性化判定基準-2）

Eggerの降伏関数、式(2.2.19)を用いる。したがって、塑性条件および負荷条件は式(2.2.20)および(2.2.21)と同じ形となる。降伏関数の係数AおよびBは、層分割法で得られる帯板の曲げモーメント・曲率関係と出来るだけ一致するように、安川らの方法に従って定める（付録3-(1)参照）。Fig.2.2.4 に比較結果を示す。両者は良く一致しており、シェルの解析では、 $A=0.81$ および $B=0.0003$ を用いることにする。

2.3 歪硬化体の弾塑性剛性方程式の定式化

2.3.1 塑性条件および塑性負荷条件

n 個の節点を有する一つの有限要素を考え、その節点力および節点変位を $\{x\}$ および $\{u\}$ で表す。2.2 節の結果より歪硬化体の弾塑性解析に用いる塑性条件は、形式上、次の二つのタイプのいずれかとなる。

$$\begin{aligned} f &= Y(\{\sigma\}) - \sigma_0(\bar{\epsilon}^p) = 0 \\ f &= Y(\{\sigma\}, \bar{\epsilon}^p) - \sigma_0(\bar{\epsilon}^p) = 0 \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

そこで、要素の i 番目の塑性化判定点の塑性条件 f_i を一般的な形として次式で表す。

$$f_i(\{\sigma_i\}, \bar{\epsilon}_i^p, \sigma_{0i}(\bar{\epsilon}_i^p)) = 0 \quad (2.3.2)$$

式(1.4.8)に示したように、 i 点の応力あるいは合応力 $\{\sigma_i\}$ は、一般に要素の j 個 ($j \leq n$) の節点の節点力の関数となる。したがって式(2.3.2)は次の節点力の関数 F_i に変形できる。

$$F_i(\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_j\}, \bar{\epsilon}_i^p, \sigma_{0i}(\bar{\epsilon}_i^p)) = 0 \quad (2.3.3)$$

これを塑性ポテンシャルとして塑性流れ理論を適用すると、塑性節点変位増分 $\{du^p\}$ が次式のように得られる。

$$\{du^p\} = d\lambda_i \{\phi_i\} \quad (2.3.4)$$

ここで、 $d\lambda_i$ ；正のスカラー量

$$\{\phi_i\} = \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial \{x_1\}} \quad \frac{\partial F_i}{\partial \{x_2\}} \quad \dots \quad \frac{\partial F_i}{\partial \{x_n\}} \right\}^T = \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial x} \right\}$$

ただし、 $\{\phi_i\}$ において F_i に関与しない節点力に関する微分項は消失する。

式(2.3.4) より塑性化判定点 i が塑性化した時、 i 点の応力に関する節点力が作用する全節点に塑性変形が生じることになる。この塑性変形は、節点のみに縮約して生じ要素内部は弾性のままである。

一方、塑性化した i 点では、負荷の続く限り次の条件が満足されねばならない。

$$dF_i = \{\phi_i\}^T \{dx\} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial \bar{\epsilon}_i^p} + \frac{\partial F_i}{\partial \sigma_{oi}} \cdot \frac{d\sigma_{oi}}{d\bar{\epsilon}_i^p} \right) d\bar{\epsilon}_i^p = 0 \quad (2.3.5)$$

ここで、

$$\frac{\partial F_i}{\partial \bar{\epsilon}_i^p} ; \text{断面に塑性域が広がる現象を表す見かけの歪硬化係数}$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial \sigma_{oi}} = -1$$

$$\frac{d\sigma_{oi}}{d\bar{\epsilon}_i^p} ; \text{歪硬化係数 } H' \text{ あるいは断面歪硬化係数 } H_b', H_s'$$

上式には i 点の相当塑性歪増分 $d\bar{\epsilon}_i^p$ が含まれている。これに対し、塑性節点法で要素に生じる塑性変形は、式(2.3.4)の塑性節点変位増分 $d\lambda_i \{\phi_i\}$ のみである。したがって、式(2.3.5)を塑性節点法に適用するためには $d\bar{\epsilon}_i^p$ と $d\lambda_i \{\phi_i\}$ との関係を明らかにせねばならない。その具体的な関係式の導出は次項で行うが、ここでその結果を用いると、 i 点の相当塑性歪増分 $d\bar{\epsilon}_i^p$ は塑性節点変位増分の大きさを表す $d\lambda_i$ と次式の形で関係づけられる。

$$d\bar{\epsilon}_i^p = h_i d\lambda_i \quad (2.3.6)$$

上式の h_i は i 点の塑性化に起因して要素内部に生じた塑性化領域における塑性挙動の効果を塑性節点変位に対する効果に変換するためのパラメータである。この関係を式(2.3.5)に代入すると塑性負荷条件は次式となる。

$$dF_i = \{\phi_i\}^T \{dx\} - H_{ni}' d\lambda_i = 0 \quad (2.3.7)$$

ここで、 $H_{ni}' = - \left(\frac{\partial F_i}{\partial \bar{\epsilon}_i^p} + \frac{\partial F_i}{\partial \sigma_{oi}} \cdot \frac{d\sigma_{oi}}{d\bar{\epsilon}_i^p} \right) h_i$; 節点変位歪硬化係数

H_{ni}' は塑性節点変位に対する歪硬化係数であり、本論文ではこれを以後“節点変位歪硬化係数”と呼ぶことにする。この H_{ni}' を次に導出する。

2.3.2 節点変位歪硬化係数の導出

(1) 基本手順

有限要素法による一般的な弾塑性解析では、要素内に分布する塑性化領域の応力・歪関係を考慮して要素の剛性を評価する。したがって、各点の応力・歪関係式に式(2.1.1)の歪硬化係数 H' を導入すれば、歪硬化を考慮した要素の弾塑性剛性方程式が得られる。

これに対し塑性節点法では、要素の塑性変形を弾性要素の節点に縮約して要素の剛性を評価している。したがって、この解析理論に歪硬化を考慮するためには、要素に本来生じている塑性化領域の広がりを経評価し、この領域内の歪硬化の影響の積分量を節点の塑性変形に対する剛性に反映させる必要がある。この対策として、本論文では次のような手法を提案する。

塑性節点変位増分 $\{d u^p\}$ は、定性的には要素内部に分布する塑性歪の積分量を節点に集中させたものと考えられる。しかし、塑性節点変位がエネルギー論の立場からも合理的な塑性歪の積分量であるためには、 $\{d u^p\}$ に対して節点力がなす塑性仕事量が、要素内部に実際に塑性歪が生じている時なされる塑性仕事量と等しくなければならない。この考え方に従い、要素内部の歪硬化の影響を節点に縮約するために必要な式(2.3.6)のパラメータ h_i を導出する。

1.4.2項に述べた如く、塑性節点法では塑性化判定点 i の塑性化に起因して要素でなされる塑性仕事増分 $d W_i^p$ を、式(2.3.4)の $\{d u^p\}$ を用いて次式で定義する。

$$d W_i^p = \{x\}^T \{\phi_i\} d \lambda_i \quad (2.3.8)$$

一方、 i 点の周囲に生じた塑性化領域 V_i^p に実際に塑性歪が分布するとした時、この領域でなされる塑性仕事増分 $d W_i^{p*}$ は、 V_i^p 内各点の相当応力 σ と相当塑性歪増分 $d \bar{\epsilon}^p$ を用いて次式で表される。

$$d W_i^{p*} = \int_{V_i^p} \sigma \cdot d \bar{\epsilon}^p d V \quad (2.3.9)$$

式(2.3.8)と(2.3.9)を等置すると次式を得る。

$$\int_{V_i^p} \sigma \cdot d \bar{\epsilon}^p d V = \{x\}^T \{\phi_i\} d \lambda_i \quad (2.3.10)$$

さて今、 V_i^p における相当塑性歪増分 $d \bar{\epsilon}^p$ の分布が、 i 点の相当塑性歪増分 $d \bar{\epsilon}_i^p$ と分布関数（座標の関数） g の積として次式のように表されたとする。

$$d \bar{\epsilon}^p = g \cdot d \bar{\epsilon}_i^p \quad (2.3.11)$$

式(2.3.11)を式(2.3.10)に代入すると次式を得る。

$$\int_{V_i^p} \sigma_o g dV \cdot d\bar{\epsilon}_i^p = \{x\}^T \{\phi_i\} d\lambda_i \quad (2.3.12)$$

これより式(2.3.6)のパラメータ h_i が次のように求められる。

$$h_i = d\bar{\epsilon}_i^p / d\lambda_i = \{x\}^T \{\phi_i\} / \int_{V_i^p} \sigma_o g dV \quad (2.3.13)$$

したがって、塑性化領域 V_i^p 内における相当塑性歪増分 $d\bar{\epsilon}^p$ の分布が分かれば、パラメータ h_i を決定でき、節点変位歪硬化係数 H_{ni}' の導出、すなわち歪硬化の影響の節点への縮約が可能となる。

この $d\bar{\epsilon}^p$ は、式(2.2.3)や式(2.2.11) に示したように、 V_i^p 内部の各点における $d\sigma_o$ と歪硬化係数から決定できる。以下では1次元要素とその他の要素の場合に分けて、分布関数 g およびパラメータ h_i を具体的に決定し、節点変位歪硬化係数 H_{ni}' を導出する。

(2) 1次元要素

Fig.2.3.1の梁・柱要素の節点 i が塑性化した場合を考える。ここでは変形は微小とし、さらに要素の径間には荷重は作用しないとする。(径間荷重が作用する場合は第6章で述べる。) 梁・柱要素の場合、塑性節点法では断面力を一般化応力とし、この一般化応力で各断面の塑性状態を表す。したがって要素に生じる塑性域および相当塑性歪増分の分布は要素の長さ方向の座標の関数として表される。

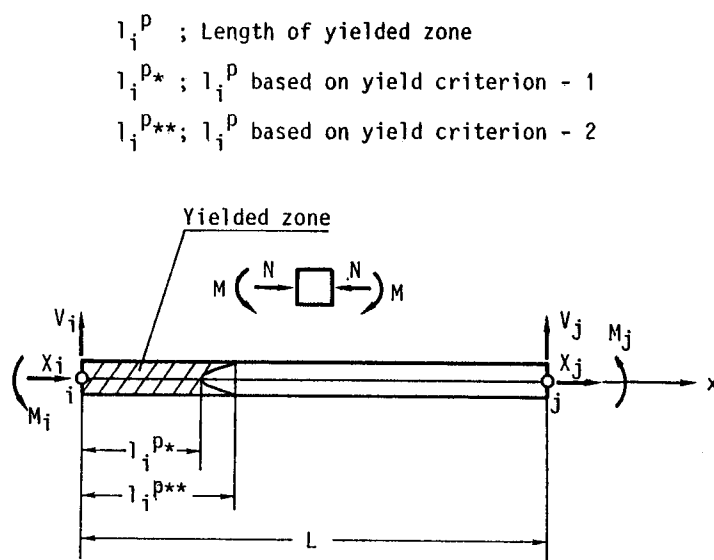


Fig. 2.3.1 Beam-column element

i 点から部材軸方向に x 軸をとると、式(2.3.11)および(2.3.13)は次式で表される。

$$d\bar{\varepsilon}^p(x) = g(x) \cdot d\bar{\varepsilon}_i^p \quad (2.3.11)'$$

$$h_i = \{x\}^T \{\phi_i\} / \int_{l_i^p} \sigma_o(x) g(x) dx \quad (2.3.13)'$$

ここで l_i^p は式(2.2.10)で定義される全断面塑性域か、式(2.2.20)で定義される初期塑性域までの塑性域長さであり、長さ方向の内力分布と塑性条件から決定できる。

まず $d\bar{\varepsilon}^p$ の長さ方向の分布を表す $g(x)$ を求める。断面 x における式(2.3.2) の塑性条件を f で表すと、塑性負荷条件は断面歪硬化係数 H_b' を用いて次式で与えられる。

$$\begin{aligned} df &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}^p} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_o} \cdot \frac{d\sigma_o}{d\bar{\varepsilon}^p} \right) d\bar{\varepsilon}^p \\ &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}^p} - H_b' \right) d\bar{\varepsilon}^p = 0 \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

ここで、 $\{\sigma\} = \{N \ M\}^T$ (Fig.2.3.1参照)

式(2.3.14)より次式を得る。

$$d\bar{\varepsilon}^p(x) = \frac{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\}}{H_b' - \frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}^p}} \quad (2.3.15)$$

また $d\bar{\varepsilon}_i^p$ は次式となる。

$$d\bar{\varepsilon}_i^p = \frac{\left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i} \right\}^T \{d\sigma_i\}}{H_{bi}' - \frac{\partial f_i}{\partial \bar{\varepsilon}_i^p}} \quad (2.3.16)$$

式(2.3.15), (2.3.16)を式(2.3.11)'に代入すると $g(x)$ が次の形で得られる。

$$g(x) = \frac{H_{bi}' - \frac{\partial f_i}{\partial \bar{\varepsilon}_i^p}}{H_b' - \frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}^p}} \cdot \frac{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\}}{\left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i} \right\}^T \{d\sigma_i\}} \quad (2.3.17)$$

右辺第2項を具体的に記すと、

$$\begin{aligned} \frac{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\}}{\left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i} \right\}^T \{d\sigma_i\}} &= \frac{\frac{\partial f}{\partial N} dN + \frac{\partial f}{\partial M} dM}{\frac{\partial f_i}{\partial N_i} dN_i + \frac{\partial f_i}{\partial M_i} dM_i} \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

また変形を微小と考えているので内力増分 dN 、 dM と節点力増分の関係は、

$$dN = dX_i \quad (2.3.19)$$

$$dM = \left(1 - \frac{x}{L}\right) dM_i - \frac{x}{L} dM_j$$

式(2.3.18)および(2.3.19)を式(2.3.17)に代入すると、結局 $g(x)$ が次のように得られる。

$$g(x) = \frac{H_{bi}' - \frac{\partial f_i}{\partial \bar{\epsilon}_i^p}}{H_b' - \frac{\partial f}{\partial \bar{\epsilon}^p}} \times \frac{\frac{\partial f}{\partial N} \cdot \frac{dX_i}{dM_i} + \frac{\partial f}{\partial M} \left\{ \left(1 - \frac{x}{L}\right) - \frac{x}{L} \cdot \frac{dM_j}{dM_i} \right\}}{\frac{\partial f_i}{\partial N_i} \cdot \frac{dX_i}{dM_i} + \frac{\partial f_i}{\partial M_i}} \quad (2.3.20)$$

これを式(2.3.13)'に代入し数値積分を行えば梁・柱要素の h_i が得られ、式(2.3.7)の節点変位歪硬化係数 H_{ni}' が得られる。なお、式(2.3.20)に含まれる節点力増分の比 dX_i/dM_i 、 dM_j/dM_i は一般に未知量である。したがって、前荷重段階における諸値を初期値として繰り返し計算を行う必要がある。

式(2.3.20)の $g(x)$ を用いれば、1部材の深さ方向と長さ方向の塑性域の広がり歪硬化を同時に考慮した解析を1要素で行える。なお大たわみの影響を考える場合は、径間のたわみ量も考慮して式(2.3.19)の $dM(x)$ を求める必要があるが、実用上はモーメント分布を直線で近似する手法を用いても十分な精度の解が得られると考えられる¹⁵⁾。

(3) 2次元、3次元要素

一般に、シェルや塊体のような2次元および3次元要素では、梁・柱要素のように要素内の応力場を弾性、塑性を通じ平衡条件のみから求めることはできない。このため、式(2.3.13)における塑性化領域 V_i^p の厳密な算定が困難となる。しかし他方、これらの要素を用いる解析の場合、1要素が構造全体に占める領域は一般に小さいため、梁・柱要素と比べると要素内の応力場の変化は小さく、一様とみなせる場合が多い。

そこでこれらの要素の場合、要素全体積 V を要素内の総塑性化判定点数 N に対応して分割した体積 v なる領域では塑性挙動は同じであると仮定する。これは式(2.3.13)で $V_i^p = v$ 、 $d\sigma_o = d\sigma_{oi}$ 、 $g = 1$ と置いたことに相当し、 h_i は次式となる。

$$h_i = \frac{\{x\}^T \{\phi_i\}}{v \sigma_{oi}} \quad (2.3.21)$$

また、式(2.3.1)の降伏関数 Y が2次形式の場合、次の関係が成立し、

$$\{x\}^T \{\phi_i\} = \{x\}^T \left\{ -\frac{\partial F_i}{\partial x} \right\} = \{x\}^T \left\{ -\frac{\partial Y_i}{\partial x} \right\} = Y_i \quad (2.3.22)$$

さらに式(2.3.1)より常に、

$$Y_i = \sigma_{0i} \quad (2.3.23)$$

であることから、 h_i は次式となる。

$$h_i = 1/v \quad (2.3.24)$$

なお2次元要素で合応力表示型塑性条件を用いる場合、式(2.3.9)の積分は面積分となり式(2.3.13)は次式となる。

$$h_i = \{x\}^T \{\phi_i\} / \int_{A_i^p} \sigma_{0i} g \, dA \quad (2.3.25)$$

ここで、 A_i^p ; i 点の周囲の塑性化領域の面積

したがって、式(2.3.21)は次式となる。

$$h_i = \frac{\{x\}^T \{\phi_i\}}{a \sigma_{0i}} \quad (2.3.26)$$

ここで、 a ; 要素全面積 A を総塑性化判定点数 N に応じて分割した面積

また降伏関数が2次形式の場合は、パラメータ h_i は次式で与えられる。

$$h_i = 1/a \quad (2.3.27)$$

2.3.3 弾塑性剛性方程式

k 個の塑性化判定点が塑性化した要素の弾塑性剛性方程式を導く。

まず微小変形有限要素を考えると、増分型の弾性剛性方程式は次式で表せる。

$$\{dx\} = [K^e] \{du^e\} \quad (2.3.28)$$

ここで、 $[K^e]$; 弾性剛性マトリックス

塑性節点変位増分 $\{du^p\}$ は、

$$\{du^p\} = \sum_{i=1}^k d\lambda_i \{\phi_i\} = [\Phi] \{d\lambda\} \quad (2.3.29)$$

ここで、 $[\Phi] = [\{\phi_1\} \{\phi_2\} \dots \{\phi_k\}]$

$$\{d\lambda\} = \{d\lambda_1 \, d\lambda_2 \, \dots \, d\lambda_k\}^T$$

また塑性負荷条件は、式(2.3.7)をまとめると、次式のように表される。

$$[\Phi]^T \{d x\} - [H'] \{d \lambda\} = \{0\} \quad (2.3.30)$$

ここで、 $[H'] = [H_{n1}' \ H_{n2}' \ \dots \ H_{nk}']$

；節点変位歪硬化係数マトリックス（対角マトリックス）

一方、要素の全節点変位増分は、弾性と塑性の各成分の和となる。

$$\{d u\} = \{d u^e\} + \{d u^p\} \quad (2.3.31)$$

式(2.3.29)および(2.3.31)を式(2.3.28)に代入すると次式を得る。

$$\{d x\} = [K^e](\{d u\} - [\Phi]\{d \lambda\}) \quad (2.3.32)$$

これを式(2.3.30)の塑性負荷条件に代入すると、 $\{d \lambda\}$ に関する次の連立一次方程式が得られる。

$$([H'] + [\Phi]^T [K^e] [\Phi]) \{d \lambda\} = [\Phi]^T [K^e] \{d u\} \quad (2.3.33)$$

これより $\{d \lambda\}$ が $\{d u\}$ の関数として次のように求まる。

$$\{d \lambda\} = ([H'] + [\Phi]^T [K^e] [\Phi])^{-1} [\Phi]^T [K^e] \{d u\} \quad (2.3.34)$$

この $\{d \lambda\}$ を式(2.3.32)に再び代入すると、弾塑性剛性方程式が次式のように得られる。

$$\{d x\} = [K^p] \{d u\} \quad (2.3.35)$$

ここで、 $[K^p] = [K^e] - [K^e] [\Phi] ([H'] + [\Phi]^T [K^e] [\Phi])^{-1} [\Phi]^T [K^e]$

；弾塑性剛性マトリックス

$[K^p]$ は対称マトリックスである。このように塑性節点法では、歪硬化を考慮する場合も弾塑性剛性マトリックスがマトリックス演算のみで得られる。

大変形を考慮する場合の弾塑性剛性方程式は、1.5.2項の完全弾塑性体の場合と同様に節点力に荷重修正項 $\{R\}$ を考慮し、さらに上式の $[K^e]$ を弾性(接線)剛性マトリックス $[K_1^e]$ に置き換えることにより、次のように得られる。

$$\{d x\} + \{R\} = [K_1^p] \{d u\} \quad (2.3.36)$$

ここで、 $[K_1^p] = [K_1^e] - [K_1^e] [\Phi] ([H'] + [\Phi]^T [K_1^e] [\Phi])^{-1} [\Phi]^T [K_1^e]$

；弾塑性(接線)剛性マトリックス

式(2.3.35)あるいは式(2.3.36)を解いて節点変位増分 $\{d u\}$ が求められると、これを式(2.3.34)に代入して各塑性化判定点 i に関する $d \lambda_i$ を得る。この $d \lambda_i$ に $[K^p]$ の導出の際用いたパラメータ h_i を乗じて、式(2.3.6)より塑性化判定点 i の相当塑性歪増分 $d \bar{\epsilon}_i^p$ が求められる。梁・柱要素の場合、この $d \bar{\epsilon}_i^p$ をさらに式(2.3.11)'に代入すると、要素内部の $d \bar{\epsilon}^p$ の分布が得られる。こうして求められた新たな塑性歪分布を基に、次の荷重増分に対する弾塑性剛性方程式が計算される。

2.4 結論

本章では、塑性節点法による歪硬化体の弾塑性解析理論を展開し、弾塑性剛性方程式を定式化した。主な結果を以下に示す。

- (1) 応力表示型および合応力表示型塑性条件のそれぞれに対して有効な歪硬化係数を明らかにした。特に後者に対しては、曲率などの一般化塑性歪によって断面内に生じる歪硬化の影響を曲げモーメントなどの合応力に合理的に反映することのできる“断面歪硬化係数”を新たに提案した。
- (2) 合応力表示型塑性条件の一つとして、梁やシェルの初期塑性化から全断面塑性化に至る中間塑性状態を追跡し得る塑性条件を採用した。本塑性条件を用いれば、上記の中間塑性状態を歪硬化現象の如く定式化できる。
- (3) 塑性節点法では、要素の塑性変形が節点に縮約されて、節点変位の形で生じる。この塑性節点変位に対してなされる塑性仕事と要素内部に塑性歪が分布する場合の塑性仕事を等置することにより、塑性節点変位に対して有効な新しい定義による歪硬化係数（“節点変位歪硬化係数”）を導出した。
- (4) 節点変位歪硬化係数を用いて、歪硬化体に対する静的弾塑性剛性方程式を定式化した。本理論によれば、歪硬化を考慮する場合も弾塑性剛性マトリックスがマトリックス演算のみで得られる。

第3章 熱弾塑性解析理論

3・1 緒言

金属材料が溶接、溶断あるいは焼き入れ、焼鈍などの熱加工を受けると材料には温度変化が生じ、これに伴いその機械的諸性質に変化が起きる。このため、熱履歴を受ける構造物の応力や変形に関する情報を得るためには、材料の種々の性質の温度依存性を考慮した弾塑性解析を行なう必要がある。本章では第1章にて展開された塑性節点法による静的弾塑性解析理論をこのような温度変化を伴う問題に適用できるよう拡張し定式化する。具体的には下記の影響を新たに考慮する。

(I) 熱歪の生成

(II) 材料定数（ヤング率、ポアソン比、瞬間線膨張係数、降伏応力）の温度依存性

既に述べたように塑性節点法では塑性変形は節点のみに縮約されて生じるが、その塑性化領域としての広がりはない。そして要素の実領域は常に弾性挙動のみする。したがって温度変化による要素の体積変化に関する(I)の熱歪の生成および(II)の瞬間線膨張係数の温度依存性、さらには弾性挙動に関する(II)のヤング率およびポアソン比の温度依存性は弾性領域のみで塑性挙動と切り離して考慮することができる。この点を明確にするため、以下の理論展開に当たっては現象を弾性と弾塑性とに大別し、それぞれに対して温度変化の影響を取り扱うことにする。

3.2 節では、温度変化を考慮した弾性剛性方程式を定式化する。ここで得られる剛性方程式は通常の有限要素法によるものと同じものである。

3.3 節では、降伏応力の温度依存性を考慮して塑性節点法により弾塑性剛性方程式を定式化する。

なお、ここでは要素の変形は微小とし、また材料は完全弾塑性体と仮定する。温度変化と歪硬化の影響を同時に考慮する場合については第5章で論じる。また溶接残留応力の解析を始めとして、一般に熱弾塑性解析は構造物に生じる応力場や歪場の詳細な解析を目的として行われる。そこで本章では、要素内部の個々の点で塑性化を判定する場合、すなわち応力表示型塑性条件を用いる場合のみを対象に理論を展開する。

3.2 温度変化を考慮した弾性剛性方程式の定式化

3.2.1 応力と歪の増分関係式

温度変化により生じる熱歪を $\{\varepsilon^T\}$ で表すと、その増分 $\{d\varepsilon^T\}$ は瞬間線膨張係数 $\{\alpha\}$ と温度増分 dT によって次のように表される。

$$\{d\varepsilon^T\} = \{\alpha\} dT \quad (3.2.1)$$

そして全歪増分 $\{d\varepsilon\}$ は、熱歪増分 $\{d\varepsilon^T\}$ と弾性歪増分 $\{d\varepsilon^e\}$ の和となる。

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^e\} + \{d\varepsilon^T\} \quad (3.2.2)$$

一方、応力 $\{\sigma\}$ と弾性歪 $\{\varepsilon^e\}$ の関係は、

$$\{\sigma\} = [D^e]\{\varepsilon^e\} \quad (3.2.3)$$

ここで $[D^e]$ は弾性の応力・歪マトリックスであり、一般にヤング率、ポアソン比などの関数となる。したがって、 $[D^e]$ は温度依存性を有する。

今、応力 $\{\sigma\}$ 、弾性歪 $\{\varepsilon^e\}$ および弾性の応力・歪マトリックス $[D^e]$ が、温度変化や外力の影響によりそれぞれ $\{\sigma + d\sigma\}$ 、 $\{\varepsilon^e + d\varepsilon^e\}$ および $[D^e] + d[D^e]$ に変化した場合、新しい状態においても式(3.2.3)の関係は満足されねばならない。すなわち、

$$\{\sigma + d\sigma\} = ([D^e] + d[D^e])\{\varepsilon^e + d\varepsilon^e\} \quad (3.2.4)$$

$[D^e]$ が温度のみの関数の時、その増分 $d[D^e]$ は次のように表される。

$$d[D^e] = \frac{d[D^e]}{dT} dT \quad (3.2.5)$$

式(3.2.4)と式(3.2.3)の差を取り、式(3.2.5)を用いると、 $\{d\sigma\}$ と $\{d\varepsilon^e\}$ の関係が次のように得られる。

$$\{d\sigma\} = [D_T^e]\{d\varepsilon^e\} + \frac{d[D^e]}{dT} dT \{\varepsilon^e\} \quad (3.2.6)$$

ここで、 $[D_T^e] = [D^e] + \frac{d[D^e]}{dT} dT$; 増分後の温度 $(T + dT)$ における弾性の応力・歪マトリックス

$\{\varepsilon^e\}$; 増分前の温度 (T) における弾性歪

式(3.2.6)の第1項は弾性歪の増加に対する応力増分を表す。第2項は $[D^e]$ が温度によって変化するため、増分前に生じていた弾性歪 $\{\varepsilon^e\}$ に対する応力値が変化することを表している。

式(3.2.6)の弾性歪増分 $\{d\varepsilon^e\}$ を式(3.2.2)を用いて消去し、さらに熱歪増分 $\{d\varepsilon^T\}$ を式(3.2.1)で表すと、応力 $\{\sigma\}$ と全歪 $\{\varepsilon\}$ の増分関係が次のように求められる。

$$\{d\sigma\} = [D_T^\circ]\{d\varepsilon\} - ([D_T^\circ]\{\alpha\} - \frac{d[D^\circ]}{dT}\{\varepsilon^\circ\})dT \quad (3.2.7)$$

3.2.2 弾性剛性方程式

式(3.2.7)を用いて、温度変化を受ける要素の弾性剛性方程式を定式化する。

節点変位増分 $\{du\}$ は、弾性節点変位増分 $\{du^\circ\}$ と熱節点変位増分 $\{du^T\}$ の和となる。

$$\{du\} = \{du^\circ\} + \{du^T\} \quad (3.2.8)$$

この内、弾性節点変位と弾性歪の関係は次式で表される。

$$\{d\varepsilon^\circ\} = [B]\{du^\circ\} \quad (3.2.9)$$

ここで、 $[B]$ ；変位関数から決まる節点変位・歪マトリックス

一方、熱節点変位は式(3.2.1)の熱歪を要素全域にわたって積分することによって得られ、両者の関係は一般に次の形で表示できる。

$$\{d\varepsilon^T\} = [B']\{du^T\} \quad (3.2.10)$$

上式のマトリックス $[B']$ は、瞬間線膨張係数 $\{\alpha\}$ および温度増分 dT の要素内における変化に依存し、式(3.2.9)の節点変位・歪マトリックス $[B]$ とは異なる。したがって、適合要素を用いても隣接要素間には不適合な変位が一般に生じることになる。しかしここでは要素間の適合性を自動的に満足させるため、熱節点変位と熱歪の関係が式(3.2.9)のマトリックス $[B]$ で表されるものと仮定する。すなわち、

$$\{d\varepsilon^T\} = [B]\{du^T\} \quad (3.2.10)'$$

以上の結果より節点変位増分 $\{du\}$ と全歪増分 $\{d\varepsilon\}$ の関係は次式となる。

$$\{d\varepsilon\} = [B]\{du\} \quad (3.2.11)$$

ここで、 $\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^\circ\} + \{d\varepsilon^T\}$

以下、仮想仕事の原理を基に弾性剛性方程式を導出する。

仮想節点変位増分 $\{\delta du\}$ に対して節点力増分 $\{dx\}$ がなす外部仕事 δW_e は、

$$\delta W_e = \{\delta du\}^T \{dx\} \quad (3.2.12)$$

内部仕事 δW_i は、式(3.2.11)の関係を用いると、

$$\delta W_i = \int_V \{\delta d\varepsilon\}^T \{d\sigma\} dV = \{\delta du\}^T \int_V [B]^T \{d\sigma\} dV \quad (3.2.13)$$

したがって、任意の仮想節点変位に対して仮想仕事の原理 $\delta W_e = \delta W_i$ が成り立つために

は次式が成立せねばならない。

$$\{d x\} = \int_V [B]^T \{d \sigma\} d V \quad (3.2.14)$$

上式に式(3.2.7)の応力・歪関係式を代入し、式(3.2.9),(3.2.10)'および(3.2.11)の關係を用いると、弾性剛性方程式が次のように求められる。

$$\{d x\} = [K_T^\circ] \{d u\} - ([K_T^\circ] \{d u^T\} - [d K^\circ] \{u^\circ\}) \quad (3.2.15)$$

ここで、 $[K_T^\circ] = \int_V [B]^T [D_T^\circ] [B] d V$

；増分後の温度($T + d T$)における弾性剛性マトリックス

$$[d K^\circ] = \int_V [B]^T (d [D^\circ] / d T) [B] d V \quad ; \text{弾性剛性マトリックス増分}$$

$$\{u^\circ\} \quad ; \text{増分前の温度}(T)\text{における弾性節点変位}$$

与えられた温度変化に対する $[K_T^\circ]$ 、 $\{d u^T\}$ および $[d K^\circ]$ を求め式(3.2.15)を解けば節点変位増分 $\{d u\}$ が求まり、式(3.2.11)から歪増分 $\{d \varepsilon\}$ が定まる。これを式(3.2.7)に代入すると応力増分 $\{d \sigma\}$ が得られる。

なお式(3.2.8)より、式(3.2.15)は次式のようにも表せる。

$$\{d x\} = [K_T^\circ] \{d u^\circ\} + [d K^\circ] \{u^\circ\} \quad (3.2.16)$$

3.3 温度変化を考慮した弾塑性剛性方程式の定式化

3.3.1 塑性条件および塑性負荷条件

降伏応力の温度依存性を考慮すると、要素の i 番目の塑性化判定点の塑性条件 f_i は次式のように表される。

$$f_i (\{\sigma_i\}, \sigma_{0i}(T_i)) = 0 \quad (3.3.1)$$

ここで、 $\{\sigma_i\}$ は i 点の応力を表す。また σ_{0i} は i 点の降伏曲面の大きさを表すパラメータであり、応力表示型塑性条件を考えているので降伏応力 σ_y に一致する。そして i 点の温度 T_i によって変化する。

一方、温度変化が生じると弾性の応力・歪マトリックス $[D^\circ]$ および弾性剛性マトリックス $[K^\circ]$ は変化するが、式(1.4.4)および式(1.4.5)の關係は常に成立する。すなわち熱弾塑性状態においても式(1.4.8)の如く i 点の応力 $\{\sigma_i\}$ を要素の j 個 ($j \leq n$, n ; 要素の全節点数) の節点の節点力の関数として表すことができる。そこで式(3.3.1)の f_i を

次のように節点力の関数 F_i に変換する。

$$F_i(\{x\}, \sigma_{oi}(T_i)) = 0 \quad (3.3.2)$$

さて節点力が上式を満たして塑性化した判定点 i では、次の塑性負荷条件が満足されねばならない。

$$dF_i = \{\phi_i\}^T \{x\} + \psi_i dT_i = 0 \quad (3.3.3)$$

ここで、
$$\{\phi_i\} = \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial x} \right\}, \quad \psi_i = \frac{\partial F_i}{\partial \sigma_{oi}} \cdot \frac{d\sigma_{oi}}{dT_i}$$

dT_i は既知量であるので、降伏応力と温度の関係が与えられれば $d\sigma_{oi}/dT_i$ が決まり、 $\psi_i dT_i$ も定まる。 k 個の塑性化判定点が塑性化した一般的な場合では、式(3.3.3)の塑性負荷条件は次のように表される。

$$[\Phi]^T \{dx\} + [\Psi] \{dT\} = \{0\} \quad (3.3.4)$$

ここで、
$$[\Phi] = [\{\phi_1\} \{\phi_2\} \dots \{\phi_k\}]$$

$$[\Psi] = [\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_k] \quad ; \text{対角マトリックス}$$

$$\{dT\} = \{ dT_1 \ dT_2 \ \dots \ dT_k \}^T$$

3.3.2 弾塑性剛性方程式

塑性化した要素の節点変位増分 $\{du\}$ は弾性変位 $\{du^e\}$ 、塑性変位 $\{du^p\}$ および熱変位 $\{du^T\}$ からなる。

$$\{du\} = \{du^e\} + \{du^p\} + \{du^T\} \quad (3.3.5)$$

この内、塑性変位 $\{du^p\}$ は節点に縮約されて生じ、要素内部には $\{du^e\}$ および $\{du^T\}$ と式(3.2.9)および式(3.2.10)'の関係で結ばれる弾性歪 $\{d\epsilon^e\}$ と熱歪 $\{d\epsilon^T\}$ のみが生じる。すなわち要素内部は常に熱弾性挙動し、その剛性方程式は式(3.2.16)で与えられる。

一方、 k 個の塑性化判定点が塑性化した要素に生じる塑性節点変位増分 $\{du^p\}$ は式(3.3.2)の F_i を塑性ポテンシャルと見なし塑性流れ理論を適用すると、

$$\{du^p\} = \sum_{i=1}^k d\lambda_i \{\phi_i\} = [\Phi] \{d\lambda\} \quad (3.3.6)$$

ここで、
$$\{d\lambda\} = \{ d\lambda_1 \ d\lambda_2 \ \dots \ d\lambda_k \}^T$$

となる。

式(3.3.5)および(3.3.6)を式(3.2.16)に代入すると、

$$\{d x\} = [K_T^0](\{d u\} - [\Phi]\{d \lambda\} - \{d u^T\}) + [d K^0]\{u^0\} \quad (3.3.7)$$

これを式(3.3.4)の塑性負荷条件に代入すると、

$$\begin{aligned} & [\Phi]^T [K_T^0](\{d u\} - [\Phi]\{d \lambda\} - \{d u^T\}) \\ & + [\Phi]^T [d K^0]\{u^0\} + [\Psi]\{d T\} = \{0\} \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

すなわち、

$$\begin{aligned} & ([\Phi]^T [K_T^0] [\Phi])\{d \lambda\} = [\Phi]^T [K_T^0](\{d u\} - \{d u^T\}) \\ & + [\Phi]^T [d K^0]\{u^0\} + [\Psi]\{d T\} \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

上式は $\{d \lambda\}$ に関する連立一次方程式となっており、これを解いて $\{d \lambda\}$ が次のように求められる。

$$\begin{aligned} \{d \lambda\} &= [G][\Phi]^T [K_T^0](\{d u\} - \{d u^T\}) \\ &+ [G][\Phi]^T [d K^0]\{u^0\} + [G][\Psi]\{d T\} \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

ここで、 $[G] = ([\Phi]^T [K_T^0] [\Phi])^{-1}$

この $\{d \lambda\}$ を式(3.3.7)に再び代入すると弾塑性剛性方程式が次のように得られる。

$$\{d x\} + \{d x_{Ts}\} = [K_T^0]\{d u\} \quad (3.3.11)$$

ここで、 $[K_T^0]$ は温度変化を考慮する場合の弾塑性剛性マトリックスであり次式となる。

$$[K_T^0] = [K_T^0] - [K_T^0][\Phi][G][\Phi]^T [K_T^0] \quad (3.3.12)$$

また $\{d x_{Ts}\}$ は温度変化によって生じる熱等価節点力を表し、次のように三つの成分の和で与えられる。

$$\{d x_{Ts}\} = \{d x_{T1}\} + \{d x_{T2}\} + \{d x_{T3}\} \quad (3.3.13)$$

ここで、 $\{d x_{T1}\} = [K_T^0]\{d u^T\}$

；熱歪に起因する成分

$$\{d x_{T2}\} = ([K_T^0][\Phi][G][\Phi]^T [d K^0] - [d K^0])\{u^0\}$$

；要素の弾性剛性の温度依存性に起因する成分

$$\{d x_{T3}\} = [K_T^0][\Phi][G][\Psi]\{d T\}$$

；降伏応力の温度依存性に起因する成分

式(3.3.11)～(3.3.13)から明らかなように、塑性節点法によれば弾塑性剛性マトリックスおよび熱等価節点力のいずれもがマトリックス演算のみで求められる。

3.4 結言

本章では塑性節点法による熱弾塑性解析理論を展開した。温度変化の影響としては、熱歪の生成と材料の機械的性質の温度依存性を取り上げ、塑性流れ理論に基づいて熱弾塑性剛性方程式を定式化した。この際、塑性変形が節点のみに縮約され要素内部は常に弾性挙動するという本理論の特徴を利用して、温度変化の影響を要素の体積変化と弾性剛性に関するものと、節点での塑性挙動に関するものに分離して理論展開に取り入れた。本理論によれば、任意の有限要素の熱弾塑性剛性方程式をマトリックス演算のみで得ることができる。

第4章 動的弾塑性解析理論

4.1 緒言

船舶や海洋構造物には、波浪、衝突あるいは重量物の落下等による様々な動的外力が作用する。これらの動的外力に対する構造物の弾塑性挙動を明らかにするためには、構成部材の動的挙動の影響を考慮に入れた弾塑性解析が必要となる。本章では塑性節点法による動的弾塑性解析理論を展開する。

動的弾塑性解析を行う場合、静的理論に以下の影響を取り入れる必要がある。

(I) 慣性力の作用

(II) 減衰力の作用

(III) 材料定数（特に降伏応力）の歪速度依存性

この内(III)の歪速度依存性は第2章に述べた材料の歪硬化性と類似の問題であり、塑性節点法において考慮可能であるが、本論文ではこれについては取り扱わない。そして(I)および(II)の動的外力の作用のみ考慮する。

以下ではまず4.2節において動的弾性剛性方程式を導出し、動的影響を考慮した理論展開の基本手順を示す。

4.3節では、塑性節点法により動的弾塑性剛性方程式を定式化する。この際、1.6節に述べた本理論における要素の塑性変形特性に関係して慣性力の取り扱い方が重要な問題となる。そこで、いくつかの考え方に基づく慣性力の評価法を示した後、動的弾塑性剛性方程式を導出する。

なお、本章では材料は完全弾塑性体と仮定する。

4.2 動的影響を考慮した弾性剛性方程式の定式化

4.2.1 動的外力と節点力

(1) 慣性力

要素内部の各点の慣性力は、その点の質量と加速度の積で表される。したがって、要素が加速度を持って運動する場合、慣性力は要素全域に分布して作用する。一方、有限要素法では、要素に作用する外力を節点に集中させて評価する必要がある。そこで慣性力も要素内部の総和と等価な等価節点慣性力の形で定式化される。これに対してはランプト・マス法とコンシステント・マス法の二つの評価法がある。

(1-I) ランブト・マス法に基づく慣性力

ランブト・マス法は要素の質量を節点に集中させる方法である。多くの場合、要素の全質量を節点に等分し、また回転慣性は無視される。この結果、慣性力増分 $\{d x_m\}$ は次式のように表される。

$$\{d x_m\} = -[M_l]\{d \ddot{u}\} \quad (4.2.1)$$

ここで、 $\{d \ddot{u}\}$; 節点変位加速度増分

$[M_l]$; ランブト・マス・マトリックス

$[M_l]$ は回転加速度に関する成分を0とする対角マトリックスである。

(1-II) コンシステント・マス法に基づく慣性力

コンシステント・マス法では、要素内に分布する慣性力と等しい仮想仕事をなす節点力として等価節点慣性力増分 $\{d x_m\}$ を定義する。すなわち、

$$\{\delta d u\}^T \{d x_m\} = - \int_V \{\delta d u_{e,i}\}^T \rho \{d \ddot{u}_{e,i}\} d V \quad (4.2.2)$$

ここで、 $\{\delta d u\}$; 仮想節点変位増分

$\{\delta d u_{e,i}\}$; 要素内各点の仮想変位増分

$\{d \ddot{u}_{e,i}\}$; 要素内各点の加速度増分

ρ ; 材料の密度

上式の $\{\delta d u_{e,i}\}$ および $\{d \ddot{u}_{e,i}\}$ は、変位関数を $[N]$ とするとそれぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \{\delta d u_{e,i}\} &= [N]\{\delta d u\} \\ \{d \ddot{u}_{e,i}\} &= [N]\{d \ddot{u}\} \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

この関係を式(4.2.2)に代入すると、等価節点慣性力増分 $\{d x_m\}$ が次のように求められる。

$$\{d x_m\} = -[M_c]\{d \ddot{u}\} \quad (4.2.4)$$

ここで、 $[M_c] = \int_V [N]^T \rho [N] d V$

; コンシステント・マス・マトリックス (対称マトリックス)

(2) 減衰力

ここでは減衰力を速度に比例する線形減衰の形で評価し、等価節点減衰力増分 $\{d x_h\}$

を節点変位速度増分 $\{d\dot{u}\}$ の関数として次式で表す。

$$\{dx_h\} = -[C]\{d\dot{u}\} \quad (4.2.5)$$

ここで、 $[C]$; 減衰マトリックス

減衰マトリックス $[C]$ は、現在のところ直接理論的に求めることは困難であり、何らかの仮説を立て、その係数を実験的に求める方法が取られている¹⁶⁾。このような仮説式の代表的なものにRayleighによる次式がある。

$$[C] = a[M] + b[K_s] \quad (4.2.6)$$

ここで、 $[M]$; マス・マトリックス

$[K_s]$; 静的剛性マトリックス

a, b ; 実験定数

この外にもいくつかの仮説式が提案されているが、いずれも減衰マトリックスは最終的に実験を基に決定される。そこで本論文ではマトリックス $[C]$ の詳細には触れず、弾性状態、塑性状態を通じて等価節点減衰力増分 $\{dx_h\}$ が式(4.2.5)で表されるものとして以後の式の展開を行っていく。

(3) 全節点力

動的問題における全節点力増分 $\{dx\}$ は、外力 $\{dx_f\}$ に要素自身の運動に起因する上記慣性力増分 $\{dx_m\}$ および減衰力増分 $\{dx_h\}$ を加えたものとなる。

$$\{dx\} = \{dx_f\} + \{dx_m\} + \{dx_h\} \quad (4.2.7)$$

4.2.2 動的弾性剛性方程式

要素には全節点力増分 $\{dx\}$ によって応力あるいは歪が生じる。したがって、弾性剛性方程式は、

$$\{dx\} = [K^*]\{du\} \quad (4.2.8)$$

ここで、 $[K^*]$; 弾性剛性マトリックス

上式に式(4.2.7)を代入し、さらに式(4.2.1),(4.2.4)および式(4.2.5)を代入すると動的弾性剛性方程式が結局次のように求められる。

$$\{dx_f\} = [M]\{d\ddot{u}\} + [C]\{d\dot{u}\} + [K^*]\{du\} \quad (4.2.9)$$

本論文ではこれをNewmarkの β 法を用いて逐次積分する。その手続きは次節で述べる。

4.3 動的影響を考慮した弾塑性剛性方程式の定式化

4.3.1 動的外力と節点力

(1) 慣性力

弾性の場合と同様にランプト・マス法とコンシステント・マス法の両者を採用する。後者を適用する場合については、1.6 節に述べた要素の塑性変形特性を考慮して二つの考え方のもとに慣性力増分を求める。

(1-I) ランプト・マス法に基づく慣性力

ランプト・マス法では、等価節点慣性力を要素の変位関数や変形モードとは無関係に、物理的考察に従って節点における集中力の形に理想化する。したがって、塑性変形を節点に縮約する塑性節点法の場合も等価節点慣性力増分 $\{d x_m\}$ は弾性の場合と同様、全節点変位加速度増分 $\{d \ddot{u}\}$ の関数として次式で与えられる。

$$\{d x_m\} = -[M_1]\{d \ddot{u}\} \quad (4.3.1)$$

但し、塑性化した状態を考えているので $\{d \ddot{u}\}$ は次のように弾性および塑性成分の和となる。

$$\{d \ddot{u}\} = \{d \ddot{u}^e\} + \{d \ddot{u}^p\} \quad (4.3.2)$$

ここで、 $\{d \ddot{u}^e\}$ ；弾性節点変位加速度増分

$\{d \ddot{u}^p\}$ ；塑性節点変位加速度増分

(1-II) コンシステント・マス法-1に基づく慣性力；塑性変形が節点に縮約されていると考える場合

ここでは、塑性節点法の次の特性を考慮してコンシステント・マス法を基に等価節点慣性力増分 $\{d x_m\}$ を求める。すなわち、塑性節点法ではFig.4.3.1の如く塑性変形を節点に縮約するが、その領域としての拡がりはないと考えている。したがって、「慣性力は節点を除く弾性領域のみに作用する」ことになる。今 Fig.4.3.1のように本来の節点*i*および*j*から無限小距離内側の弾性領域端部に内節点*i'*および*j'*を設けた場合、上述の内容は慣性力が内節点*i'*および*j'*間の弾性領域のみに作用することを意味している。したがって、実節点における等価節点慣性力増分 $\{d x_m\}$ を求めるための仮想仕事の関係式は次式となる。

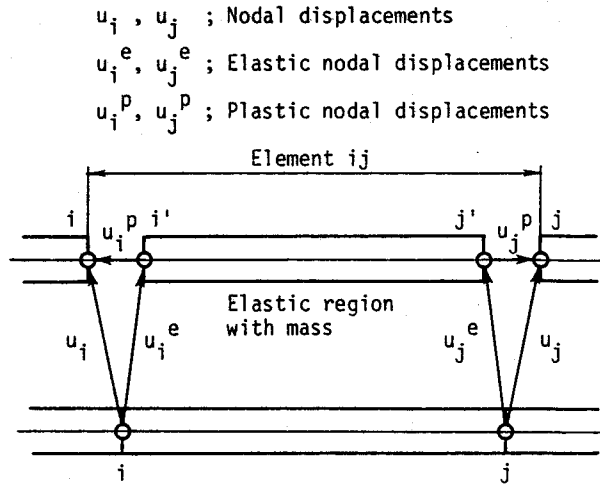


Fig. 4.3.1 Element with plastic nodes and inertia forces based on consistent mass method-1

$$\begin{aligned}
 \{\delta d u\}^T \{d x_m\} &= - \int_{V^e} \{\delta d u_{e,1}\}^T \rho \{d \ddot{u}_{e,1}\} d V \\
 &= - \{\delta d u^e\}^T \int_{V^e} [N]^T \rho [N] d V \{d \ddot{u}^e\} \\
 &= - \{\delta d u^e\}^T [M_e] \{d \ddot{u}^e\}
 \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

ここで、 $\{\delta d u\}$; 仮想節点変位増分

$\{\delta d u^e\}$; $\{\delta d u\}$ に対応して内節点に生じる仮想弾性節点変位増分

$\{\delta d u_{e,1}\} = [N] \{\delta d u^e\}$; 弾性領域内各点の仮想変位増分

$\{d \ddot{u}_{e,1}\} = [N] \{d \ddot{u}^e\}$; 弾性領域内各点の加速度増分

V^e ; 弾性領域

$[M_e]$; コンシステント・マス・マトリックス

ところで式(1.5.2) に示したように、全節点変位増分 $\{d u\}$ は弾性節点変位増分 $\{d u^e\}$ と塑性節点変位増分 $\{d u^p\} (= [\Phi] \{d \lambda\})$ の和となる。また、 $\{d u^p\}$ の大きさを表すベクトル $\{d \lambda\}$ は式(1.5.11)のように全節点変位増分 $\{d u\}$ の関数として与えられる。したがって、弾性節点変位増分 $\{d u^e\}$ も同様に全節点変位増分 $\{d u\}$ の関数となる。

$$\{d u^e\} = \{d u\} - \{d u^p\} = [Q] \{d u\} \tag{4.3.4}$$

マトリックス $[Q]$ の具体的な形は次項に示す。この関係が常に成立することから、任意の仮想節点変位増分 $\{\delta d u\}$ に対して内節点に生じる仮想弾性節点変位増分 $\{\delta d u^e\}$

は次式となる。

$$\{\delta d u^e\} = [Q]\{\delta d u\} \quad (4.3.5)$$

上式を式(4.3.3) に代入すると、コンシステント・マス法-1に基づく等価節点慣性力増分 $\{d x_m\}$ が次のように求められる。

$$\{d x_m\} = -[Q]^T[M_c]\{d \ddot{u}^e\} \quad (4.3.6)$$

(1-III) コンシステント・マス法-2に基づく慣性力；塑性変形が要素内に分布している
と考える場合

1.6.1項では、塑性節点法で得られる要素の弾塑性剛性が、要素内部に次の塑性歪が分布しているとした場合の剛性と等しいことを明らかにした。

$$\{d \varepsilon^p\} = [B]\{d u^p\} \quad (4.3.7)$$

ここで、 $[B]$ ；節点変位・歪マトリックス

ここではこの特性を考慮し、要素内部に塑性歪が実際に上式の形で分布していると仮定して慣性力を評価する。

このような仮定に従えば、Fig.4.3.1の実節点 i, j に囲まれる要素全域の変形が変位関数で規定されることになり、特に塑性変形が節点に縮約されていると考えなくても良い。したがって、等価節点慣性力増分 $\{d x_m\}$ は弾性要素の場合と全く同様に次式で与えられることになる。

$$\begin{aligned} \{d x_m\} &= -[M_c](\{d \ddot{u}^e\} + \{d \ddot{u}^p\}) \\ &= -[M_c]\{d \ddot{u}\} \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

ここで、 $[M_c]$ ；コンシステント・マス・マトリックス

(2) 減衰力

要素に作用する減衰力増分は式(4.2.5) で与えられるものとする。但し、弾塑性状態で全節点変位速度増分 $\{d \dot{u}\}$ の中に、塑性節点変位速度増分 $\{d \dot{u}^p\}$ が含まれる。

(3) 全節点力

全節点力増分 $\{d x\}$ は、外力 $\{d x_f\}$ に慣性力 $\{d x_m\}$ および減衰力 $\{d x_h\}$ を加えたものとなる。すなわち、

$$\{d x\} = \{d x_f\} + \{d x_m\} + \{d x_h\} \quad (4.3.9)$$

4.3.2 動的弾塑性剛性方程式

前項で得た動的外力を考慮して、塑性節点法により動的弾塑性剛性方程式を定式化する。

まず弾性領域の剛性方程式は、要素の応力に關与する節点力、すなわち式(4.3.9)の全節点力増分 $\{d x\}$ と弾性節点変位増分 $\{d u^e\}$ の關係として次式で与えられる。

$$\{d x\} = [K^e]\{d u^e\} \quad (4.3.10)$$

この要素の i 番目の塑性化判定点の塑性条件 f_i は、 i 点の応力 $\{\sigma_i\}$ の関数として次式のように表される。

$$f_i(\{\sigma_i\}, \sigma_{0,i}) = 0 \quad (4.3.11)$$

本章では材料を完全弾塑性体と仮定する。したがって $\sigma_{0,i}$ は一定値である。

応力 $\{\sigma_i\}$ は一般に要素内の j 個 ($j \leq n$, n : 要素の全節点数) の節点の節点力の関数となる。したがって f_i は節点力 $\{x\}$ の関数 F_i に変換される。

$$F_i(\{x\}, \sigma_{0,i}) = 0 \quad (4.3.12)$$

これを塑性ポテンシャルと見なして塑性流れ理論を適用すると、塑性節点変位増分 $\{d u^p\}$ が次のように得られる。

$$\{d u^p\} = d \lambda_i \{\phi_i\} \quad (4.3.13)$$

ここで、 $\{\phi_i\} = \left\{ -\frac{\partial F_i}{\partial x} \right\}$

$d \lambda_i$; 正のスカラー量

また i 点の塑性負荷条件は、

$$d F_i = \{\phi_i\}^T \{x\} = 0 \quad (4.3.14)$$

k 個の塑性化判定点が塑性化した一般的な場合では、 $\{d u^p\}$ および負荷条件はそれぞれ次式となる。

$$\{d u^p\} = \sum_{i=1}^k d \lambda_i \{\phi_i\} = [\Phi] \{d \lambda\} \quad (4.3.15)$$

$$[\Phi]^T \{d x\} = \{0\} \quad (4.3.16)$$

ここで、 $[\Phi] = [\{\phi_1\} \{\phi_2\} \dots \{\phi_k\}]$

$$\{d \lambda\} = \{d \lambda_1 \ d \lambda_2 \ \dots \ d \lambda_k\}^T$$

一方、全節点変位増分 $\{d u\}$ は、弾性、塑性の各成分の和となる。

$$\{d u\} = \{d u^e\} + \{d u^p\} \quad (4.3.17)$$

式(4.3.15)および(4.3.17)を式(4.3.10)に代入すると、

$$\{d x\} = [K^0](\{d u\} - [\Phi]\{d \lambda\}) \quad (4.3.18)$$

これを式(4.3.16)の塑性負荷条件に代入すると $\{d \lambda\}$ に関する連立一次方程式を得る。

$$([\Phi]^T [K^0] [\Phi])\{d \lambda\} = [\Phi]^T [K^0]\{d u\} \quad (4.3.19)$$

これより、

$$\{d \lambda\} = ([\Phi]^T [K^0] [\Phi])^{-1} [\Phi]^T [K^0]\{d u\} \quad (4.3.20)$$

これを再び式(4.3.18)に代入すると次式が得られる。

$$\{d x\} = [K^p]\{d u\} \quad (4.3.21)$$

ここで、 $[K^p] = [K^0] - [K^0][\Phi]([\Phi]^T [K^0] [\Phi])^{-1} [\Phi]^T [K^0]$

；弾塑性剛性マトリックス

次に全節点力増分 $\{d x\}$ に含まれる動的外力を定式化する。

慣性力増分については4.3.1項で三つのタイプを考えたが、式の形式上は二つのタイプ、すなわちランプト・マス法そしてコンシステント・マス法-2の場合の $-[M]\{d \ddot{u}\}$ と、コンシステント・マス法-1の場合の $-[Q]^T [M]\{d \ddot{u}^0\}$ とに大別できる。以下、それぞれの場合について動的弾塑性剛性方程式を導出する。

(1) ランプト・マス法あるいはコンシステント・マス法-2を用いる場合

式(4.3.21)に、式(4.3.1)あるいは式(4.3.8)の慣性力増分と式(4.2.5)の減衰力増分を代入すると、動的弾塑性剛性方程式は次式となる。

$$\{d x_f\} = [M]\{d \ddot{u}\} + [C]\{d \dot{u}\} + [K^p]\{d u\} \quad (4.3.22)$$

ここで、 $[M]$ ；ランプト・マスあるいはコンシステント・マス・マトリックス

上式は節点変位増分 $\{d u\}$ に関する2階の連立常微分方程式である。これを解くため本論文ではNewmarkの β 法を適用し、以下のように $\{d u\}$ に関する連立一次方程式に改めて時間積分を行う。

節点変位加速度増分 $\{d \ddot{u}\}$ および節点変位速度増分 $\{d \dot{u}\}$ はそれぞれ次のように表される。

$$\{d \ddot{u}\} = a\{d u\} + b\{\dot{u}\} + c\{\ddot{u}\} \quad (4.3.23)$$

$$\{d \dot{u}\} = d\{d u\} + e\{\dot{u}\} + f\{\ddot{u}\} \quad (4.3.24)$$

上式のパラメータ $a \sim f$ は $\beta = 1/4$ の場合、次式となる。

$$\begin{aligned} a &= 4/dt^2, & b &= 4/dt, & c &= 2 \\ d &= 2/dt, & e &= 2, & f &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

ここで、 $d t$; 時間増分

また $\beta = 1/6$ の場合では、

$$\begin{aligned} a &= 6/d t^2, & b &= 6/d t, & c &= 3 \\ d &= 3/d t, & e &= 3, & f &= d t/2 \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

となる。式(4.3.23)および(4.3.24)を式(4.3.22)に代入して、連立一次方程式が次のように得られる。

$$\{d x_f\} + \{d \bar{x}\} = [\bar{K}]\{d u\} \quad (4.3.27)$$

ここで、 $\{d \bar{x}\} = [M](b\{\dot{u}\} + c\{\ddot{u}\}) + [C](e\{\dot{u}\} + f\{\ddot{u}\})$

$$[\bar{K}] = (a[M] + d[C] + [K^0]); \text{ 対称マトリックス}$$

—はNewmarkの β 法の適用によって現れた項を表す。なお β による違いは、 $\beta = 1/6$ では1時間増分間で加速度が線形変化、 $1/4$ では一定として加速度と変位の増分関係が定式化される点にあり、時間増分の大きさに対して $\beta = 1/6$ は条件安定、 $\beta = 1/4$ は無条件安定である。このように安定性については $\beta = 1/4$ が優るが、他方、解の収束性の点では $\beta = 1/6$ が優れている。第10章の解析では、主として $\beta = 1/6$ のパラメータを採用する。

(2) コンシステント・マス法-1を用いる場合

慣性力増分 $\{d x_m\}$ は式(4.3.6)で与えられる。これと式(4.2.5)の減衰力増分を式(4.3.21)に代入して動的弾塑性剛性方程式が次のように求められる。

$$\{d x_f\} = [Q]^T [M_c] \{d \ddot{u}^0\} + [C] \{d \dot{u}\} + [K^0] \{d u\} \quad (4.3.28)$$

マトリックス $[Q]$ は式(4.3.4)に示した弾性節点変位増分 $\{d u^0\}$ と全節点変位増分 $\{d u\}$ の関係を表すマトリックスであり、次のように求められる。

式(4.3.15)の $\{d \lambda\}$ に式(4.3.20)を代入すると、塑性節点変位増分 $\{d u^0\}$ と全節点変位増分 $\{d u\}$ の関係は、

$$\{d u^0\} = [\Phi]([\Phi]^T [K^0] [\Phi])^{-1} [\Phi]^T [K^0] \{d u\} \quad (4.3.29)$$

となる。これを式(4.3.4)に代入すると $\{d u^0\}$ と $\{d u\}$ の関係が得られ、 $[Q]$ は次式となる。

$$[Q] = [I] - [\Phi]([\Phi]^T [K^0] [\Phi])^{-1} [\Phi]^T [K^0] \quad (4.3.30)$$

ここで、 $[I]$; 単位マトリックス

したがって、各時間ステップで $[\Phi]$ が求められると、これを上式に代入して $[Q]$ が定

まる。

ここで式(4.3.28)にNewmarkの β 法を適用すると、まず弾性節点変位加速度増分 $\{d\ddot{u}^e\}$ は、

$$\{d\ddot{u}^e\} = a\{d\dot{u}^e\} + b\{\dot{u}^e\} + c\{\ddot{u}^e\} \quad (4.3.31)$$

右辺の $\{d\dot{u}^e\}$ に式(4.3.4)の関係を代入すると、 $\{d\ddot{u}^e\}$ は $\{d\dot{u}\}$ の関数として次のように表される。

$$\{d\ddot{u}^e\} = a[Q]\{d\dot{u}\} + b\{\dot{u}^e\} + c\{\ddot{u}^e\} \quad (4.3.32)$$

式(4.3.32)および式(4.3.24)を用いると式(4.3.28)は次のように $\{d\dot{u}\}$ に関する連立一次方程式に改められる

$$\{d\dot{x}_i\} + \{d\bar{x}\} = [\bar{K}]\{d\dot{u}\} \quad (4.3.33)$$

ここで、 $\{d\bar{x}\} = [Q]^T[M_c](b\{\dot{u}^e\} + c\{\ddot{u}^e\}) + [C](e\{\dot{u}\} + f\{\ddot{u}\})$

$$[\bar{K}] = (a[M_c^*] + d[C] + [K^e]) ; \text{対称マトリックス}$$

$$[M_c^*] = [Q]^T[M_c][Q]$$

以上、三つの慣性力の考え方に基づく動的弾塑性剛性方程式を定式化した。その適用性の考察は第10章で行う。

4.4 結言

本章では、塑性節点法による動的弾塑性解析理論を展開した。

動的影響として慣性力、減衰力などを考慮し、これらを等価節点力の形で要素に負荷した。慣性力に対してはランブト・マス法とコンシステント・マス法の二つの評価法を取り上げ、特に後者については塑性変形が節点に縮約される本理論の特性を厳密に考慮する場合（コンシステント・マス法-1）と、要素内部に塑性歪が分布すると仮定した場合（コンシステント・マス法-2）の二通りの考え方を示した。いずれの場合も動的弾塑性剛性方程式がマトリックス演算のみによって導かれる。

第5章 歪硬化体の動的熱弾塑性解析理論

5.1 緒言

前章までに、基礎理論としての完全弾塑性体に対する静的弾塑性解析理論、およびこれに歪硬化、温度変化そして動的影響をそれぞれ考慮するための拡張理論を示した。本章ではこれらの各理論を統合した歪硬化体の動的熱弾塑性解析理論を展開する。

まず、第5.2節では動的熱弾性剛性方程式を示す。

第5.3節では塑性節点法により歪硬化体の動的熱弾塑性剛性方程式を定式化する。

なお、第1章および第2章に述べたように、大変形有限要素の弾塑性剛性方程式は、微小変形有限要素の弾塑性剛性方程式に含まれる弾性剛性マトリックスを弾性(接線)剛性マトリックスに置き換え、さらに弾性領域における荷重修正項を節点力に足し込むことにより得られる。そこで、本章では微小変形有限要素のみを対象に理論展開を行う。

5.2 弾性剛性方程式

塑性節点法では、要素内部は常に弾性挙動する。動的熱弾塑性挙動下ではこの弾性領域において以下の諸因子を考慮する必要がある。

(I) 熱歪の生成

(II) ヤング率、ポアソン比、瞬間線膨張係数の温度依存性

(III) 動的外力の作用

まず(III)より、要素に作用する全節点力増分 $\{d x\}$ は次式となる。

$$\{d x\} = \{d x_f\} + \{d x_m\} + \{d x_h\} \quad (5.2.1)$$

ここで、 $\{d x_f\}$; 静的な場合の節点力増分

$\{d x_m\}$; 等価慣性力増分

$\{d x_h\}$; 等価減衰力増分

一方、(I)および(II)の影響を考慮すると、要素の剛性は熱弾性挙動に対する式(3.2.16)右辺で表される。したがって、弾性剛性方程式は動的外力を含む上式の $\{d x\}$ と弾性節点変位増分 $\{d u^o\}$ の関係として次式で与えられる。

$$\{d x\} = [K_T^o]\{d u^o\} + [d K^o]\{u^o\} \quad (5.2.2)$$

ここで、 $[K_T^o]$; 増分後の温度における弾性剛性マトリックス

$[dK^e]$; 弾性剛性マトリックス増分

$\{u^e\}$; 増分前の温度における弾性節点変位

5.3 弾塑性剛性方程式の定式化

5.3.1 塑性条件および塑性負荷条件

塑性化判定点 i の塑性条件 f_i は塑性挙動に関する

(IV) 材料の歪硬化

(V) 降伏応力の温度依存性

を考慮すると、式(2.3.2)と式(3.3.1)を組み合わせた次式で与えられる。

$$f_i(\{\sigma_i\}, \bar{\epsilon}_i^p, \sigma_{oi}(\bar{\epsilon}_i^p, T_i)) = 0 \quad (5.3.1)$$

ここで、 $\{\sigma_i\}$; i 点の応力あるいは合応力ベクトル

$\bar{\epsilon}_i^p$; i 点の相当塑性歪

σ_{oi} ; i 点の降伏曲面の大きさを表すパラメータ

T_i ; i 点の温度

既述のように $\{\sigma_i\}$ は節点力 $\{x\}$ の関数となる。したがって、 f_i も節点力の関数 F_i に改められる。

$$F_i(\{x\}, \bar{\epsilon}_i^p, \sigma_{oi}(\bar{\epsilon}_i^p, T_i)) = 0 \quad (5.3.2)$$

これを塑性ポテンシャルとして塑性流れ理論を適用すると、塑性節点変位増分 $\{du^p\}$ は次式となる。

$$\{du^p\} = d\lambda_i \{\phi_i\} \quad (5.3.3)$$

ここで、 $d\lambda_i$; 正のスカラー量

$$\{\phi_i\} = \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial x} \right\}$$

さて、節点力 $\{x\}$ が式(5.3.2)を満たして塑性化した i 点では、次の塑性負荷条件が満足されねばならない。

$$\begin{aligned} dF_i = \{\phi_i\}^T \{dx\} + & \left(\frac{\partial F_i}{\partial \bar{\epsilon}_i^p} + \frac{\partial F_i}{\partial \sigma_{oi}} \cdot \frac{\partial \sigma_{oi}}{\partial \bar{\epsilon}_i^p} \right) d\bar{\epsilon}_i^p \\ & + \frac{\partial F_i}{\partial \sigma_{oi}} \cdot \frac{\partial \sigma_{oi}}{\partial T_i} dT_i = 0 \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

上式の右辺第2項は、2.3.2項で導いた節点変位歪硬化係数 H_{ni}' を用いると次のよう

に表示できる。

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial \bar{\epsilon}_i^p} + \frac{\partial F_i}{\partial \sigma_{oi}} \cdot \frac{\partial \sigma_{oi}}{\partial \bar{\epsilon}_i^p} \right) d\bar{\epsilon}_i^p = -H_{ni}' d\lambda_i \quad (5.3.5)$$

ここで、
$$H_{ni}' = -\left(\frac{\partial F_i}{\partial \bar{\epsilon}_i^p} + \frac{\partial F_i}{\partial \sigma_{oi}} \cdot \frac{\partial \sigma_{oi}}{\partial \bar{\epsilon}_i^p} \right) h_i$$

h_i ; i 点の周囲の塑性化領域における歪硬化の影響を塑性節点変位に関する影響に縮約するためのパラメータ

式(5.3.5)を式(5.3.4)に代入すると、 i 点の塑性負荷条件は結局次式のように与えられる。

$$dF_i = \{\phi_i\}^T \{dx\} - H_{ni}' d\lambda_i + \psi_i dT_i = 0 \quad (5.3.6)$$

ここで、
$$\psi_i = \frac{\partial F_i}{\partial \sigma_{oi}} \cdot \frac{\partial \sigma_{oi}}{\partial T_i}$$

5.3.2 弾塑性剛性方程式

k 個の塑性化判定点が塑性化した要素の弾塑性剛性方程式を導出する。

要素の全節点変位増分 $\{du\}$ は、弾性変位、塑性変位および熱変位からなる。

$$\{du\} = \{du^e\} + \{du^p\} + \{du^T\} \quad (5.3.7)$$

塑性節点変位増分 $\{du^p\}$ は、各点の塑性化に起因する式(5.3.3)のベクトル和として次式で与えられる。

$$\{du^p\} = \sum_{i=1}^k d\lambda_i \{\phi_i\} = [\Phi] \{d\lambda\} \quad (5.3.8)$$

ここで、
$$[\Phi] = [\{\phi_1\} \{\phi_2\} \dots \{\phi_k\}]$$

$$\{d\lambda\} = \{d\lambda_1 \ d\lambda_2 \ \dots \ d\lambda_k\}^T$$

塑性負荷条件は式(5.3.6)をまとめると、

$$[\Phi]^T \{dx\} - [H'] \{d\lambda\} + [\Psi] \{dT\} = \{0\} \quad (5.3.9)$$

ここで
$$[H'] = [H_{n1}' \ H_{n2}' \ \dots \ H_{nk}']$$
 対角マトリックス

$$[\Psi] = [\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_k]$$

$$\{dT\} = \{dT_1 \ dT_2 \ \dots \ dT_k\}^T$$

一方、式(5.3.7)および(5.3.8)を式(5.2.2)に代入すると次式を得る。

$$\{dx\} = [K_T^e] (\{du\} - [\Phi] \{d\lambda\} - \{du^T\}) + [dK^e] \{u^e\} \quad (5.3.10)$$

さらにこの $\{dx\}$ を式(5.3.9)の塑性負荷条件に代入すると、次の $\{d\lambda\}$ に関する連立一次方程式が得られる。

$$([H'] + [\Phi]^T [K_T^\circ] [\Phi]) \{d\lambda\} = [\Phi]^T [K_T^\circ] (\{du\} - \{du^I\}) + [\Phi]^T [dK^\circ] \{u^\circ\} + [\Psi] \{dT\} \quad (5.3.11)$$

これより $\{d\lambda\}$ が次のように求められる。

$$\{d\lambda\} = [G'] [\Phi]^T [K_T^\circ] (\{du\} - \{du^I\}) + [G'] [\Phi]^T [dK^\circ] \{u^\circ\} + [G'] [\Psi] \{dT\} \quad (5.3.12)$$

ここで、 $[G'] = ([H'] + [\Phi]^T [K_T^\circ] [\Phi])^{-1}$

この $\{d\lambda\}$ を式(5.3.10)に再び代入すると、 $\{dx\}$ と $\{du\}$ の関係が次のように得られる。

$$\{dx\} + \{dx_{Ts}\} = [K_T^p] \{du\} \quad (5.3.13)$$

ここで、 $[K_T^p] = [K_T^\circ] - [K_T^\circ] [\Phi] [G'] [\Phi]^T [K_T^\circ]$

；熱弾塑性剛性マトリックス

$$\{dx_{Ts}\} = \{dx_{T1}\} + \{dx_{T2}\} + \{dx_{T3}\}$$

；静的熱等価節点力

$$\{dx_{T1}\} = [K_T^p] \{du^I\}$$

；熱歪に起因する熱等価節点力成分

$$\{dx_{T2}\} = ([K_T^\circ] [\Phi] [G'] [\Phi]^T [dK^\circ] - [dK^\circ]) \{u^\circ\}$$

；要素の弾性剛性の温度依存性に起因する熱等価節点力成分

$$\{dx_{T3}\} = [K_T^\circ] [\Phi] [G'] [\Psi] \{dT\}$$

；降伏応力の温度依存性に起因する熱等価節点力成分

次に上式の $\{dx\}$ に含まれる動的外力を導く。

式(5.2.1)を式(5.3.13)に代入すると、

$$\{dx_f\} + \{dx_m\} + \{dx_h\} + \{dx_{Ts}\} = [K_T^p] \{du\} \quad (5.3.14)$$

まず等価節点減衰力増分 $\{dx_h\}$ は式(4.2.5)で与えられる。

$$\{dx_h\} = -[C] \{d\dot{u}\} \quad (5.3.15)$$

ここで、 $[C]$ ；減衰マトリックス

$\{d\dot{u}\}$ ；節点変位速度増分

一方、等価節点慣性力増分 $\{dx_m\}$ の評価法としては、第4章と同様、以下の3ケースを取り上げる。

(I) ランブト・マス法

(II) コンシステント・マス法-1 (塑性変形が節点に縮約されていると考える場合)

(Ⅲ) コンシステント・マス法-2 (塑性変形が要素内に分布していると考える場合)
第4章でも述べたように、この内(Ⅰ)および(Ⅲ)から得られる $\{d x_m\}$ は、式の形式上同じ形となる。そこで、ここでも(Ⅰ)および(Ⅲ)の評価法を用いる場合と(Ⅱ)の評価法を用いる場合に大別して弾塑性剛性方程式を導出する。

(1) ランブト・マス法あるいはコンシステント・マス法-2を用いる場合

$$\{d x_m\} = -[M]\{d \ddot{u}\} \quad (5.3.16)$$

ここで、 $[M]$; ランブト・マスあるいはコンシステント・マス・マトリックス
 $\{d \ddot{u}\}$; 節点変位加速度増分

上式および式(5.3.15)を式(5.3.14)に代入すると、動的熱弾塑性剛性方程式は次式となる。

$$\{d x_f\} + \{d x_{Ts}\} = [M]\{d \ddot{u}\} + [C]\{d \dot{u}\} + [K_T^p]\{d u\} \quad (5.3.17)$$

4.3.2項と同様にNewmark の β 法を適用すると、上式は次の連立一次方程式に改められる。

$$\{d x_f\} + \{d x_{Ts}\} + \{d \bar{x}\} = [\bar{K}]\{d u\} \quad (5.3.18)$$

ここで、 $\{d \bar{x}\} = [M](b\{\dot{u}\} + c\{\ddot{u}\}) + [C](e\{\dot{u}\} + f\{\ddot{u}\})$
 $[\bar{K}] = (a[M] + d[C] + [K_T^p])$; 対称マトリックス

(2) コンシステント・マス法-1を用いる場合

式(4.3.3)より $\{d x_m\}$ は次式で定義される。

$$\{\delta d u\}^T \{d x_m\} = -\{\delta d u^*\}^T [M_c] \{d \ddot{u}^*\} \quad (5.3.19)$$

ここで、 $\{\delta d u\}$; 仮想節点変位増分
 $\{\delta d u^*\}$; $\{\delta d u\}$ に対応して生じる仮想弾性節点変位増分
 $[M_c]$; コンシステント・マス・マトリックス

ところで、式(5.3.7),(5.3.8)および(5.3.12)を用いると、 $\{d u^*\}$ と $\{d u\}$ の関係が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \{d u^*\} &= \{d u\} - [\Phi]\{d \lambda\} - \{d u^T\} \\ &= [Q](\{d u\} - \{d u^T\}) \\ &\quad - [\Phi][G']([\Phi]^T [d K^*] \{u^*\} + [\Psi]\{d T\}) \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

ここで、 $[Q] = [I] - [\Phi][G'][\Phi]^T [K_T^*]$
 $[I]$; 単位マトリックス

したがって、任意の仮想節点変位増分 $\{\delta d u\}$ に対応して生じる仮想弾性節点変位増分 $\{\delta d u^e\}$ は次式となる。

$$\{\delta d u^e\} = [Q]\{\delta d u\} \quad (5.3.21)$$

上式を式(5.3.18)に代入すると $\{d x_m\}$ は、

$$\{d x_m\} = -[Q]^T[M_c]\{d \ddot{u}^e\} \quad (5.3.22)$$

これと式(5.3.15)を式(5.3.14)に代入して、コンシステント・マス法-1に基づく動的熱弾塑性剛性方程式が次のように求められる。

$$\{d x_f\} + \{d x_{Ts}\} = [Q]^T[M_c]\{d \ddot{u}^e\} + [C]\{d \dot{u}\} + [K_T^p]\{d u\} \quad (5.3.23)$$

以下、Newmarkの β 法を適用して、これを $\{d u\}$ に関する連立一次方程式に改める。

$\{d \ddot{u}^e\}$ は、

$$\{d \ddot{u}^e\} = a\{d u^e\} + b\{\dot{u}^e\} + c\{\ddot{u}^e\} \quad (5.3.24)$$

パラメータ a, b, c は、式(4.3.25)および(4.3.26)に示した通りである。上式と式(4.3.24)を式(5.3.23)に代入し、式(5.3.20)の関係を用いると、求める方程式は次式となる。

$$\{d x_f\} + \{d x_{Ts}\} + \{d \bar{x}\} + \{d \bar{x}_{Td}\} = [\bar{K}]\{d u\} \quad (5.3.25)$$

ここで、

$$\{d \bar{x}\} = [Q]^T[M_c](b\{\dot{u}^e\} + c\{\ddot{u}^e\}) + [C](e\{\dot{u}\} + f\{\ddot{u}\})$$

$$\begin{aligned} \{d \bar{x}_{Td}\} = & a[M_c^*]\{d u^T\} \\ & + a[Q]^T[M_c][G']([\Phi]^T[d K^e]\{u^e\} + [\Psi]\{d T\}) \end{aligned}$$

$$[\bar{K}] = (a[M_c^*] + d[C] + [K_T^p]) \text{ 対称マトリックス}$$

$$[M_c^*] = [Q]^T[M_c][Q]$$

式(5.3.18)と同様に $[\bar{K}]$ は対称マトリックスである。

なお式(5.3.17)、式(5.3.23) およびこれらにNewmarkの β 法を適用した式(5.3.18)、式(5.3.25)は、いずれも歪硬化、温度変化および動的影響をすべて考慮する場合の弾塑性剛性方程式である。これらの一部を無視できる場合は各式を次のように修正すれば良い。

(I) 歪硬化のない場合

$$[H'] = [0]$$

$$\text{すなわち、} \quad [G'] = ([\Phi]^T[K_T^e][\Phi])^{-1} \quad (5.3.26)$$

(II) 温度変化のない場合

$$\begin{aligned} \{d x_{Ts}\} = \{d \bar{x}_{Td}\} &= \{0\} \\ [K_T^e] &= [K^e] \end{aligned} \quad (5.3.27)$$

(Ⅲ) 静的問題の場合

$$\begin{aligned}\{\mathbf{d} \bar{\mathbf{x}}_{Td}\} &= \{\mathbf{0}\} \\ [\mathbf{M}] &= [\mathbf{C}] = [\mathbf{0}]\end{aligned}\tag{5.3.28}$$

5.4 結言

本章では、前章までに示した理論を統合し、歪硬化体の動的熱弾塑性解析理論を展開した。すなわち、まず温度変化による熱歪の生成とヤング率、ポアソン比および瞬間線膨張係数の温度依存性を考慮して弾性領域の剛性方程式を導いた。次に歪硬化と降伏応力の温度依存性を考慮した塑性条件を基に、弾塑性剛性マトリックスを導いた。最後に、慣性力、減衰力などの動的外力を静的な節点力に付加することにより、歪硬化体の動的熱弾塑性剛性方程式を定式化した。

繰り返し述べるように、本理論によれば上記の剛性方程式をすべてマトリックス演算のみで導出できる。

第6章 径間荷重を受ける骨組構造物の静的弾塑性解析理論

6.1 緒言

海洋構造物を始めとする骨組構造物の効率良い弾塑性解析法として上田らは塑性関節法を提案している^{9), 10)}。この塑性関節法は本論文で展開する塑性節点法の母体となった解析法であり、骨組構造物を1次元有限要素で離散化し、各要素の塑性化をその端部節点のみで判定する。そして塑性化した節点に対しては、塑性ポテンシャル論に基づく塑性関節機構を導入して剛性評価を行なう。このように塑性変形を節点のみに縮約する結果、構造物の弾塑性挙動を短時間に解析でき、さらに崩壊メカニズムも明確に把握できる。

ところで骨組構造物に作用する荷重は、その形態上、集中荷重と分布荷重に分類できる。この内、集中荷重のみが作用する場合には、解析前に内力が極大になる位置が明らかであり、可能な降伏断面を予想することができる。したがって、これらの断面間を単位要素とする要素分割を用いれば塑性関節法により厳密な崩壊挙動の追跡が可能となる。これに対し、積載物重量、流体力、慣性力などの径間分布荷重の作用する場合、径間の降伏断面の形成位置を正確に予想することはできない。節点で塑性化を判定する塑性関節法では、このような場合、分布荷重を等価な集中荷重系に置き換えた上で、その作用点に節点を設けて崩壊挙動を評価している。しかしこの方法は径間要素数の増大をもたらすだけでなく、真の崩壊断面に節点が位置しない場合、崩壊荷重の上界値を推定することになる。

以上の問題点の解決のため、本章では第1章および第2章で展開した塑性節点法の静的弾塑性解析理論を部材径間に荷重を受ける骨組構造物の最終強度解析に応用する。そして集中荷重と分布荷重を径間荷重として受ける構造物に対して、部材結合部のみに節点を配した最少の要素分割で、厳密な塑性崩壊荷重、崩壊メカニズム、さらに径間変位を求めることのできる理論を展開する。この際、前章までのように要素内部の応力場を変位関数のみから求めるのではなく、径間荷重を含めた釣り合い条件から厳密に評価する。この点が前章までの理論と大きく異なる点である。

ハイブリッド応力法を用いて同様の定式化を行なった例に近藤の研究があるが¹⁷⁾ 変位法に基づいて行なわれた研究はこれまでにない。以下に示す理論は、塑性節点法を応用することにより、この種の問題を初めて変位法の立場から取り扱ったものである。

なおここでは要素として、たわみ変形を Hermite 三次式で内挿する梁・柱要素を用い、

平面骨組問題のみを対象に理論展開を行う。また変形は微小とする。

6.2 節では、径間荷重を受ける梁・柱要素の内力の評価法を示す。

6.3 節では、まず要素径間点の塑性条件を節点力と径間荷重の関数の形で表し、これを塑性ポテンシャルと見なして径間断面が塑性化した要素の塑性節点変位を定式化する。さらに、この塑性節点変位が表す要素の変形について考察を加えた後、弾塑性剛性方程式を定式化する。

6.4 節では、要素の塑性変形特性を考慮して要素の径間変位の計算法を示す。

6.5 節では、分布荷重を受ける部材に生じる径間関節の移動現象を説明し、解析におけるこの現象の取り扱い方を示す。

6.2 要素径間荷重と要素内内力

Fig.6.2.1 に径間荷重を受ける梁・柱要素を示す。軸方向変位を u 、たわみを w とし、各々に対する変位関数を x の 1 次式および 3 次式で表す。すなわち、

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x \\ w &= b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + b_4 x^3 \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

上式より知られるように本要素の場合、変位関数のみから算出される軸歪および軸力は要素内で一定となる。また曲率および曲げモーメントは要素内で線形に変化し節点で極大となる。

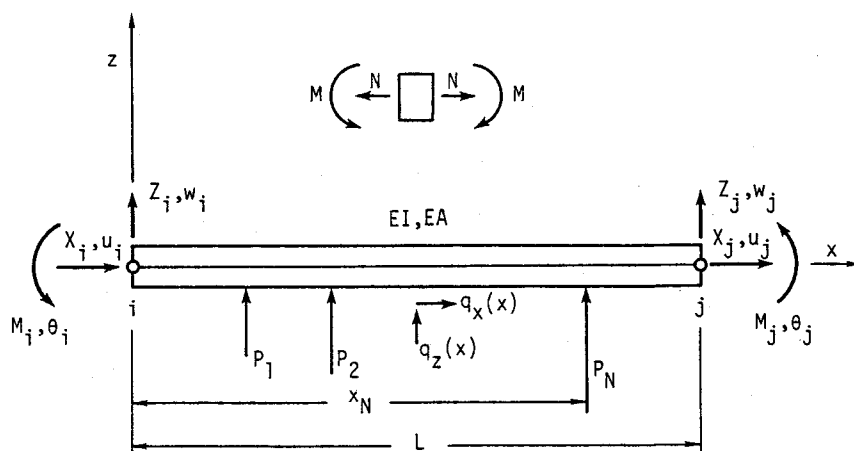


Fig. 6.2.1 Beam-column element

本章では弾性および塑性挙動を通じて径間をこの1要素で解析する。その節点を i および j とし、径間荷重として x および z 軸方向の径間分布荷重 $q_x(x)$ と $q_z(x)$ 、また N 個の集中横荷重 $P_s (s=1, 2, \dots, N)$ を考える。また節点力および節点変位をそれぞれ次のように表す。

$$\{x\} = \{X_i, Z_i, M_i, X_j, Z_j, M_j\}^T \quad (6.2.2)$$

$$\{u\} = \{u_i, w_i, \theta_i, u_j, w_j, \theta_j\}^T \quad (6.2.3)$$

次に、Fig.6.2.1 に示した節点力と径間荷重の作用下で釣り合い状態にある要素に生じている径間軸力および曲げモーメントをそれぞれ $N(x)$ および $M(x)$ で表す。これらは、節点力による成分 N_n, M_n と、径間荷重による成分 N_q, M_q の和となる。

$$\begin{aligned} N(x) &= N_n(x) + N_q(x) \\ M(x) &= M_n(x) + M_q(x) \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

上式右辺の N_n および M_n は、それぞれ節点力の関数として次式で与えられる。

$$\begin{aligned} N_n(x) &= -X_i \\ M_n(x) &= \left(1 - \frac{x}{L}\right) M_i - \frac{x}{L} M_j \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

一方 N_q は次式となる。

$$N_q(x) = -\int_0^x q_x dx \quad (6.2.6)$$

また M_q は要素を両端支持して、径間荷重のみ負荷した時のモーメント分布であり q_z のみ作用する場合、次式で与えられる。

$$M_q(x) = -\int_0^x \left(\int_0^x q_z dx \right) dx + \frac{x}{L} \int_0^L \left(\int_0^x q_z dx \right) dx \quad (6.2.7)$$

集中荷重 $P_s (s=1, 2, \dots, N)$ のみが作用する場合は、 m 番目の集中荷重の作用点 ($x = x_m$) における M_q は次式となる。

$$M_q(x_m) = -\sum_{s=1}^{m-1} P_s (x_m - x_s) + \frac{x_m}{L} \sum_{s=1}^N P_s (L - x_s) \quad (6.2.8)$$

そして各集中荷重 P_s の作用点間では M_q は直線分布する。 $q_z, P_s (s=1, 2, \dots, N)$ が共に作用する時の M_q は、式(6.2.7)、(6.2.8)の和である。Fig.6.2.2にモーメント場 M, M_n, M_q の関係を示す。

以上の諸式は、節点力および径間荷重と内力の釣り合い条件より導かれたものであり、弾性、塑性を通じて成立する。

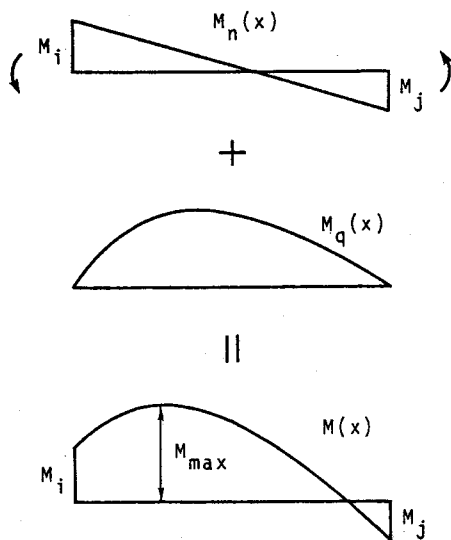


Fig. 6.2.2 Components of bending moment

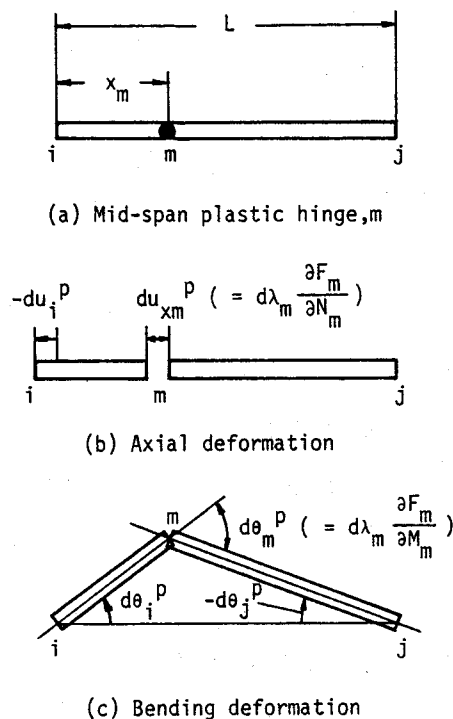


Fig. 6.3.1 Plastic deformation in a beam-column element with mid-span plastic hinge

6.3 弾塑性剛性方程式の定式化

6.3.1 塑性条件および塑性負荷条件

Fig.6.2.2 から明らかなように、径間荷重が作用する場合は径間の断面から塑性化が始まる可能性がある。そこで本論文では、荷重増分の各段階で要素内部の応力場をチェックし、塑性条件を満足した断面には径間塑性関節を導入する。

Fig.6.3.1(a)に示す要素内の任意点 m ($x = x_m$)に注目する。この点の断面力（一般化応力）を

$$\{R_m\} = \{N_m \ M_m\}^T \quad (6.3.1)$$

で表すと、 m 点の塑性条件 F_m は一般的な形として次式のように表される。

$$F_m = F_m(\{R_m\}, \bar{\varepsilon}_m^p, \sigma_{om}(\bar{\varepsilon}_m^p)) = 0 \quad (6.3.2)$$

ここで、 $\bar{\varepsilon}_m^p$; m 点の一般化相当塑性歪

σ_{om} ; m 点の降伏曲面の大きさを表すパラメータ

$\bar{\varepsilon}_m^p$ は次式で定義される相当塑性歪増分 $d\bar{\varepsilon}_m^p$ の累積値である。

$$\sigma_{om} d\bar{\varepsilon}_m^p = \{R_m\}^T \{d\varepsilon_m^p\} \quad (6.3.3)$$

ここで、 $\{d\epsilon_m^p\}$; m点の一般化塑性歪増分 (式(2.2.12)参照)

式(6.3.2)に式(6.2.4)および(6.2.5)を代入すると、 F_m は節点力と径間荷重の関数として表される。

$$\begin{aligned} F_m &= F_m(X_i, M_i, M_j, N_q(x_m), M_q(x_m), \bar{\epsilon}_m^p, \sigma_{om}(\bar{\epsilon}_m^p)) \\ &= F_m(\{x\}, N_q(x_m), M_q(x_m), \bar{\epsilon}_m^p, \sigma_{om}(\bar{\epsilon}_m^p)) = 0 \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

なおm点が節点iあるいはj($x=0, L$)に位置する時は、式(6.2.5)から式(6.2.8)より知られるように F_m はその節点の節点力のみ関数となる。例えば節点iの場合、

$$F_i = F_i(X_i, M_i, \bar{\epsilon}_i^p, \sigma_{oi}(\bar{\epsilon}_i^p)) = 0 \quad (6.3.5)$$

一方、塑性化した断面では次の塑性負荷条件が満足されねばならない。

$$dF_m = \left\{ \frac{\partial F_m}{\partial R_m} \right\}^T \{dR_m\} + \left(\frac{\partial F_m}{\partial \bar{\epsilon}_m^p} + \frac{\partial F_m}{\partial \sigma_{om}} \cdot \frac{d\sigma_{om}}{d\bar{\epsilon}_m^p} \right) d\bar{\epsilon}_m^p = 0 \quad (6.3.6)$$

但し、右辺第2項の $d\sigma_{om}/d\bar{\epsilon}_m^p$ は第2章で求めた断面歪硬化係数 H_b' を表す。

6.3.2 径間塑性関節を有する要素の塑性変形

(1) 塑性節点変位の定式化

径間点mで塑性条件、式(6.3.2)が満足され降伏断面が生じている状態を考える。塑性節点法では、塑性条件 F_m を節点力で表した式(6.3.4)を塑性ポテンシャルと見なし、塑性流れ理論に従って、塑性節点変位増分 $\{du^p\}$ を次のように定義する。

$$\{du^p\} = d\lambda_m \{\phi_m\} \quad (6.3.7)$$

ここで、 $\{\phi_m\} = \left\{ \frac{\partial F_m}{\partial x} \right\}$

$d\lambda_m$; 正のスカラー量

そして全節点変位増分 $\{du\}$ は次式のように弾性、塑性各成分の和となる。

$$\{du\} = \{du^e\} + \{du^p\} \quad (6.3.8)$$

ここで、 $\{du^e\}, \{du^p\}$; 弾性および塑性節点変位増分

要素の変位場は以上の $\{du^e\}$ および $\{du^p\}$ によって規定される。この内弾性変位は、弾性節点変位増分 $\{du^e\}$ と変位関数により表される。

次に塑性変位を考える。m点が塑性化した場合、要素には本来m点に塑性変形が生じる。今、m点で要素を二分しm点を節点としたとすると、m点に生じる塑性変位増分 $\{du_m^p\}$ は式(6.3.2)の F_m を用いて次式で与えられる。

$$\{d u_m^p\} = \{d u_{xm}^p \ d \theta_m^p\}^T = d \lambda_m \left\{ \frac{\partial F_m}{\partial R_m} \right\} \quad (6.3.9)$$

ここで $d u_{xm}^p$ および $d \theta_m^p$ は、1.6.2項に述べたように Fig.6.3.1(b),(c)に示す不連続な軸方向変位およびたわみ角を表す。

他方、式(6.2.5)および(6.3.4)を式(6.3.7)に代入すると、本理論において要素に生じる塑性節点変位増分 $\{d u^p\}$ は具体的に次式となる。

$$\begin{aligned} \{d u^p\} &= \{d u_i^p \ d w_i^p \ d \theta_i^p \ d u_j^p \ d w_j^p \ d \theta_j^p\}^T \\ &= d \lambda_m \left\{ -\frac{\partial F_m}{\partial N_m} \ 0 \ \left(1 - \frac{x_m}{L}\right) \cdot \frac{\partial F_m}{\partial M_m} \ 0 \ 0 \ -\frac{x_m}{L} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial M_m} \right\}^T \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

すなわち、径間点 m が塑性化した場合も、塑性変形は m 点ではなく一般に i, j 両端部節点に生じる。この塑性節点変位増分 $\{d u^p\}$ と m 点に本来生じる式(6.3.9)の塑性変位増分 $\{d u_m^p\}$ の関係を考える。

式(6.3.10)の $d \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial N_m}$, $d \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial M_m}$ は式(6.3.9)の $d u_{xm}^p$ および $d \theta_m^p$ そのものである。したがって、式(6.3.9)および(6.3.10)より次の関係が導かれる。

$$\begin{aligned} -d u_i^p &= d u_{xm}^p \\ d \theta_i^p - d \theta_j^p &= d \theta_m^p \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

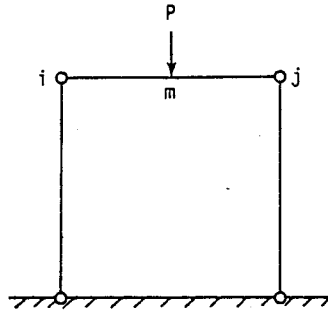
さらに
$$\frac{d \theta_i^p}{-d \theta_j^p} = \frac{1 - x_m/L}{x_m/L}$$

より、次式が成立する。

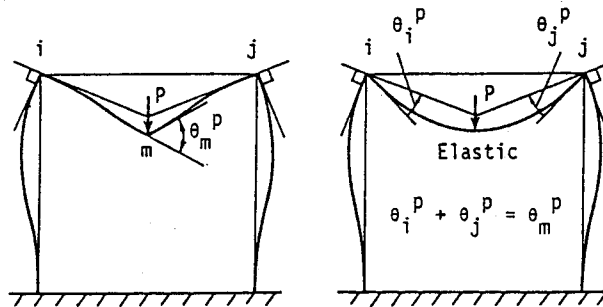
$$x_m d \theta_i^p = (L - x_m)(-d \theta_j^p) \quad (6.3.12)$$

式(6.3.11)および(6.3.12)は、いずれも $\{d u^p\}$ と $\{d u_m^p\}$ の間に Fig.6.3.1(b),(c)のような部材を剛体として塑性節点変位だけの変位を与えた場合の幾何学的関係が成立することを示している。これより式(6.3.10)の塑性節点変位増分 $\{d u^p\}$ は、 m 点の塑性変位増分 $\{d u_m^p\}$ を剛体的に節点に振り分けた量であることが判明した。このように本解析理論では、径間の断面が塑性化した場合も要素内部は常に弾性で塑性変形は節点のみに現れる。

具体的に、Fig.6.3.2(a)の門型ラーメンにおいて要素 i, j の径間点 m のみが塑性化した状態を考える。ここでは軸変形は無視する。 m 点に塑性関節が形成すると、この骨組は本来 Fig.6.3.2(b)のように変形する。角部 i, j ではたわみ角は連続し、 m 点のみに不連続



(a) One-story frame and mid-span load, P



(b) Actual deformation (c) Deformation derived by PNM

Fig. 6.3.2 Deformation of the one-story frame with mid-span plastic hinge, m

たわみ角 θ_m^p が生じる。一方、塑性節点法では、径間が塑性化した要素 $i-j$ の変形を Fig. 6.3.2(c) のように評価する。すなわち、 m 点の塑性変形 θ_m^p は式(6.3.11)第2式および式(6.3.12)の関係で節点 i および j に振り分けられ、この両点に不連続たわみ角 θ_i^p および θ_j^p が現れる。そして $i-j$ 間の要素内部には、変位関数で規定される連続な弾性変形のみが生じる。このような変形機構のもとで (b) 図の状態と等価な部材剛性が求められることが本項(2)で示される。但し、径間の各点に実際に生じるたわみを求める場合は、(b) 図の本来の変形モードに立ち返って計算を行う必要がある。その計算法は 6.4 節で述べる。

なお、Fig. 6.3.2(c) のように部材の変形を評価した場合、あたかも i, j 両節点に塑性関節が形成されたように見えるが、実際に節点が塑性化して塑性関節となった場合との本質的な違いは、(c) 図の場合、 θ_i^p と θ_j^p は独立でなく、式(6.3.12)の関係のもとで生じる点にある。したがって、 m 点の塑性化による部材の塑性変形機構の自由度の増加は、あくまでも径間点 m に関する 1 自由度のみである。また節点が塑性化した場合、式(6.3.5)および式(6.3.7)より、塑性節点変位はその節点のみに現れる。

(2) 変分原理を用いた塑性変形特性の考察

ここでは、仮想仕事の原理に基づいて、式(6.3.7)の塑性節点変位増分 $\{d u^p\}$ を用いる塑性節点法により、径間塑性関節を生じた部材の塑性挙動を1要素で正しく評価できることを明らかにする。

今、1つの要素が節点力 $\{x + d x\}$ 、径間荷重 $q_x + d q_x$ 、 $q_z + d q_z$ および $P_s + d P_s$ ($s=1, 2, \dots, N$) の作用下で釣り合い状態にあり、径間の m 点に塑性断面が生じているとする。この要素に仮想節点変位増分 $\{\delta d u\}$ を与えた時の内力および外力のなす仮想仕事 δW_i および δW_o を考える。まず式(6.3.8) より $\{\delta d u\}$ は次式のように弾性成分と塑性成分の和となる。

$$\{\delta d u\} = \{\delta d u^e\} + \{\delta d u^p\} \quad (6.3.13)$$

この $\{\delta d u^e\}$ および $\{\delta d u^p\}$ により生じる内部仮想仕事、外部仮想仕事をそれぞれ δW_i^e 、 δW_o^e および δW_i^p 、 δW_o^p とすると、全仮想仕事 δW_i 、 δW_o は次式で表される。

$$\begin{aligned} \delta W_i &= \delta W_i^e + \delta W_i^p \\ \delta W_o &= \delta W_o^e + \delta W_o^p \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

上式右辺の各項は具体的に次式となる。

$$\begin{aligned} \delta W_i^e &= \int_{V^e} \{\delta d \varepsilon^e\}^T \{\sigma + d \sigma\} d V \\ \delta W_i^p &= \int_{V^p} \delta d \bar{\varepsilon}^p (\bar{\sigma} + d \bar{\sigma}) d V \\ \delta W_o^e &= \{\delta d u^e\}^T \{x + d x\} + \sum_{s=1}^N \delta d w_s^e (P_s + d P_s) \\ &\quad + \int_0^L \delta d u^e (q_x + d q_x) d x + \int_0^L \delta d w^e (q_z + d q_z) d x \\ \delta W_o^p &= \{\delta d u^p\}^T \{x + d x\} + \sum_{s=1}^N \delta d w_s^p (P_s + d P_s) \\ &\quad + \int_0^L \delta d u^p (q_x + d q_x) d x + \int_0^L \delta d w^p (q_z + d q_z) d x \end{aligned} \quad (6.3.15)$$

ここで、 V^e ; 弾性領域

V^p ; 塑性領域

$\delta d u^e$ 、 $\delta d w^e$; $\{\delta d u^e\}$ により生じる要素内弾性仮想変位増分

$\delta d u^p$ 、 $\delta d w^p$; $\{\delta d u^p\}$ により生じる要素内塑性仮想変位増分

$$\delta d w_s^e = \delta d w^e(x_s), \delta d w_s^p = \delta d w^p(x_s)$$

x_s ; 荷重 P_s の作用点の x 座標

既に述べたように、要素の弾性領域は弾性節点変位 $\{u^e\}$ と、変位関数により変位場が規定される弾性要素そのものであるので、次の関係が成立する。

$$\delta W_i^e = \delta W_e^e \quad (6.3.16)$$

したがって、要素全体について仮想仕事の原理 $\delta W_i = \delta W_e$ が成立する場合、塑性挙動に関する仮想仕事の関係は次式となる。

$$\delta W_i^p = \delta W_e^p \quad (6.3.17)$$

以下、式(6.3.17)を用いて塑性変形特性を考察する。

式(6.3.15)の δW_e^p に含まれる $\{\delta d u^p\}$ は、式(6.3.10)より次式で与えられる。

$$\{\delta d u^p\} = \delta d \lambda_m \left\{ -\frac{\partial F_m}{\partial N_m} \quad 0 \quad \left(1 - \frac{x_m}{L}\right) \cdot \frac{\partial F_m}{\partial M_m} \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{x_m}{L} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial M_m} \right\}^T \quad (6.3.18)$$

一方、Fig.6.3.1(b),(c) のように、部材を剛体とした塑性変位場を仮定すると、 $\delta d u^p$ および $\delta d w^p$ は、具体的に次式となる。

$$\begin{aligned} \delta d u^p &= \begin{cases} \delta d u_i^p & (0 \leq x \leq x_m) \\ 0 & (x_m < x \leq L) \end{cases} \\ \delta d w^p &= \begin{cases} x \delta d \theta_i^p & (0 \leq x \leq x_m) \\ -(L-x) \delta d \theta_j^p & (x_m \leq x \leq L) \end{cases} \end{aligned} \quad (6.3.19)$$

式(6.3.18)および式(6.3.19)を式(6.3.15)の δW_e^p に代入し、さらに式(6.2.6)～式(6.2.8)の関係を用いつつ式を展開すると、結局式(6.3.17)は次式となる。

$$\begin{aligned} \delta W_i^p &= \delta W_e^p \\ &= \delta d \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial N_m} (N_m + d N_m) + \delta d \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial M_m} (M_m + d M_m) \\ &= \delta d u_{x_m}^p (N_m + d N_m) + \delta d \theta_m^p (M_m + d M_m) \end{aligned} \quad (6.3.20)$$

ところで、上式の右辺は m 点で部材を 2 要素に分割し、節点となった m 点に式(6.3.9)の塑性変形 $\{d u_m^p\}$ を導入した時生じる内部塑性仕事に他ならない。またこの時、両分割要素は m 点の回りに Fig.6.3.1(b),(c) と同様、塑性変形による剛体変位を生じる。

以上の結果、式(6.3.10)の $\{d u^p\}$ を用いる塑性節点法によれば、 m 点に実際に塑性関節を設けた場合と同じ変形機構および同じ塑性仕事を生じる部材特性が一要素のみで得ら

れることが明らかとなった。なお、径間塑性関節が k 個 ($k \geq 1$) 存在する場合、各点の塑性化に起因して生じる式(6.3.18)および(6.3.19)の諸量を合計した仮想変位を式(6.3.15)の δW_e^p に代入することにより、

$$\begin{aligned} \delta W_i^p &= \delta W_e^p \\ &= \sum_{m=1}^k (\delta d u_{x_m}^p (N_m + d N_m) + \delta d \theta_m^p (M_m + d M_m)) \end{aligned} \quad (6.3.21)$$

の形で式(6.3.20)の仮想仕事の関係が同じく成立する。これより、複数の径間塑性関節が生じた部材についても一要素でその剛性を評価できること、またFig.6.3.1(b),(c)の塑性変位場が重畳できることも明らかとなった。

6.3.3 弾塑性剛性方程式

要素の増分型弾性剛性方程式は、次式で表すことができる。

$$\{d x\} + \{d x_{e,q^e}\} = [K^e] \{d u^e\} \quad (6.3.22)$$

ここで、 $\{d x_{e,q^e}\}$; 径間荷重による弾性等価節点力

$[K^e]$; 弾性剛性マトリックス

この要素内の k 個の断面が塑性化した場合を考える。径間における崩壊機構の形成を考えると、節点を除いて径間に存在できる塑性関節の数は最大2である。塑性条件は次式となる。

$$F_m = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, k) \quad (6.3.23)$$

また、塑性節点変位増分 $\{d u^p\}$ は式(6.3.7)より、

$$\{d u^p\} = \sum_{m=1}^k d \lambda_m \{\phi_m\} = [\Phi] \{d \lambda\} \quad (6.3.24)$$

ここで、 $[\Phi] = [\{\phi_1\} \{\phi_2\} \dots \{\phi_k\}]$

$\{d \lambda\} = \{d \lambda_1 \ d \lambda_2 \ \dots \ d \lambda_k\}^T$

式(6.3.8)および(6.3.24)を式(6.3.22)に代入して次式を得る。

$$\{d x\} + \{d x_{e,q^e}\} = [K^e] (\{d u\} - [\Phi] \{d \lambda\}) \quad (6.3.25)$$

一方、塑性負荷条件は式(6.3.6)より、

$$\begin{aligned} d F_m &= \left\{ -\frac{\partial F_m}{\partial R_m} \right\}^T \{d R_m\} + \left(\frac{\partial F_m}{\partial \bar{\varepsilon}_m^p} + \frac{\partial F_m}{\partial \sigma_{om}} \cdot \frac{d \sigma_{om}}{d \bar{\varepsilon}_m^p} \right) d \bar{\varepsilon}_m^p = 0 \\ &\quad (m = 1, 2, \dots, k) \end{aligned} \quad (6.3.26)$$

l_m^p ; Length of yielded zone

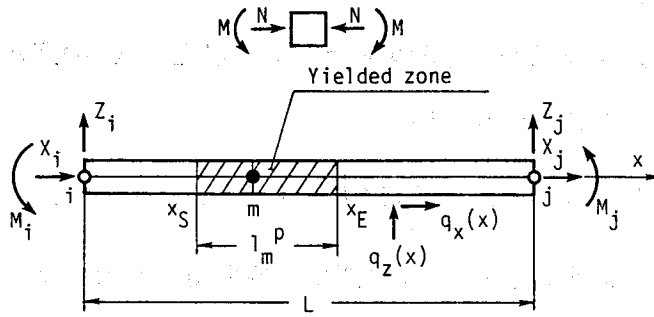


Fig. 6.3.3 Beam-column element with mid-span plastic hinge, m

上式はm点の相当塑性歪増分 $d\bar{\epsilon}_m^p$ に関する負荷条件となっている。この $d\bar{\epsilon}_m^p$ と塑性節点変位増分 $\{du^p\}$ の大きさを表す式(6.3.24)の $d\lambda_m$ の関係を2.3.2項(2)と同様の手順で以下に導く。

径間点mの塑性化に起因して要素でなされる塑性仕事 dW_m^p は、仮想仕事に関する式(6.3.20)と同じ考え方で次式のように表される。

$$dW_m^p = \{R_m\}^T \{du_m^p\} = \{R_m\}^T \{\phi_m\} d\lambda_m \quad (6.3.27)$$

一方、Fig.6.3.3の如くm点の周囲の長さ l_m^p なる塑性化領域に、実際に塑性歪が分布する場合の塑性仕事 dW_m^{p*} は次式となる。

$$dW_m^{p*} = \int_{x_s}^{x_e} \sigma_o(x) d\bar{\epsilon}^p(x) dx = d\bar{\epsilon}_m^p \int_{x_s}^{x_e} \sigma_o(x) g(x) dx \quad (6.3.28)$$

ここで、 $d\bar{\epsilon}^p(x) = g(x) d\bar{\epsilon}_m^p$

$g(x)$; $d\bar{\epsilon}^p$ の分布を表す座標の関数

$g(x)$ は式(2.3.17)より次式となる。

$$g(x) = \frac{H_{bm}' - \frac{\partial f_m}{\partial \bar{\epsilon}_m^p}}{H_b' - \frac{\partial f}{\partial \bar{\epsilon}^p}} \cdot \frac{\left\{ \frac{\partial f}{\partial R} \right\}^T \{dR\}}{\left\{ \frac{\partial f_m}{\partial R_m} \right\}^T \{dR_m\}} \quad (6.3.29)$$

ここで、 $\{dR\} = \{dN \ dM\}^T$

$$dN = -dX_i + dN_q(x)$$

$$dM = \left(1 - \frac{x}{L}\right) dM_i - \frac{x}{L} dM_j + dM_q(x)$$

{d R} および {d R_m} に径間荷重による項 d N_q および d M_q が加わる点が 式(2.3.19) と異なっている。

式(6.3.27)と式(6.3.28)を等置すると、d ε_m^p と d λ_m の関係が次のように得られる。

$$d \bar{\varepsilon}_m^p = h_m d \lambda_m \quad (6.3.30)$$

ここで、
$$h_m = \{R_m\}^T \{\phi_m\} / \int_{x_s}^{x_E} \sigma_o(x) g(x) dx$$

これを式(6.3.26)に代入して d λ_m に関する負荷条件が次のように得られる。

$$d F_m = \left\{ \frac{\partial F_m}{\partial R_m} \right\}^T \{d R_m\} - H_{nm}' d \lambda_m = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, k) \quad (6.3.31)$$

ここで、
$$H_{nm}' = - \left(\frac{\partial F_m}{\partial \bar{\varepsilon}_m^p} + \frac{\partial F_m}{\partial \sigma_{om}} \cdot \frac{d \sigma_{om}}{d \bar{\varepsilon}_m^p} \right) h_m$$

；径間点mの塑性化に対する節点変位歪硬化係数

ところで上式の {d R_m} は、式(6.2.4)および式(6.2.5) から節点力増分 {d x} および径間荷重と次の関係にある。

$$\{d R_m\} = [A_m] \{d x\} + \{d Q_m\} \quad (6.3.32)$$

ここで、
$$[A_m] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{x_m}{L} & 0 & 0 & -\frac{x_m}{L} \end{bmatrix}$$

$$\{d Q_m\} = \{d N_q(x_m) \ d M_q(x_m)\}^T$$

式(6.3.32)を式(6.3.31)に代入すると、式(6.3.31)は節点力 {d x} に関する負荷条件に変換される。

$$\begin{aligned} d F_m &= \left\{ \frac{\partial F_m}{\partial R_m} \right\}^T [A_m] \{d x\} + \left\{ \frac{\partial F_m}{\partial R_m} \right\}^T \{d Q_m\} - H_{nm}' d \lambda_m \\ &= \{\phi_m\}^T \{d x\} + \left\{ \frac{\partial F_m}{\partial R_m} \right\}^T \{d Q_m\} - H_{nm}' d \lambda_m = 0 \end{aligned} \quad (m = 1, 2, \dots, k) \quad (6.3.33)$$

ここで、
$$\{\phi_m\} = \left\{ \frac{\partial F_m}{\partial x} \right\} = [A_m]^T \left\{ \frac{\partial F_m}{\partial R_m} \right\}$$

上式をまとめて次のように表す。

$$[\Phi]^T \{d x\} + \{d Q\} - [H'] \{d \lambda\} = \{0\} \quad (6.3.34)$$

ここで、 $\{dQ\} = \left\{ \left\{ -\frac{\partial F_1}{\partial R_1} \right\}^T \{dQ_1\} \left\{ -\frac{\partial F_2}{\partial R_2} \right\}^T \{dQ_2\} \dots \left\{ -\frac{\partial F_k}{\partial R_k} \right\}^T \{dQ_k\} \right\}^T$

$$[H'] = [H_{n1}' \ H_{n2}' \ \dots \ H_{nk}']$$

；節点変位歪硬化係数マトリックス（対角マトリックス）

これに式(6.3.25)の $\{dx\}$ を代入すると、次の $\{d\lambda\}$ に関する連立一次方程式を得る。

$$([H'] + [\Phi]^T [K^e] [\Phi]) \{d\lambda\} = [\Phi]^T [K^e] \{du\} - [\Phi]^T \{dx_{e,q^e}\} + \{dQ\} \quad (6.3.35)$$

これより $\{d\lambda\}$ は次式となる。

$$\begin{aligned} \{d\lambda\} &= ([H'] + [\Phi]^T [K^e] [\Phi])^{-1} \\ &\times ([\Phi]^T [K^e] \{du\} - [\Phi]^T \{dx_{e,q^e}\} + \{dQ\}) \end{aligned} \quad (6.3.36)$$

これを再び式(6.3.25)に代入すると、弾塑性剛性方程式が次のように求められる。

$$\{dx\} + \{dx_{e,q^p}\} = [K^p] \{du\} \quad (6.3.37)$$

ここで、 $\{dx_{e,q^p}\} = \{dx_{e,q^e}\}$

$$- [K^e] [\Phi] ([H'] + [\Phi]^T [K^e] [\Phi])^{-1} ([\Phi]^T \{dx_{e,q^e}\} - \{dQ\})$$

；径間荷重による弾塑性等価節点力

$$[K^p] = [K^e] - [K^e] [\Phi] ([H'] + [\Phi]^T [K^e] [\Phi])^{-1} [\Phi]^T [K^e]$$

；弾塑性剛性マトリックス

6.4 要素径間変位の計算法

前節で導いた式(6.3.37)を用いれば、径間荷重を受ける骨組構造物の塑性崩壊荷重、崩壊メカニズムを一径間を単位要素とする最少の要素分割で求めることができる。しかし、変形は部材結合部での値しか直接には得られない。そこで本節では6.3.2項(1)で述べた要素の変形特性を参考に、径間変位の計算法を示す。

6.4.1 径間たわみ

塑性断面を有する要素の径間全たわみ $w(x)$ は、弾性領域のたわみ $w^e(x)$ と Fig.6.3.1 (c) に示したモードの径間塑性たわみ $w^p(x)$ の和となる。

$$w(x) = w^e(x) + w^p(x) \quad (6.4.1)$$

まず $w^e(x)$ は、通常の弾性たわみ計算法より得られる。但し境界条件の内、要素端部

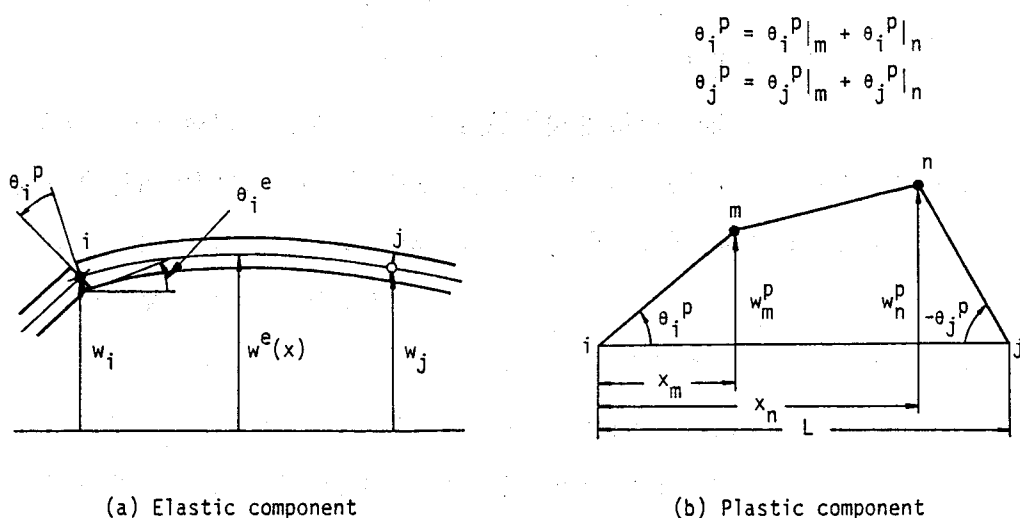


Fig. 6.4.1 Mid-span deflection

i のたわみ角については、Fig.6.4.1(a)に示す次式の弾性領域のたわみ角 θ_i^e を用いる必要がある。

$$\theta_i^e = \sum_S (d\theta_i - d\theta_i^p) \quad (6.4.2)$$

ここで、

$$d\theta_i^p = \sum_{m=1}^k d\lambda_m (\partial F_m / \partial M_i)$$

Σ ; 最初の径間関節が生じた以後の全荷重ステップについての合計

k ; 要素内全塑性関節数

一方、 $w^p(x)$ は節点以外の径間関節が生じているとき付加されるもので、Fig.6.3.1の剛体的な塑性変形モードを考慮して、幾何学的に求めることができる。例えばFig.6.4.1(b)のように2つの径間関節 m, n が存在する場合、点 m, n における塑性たわみ w_m^p および w_n^p は次式となる。

$$\begin{aligned}w_m^p &= (\theta_i^p|_m + \theta_i^p|_n) x_m \\ w_n^p &= -(\theta_j^p|_m + \theta_j^p|_n) (L - x_m)\end{aligned} \quad (6.4.3)$$

ここで、

$$\theta_i^p|_m = \sum_S d\lambda_m (\partial F_m / \partial M_i), \quad \theta_i^p|_n = \sum_S d\lambda_n (\partial F_n / \partial M_i)$$

$$\theta_j^p|_m = \sum_S d\lambda_m (\partial F_m / \partial M_j), \quad \theta_j^p|_n = \sum_S d\lambda_n (\partial F_n / \partial M_j)$$

6.4.2 径間軸変位

たわみと同様、径間の全軸変位 $u(x)$ は弾性、塑性各成分 $u^e(x)$, $u^p(x)$ の和となる。
 $u^e(x)$ は変位関数に一次式を用いているため、弾性節点変位より次式のように得られる。

$$u^e(x) = \left[1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} \right] \{u_i^e \quad u_j^e\}^T \quad (6.4.4)$$

一方、 $u^p(x)$ は、Fig.6.3.1(b)の m 点のみ塑性化した場合、

$$u^p(x) = \begin{cases} -\sum_S d u_i^p = -\sum_S d \lambda_m (\partial F_m / \partial X_i) & (0 \leq x \leq x_m) \\ 0 & (x_m \leq x \leq L) \end{cases} \quad (6.4.5)$$

となる。径間に二つの関節がある場合も重畳の手続きにより $u^p(x)$ が求まる。

6.5 径間塑性関節の移動

分布荷重を受ける部材において、その径間点が塑性化しても構造全体の崩壊メカニズムの形成までに至らない場合、塑性化後の内力変動によって上記部材には径間塑性関節の移動が生じる。第 n 荷重段階で、径間点 m が塑性化した部材の内力分布を Fig.6.5.1 に実線で示す。式(6.3.37)の弾塑性剛性方程式を適用した時、第 $n+1$ 荷重段階の荷重増加に対して部材内力は破線のように変動する。しかし静的許容場であるためには最大内力点すなわち径間関節位置は除荷を伴いながら連続的に移動せねばならない。

この現象を解析するため以下の解析手法を提案する。関節の移動現象の連続的な追跡は有限な大きさの荷重増分を与える増分型解析では不可能である。そこで初期径間関節 m の

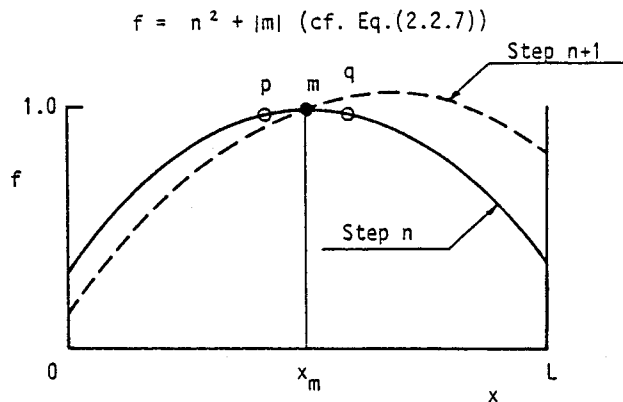


Fig. 6.5.1 Moving plastic hinge

両側に Fig.6.5.1に示す微小距離離れたチェックポイント p , q を設け、まず p , q いずれかが塑性化するまで解析する。今、 p 点が新たに塑性化したとすると（ステップ $n+1$ ）、次の荷重増分に対しては p と m の両点を径間関節として解析し、いずれか一方の除荷を $d\lambda < 0$ より判定する。そして改めてステップ $n+1$ の状態から、負荷点のみを径間関節として解析する。 m , p ともに負荷状態を維持することは内力変動を拘束することを意味するため、實際上起こらない。以上の手順を崩壊機構の形成まで繰り返して関節の移動を評価する。 m 点と p 点が降伏断面である場合には、 m , p 間で内力は塑性条件を破っており静的許容場ではないが、これに対しては崩壊荷重が得られた後に最大内力が塑性条件を丁度満足するように崩壊荷重を減少させ、その下界値を求める。なお径間集中荷重が作用する場合は、明らかに径間関節の移動は生じない。

6.6 結言

本章では、塑性節点法の静的弾塑性解析理論を応用し、任意の形態の径間荷重を受ける骨組構造部材に対して、1要素のみでその塑性崩壊挙動を追跡できる弾塑性剛性方程式を導出した。本理論では、径間に塑性化が生じた場合も塑性変形は部材端部の節点に縮約されて現れる。このような塑性変形の取り扱い方の妥当性を仮想仕事の原理を基に検証した。また部材の径間変位は直接解析に当たっては取り扱わないが、別途求める場合の算出法を明らかにした。さらに分布径間荷重を受ける部材に生じる可能性のある径間関節の移動現象の処理の仕方を示した。

第2編

塑性節点法による解析

第7章 代表的な有限要素への塑性節点法の適用法

7.1 緒言

第2編では、前編で展開した塑性節点法の理論に従って幾つかの例題を解析し、その適用性を明らかにする。その準備として本章では既に実用に供されている様々な有限要素の中から次章以降の解析に用いる要素を中心に幾つか抽出し、これらに対する具体的な塑性節点法の適用法を述べる。

まず各要素の変位関数を示し、応力場の特性を明らかにする。次に本論文における各要素の塑性化の判定法、すなわち塑性条件と塑性化判定点の設定法について述べる。また塑性節点変位の定式化に必要な、塑性化判定点の応力と要素の節点力との関係式の導出法を具体的に示す。この関係式を基に、最後に各要素に現れる塑性変形を考察する。なお梁・柱要素への適用法は第2章および第6章で詳しく述べたのでここでは省略し、2次元および3次元要素への適用法を述べることにする。

7.2 節では、平面要素に対する塑性節点法の適用法を平面応力問題を対象に述べる。要素としては、最も基本的な一様歪三角形平面要素および長方形双1次平面要素を取り上げる。

7.3 節では、板曲げ要素への適用法を示す。ここでは要素境界辺での隣接要素間の変形の連続性が満足される適合要素の一つとして Cloughら¹⁸⁾の三角形板曲げ要素を、他方非適合要素の例として Bazeleyら¹⁹⁾そして Morley¹¹⁾による2種類の三角形板曲げ要素を取り上げる。Morleyの板曲げ要素については、1.6.2項において、要素境界辺の midpointにある節点を塑性化判定点とすることにより境界辺に塑性関節線機構を導入できることを示したが、さらに要素内部の塑性関節線の形成も考慮できることを明らかにする。

7.4 節では一様歪四面体要素と8節点六面体アイソパラメトリック要素を例に塊体有限要素への適用法を述べる。

7.2 平面要素

平面要素に対する塑性節点法の適用法を示す。要素の応力場を応力を板厚方向に積分した単位長さ当りの面内力(断面力)の次元で表すこととし、この面内力を一般化応力 $\{\sigma$

｝、また面内歪を一般化歪 $\{\varepsilon\}$ として定義する。したがって、1.3節に述べたように塑性条件には合応力表示型塑性条件を用いる。

7.2.1 一様歪三角形平面要素

(1) 変位関数と応力場

Fig.7.2.1に要素と座標系を示す。節点力および節点変位は次式となる。

$$\{x\} = \{X_1 \ Y_1 \ X_2 \ Y_2 \ X_3 \ Y_3\}^T \quad (7.2.1)$$

$$\{u\} = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3\}^T \quad (7.2.2)$$

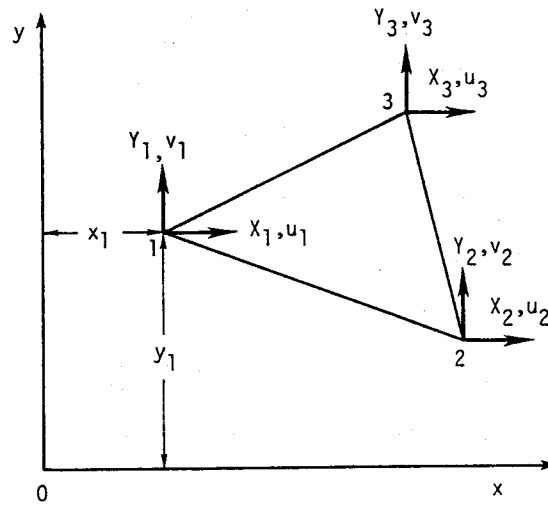


Fig. 7.2 1 Constant-strain triangular plane element

要素内の変位 $\{u_{e1}\}$ を座標 x および y に関する 1 次式で内挿する。

$$\{u_{e1}\} = \{u \ v\}^T$$

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (7.2.3)$$

$$v = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y$$

この時、 $\{u_{e1}\}$ と節点変位 $\{u\}$ の関係は次式となる。

$$\{u_{e1}\} = [N]\{u\} \quad (7.2.4)$$

ここで、 $[N] = [[I]N_1 \ [I]N_2 \ [I]N_3]$; 変位関数

$$N_1 = (a_1 + b_1 x + c_1 y)/2A$$

$[I]$; 2×2 の単位マトリックス

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$$

$$b_1 = y_2 - y_3$$

$$c_1 = x_3 - x_2$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} ; \text{要素の面積}$$

但し、 N_2, N_3 および $a_2, b_2, \dots, c_3$ は、添字 1, 2, 3 を cyclic に置き換えて得られる。

要素の一般化歪（面内歪） $\{\varepsilon\}$ と節点変位 $\{u\}$ の関係は次式となる。

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\} \quad (7.2.5)$$

ここで、 $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}\}^T$

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

；節点変位・一般化歪マトリックス

上式のマトリックス $[B]$ は一定値である。したがって一般化歪 $\{\varepsilon\}$ および次の一般化応力（単位長さ当りの面内力） $\{\sigma\}$ は要素内で一定となる。

$$\{\sigma\} = [D^*]\{\varepsilon\} = [D^*][B]\{u\} \quad (7.2.6)$$

ここで、 $\{\sigma\} = \{N_x \ N_y \ N_{xy}\}^T$

$$[D^*] = \frac{E t}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix}$$

；一般化応力・一般化歪マトリックス

E ； ヤング率 , t ； 板厚

ν ； ポアソン比

弾性剛性方程式を導くために仮想節点変位 $\{\delta u\}$ を与え、仮想仕事の原理を適用すると次式を得る。

$$\{\delta u\}^T \{x\} = \int_A \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dA \quad (7.2.7)$$

これに式(7.2.5)および式(7.2.6)を代入し、 $[B]$ が要素内で一定であることを考慮すると弾性剛性方程式が次のように求められる。

$$\{x\} = [K^*]\{u\} \quad (7.2.8)$$

ここで、 $[K^*] = A[B]^T[D^*][B]$ ；弾性剛性マトリックス

(2) 塑性化判定法と塑性変形

要素には一様な一般化応力および歪場が生じる。したがって、塑性化判定点として任意の点 i を採用できる。

Misesの降伏条件に従う材料の場合、 i 点の塑性条件 f_i は式(2.2.31)で、また降伏関数 Y は式(2.2.29)でそれぞれ与えられる。

さて塑性節点法では塑性化判定点の塑性条件を節点力の関数の形で定義する。このためには、式(1.4.8)のように塑性化判定点 i の一般化応力 $\{\sigma_i\}$ を節点力 $\{x\}$ の関数として表す必要がある。以下、その手順を述べる。

式(7.2.8)と式(7.2.6)より、まず節点力 $\{x\}$ を $\{\sigma_i\}$ (要素内一定) の関数として表すことができる。すなわち、

$$\{x\} = A[B]^T\{\sigma_i\} \quad (7.2.9)$$

両辺に左から $[B]$ を乗じると、

$$[B]\{x\} = A([B][B]^T)\{\sigma_i\} \quad (7.2.10)$$

これより求める $\{\sigma_i\}$ と $\{x\}$ の関係は次式となる。

$$\{\sigma_i\} = [A_i]\{x\} \quad (7.2.11)$$

ここで、 $[A_i] = ([B][B]^T)^{-1}[B]/A$

$\{\sigma_i\}$ は全節点の節点力の関数となっている。したがって塑性節点変位は全節点に現れる。

なお、一般に一様歪有限要素では塑性節点法と通常の有限要素法とで同一の弾塑性剛性方程式が得られ、この時要素でなされる塑性仕事量も両解析法で一致する。式(7.2.11)の関係をを用いてこれを証明した結果を付録5に示す。

7.2.2 長方形双1次平面要素

(1) 変位関数と応力場

Fig.7.2.2(a)に要素と座標系を示す。節点力および節点変位は次式で表される。

$$\{x\} = \{X_1 \ Y_1 \ X_2 \ Y_2 \ X_3 \ Y_3 \ X_4 \ Y_4\}^T \quad (7.2.12)$$

$$\{u\} = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4\}^T \quad (7.2.13)$$

要素内の変位 $\{u_{e1}\}$ を x および y に関する次の双一次形式に仮定する。

$$\begin{aligned} \{u_{e1}\} &= \{u \ v\}^T \\ u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy \end{aligned} \quad (7.2.14)$$

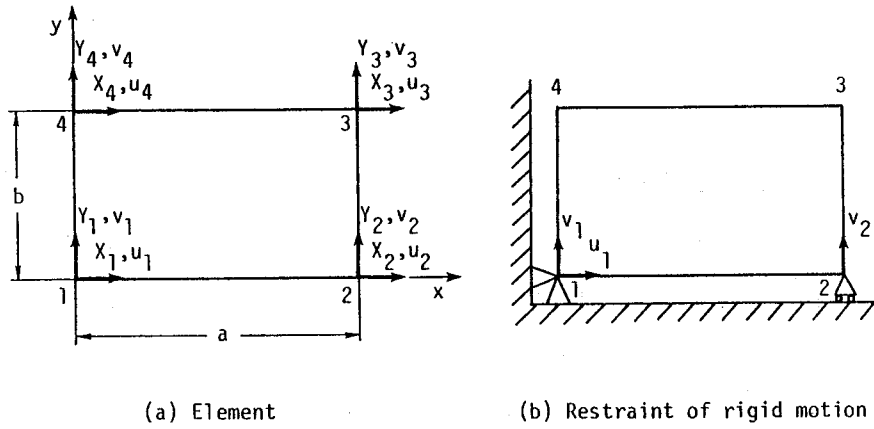


Fig. 7.2.2 Linear-strain rectangular plane element

この時、 $\{u_{e,i}\}$ と節点変位 $\{u\}$ の関係は次式となる。

$$\{u_{e,i}\} = [N]\{u\} \quad (7.2.15)$$

ここで、 $[N] = [[I]N_1 \ [I]N_2 \ [I]N_3 \ [I]N_4]$; 変位関数

$$N_1 = (ab - bx - ay + xy)/ab, \quad N_2 = (bx - xy)/ab$$

$$N_3 = xy/ab, \quad N_4 = (ay - xy)/ab$$

$[I]$; 2×2 の単位マトリックス

要素の一般化歪 (面内歪) $\{\epsilon\}$ と節点変位 $\{u\}$ の関係は次式となる。

$$\{\epsilon\} = [B]\{u\} \quad (7.2.16)$$

ここで、

$$[B] = \begin{bmatrix} -(b-y) & 0 & b-y & 0 & y & 0 & -y & 0 \\ 0 & -(a-x) & 0 & -x & 0 & x & 0 & a-x \\ -(a-x) & -(b-y) & -x & b-y & x & y & a-x & -y \end{bmatrix}$$

; 節点変位・一般化歪マトリックス

また、一般化応力 (単位長さ当りの面内力) $\{\sigma\}$ は式(7.2.6)のマトリックス $[D^e]$ を用いて次式で与えられる。

$$\{\sigma\} = [D^e]\{\epsilon\} = [D^e][B]\{u\} \quad (7.2.17)$$

式(7.2.16)および式(7.2.17)より明らかなように、本要素の $\{\epsilon\}$ および $\{\sigma\}$ はいずれも要素内で線形に変化する。

弾性剛性方程式は仮想仕事の原理より次のように求められる。

$$\{x\} = [K^e]\{u\} \quad (7.2.18)$$

ここで、 $[K^e] = \int_A [B]^T [D^e] [B] dA$

(2) 塑性化判定法と塑性変形

要素の一般化応力は要素内で線形変化し、節点で極大となる。通常の有限要素法では、要素の重心点やガウス積分点で塑性化が判定される。しかしこのような塑性化判定法では、要素寸法が大きく、また要素内部の応力変化が大きい場合程、低めの（平均的な）応力で塑性化を判定することとなり崩壊荷重を過大に推定する可能性がある。

一方、塑性節点法では要素内の任意の位置で塑性化を判定できる。このような塑性節点法の有効性を明らかにする目的で、本要素に対しては塑性化を節点で判定し、これによって非常に少ない要素数で精度良く弾塑性挙動が求められる例を示す。すなわち8.3.2項では、面内曲げを受ける平板の初期塑性状態から全断面塑性状態に至る過程をわずか2要素で解析できることを示す。また10.2節の熱弾塑性解析では要素内で温度が線形に変化する問題に対する効率良い適用性を示す。

塑性条件 f および降伏関数 Y としては式(2.2.31)および式(2.2.29)を用いる。

次に塑性化判定点の一般化応力と節点力の関係を導く。判定点 i の一般化応力 $\{\sigma_i\}$ は、 i 点の座標を式(7.2.16)の節点変位・歪マトリックス $[B]$ に代入したマトリックス $[B_i]$ を用いて次式で与えられる。

$$\{\sigma_i\} = [D^e][B_i]\{u\} \quad (7.2.19)$$

今、式(7.2.18)の弾性剛性方程式より節点変位 $\{u\}$ を次のように節点力 $\{x\}$ の関数として表すことができた場合、

$$\{u\} = [P]\{x\} \quad (7.2.20)$$

これを式(7.2.19)に代入すれば $\{\sigma_i\}$ を $\{x\}$ の関数として表せる。しかし式(7.2.18)は剛体自由度を含む不定方程式であるため、このままでは上式の関係は得られない。そこで Fig.7.2.2(b)のように剛体変位を拘束した状態で $\{\sigma_i\}$ と $\{x\}$ の関係を求める。

平面問題を考えているので要素の自由度は3である。したがって任意の3節点変位を拘束すれば良い。ここでは図のように u_1 , v_1 および v_2 を拘束する。この状態での $\{\sigma_i\}$ および $\{x\}$ と節点変位の関係は次式で与えられる。

$$\{\sigma_i\} = [D^e][B_i^*]\{u^*\} \quad (7.2.21)$$

$$\{x\} = [K^e*]\{u^*\} \quad (7.2.22)$$

ここで、 $\{u^*\} = \{u_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4\}^T$
 $[B_i^*], [K^e*]$; $[B_i]$ および $[K^e]$ を $\{u^*\}$ に関する列のみに縮小したマトリックス

式(7.2.22)の両辺に $[K^e*]^T$ を乗じると、

$$[K^e*]^T\{x\} = [K^e*]^T[K^e*]\{u^*\} \quad (7.2.23)$$

これより、

$$\{u^*\} = ([K^e*]^T[K^e*])^{-1}[K^e*]^T\{x\} \quad (7.2.24)$$

上式を式(7.2.21)に代入すると $\{\sigma_i\}$ と $\{x\}$ の関係が次のように求められる。

$$\{\sigma_i\} = [A_i]\{x\} \quad (7.2.25)$$

ここで、 $[A_i] = [D^e][B_i^*]([K^e*]^T[K^e*])^{-1}[K^e*]^T$

$\{\sigma_i\}$ は i 点の位置に拘らず、常に要素の全節点の節点力の関数となる。したがって塑性節点変位は全節点に現れる。

7.3 板曲げ要素

塑性節点法の板曲げ要素への適用法を示す。ここでは単位長さ当りの曲げモーメントを一般化応力 $\{\sigma\}$ として、また曲率を一般化歪 $\{\varepsilon\}$ としてそれぞれ定義する。塑性条件には合応力表示型塑性条件を用いる。

7.3.1 Cloughらの適合三角形要素¹⁸⁾

(1) 変位関数と応力場

Cloughらは、要素境界辺の全域で隣接要素間のたわみ角の連続性が満足される適合板曲げ要素を提案している。Fig.7.3.1(a)に要素と座標系を示す。節点を3頂点に配し、節点力 $\{x\}$ および節点変位 $\{u\}$ は以下の9成分で表される。

$$\{x\} = \{W_1 \ M_{x1} \ M_{y1} \ W_2 \ M_{x2} \ M_{y2} \ W_3 \ M_{x3} \ M_{y3}\}^T \quad (7.3.1)$$

$$\{u\} = \{w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3}\}^T \quad (7.3.2)$$

ここで、 $\theta_x = -\partial w / \partial y$, $\theta_y = \partial w / \partial x$

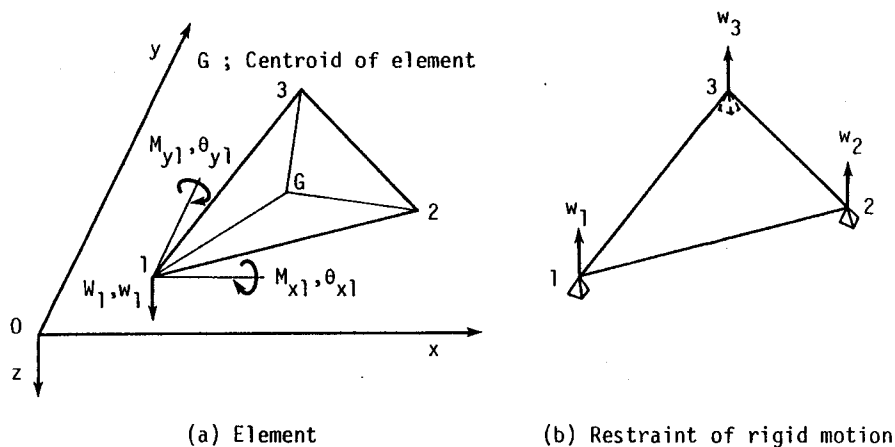


Fig. 7.3.1 Conforming plate bending element by Clough et al.

要素のたわみ w と節点変位 $\{u\}$ の関係は次式となる。

$$w = [N]\{u\} \quad (7.3.3)$$

ここで、 $[N] = [N^R] + [N^*]$

$[N^R] = [L_1 \ 0 \ 0 \ L_2 \ 0 \ 0 \ L_3 \ 0 \ 0]$; 剛体変位を表す変位関数

$[N^*] = [N_{1x} \ N_{1y} \ N_{2x} \ N_{2y} \ N_{3x} \ N_{3y}] [T]$; 要素変形を表す変位関数

$$[T] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} c_1 & 2A & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ -b_1 & 0 & 2A & -b_2 & 0 & 0 & -b_3 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & c_2 & 2A & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ -b_1 & 0 & 0 & -b_2 & 0 & 2A & -b_3 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 2A & 0 \\ -b_1 & 0 & 0 & -b_2 & 0 & 0 & -b_3 & 0 & 2A \end{bmatrix}$$

$$L_1 = (a_1 + b_1 x + c_1 y) / 2A$$

$$N_{1x} = N_{1x0} + b_3 \chi_{13} + b_2 \chi_{12}$$

$$N_{1y} = N_{1y0} + c_3 \chi_{13} + c_2 \chi_{12}$$

$$N_{1x0} = (b_3 L_2 - b_2 L_3) L_1^2 + (b_3 - b_2) L_1 L_2 L_3 / 2A$$

$$N_{1y0} = (c_3 L_2 - c_2 L_3) L_1^2 + (c_3 - c_2) L_1 L_2 L_3 / 2A$$

$$\chi_{12} = -\frac{1}{2} \phi_1 + \frac{3}{2} \left[\frac{b_2(b_3 - b_1) + c_2(c_3 - c_1)}{b_2^2 + c_2^2} \right] \phi_2 + \frac{1}{2} \phi_3$$

$$\chi_{13} = -\frac{1}{2} \phi_1 + \frac{1}{2} \phi_2 + \frac{3}{2} \left[\frac{b_3(b_2 - b_1) + c_3(c_2 - c_1)}{b_3^2 + c_3^2} \right] \phi_3$$

$$\phi_1 = L_1(5L_1^2 - 3L_1 + 6L_2L_3)/6 \quad \text{for } \Delta G23$$

$$\phi_2 = L_2^2(3L_3 - L_2)/6 \quad \text{for } \Delta G31$$

$$\phi_3 = L_3^2(3L_2 - L_3)/6 \quad \text{for } \Delta G12$$

$(a_i, b_i, c_i, i=1\sim 3), A$; 式(7.2.4)参照

他の値は、添字1,2,3をcyclicに置き換えて得られる。

詳細は略するが、上式の変位関数 $[N]$ は、要素をその重心点 G を頂点として3つの小三角形に分割し、各小三角形内の変形を完全3次多項式で内挿した後、 G 点の変位を消去して得られたものである。各小三角形間の境界辺でも、たわみおよびたわみ角の連続性が満たされている。

要素内部の一般化歪（曲率） $\{\varepsilon\}$ と節点変位 $\{u\}$ の関係式は次式となる。

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\} \quad (7.3.4)$$

ここで、 $\{\varepsilon\} = \{\kappa_x \ \kappa_y \ \kappa_{xy}\}^T$

$$= \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^T$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \partial^2 [N] / \partial x^2 \\ \partial^2 [N] / \partial y^2 \\ 2 \partial^2 [N] / \partial x \partial y \end{bmatrix}$$

； 節点変位・一般化歪マトリックス

また一般化応力（単位長さ当りの曲げモーメント） $\{\sigma\}$ と一般化歪 $\{\varepsilon\}$ の関係は次式となる。

$$\{\sigma\} = [D^*]\{\varepsilon\} \quad (7.3.5)$$

ここで、 $\{\sigma\} = \{M_x \ M_y \ M_{xy}\}^T$

$$[D^*] = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

； 一般化応力・一般化歪マトリックス

既述のように変位関数 $[N]$ は、各小三角形領域で3次多項式で表される。したがって、 $\{\sigma\}$ および $\{\varepsilon\}$ は、いずれも小三角形領域で線形に変化する。

弾性剛性方程式は次式となる。

$$\{x\} = [K^*]\{u\} \quad (7.3.6)$$

ここで、
$$[K^*] = \int_A [B]^T [D^*] [B] dA$$

なお、有限要素法で得られる解が、要素分割を無限に細かくした極限で正解値に収束するためには、変位関数が次の3つの条件を満たす必要がある。

- (I) 剛体変位に対しては応力を生じない。
- (II) 要素境界辺で隣接要素間の幾何学的連続性が満足される。
- (III) 一様歪状態を表すことができる。

式(7.3.3)の変位関数 $[N]$ は、これら3条件をすべて満足しており、解の収束性が保証されている。この場合、変位および応力は共に低めから正解に収束する傾向にある。

(2) 塑性化判定法と塑性変形

本論文では、塑性化判定点として、3つの頂点節点を採用する。

塑性条件は塑性化判定基準-1を用いる場合、式(2.2.31)となる。また判定基準-2の場合では式(2.2.20)となる。初期塑性状態および全断面塑性状態を表す降伏関数 Y_0 および Y_1 は、曲げ崩壊解析の場合、式(2.2.30)で、また本要素と平面要素を組み合わせで行うシェル解析や大たわみ解析では式(2.2.24)および式(2.2.28)で与えられる。

塑性化判定点の応力と節点力の関係は、7.2.2項(2)と同じ手順で求める。但し、要素の剛体変位はFig.7.3.1(b)のように、3節点のたわみ w_1, w_2 および w_3 を0にして拘束する。したがって、式(7.2.21)および式(7.2.22)の $\{u^*\}$ は次式となる。

$$\{u^*\} = \{\theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \theta_{x3} \ \theta_{y3}\}^T \quad (7.3.7)$$

得られる式(7.2.25)の関係において、 $\{\sigma_i\}$ は全節点の節点力の関数となる。したがって、塑性節点変位は全節点に現れる。

7.3.2 Bazeleyらの非適合三角形要素¹⁹⁾

(1) 変位関数と応力場

Fig.7.3.2に要素と座標系を示す。節点力 $\{x\}$ および節点変位 $\{u\}$ は次式で表される。

$$\{x\} = \{W_1 \ M_{x1} \ M_{y1} \ W_2 \ M_{x2} \ M_{y2} \ W_3 \ M_{x3} \ M_{y3}\}^T \quad (7.3.8)$$

$$\{u\} = \{w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3}\}^T \quad (7.3.9)$$

ここで、 $\theta_x = \partial w / \partial x$, $\theta_y = \partial w / \partial y$

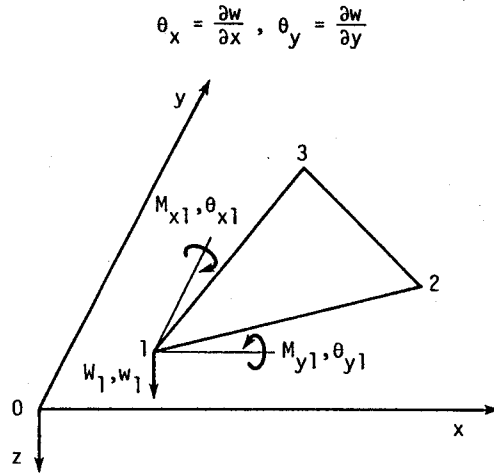


Fig. 7.3.2 Non-conforming plate bending element by Bazeley et al.

Cloughらの要素とは θ_x および θ_y の方向の定義が異なっている。

要素内のたわみ w と節点変位 $\{u\}$ の関係は、

$$w = [N]\{u\} \quad (7.3.10)$$

ここで、 $[N] = [P_1 \quad Q_1 \quad R_1 \quad P_2 \quad Q_2 \quad R_2 \quad P_3 \quad Q_3 \quad R_3]$

$$P_1 = L_1 + L_1 L_2 (L_1 - L_2) + L_1 L_3 (L_1 - L_3)$$

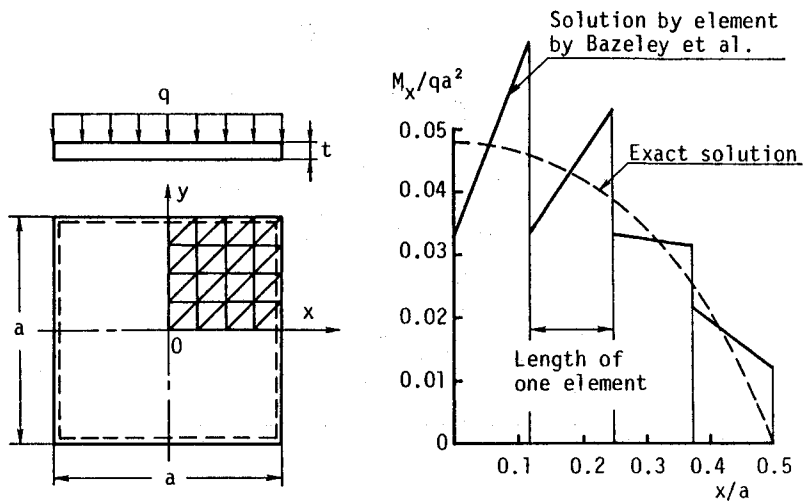
$$Q_1 = L_1^2 (c_3 L_2 - c_2 L_3) + (c_3 - c_2) L_1 L_2 L_3 / 2$$

$$R_1 = L_1^2 (b_2 L_3 - b_3 L_2) + (b_2 - b_3) L_1 L_2 L_3 / 2$$

$L_1, L_2, L_3, b_1, \dots, c_3$ は、式(7.3.3)と同じ定義である。また $P_2 \sim R_3$ は添字 1, 2, 3 を cyclic に置き換えて得られる。上式のたわみ w は隣接要素間で一価連続であるが、その一階導関数は節点を除くと一般に不連続となる。したがって、本要素は非適合要素である。

一般化歪（曲率） $\{\epsilon\}$ および一般化応力（単位長さ当りの曲げモーメント） $\{\sigma\}$ は式(7.3.4)および式(7.3.5)で与えられる。 w が 3 次多項式であることより、いずれも要素内で線形に変化する。

本要素は非適合要素であるため解の厳密解への収束性は保証されないが、得られる変形はかなり精度の良い近似解を与える。また要素分割が非常に規則的な場合では（平行四辺形格子で、各平行四辺形を同一方向の対角線で 2 つの三角形に分割するような場合）、分割を細かくするにつれ厳密解に収束することも明らかにされている¹⁹⁾。さらに剛性マトリックスの計算も比較的容易である。このため本要素は広く実用に供されている。但し、



(a) Model for analysis ;
Simply supported square plate
under uniformly distributed
lateral loads

(b) Distribution of M_x along x-axis

Fig. 7.3.3 Characteristics of bending moment distribution
obtained with plate bending element by Bazeley
et al.²⁰⁾

Fig.7.3.3 に示すように、要素内部の応力場が、正解値を中心として、また距離に比例して大きく変動する場合があります²⁰⁾、一般に節点で求めた応力の値よりも重心点での値の方が精度の高い応力解を与えていると考えられている。

なお、第8章および第9章で示す平板の弾塑性大たわみ解析では、この Bazeleyらの要素と7.2.1項の一樣歪平面要素を組み合わせた平面シェル要素を用いることにする。その弾性剛性方程式の導出手順は付録1に示されている。

(2) 塑性化判定法と塑性変形

上記のように、塑性化判定点の設定位置によって得られる崩壊荷重の精度がかなり影響される可能性がある。そこで本論文では判定点を3頂点節点に設けた場合や、重心点一点のみとした場合などいくつかのケースを解析し、その影響を調べる。

塑性条件と降伏関数はCloughらの要素の場合と同じである。

また塑性化判定点の一般化応力と節点力の関係は、Fig.7.3.1(b)と同じ境界条件で剛体変位を拘束し、7.3.2項(2)と同じ手順で求める。結果として、いずれの点の一般化応力も全節点力の関数となり、塑性節点変位は全節点に現れる。

7.3.3 Morleyの非適合三角形要素¹¹⁾

(1) 変位関数と応力場

Morleyの板曲げ要素をFig.7.3.4(a)に示す。この要素はたわみ w の変位関数を x および y についての完全2次多項式で表した非適合三角形板曲げ要素である。節点を3頂点と3中点に配し、節点力 $\{x\}$ および節点変位 $\{u\}$ はそれぞれ次式で定義される。

$$\{x\} = \{W_1 \ M_1 \ W_2 \ M_2 \ W_3 \ M_3\}^T \quad (7.3.11)$$

$$\{u\} = \{w_1 \ \theta_1 \ w_2 \ \theta_2 \ w_3 \ \theta_3\}^T \quad (7.3.12)$$

中点節点の節点変位 θ は、境界辺の法線方向のたわみ角を表す。要素のたわみ w と節点変位 u の関係は次式となる。

$$w = [N]\{u\} \quad (7.3.13)$$

ここで、 $[N] = [P_1 \ Q_1 \ P_2 \ Q_2 \ P_3 \ Q_3]$

$$P_1 = L_1 - \gamma_1 h_3 L_3 L_1 / h_2 - \gamma_1 h_2 L_1 L_2 / h_3 \\ + (\gamma_2 h_3 + \gamma_3 h_2) L_2 L_3 / h_1$$

$$\gamma_i = \cos \alpha_i, \quad g_i = h_i (L_i - L_i^2) \quad (i=1,2,3)$$

α_i, h_i ; Fig.7.3.4(b)参照

P_2 および P_3 は添字1,2,3をcyclicに置き換えて得られる。

この時、一般化歪(曲率) $\{\varepsilon\}$ と節点変位 $\{u\}$ の関係は次式となる。

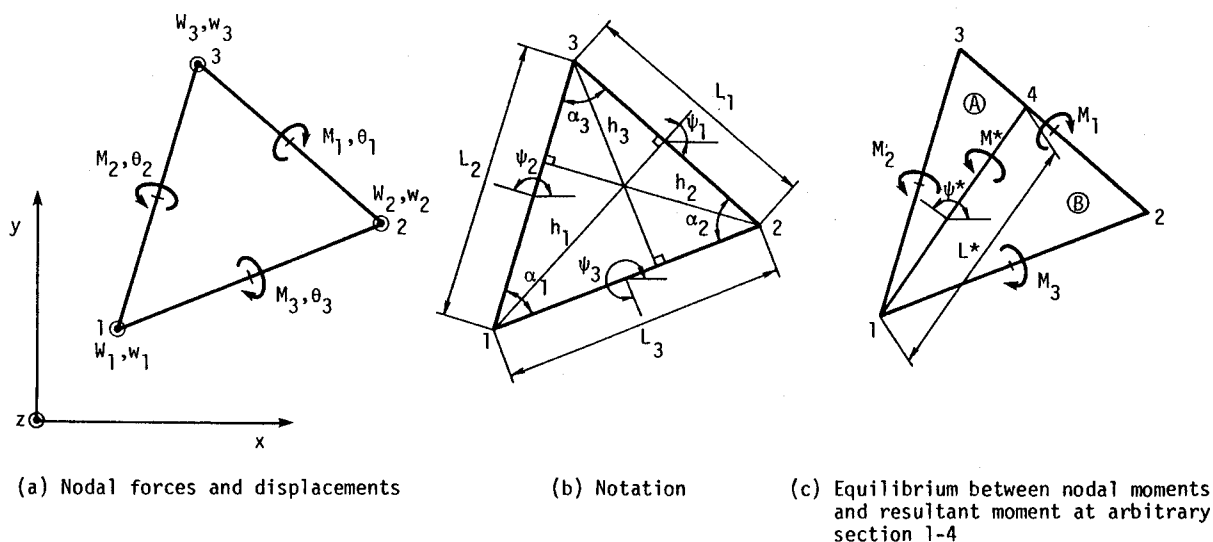


Fig. 7.3.4 Non-conforming and constant curvature plate bending element by Morley

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\} \quad (7.3.14)$$

ここで、 $\{\varepsilon\} = \{\kappa_x \ \kappa_y \ \kappa_{xy}\}^T$

$[B] = [B_1][B_2]/A$; 節点変位・一般化歪マトリックス

$$[B_1] = \begin{bmatrix} L_1 l_1^2 & L_2 l_2^2 & L_3 l_3^2 \\ L_1 m_1^2 & L_2 m_2^2 & L_3 m_3^2 \\ 2L_1 l_1 m_1 & 2L_2 l_2 m_2 & 2L_3 l_3 m_3 \end{bmatrix}$$

$$[B_2] = \begin{bmatrix} -1/h_1 & \gamma_3/h_2 & \gamma_2/h_3 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_3/h_1 & -1/h_2 & \gamma_1/h_3 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma_2/h_1 & \gamma_1/h_2 & -1/h_3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ここで、 L_i ; 頂点 i の対辺の長さ

$$l_i = \cos \psi_i, \quad m_i = \sin \psi_i$$

このように $[B]$ は要素内で一定となるので、一般化歪 $\{\varepsilon\}$ および次の一般化応力（単位長さ当りの曲げモーメント） $\{\sigma\}$ も要素内で一定である。

$$\{\sigma\} = [D^*]\{\varepsilon\} \quad (7.3.15)$$

ここで、 $\{\sigma\} = \{M_x \ M_y \ M_{xy}\}^T$

$[D^*]$; 式(7.3.5)参照

また弾性剛性方程式は次式となる。

$$\{x\} = [K^*]\{u\} \quad (7.3.16)$$

ここで、 $[K^*] = A[B]^T[D^*][B]$

さて、この要素の中点節点力 M_i ($i=1,2,3$) は、要素境界辺の断面に作用する法線方向の合モーメントとしての明確な力学的意味を有する。すなわち、Fig.7.3.4(b) に示す M_i の作用する境界辺 i の辺長 L_i および法線方向角 ψ_i を用いて、要素の一般化応力 $\{\sigma\}$ ($= \{M_x \ M_y \ M_{xy}\}^T$, 要素内一定) と次式の関係にある。

$$M_i = L_i (M_x \cos^2 \psi_i + M_y \sin^2 \psi_i + M_{xy} \sin 2\psi_i) \quad (7.3.17)$$

$$(i=1,2,3)$$

上式は右辺の M_x, M_y, M_{xy} に式(7.3.14)および式(7.3.15)を代入すると、弾性剛性方程式の M_i に関する行と同じ式が得られることから証明される。また、式(7.3.17)を M_x, M_y, M_{xy} について解くことにより、要素の一般化応力 $\{\sigma\}$ を中点節点力のみ関数として表すことができる。すなわち、

$$\{\sigma\} = \{\sigma(M_1, M_2, M_3)\} \quad (7.3.18)$$

次に、Fig.7.3.4(c)の分割線1-4のように、節点を通る任意の直線で要素を二分した時の分割線1-4に働く合モーメント M^* を考える。 M^* は式(7.3.17)の L_i, ψ_i を L^*, ψ^* に置換した次の形で得られる。

$$\begin{aligned} M^* &= L^*(M_x \cos^2 \psi^* + M_y \sin^2 \psi^* + M_{xy} \sin 2\psi^*) \quad (7.3.19) \\ &= M^*(\{\sigma\}) \end{aligned}$$

この M^* は分割された領域AおよびBにおいて、別々に節点力と釣り合い条件を満たす。式(7.3.18)を式(7.3.19)に代入すると、 $\{\sigma\}$ と同様 M^* も中点節点力の関数として表される。

$$M^* = M^*(M_1, M_2, M_3) \quad (7.3.20)$$

但し、分割線1-4が境界辺*i*に一致する時、 M^* はその辺上の中点節点力 M_i そのものとなる。

(2) 塑性化判定法と塑性変形

以上のような、内力特性を有する本要素に塑性節点法を適用する場合、塑性化判定法として、次の2つの方法が可能である。

(I) 分割線の全断面塑性モーメント M^* に基づく塑性化判定法；断面塑性法, Fig.7.3.5 (a)

(II) 要素に一樣に分布する一般化応力 $\{\sigma\}$ に基づく全領域の塑性化判定法；全領域塑性法, Fig.7.3.5(b)

以下では、これら2種類の塑性化判定法に用いる塑性条件と、各判定法を適用した時、要素に現れる塑性変形の特徴について述べる。

(2-1) 断面塑性法

要素境界を含め、頂点を通る任意の分割線(断面)の塑性化は式(7.3.19)の M^* により判定できる。材料を完全弾塑性体とし、塑性化判定基準-1を用いる場合、断面の塑性条件は次式となる。

$$F^* = \frac{|M^*|}{M_y L^*} - 1 = 0 \quad (7.3.21)$$

ここで、 M_y ；単位長さ当たりの全断面塑性モーメント

さて、要素の境界辺*i*では F^* はその境界辺の中点節点力 M_i のみの関数となる。した

● ; Arbitrary point for checking plasticity

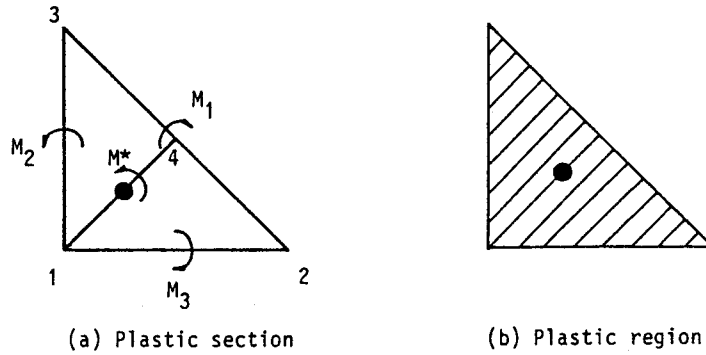


Fig. 7.3.5 Patterns of plasticity of Morley's plate bending element

がって境界辺 i が塑性化した場合、中点節点 i のみに塑性節点変位 θ_i^p （境界辺 i の法線方向のたわみ角の不連続量）が現れる。すなわち、1.6.2項で述べた塑性関節線機構が境界辺 i に形成される。

これに対し、要素内部の分割線では、 M^* は全ての中点節点力の関数となる。例えば、Fig.7.3.5(a)の直角二等辺三角形の中線1-4の場合 M^* は、

$$M^* = \frac{M_2 + M_3}{\sqrt{2}} - \frac{M_1}{2} \quad (7.3.22)$$

となる。中線1-4と直交する辺2-3の中点節点力 M_1 が M^* に寄与するのは、 M_1 に釣り合うために節点1だけでなく節点2, 3にも垂直反力が生じるためである。この例でも分かるように、要素内部の分割線が塑性化した場合、要素の全ての中点節点に塑性節点変位が現れる。すなわち要素の全境界辺にたわみ角の不連続場が形成する。

ところで山本らは、このMorleyの要素の要素境界辺で隣接要素間の節点回転角を独立にすることにより、境界辺に塑性関節線機構を導入している。この場合、得られる崩壊荷重は要素分割パターンの影響を受けるが、この影響を減らすため山本らは要素自体を中線で再分割できる機能を付加している⁶⁾。この解析法では中線に塑性化が生じる時、要素を中線で2要素に分割し剛性方程式を作り直すので、中線のみなたわみ角の不連続場が導入される。他方、塑性節点法では中線が塑性化した場合も要素自体を分割しないので、変形特性は異なる。もし中線に沿って要素を2分割し、新しく2つの要素で元の要素を構成すると、山本らの方法と全く同じになる。

なお、Morleyの要素の応力場の自由度は3であるため、境界辺を含めて要素内に導入可

能な塑性断面数も3断面までである。

(2-Ⅱ) 全領域塑性法

要素には一様な一般化応力 $\{\sigma\}$ が生じる。したがって、塑性化の方向性を無視し $\{\sigma\}$ で塑性化を判定すると、任意の点 i の塑性化が要素の全領域の塑性化を表すことになる (Fig.7.3.5(b))。塑性条件は CloughらおよびBazeleyらの要素の場合と同じである。また式(7.3.18)より、塑性節点変位は要素の全ての中点節点に現れる。

なお一定曲率要素であるため、有限要素法と塑性節点法で同じ合応力表示型塑性条件を用いる場合は、7.2.1項の一様歪平面要素の場合と同様に両解析法で得られる弾塑性剛性マトリックスは一致する (付録5参照)。また全断面塑性状態においては、層分割法による有限要素法とも定量的に同一の剛性マトリックスが得られる。

7.4 3次元塊体要素

1.3 節に述べたように塑性節点法では、塊体有限要素に対しては応力表示型塑性条件を適用する。以下では $\{\sigma\}$ および $\{\varepsilon\}$ は一つの点の応力と歪を表す。

7.4.1 一様歪四面体要素

(1) 変位関数と応力場

Fig.7.4.1 に要素と座標系を示す。

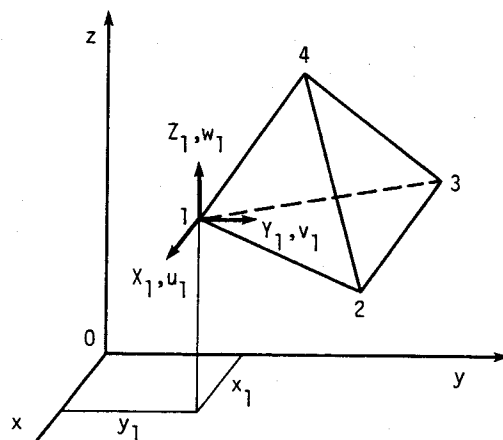


Fig. 7.4.1 Constant-strain tetrahedron solid element

節点力 $\{x\}$ および節点変位 $\{u\}$ は次式となる。

$$\{x\} = \{X_1 \ Y_1 \ Z_1 \ X_2 \ Y_2 \ Z_2 \ \dots \ X_4 \ Y_4 \ Z_4\}^T \quad (7.4.1)$$

$$\{u\} = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \dots \ u_4 \ v_4 \ w_4\}^T \quad (7.4.2)$$

要素内の変位 $\{u_{e1}\}$ を x, y および z に関する 1 次式で内挿する。

$$\{u_{e1}\} = \{u \ v \ w\}^T$$

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z$$

$$v = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 z$$

$$w = \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y + \gamma_4 z$$

(7.4.3)

この時、 $\{u_{e1}\}$ と節点変位 $\{u\}$ の関係は次式となる。

$$\{u_{e1}\} = [N]\{u\} \quad (7.4.4)$$

ここで、

$$[N] = [[I]N_1 \ [I]N_2 \ [I]N_3 \ [I]N_4]$$

$[I]$; 3×3 の単位マトリックス

$$N_1 = (a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 z) / 6V$$

$$a_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad b_1 = - \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$c_1 = \begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix}, \quad d_1 = - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} ; \text{要素の体積}$$

但し、 $N_2 \sim N_4$ および $a_2, b_2, \dots, c_4, d_4$ は添字 1, 2, 3, 4 を cyclic に置き換えて得られる。

要素の歪 $\{\varepsilon\}$ と節点変位 $\{u\}$ の関係は次式となる。

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\} \quad (7.4.5)$$

ここで、

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}\}^T$$

$$[B] = [[B_1] \ [B_2] \ [B_3] \ [B_4]]$$

; 一般化応力・一般化歪マトリックス

$$[B_1] = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ 0 & c_1 & 0 & b_1 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & 0 & c_1 & b_1 \end{bmatrix}^T$$

マトリックス $[B]$ は一定値である。したがって歪 $\{\varepsilon\}$ および次の応力 $\{\sigma\}$ も要素内で一定となる。

$$\{\sigma\} = [D^*]\{\varepsilon\} = [D^*][B]\{u\} \quad (7.4.6)$$

ここで、 $\{\sigma\} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}\}^T$

$$[D^*] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \lambda & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & \lambda & 0 \\ & & & & & \lambda \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{応力・歪マト} \\ \text{リックス} \end{array}$$

$$\mu = \frac{\nu}{1-\nu} \quad , \quad \lambda = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

仮想仕事の原理より弾性剛性方程式は次式となる。

$$\{x\} = [K^*]\{u\} \quad (7.4.7)$$

ここで、 $[K^*] = V[B]^T[D^*][B]$

(2) 塑性化判定法と塑性変形

要素の応力は一定であり、任意の点 i を塑性化判定点とできる。Mises の降伏条件に従う材料の場合、塑性条件および降伏関数はそれぞれ式(2.2.1)および式(2.2.2)で与えられる。

塑性化判定点 i の応力 $\{\sigma_i\}$ と節点力 $\{x\}$ の関係は、7.2.1項の一樣歪三角形平面要素と同様の手順で得られ、次式となる。

$$\{\sigma_i\} = [A_i]\{x\} \quad (7.4.8)$$

ここで、 $[A_i] = ([B][B]^T)^{-1}[B]/V$

$\{\sigma_i\}$ は全節点力の関数であり、塑性節点変位は全節点に現れる。

7.4.2 8節点六面体アイソパラメトリック立体要素

(1) 変位関数と応力場

最も基本的な3次元アイソパラメトリック要素として、Fig.7.4.2(a)の8節点六面体アイソパラメトリック塊体要素を取り上げる。節点力 $\{x\}$ および節点変位 $\{u\}$ は、

$$\{x\} = \{X_1 \ Y_1 \ Z_1 \ X_2 \ Y_2 \ Z_2 \ \dots \ X_8 \ Y_8 \ Z_8\}^T \quad (7.4.9)$$

$$\{u\} = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \dots \ u_8 \ v_8 \ w_8\}^T \quad (7.4.10)$$

となる。また実座標 (x, y, z) とパラメータ座標 $(\xi, \eta, \zeta; \text{Fig.7.4.2(b)})$ の関係は次の形で与えられる。

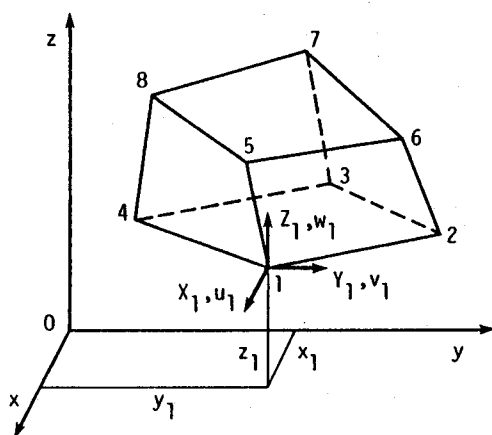
$$\{P\} = [A]\{P_n\} \quad (7.4.11)$$

ここで、 $\{P\} = \{x \ y \ z\}^T$; 要素内各点の実座標

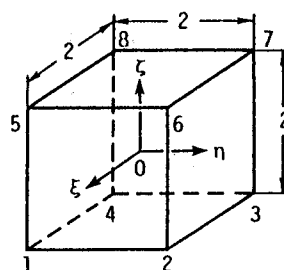
$\{P_n\} = \{x_1 \ y_1 \ z_1 \ x_2 \ y_2 \ z_2 \ \dots \ x_8 \ y_8 \ z_8\}^T$; 節点の実座標

$[A] = [[I]N_1 \ [I]N_2 \ \dots \ [I]N_8]$

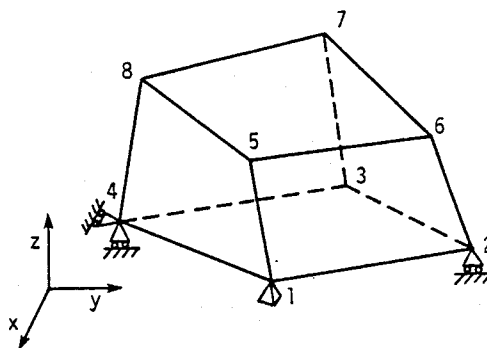
$[I]$; 3×3 の単位マトリックス



(a) Element in physical space



(b) Element in mapping space



(c) Restraint of rigid motion

Fig. 7.4.2 Hexahedron isoparametric solid element with eight nodes

写像関数 N_i は、

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta) \quad (7.4.12)$$

ここで、 ξ_i, η_i, ζ_i ; 節点 i の ξ, η, ζ 座標

式(7.4.11)および式(7.4.12)によれば、平面で構成される任意の六面体をFig.6.4.2(b)に示すような中心が原点に位置し、一辺の長さ2なる立方体に写像できる。

要素内部の変位 $\{u_{e,i}\}$ と節点変位 $\{u\}$ の関係は写像関数 $[A]$ を変位関数にも用いて次式で定義される。

$$\{u_{e,i}\} = [A]\{u\} \quad (7.4.13)$$

ここで、 $\{u_{e,i}\} = \{u \ v \ w\}^T$

また歪 $\{\varepsilon\}$ と節点変位 $\{u\}$ の関係は次式となる。

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\} \quad (7.4.14)$$

ここで、 $[B] = [[B_1] [B_2] \dots [B_8]]$

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_i / \partial z \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial z & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial z & 0 & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix}$$

$[B_i]$ に含まれる N_i の微係数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & \{\partial N_i / \partial x \ \partial N_i / \partial y \ \partial N_i / \partial z\}^T \\ & = [J]^{-1} \{\partial N_i / \partial \xi \ \partial N_i / \partial \eta \ \partial N_i / \partial \zeta\}^T \end{aligned} \quad (7.4.15)$$

$$\text{ここで、} [J] = \begin{bmatrix} \partial [N] / \partial \xi \\ \partial [N] / \partial \eta \\ \partial [N] / \partial \zeta \end{bmatrix} [\{x_n\} \ \{y_n\} \ \{z_n\}]$$

; ヤコビアン・マトリックス

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_8]$$

一方、応力 $\{\sigma\}$ は式(7.4.6)の応力・歪マトリックス $[D^*]$ を用いて次式で与えられる。

$$\{\sigma\} = [D^*]\{\varepsilon\} = [D^*][B]\{u\} \quad (7.4.16)$$

$\{\sigma\}$ は要素内で線形に変化する。

弾性剛性方程式は次式となる。

$$\{x\} = [K^e]\{u\} \quad (7.4.17)$$

ここで、 $[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D^e] [B] |J| d\xi d\eta d\zeta$

$[K^e]$ の積分には一般にガウス積分法が用いられる。

(2) 塑性化判定法と塑性変形

アイソパラメトリック要素の弾塑性剛性マトリックスは、有限要素法の場合、ガウス積分法によって導出される。すなわち、ガウス積分点で塑性化を判定し、塑性化した点には塑性の応力・歪関係式を導入して剛性評価が行われる。

一方、塑性節点法では節点を含む要素内の任意の点で塑性化を判定でき、弾塑性剛性マトリックスはマトリックス演算によって導出される。本論文では、塑性化判定点として節点とガウス積分点の二種類を取り上げる。解析対象に対する要素分割が細かい程、判定点位置が解析結果の精度に及ぼす影響が小さいことは自明であるが、特殊な問題においては、節点における塑性化の判定とそれによって生じる塑性変位場が要素の全塑性状態の追跡に非常に有効に機能することを第8章に示す。

なお、塑性化判定点の応力と節点力の関係は7.2.2項(2)と同じ方法で求められる。但し3次元問題であるので剛体変位の自由度は6である。したがって、その拘束のためにはFig.7.4.2(c)に示すような境界条件を用いれば良い。結果として本要素の塑性化判定点の応力は、その位置に拘らず全節点力の関数となる。したがって、塑性節点変位はすべての節点に現れる。

7.5 結言

本章では、代表的な幾つかの有限要素の特性と、これらに対する塑性節点法の適用法および要素に現れる塑性変形について述べた。

塑性節点法では塑性化判定点の塑性条件を節点力の関数の形で定義する。この際必要となる塑性化判定点の応力と節点力の関係は、一様歪要素の場合、弾性剛性方程式から直接求めることができる。しかし一般には弾性要素の剛体変位を消去した境界条件のもとで定

式化する必要がある。その具体的手順を明らかにした。

またMorleyの板曲げ要素については、要素の任意の断面での塑性関節線の形成を考慮できること、また要素の領域全体としての塑性化の判定も可能であることを示した。

第8章 完全弾塑性体の静的弾塑性解析

8.1 緒言

本章では、骨組構造物から3次元塊体に至る種々の構造に対して材料を完全弾塑性体と仮定した場合の静的弾塑性解析を行い、塑性節点法の基本的な適用性を調べる。

合応力表示型塑性条件を適用する梁・柱要素やシェル要素の場合、全断面塑性状態をもって塑性化とする塑性化判定基準-1と、断面の初期塑性化から塑性化を考慮する塑性化判定基準-2の2つの塑性化判定法があることを2.2.2項(1)に述べた。後者の判定基準では、材料自体を完全弾塑性体と考える場合も Eggerの降伏関数を用いて歪硬化体と同様の考え方で弾塑性剛性方程式を定式化する必要がある。そこで判定基準-2による解析結果とその精度については、次章の歪硬化体の解析例で併せて示すこととし、ここでは完全弾塑性体に対して塑性化判定基準-1を適用する問題に限って解析例を示す。

8.2 節では、平面骨組問題を対象に骨組構造物の弾塑性解析を行う。変形は微小とし、第1章の基礎理論を任意の径間荷重を受ける骨組構造物に適用できるよう一般化した第6章の理論を用いて解析する。

8.3 節では、平板の微小弾塑性挙動を解析し、塑性節点法の板問題への適用性を調べる。要素には7.2節および7.3節で示した各種の2次元要素を使用し、要素分割を細かくした場合の解の収束性についても考察を加える。

8.4 節では、平面要素と板曲げ要素を組み合わせた平面シェル要素において、たわみによる2次の面内非線形歪を考慮することにより、平板の弾塑性大たわみ解析を行う。

8.5 節では、アイソパラメトリック塊体有限要素を用いて、3次元塊体の微小弾塑性挙動を解析する。8.3節から8.5節の解析では第1章の理論を用いる。

得られた結果を適宜、厳密解や通常の有限要素法による解、あるいは実験結果と比較し、塑性節点法の解析精度と計算効率を明らかにしてゆく。なお解析は増分型で行うが、全解析を通じて要素の塑性化判定点が塑性条件を丁度満足して塑性化するよう荷重増分を調節している。

8.2 骨組構造物の微小弾塑性解析

平面骨組構造物の微小弾塑性解析例を示す。要素には Fig.6.2.1に示した矩形断面の梁

・柱要素を用い、荷重は比例荷重とした。分布径間荷重を受ける部材に対しては、各荷重段階で内力分布を精度良く求め、径間塑性関節の形成位置を判定した。また 6.5 節に述べた径間塑性関節の移動現象を追跡するためのチェックポイント間隔は要素長の $1/40$ に設定した。なお、ここでは比較のため、塑性解析法で厳密解の得られている問題を取りあげる²⁾。

8.2.1 集中横荷重を受ける一端固定他端支持梁

一端固定他端支持梁に中央集中横荷重が作用する場合の曲げ崩壊解析を行った。Fig.8.2.1 に荷重とその作用点のたわみの関係を示す。解析は荷重点で部材を 2 要素に分割した場合と 1 要素で荷重を径間荷重として扱った場合の二通りについて行った。後者の場合の未知数は支持端の回転角のみであり、荷重点のたわみは 6.4.1 項に述べた方法で求めた。

いずれの結果とも関節形成順序、およびその時の荷重そしてたわみとも塑性解析法による解と完全に一致している。このように平面骨組構造物の塑性曲げ崩壊の場合、塑性節点法は塑性解析法と等価となる。

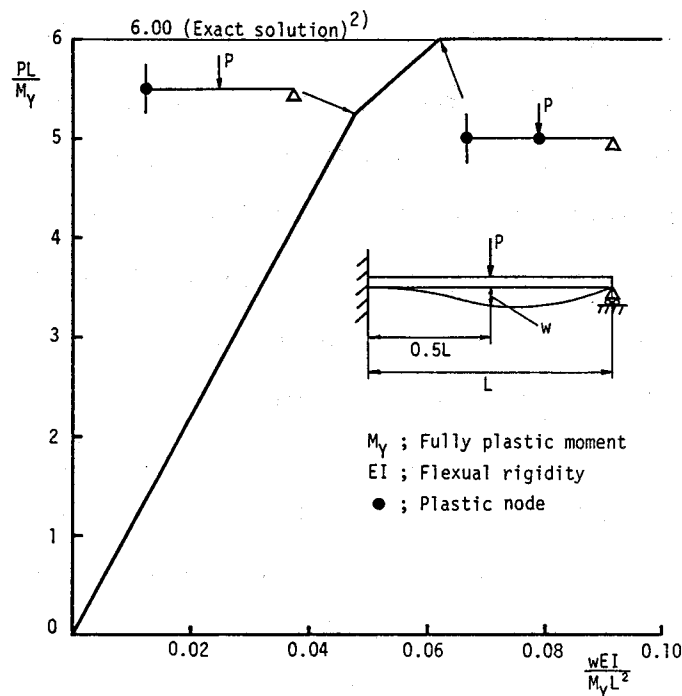


Fig. 8.2.1 Load-deflection relationship of one end fixed and the other simply supported beam under centrally concentrated lateral load

8.2.2 軸力と等分布横荷重を受ける一端固定他端支持梁

分布荷重下の骨組部材の塑性崩壊の例として、一端固定他端支持梁に軸力と等分布横荷重が作用する場合を解析した。Fig.8.2.2 に荷重と部材中央のたわみの関係を示す。実線が軸力 $4P$ を加えない場合、破線が加えた場合である。解析は1要素のみで行ない塑性条件には式(2.2.10)を用いた。

実線の塑性曲げ崩壊の場合、崩壊荷重、崩壊機構そしてたわみともすべて厳密解と一致している。軸力が作用する場合も部材内で軸力は一様と考えているため崩壊機構は曲げ崩壊の場合と同じであるが、崩壊荷重は軸力の影響で若干低下している。

このような組合せ応力下の骨組部材に対して断面力の塑性相関関係を精度良く考慮した解析は、上田らによる塑性関節法により初めて行われた⁹⁾。しかし塑性化の判定位置が節点に限定されたため、本解析例のように分布荷重の作用する場合、部材を複数の要素に分割する必要があった。しかし本論文の塑性節点法によればこのような荷重に対しても1要素のみで短時間に解析できる。

8.2.3 2つの逆方向集中横荷重を受ける両端固定梁

両端固定梁にFig.8.2.3 に示すような2つの逆方向の集中横荷重が作用する時の曲げ崩壊挙動を解析した。本解析例の場合、梁全体を1要素とする解析モデルでは節点変位がなくなるため解析できない。そこで、対称性から $1/2$ の領域についての解析も可能であるが、2つの径間集中荷重を受ける要素を含む解析例として、Mesh-Iのように径間に節点を設けて全体解析した。また、比較のため、荷重作用点に節点を設けた従来の塑性関節法⁹⁾で用いられたMesh-IIの分割についても解析した。

本解析例では、2つの荷重作用点に塑性関節が形成された後、両固定端が塑性化して崩壊に至る。すなわちMesh-Iでは径間関節が2個存在することになる。Fig.8.2.3 に示す解析結果は、いずれの要素分割の場合でも崩壊荷重、崩壊メカニズムとも厳密解に完全に一致している。また本解析結果より、6.4節の径間変位の計算法が複数の径間関節が形成した場合についても適用できることが確認された。

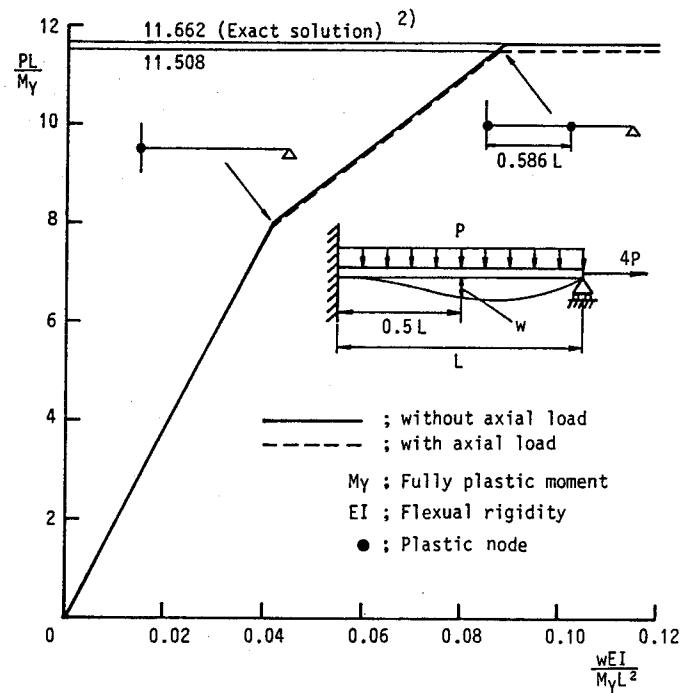


Fig. 8.2.2 Load-deflection relationship of one end fixed and the other simply supported beam under uniformly distributed lateral loads and axial load

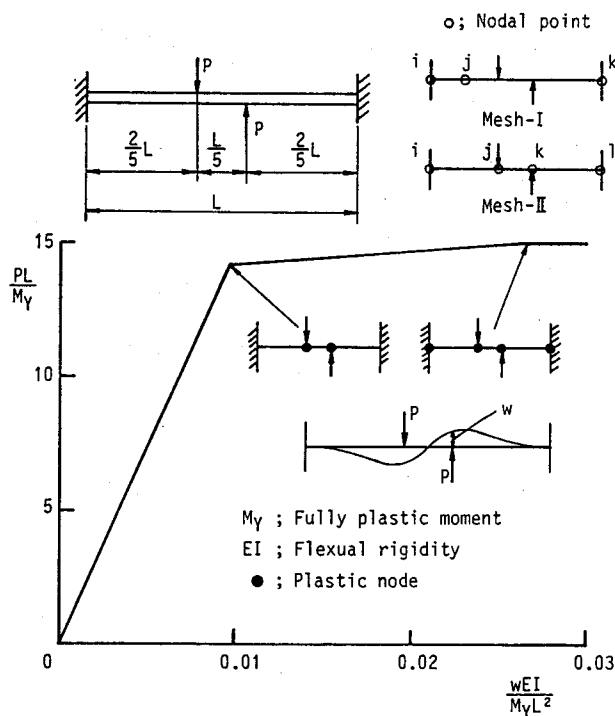


Fig. 8.2.3 Load-deflection relationship of a beam fixed at both ends under two concentrated lateral loads in opposite direction

8.2.4 3層ラーメン

Fig.8.2.4 の3層ラーメンの塑性曲げ崩壊解析を、部材結合部のみに節点を配した最少個の要素分割で行なった。Fig.8.2.4 に荷重と変位の関係、および関節の形成過程を示す。本解析例では、分布荷重を受ける最上層の部材に最後に径間関節が形成して崩壊に至るため、関節の移動過程はない。崩壊荷重、崩壊機構は厳密解を与えている。また解析時間は約4秒であり、分布荷重を受ける部材を4要素に分割し、径間集中荷重の作用点にも節点を配した場合の約 1/8であった。

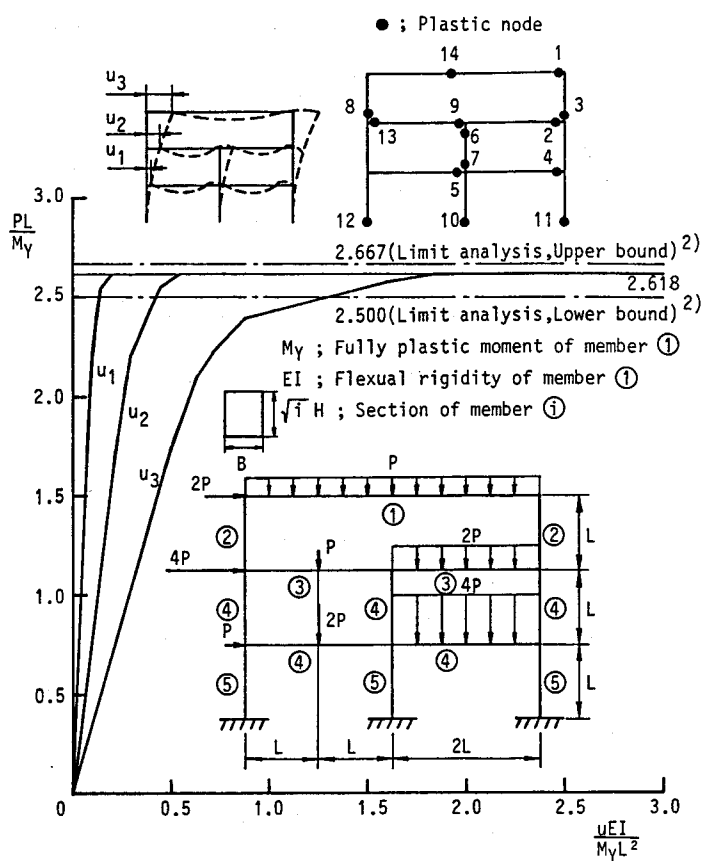


Fig. 8.2.4 Load-displacement relationship of a three-story two-bay frame

8.2.5 山型ラーメン

Fig.8.2.5 に解析モデルおよび荷重、変位曲線を示す。左側の傾斜部材には鉛直方向の等分布荷重により、部材の軸方向とたわみ方向の両分布荷重が作用する。Fig.8.2.5 の実線は曲げモーメントのみを、破線は曲げモーメント、軸力の両者を塑性条件に考慮した場合

合の結果である。関節形成過程の図より明らかなようにいずれの場合も、傾斜部材に関節の移動が生じる。実線の示す崩壊荷重は、厳密解(1.9153)より若干高めの1.9156であるが、部材の最大モーメントが塑性条件を満足するように外力を補正した結果は1.9154となり、ほぼ厳密解と一致する。計算時間は約1秒であった。

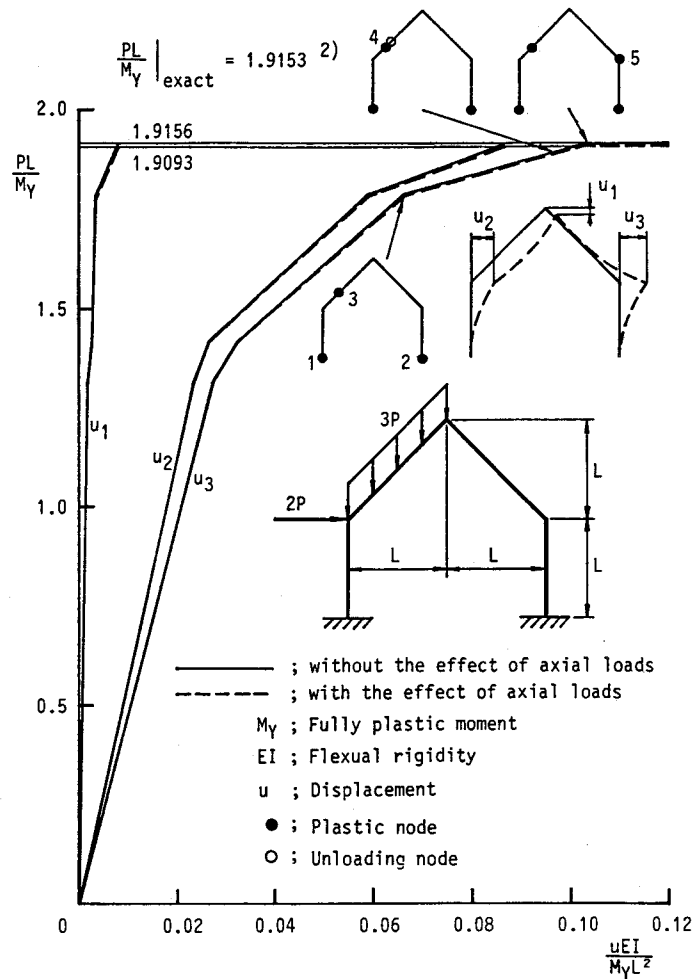


Fig. 8.2.5 Load-displacement relationship of a gable frame

8.3 平板の微小弾塑性解析

7.2節および7.3節に示した2次元要素を用いて平板の微小弾塑性挙動を解析した。塑性条件には式(2.2.31)を、また降伏関数にはMorleyの板曲げ要素に断面塑性法を適用する場合(式(7.3.21))を除き、Misesの降伏条件に基づく式(2.2.29)(平面問題)および式(2.2.30)(板曲げ問題)の Y_1 を用いた。

8.3.1 引張および集中横荷重を受ける帯板の塑性崩壊

まず塑性条件の適用性を調べる目的で、Fig.8.3.1に示す一端固定の帯板の自由端に面内および面外の荷重を加えた場合を解析した。荷重は変位を制御して与えた。解析対象は下記の3例である。

CASE(A) ; 面内変位 u だけ加える。

CASE(B) ; 面外変位 w だけ加える。

CASE(C) ; 面外変位 w だけで固定端が塑性化した後に、面内変位 u だけを加える。

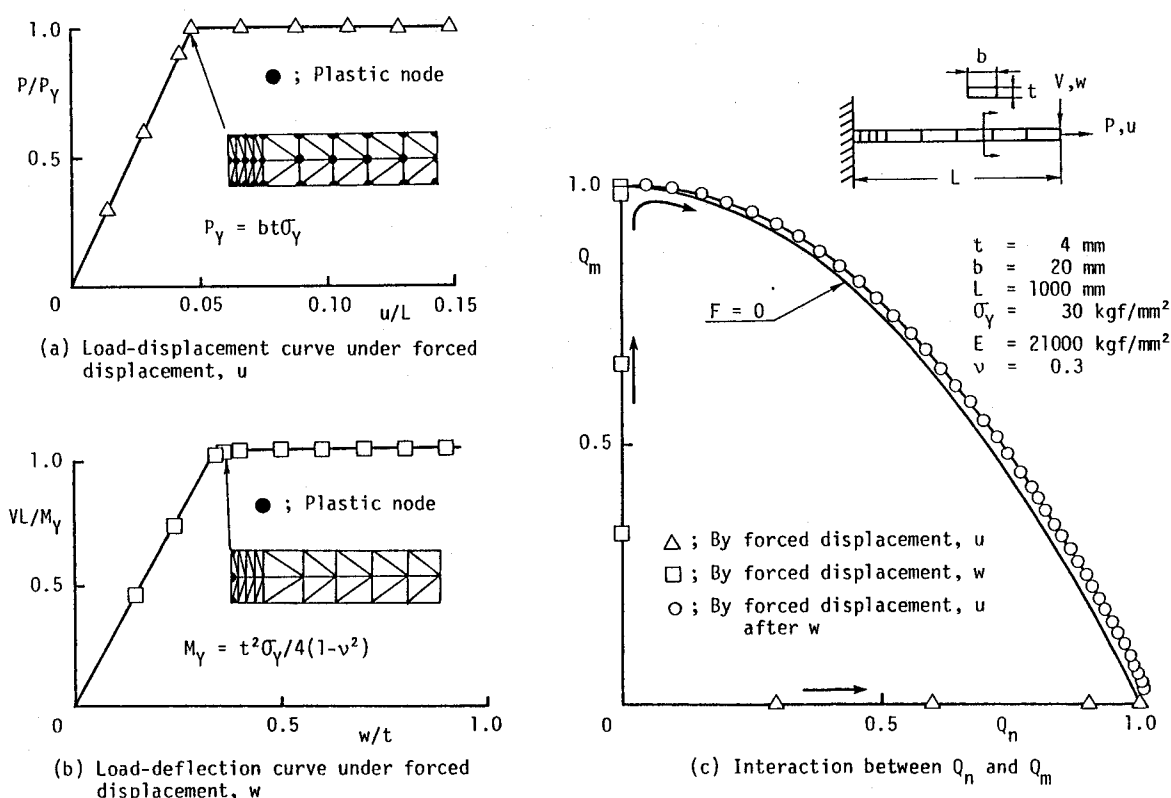


Fig. 8.3.1 Elastic-plastic behavior of plates under tension and/or bending

面内要素には7.2.1項の一様歪三角形要素を、曲げ要素には7.3.2項の Bazeleyらの非適合三角形要素を用いた。ここでは塑性化を節点で判定した。

Fig.8.3.1(a)および(b)にCASE(A)およびCASE(B)での荷重と変位の関係を、また同図(c)に各CASEの固定端の節点における、式(2.2.23)に示した内力パラメータ Q_n および Q_m の変化を示す。

CASE(A) では、板の全域に同時に塑性化が生じて崩壊に至る。Fig.8.3.1(a)の荷重と変位の関係は有限要素法による通常の微小弾塑性解析結果と完全に一致することが確かめられている。

CASE(B) では、固定端が塑性化すると崩壊メカニズムが形成され、以後荷重は増加しない。ここに示した要素分割では崩壊荷重は厳密解よりやや高めとなっているが、分割を細かくするほど正解に収束していく。これより塑性条件の妥当性が確かめられた。

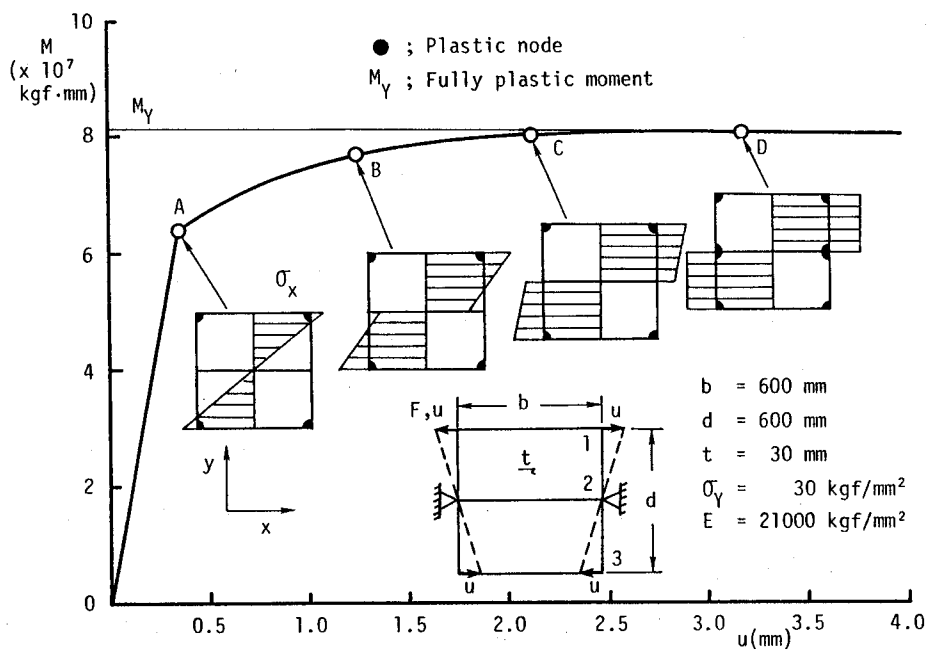
CASE(A),(B)いずれの場合も変位を増加させるにしたがって、それぞれの内力 Q_n および Q_m は Fig.8.3.1(c)の Q_n 軸あるいは Q_m 軸上で増加し、降伏曲面に達した後はほとんど増加せず一定値を保つ。これに対し、CASE(c) の場合には、固定端が曲げによって塑性化した時点で $(Q_n, Q_m) = (0, 1)$ の位置にあった内力は、面内変位を加えるにしたがって降伏曲面に沿って $(Q_n, Q_m) = (1, 0)$ の方へ移動していく。微小変形の枠内では、弾性剛性方程式には面内変位と曲げ変位の連成項はないが、塑性化が起きると面内応力と曲げ応力が塑性条件において関係しあうため、弾塑性剛性方程式には連成項が現れる。そして内力はFig.8.3.1(c)の如く塑性相関関係を満足しつつ変動する。なお、内力の降伏曲面からのずれは荷重増分の粗さに依存する。

8.3.2 面内曲げ荷重を受ける矩形板の塑性崩壊

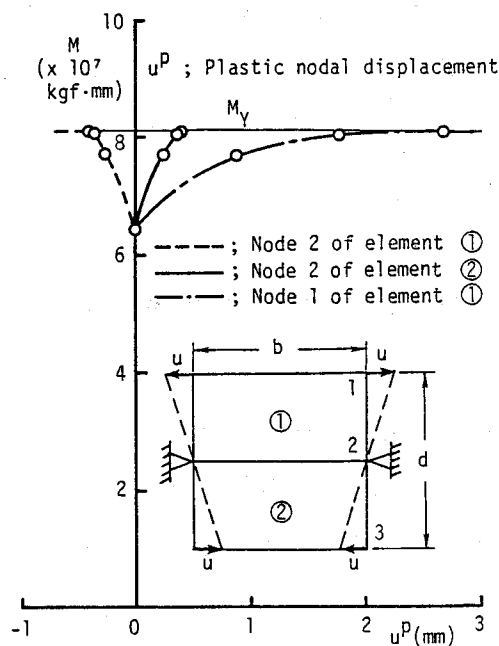
7.2.2項に示した長方形双一次平面要素を用いて、面内曲げ荷重を受ける矩形板の塑性崩壊挙動を解析した。本要素の応力は要素内で線形に変化する。そこでFig.8.3.2(a)に示すように、板をその中性軸で二要素に分割し、最上辺および最下辺の四節点に図に示す向きに強制変位 u を加えた。塑性化は各要素の節点で判定した。

Fig.8.3.2(a)に強制変位 u と曲げモーメント $M (= F \times d)$ の関係を示す。A点で上下辺の節点1 および3に塑性化が生じた後も、 u を加えると曲げモーメント M はゆるやかに増加を続け、最後に中性軸上の節点2も塑性化して崩壊に至る。この間の幾つかの荷重段階における x 方向の応力 σ_x の分布をFig.8.3.2(a)に併せ示す。

梁の塑性曲げ崩壊の場合と応力分布の変化の傾向は異なるが、これらの図より、いずれの要素でも節点1および3が塑性化した後、節点2の σ_x が増加し始め崩壊時には一様応力状態に至ることが分かる。また崩壊時の σ_x の大きさは降伏応力 σ_Y とほぼ等しくなって



(a) Load-displacement curve and stress distribution



(b) Plastic components of nodal displacements

Fig. 8.3.2 Elastic-plastic behavior of a square plate under in-plane bending

いる。このように変位が拘束されている中性軸上の節点2でも塑性化が生じる理由を以下に述べる。

7.2.2項(2)に示したように、本要素の場合、要素内の各点の応力は全節点の節点力の関数となる。したがって、節点1および3が塑性化した後、要素には全ての節点に塑性節点変位が現れる。ところで節点2では全節点変位は境界条件から0である。このため節点1および3の塑性化に起因して生じる塑性節点変位を打ち消すように弾性節点変位が現れ、これが節点2の応力増加をもたらしたわけである。Fig.8.3.2(b)に各節点の塑性節点変位 u^p と曲げモーメント M の関係を示す。節点2の塑性節点変位が、節点1および3が塑性化した時点の強制変位 u と同程度に達した時点で節点2が塑性化することが分かる。

以上の結果、節点に塑性変形が現れる塑性節点法の特徴を有効に活かすことにより、非常に少ない要素数で平板の塑性崩壊挙動を解析できることが明らかとなった。なお通常の有限要素法では、剛性積分を行う上で塑性化の判定点はガウス積分点など要素内部の点に限られる。このため、Fig.8.3.2(a)に示したような粗い要素分割では、はるかに高めの崩壊荷重が得られることになる。

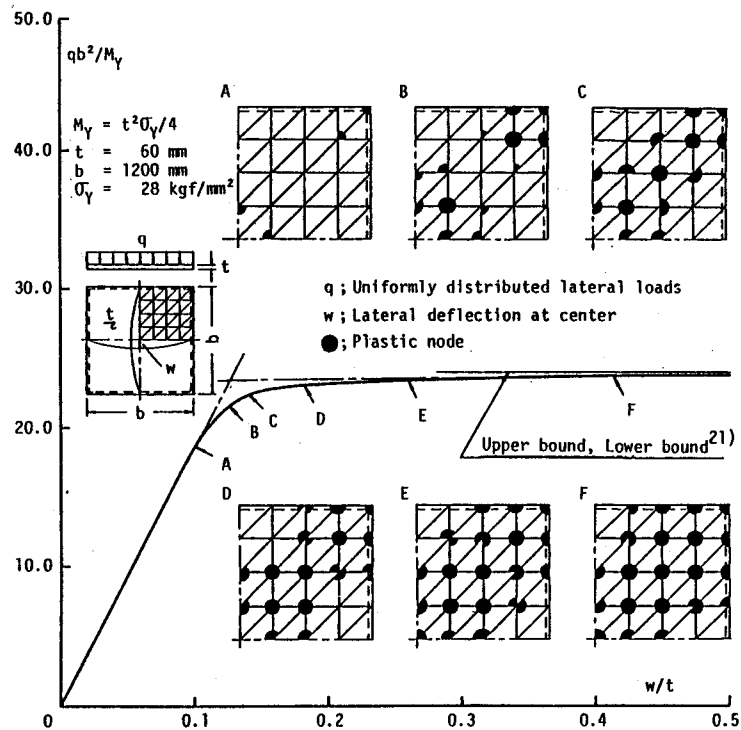
8.3.3 横圧を受ける正方形板の塑性曲げ崩壊

厚板が横荷重を受けて崩壊する問題は、一般に微小弾塑性曲げ問題として取り扱うことができる。ここでは、等分布横圧を受ける正方形板の崩壊挙動を解析した。

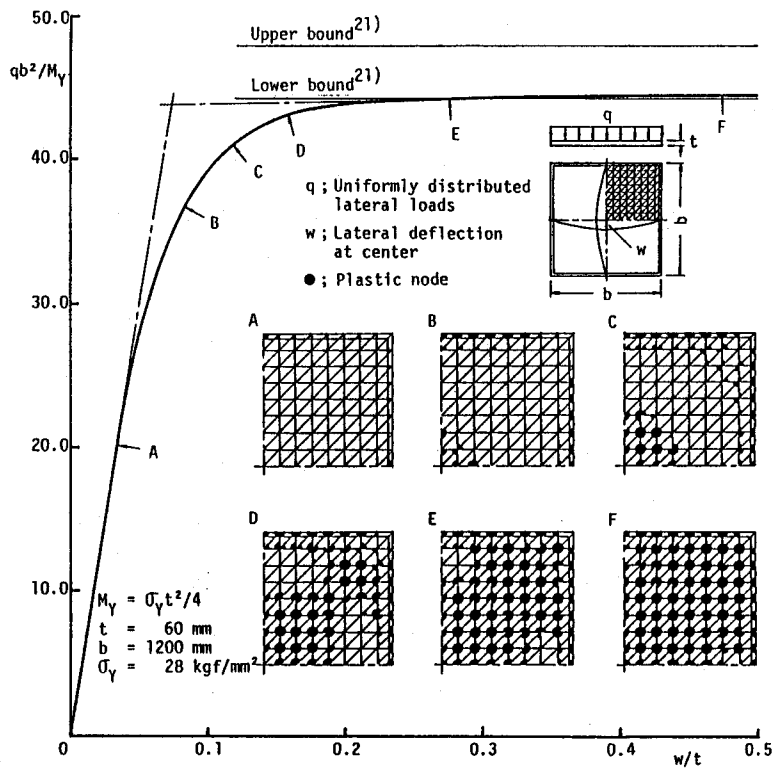
(1) Bazeleyらの要素およびCloughらの要素による解析

7.3.2項に示したBazeleyらの非適合板曲げ要素と、7.3.1項のCloughらの適合板曲げ要素による正方形板の塑性曲げ崩壊解析結果を基に、解の精度と収束性を調べた。

まず、Fig.8.3.3にBazeleyらの要素を用いて得られた、周辺単純支持および周辺固定の各境界条件での荷重と板中央のたわみの関係、および塑性化点の形成過程を示す。塑性化は節点で判定している。Fig.8.3.3(a)は周辺単純支持の場合、Fig.8.3.3(b)は周辺固定の場合であり、楠田による上界値および下界値²¹⁾を併せ示す。いずれの図でも点Aで初めて全断面塑性化が生じ、その後塑性域が広がると共に剛性が低下して崩壊に至るが、かなり塑性化が進行した段階でも剛性は若干残っており、明確な崩壊荷重の定義は難しい。そこで、弾性域および塑性化が進んで剛性がほぼ一定となった領域のそれぞれから引いた接線（一点鎖線）の交点の高さをもって崩壊荷重と定義する。



(a) Square plate simply supported along all edges



(b) Square plate clamped along all edges

Fig. 8.3.3 Elastic-plastic behavior of square plates under uniformly distributed lateral loads (Plate bending element by Bazeley et al.)

こうして得られる崩壊荷重は要素分割の粗さの影響を受ける。そこで分割数を種々変化させて崩壊荷重と要素分割の関係を調べた。Bazeleyらの要素による解析結果をFig.8.3.4に△印付きの実線で示す。Fig.8.3.4(a)は周辺単純支持の場合、(b)は周辺固定の場合である。なお、破線は弾性状態で板中央に単位たわみ量を与えるに必要な荷重と要素分割数の関係を表している。周辺単純支持の場合、崩壊荷重の上界値と下界値は一致し正解を表しているが、解析結果は分割を細かくする程この正解値に低めから収束することが分かる。これはFig.7.3.3のように本要素の応力場が正解値を中心にかなり変動する傾向にあり、各要素の強度が高めの応力の生じた節点の塑性化に支配されたためと考えられる。このような収束の方向は弾性要素自体の応力特性に依存するが、分割を細かくすると最終的に崩壊荷重は正解値に収束している。これより塑性挙動に関する塑性節点法の適用性が確かめられた。Fig.8.3.4(b)の周辺固定の場合、解析結果は下界値のやや高めに収束している。なお、Fig.8.3.5に、種々の境界条件の場合に得られた崩壊荷重と崩壊近傍の塑性域の広がりの様子を示す。塑性化は下段に示す塑性解析法で仮定される塑性関節線の形成位置付近に集中して生じている。

一方、Fig.8.3.4の○印付きの実線および破線は、Cloughらの適合要素による解析結果の収束性を表している。一般に適合要素の応力は低めから正解に収束する傾向にある。このため崩壊荷重はBazeleyらの要素とは逆に、高めから正解に収束していく。

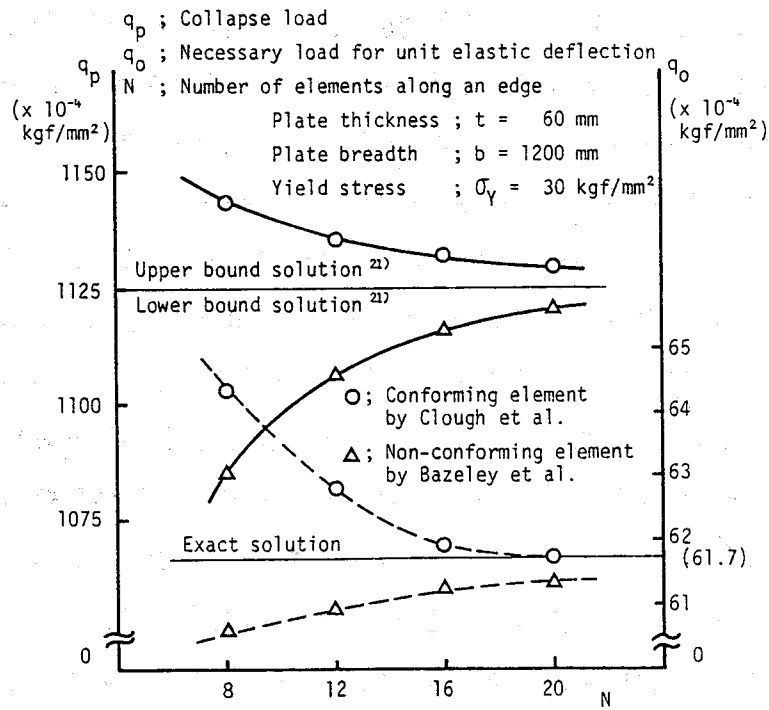
ところで、以上の解析では節点で塑性化を判定したが、要素内部で応力は変化するため塑性化の判定位置も解の精度に影響する。Bazeleyらの要素で塑性化の判定位置を変えて行った解析結果をFig.8.3.6に示す。境界条件は周辺単純支持とした。塑性化判定点には

(I) 要素の3頂点節点

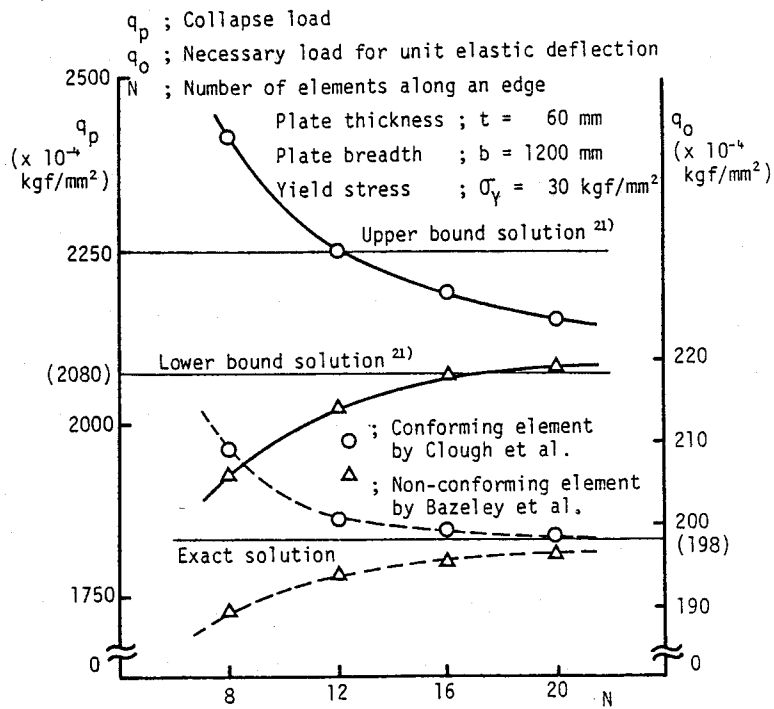
(II) 要素内3点(面積座標で、0.7,0.15,0.15の組み合わせ)

(III) 重心点1点のみ

の3ケースを取り上げた。Fig.8.3.6より塑性化判定点を要素の外側に置く程、得られる崩壊荷重は低めとなること、また重心点で判定した場合、最も厳密解に近い崩壊荷重が得られることが分かる。したがってBazeleyらの要素の場合、重心点を塑性化判定点とするのが精度的に適している。但し前提として弾性の応力場が十分な精度で得られる要素分割がなされている必要がある。この重心点1点での判定法では、式(1.5.12)のマトリックス $[\Phi]$ が1列のベクトル $\{\phi_i\}$ となるため、剛性マトリックス $[K^p]$ を短時間に計算できる点でも有利である。



(a) Square plate simply supported along all edges



(b) Square plate clamped along all edges

Fig. 8.3.4 Accuracy of collapse load and elastic deflection

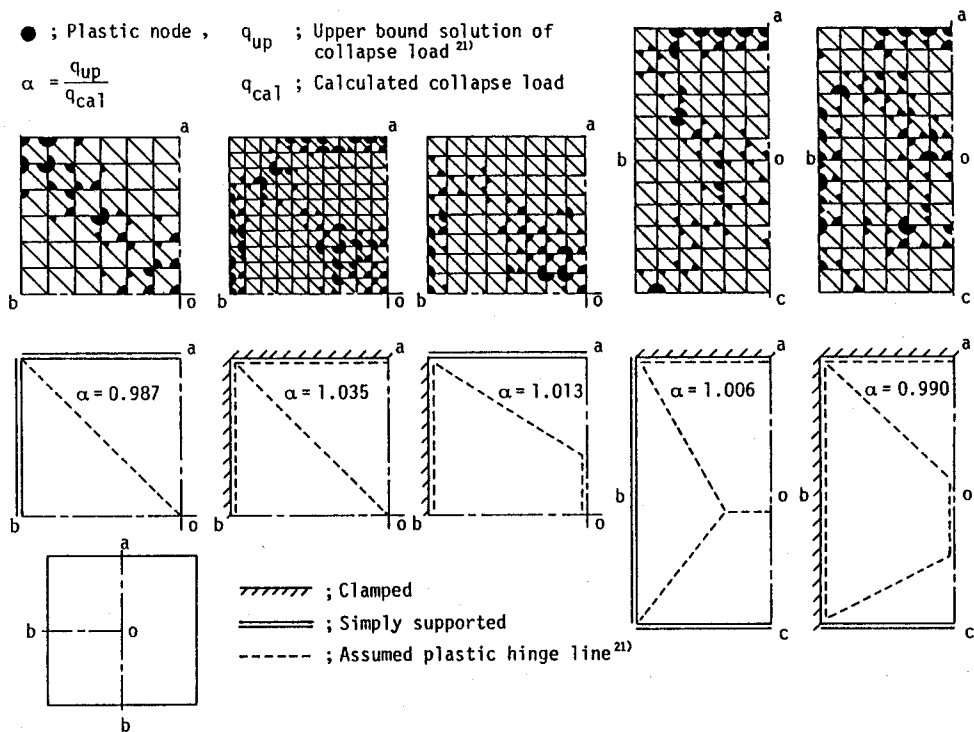


Fig. 8.3.5 Collapse load and the distribution of plastic nodes near collapse of a square plate for various boundary conditions (Plate bending element by Bazeley et al.)

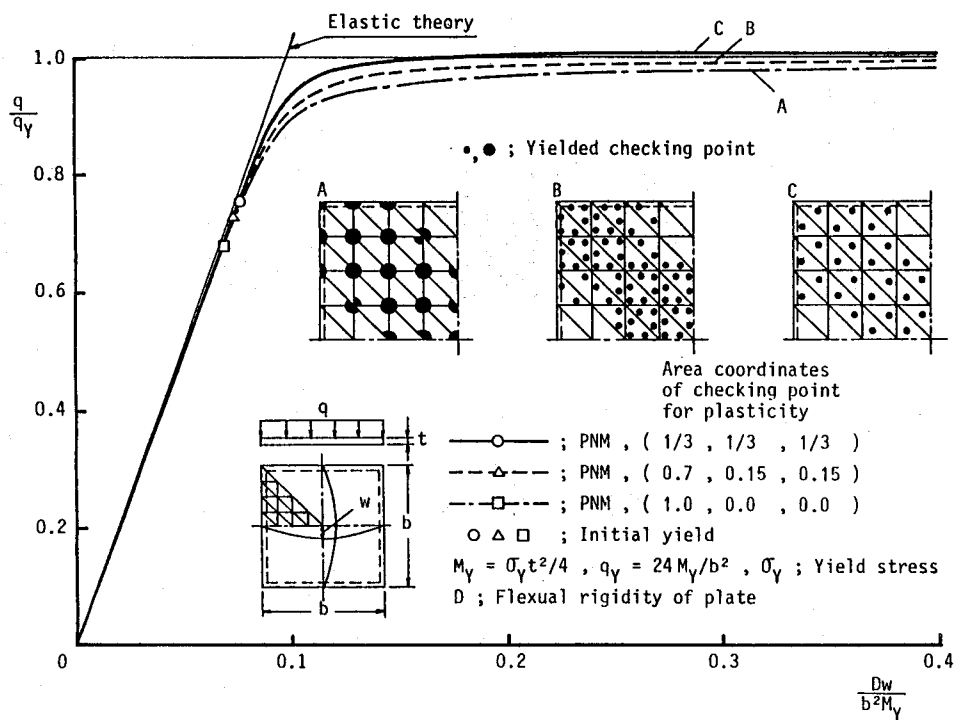


Fig. 8.3.6 Elastic-plastic behavior of a simply supported square plate under uniformly distributed lateral loads (Plate bending element by Bazeley et al.)

(2) Morleyの要素による解析

Morleyの要素を用いて周辺単純支持正方形板の塑性曲げ崩壊挙動を解析した結果を Fig. 8.3.7に示す。要素の塑性化の判定には7.3.3項に示した断面塑性法、および全領域塑性法の両者を用いた。また断面塑性法による解析では、対角線モードの厳密な崩壊機構を要素境界辺が表せるような要素分割パターンⅠと、これに無関係な分割パターンⅡを採用した。比較のため、同じ要素を用いて通常の有限要素法による弾塑性解析も行った。要素を板厚方向に10層に分割し、各層の重心で平面応力に対するMisesの降伏条件を基に塑性化を判定した。また、各層とも塑性条件を丁度満足して塑性化するよう荷重増分を調節している。

まず、断面塑性法を用いた塑性節点法の解析では、破線の分割パターンⅠおよび一点鎖線の分割パターンⅡのいずれの場合でも、対角線上の断面がすべて塑性化した時点で崩壊が生じ、崩壊荷重は剛塑性体に対する厳密解と完全に一致している。分割パターンⅠでは、対角線では要素境界辺が塑性化している。このため、7.3.3項(2-I)で述べたように塑性変形は対角線上の節点のみに不連続たわみ角として現れ、これらが連なって塑性関節線を形成し崩壊に至っている。したがってこの解析結果は、一部の要素で内部の断面が塑

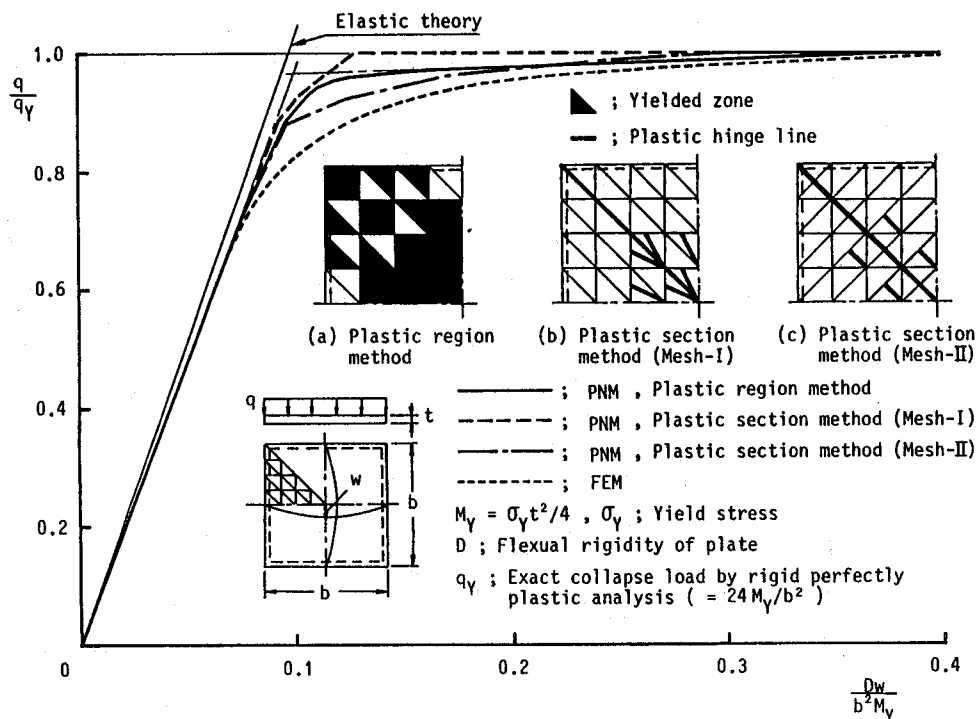


Fig. 8.3.7 Elastic-plastic behavior of a simply supported square plate under uniformly distributed lateral loads (Plate bending element by Morley)

性化している点を除けば、節点変位を隣接要素間で独立にする従来の塑性解析的有限要素法^{4)~7)}の結果と等価である。一方、分割パターンⅡでは、もし要素境界辺のみで塑性化を判定した場合、対角線モードの崩壊機構は追跡できず、高めの崩壊荷重が得られる。しかし塑性節点法では任意の断面の塑性化を考慮できるため、分割パターンⅡに対しても正しい崩壊荷重が得られている。

なお、本項(1)のCloughらおよびBazeleyらの要素による解析では、塑性域がかなり広がった後も荷重が漸増するため、崩壊荷重を Fig.8.3.3のように一点鎖線の交点として定義した。これに対し、断面塑性法による解析では崩壊荷重を荷重の上限値として明確に求めることができる。これは本解析では断面の曲げモーメント M_n の上限が、式(7.3.21)の全断面塑性モーメント $M_p L^*$ に一意に定められるのに対し、前者の場合、組合せ応力状態に対する式(2.2.30)の降伏関数を用いるため、塑性化点の内力成分が塑性相関関係を満たしつつ変化できることによる。また断面塑性法によれば、本解析例のように比較的粗い要素分割でも塑性解析法における厳密な崩壊荷重が得られている。要素分割を変えてもこの崩壊荷重の精度に大差ない。これはMorleyの要素では、要素の大きさにかかわらず、要素内部の任意の断面の法線方向曲げモーメントと外力との平衡条件が厳密に満たされることによる。

次に降伏関数に式(2.2.30)の Y_1 を用いた全領域塑性法の結果を考察する。本項(1)の崩壊荷重の定義に従えばやや低めの崩壊荷重が得られているが、分割を細かくする程正解に収束することが確かめられている。崩壊時の塑性化領域の分布は有限要素法と類似のパターンとなっている。崩壊荷重近傍の剛性が有限要素法とほぼ等しい点も、全領域塑性法の特徴である。

計算時間は、断面塑性法、全領域塑性法共に有限要素法の約 1/15 であった。

8.4 平板の弾塑性大たわみ解析

7.2.1 項の一樣歪三角形平面要素と 7.3.2 項の Bazeley らの非適合三角形板曲げ要素を用いて平板の弾塑性大たわみ解析を実施した。降伏関数には面内力と曲げモーメントの両者を考慮した式(2.2.28)の Y_1 を用いた。要素の弾性領域の剛性方程式の具体的な導出手順は付録 1 に示されている。

8.4.1 中央集中横荷重を受ける帯板の弾塑性大たわみ挙動

両端固定の帯板が横荷重を受ける場合、たわみが大きくなると、たわみ角の2次の項で表される非線形膜歪による面内力が無視できなくなる。ここでは簡単な弾塑性大たわみ問題として中央に集中横荷重を受ける帯板を解析した。塑性化は節点で判定した。得られた荷重と帯板中央のたわみの関係を Fig.8.4.1に示す。図のA点で固定端および中央の載荷部の節点が塑性化してメカニズムを形成する。その後、たわみが増加するに従って面内力が増加し、塑性域が広がっていく（図のB点およびC点）。やがてD点に達して全節点が塑性化する。D点は帯板が塑性膜となった状態に対応している。解析結果は破線で示された実験結果¹⁰⁾と良い相関を示している。なお大たわみを伴う場合にも降伏した節点の内力は降伏曲面に沿って変化することが確かめられている。

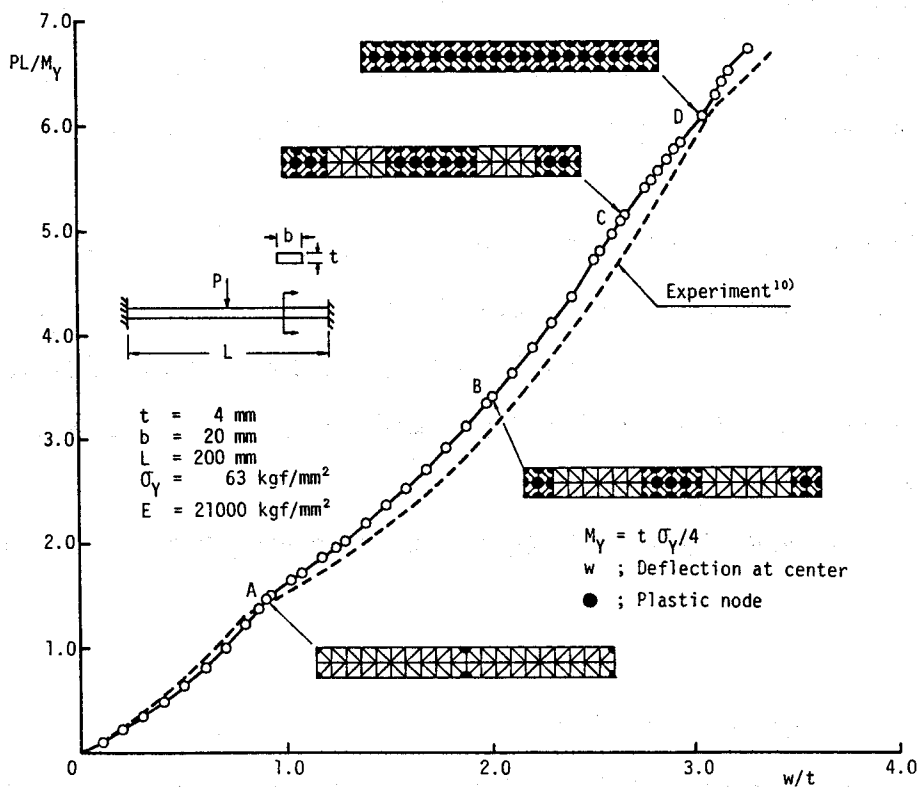


Fig. 8.4.1 Elastic-plastic large deflection behavior of a strip fixed at both ends under centrally concentrated lateral load

8.4.2 横圧を受ける矩形板の弾塑性大たわみ挙動

等分布横圧を受ける矩形板の弾塑性大たわみ解析を行った。境界条件は周辺固定とし、2種類の板厚に対して解析した。塑性化は節点で判定した。Fig.8.4.2に荷重と板中央のたわみの関係を鶴田らによる実験結果²²⁾と共に示す。

実線の厚板の場合、大たわみによる膜応力が増加する前に板のほぼ全域が曲げ応力により塑性化する。その後たわみの増加と共に膜応力が塑性条件を満足しながら増加していく。これに対し破線の薄板の場合、板は主として膜応力によって塑性化する。このように両解析で膜応力と曲げ応力の比はかなり異なるが、いずれの場合も計算結果は実験結果と非常に良く一致している。

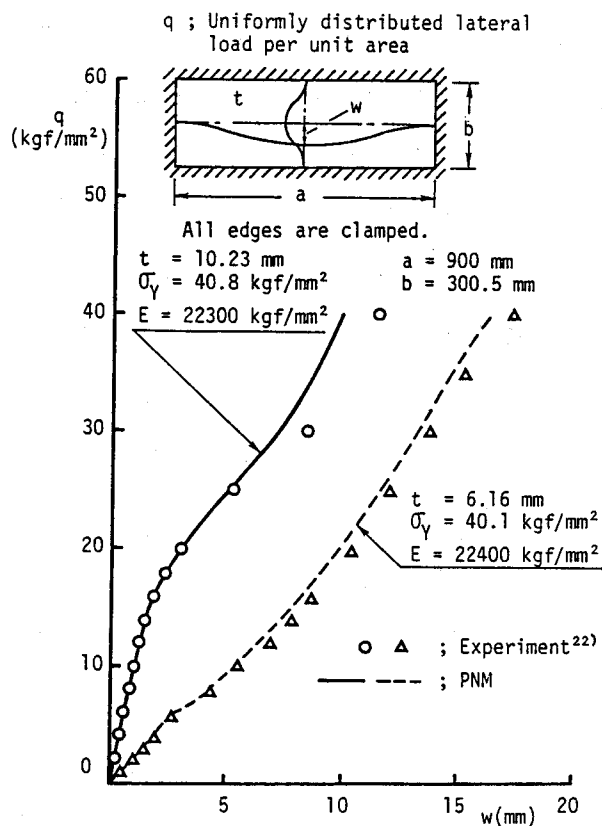


Fig. 8.4.2 Elastic-plastic large deflection behavior of a rectangular plate under uniformly distributed lateral loads

8.4.3 面内圧縮を受ける正方形板の座屈崩壊

周辺単純支持された正方形板に面内圧縮力が作用する場合の座屈崩壊挙動を解析した。塑性化判定点には次の3ケースを取り上げた。

(Ⅰ) 要素の3頂点節点

(Ⅱ) 要素内3点(面積座標で、0.7,0.15,0.15の組み合わせ)

(Ⅲ) 重心点1点のみ

Fig.8.4.3(a) および(b)に薄板および厚板に対して得られた荷重と板中央のたわみの関係を示す。いずれの解析でも板厚の1/100の初期たわみを与えている。有限要素法による解析結果も同図に点線で示す。塑性化の判定は板厚方向に20層に分割した各層の重心点の応力によった。この有限要素法による結果は実験結果と比較して、十分な精度の解を与えることが確認されている。

Fig.8.4.3(a)の薄板の場合、Fig.8.3.6の微小曲げ崩壊解析と同様に重心点で塑性化を判定する塑性節点法による解は非常に精度の良い崩壊荷重を示している。これに対し、Fig.8.4.3(b)の厚板では、いずれの塑性化判定位置を採用しても崩壊荷重は有限要素法による結果よりもやや高めになっている。これは以下の理由による。

本解析では、塑性条件として全断面塑性条件を用いている。したがって、非載荷辺中央部の面内応力による全断面塑性化を支配的要因として崩壊するFig.8.4.3(a)の薄板の場合、高い精度の解が得られる。他方、厚板の塑性座屈の場合、曲げ変形によるわずかな板厚方向の塑性域の増加が崩壊につながるが、本解析では断面力が全断面塑性条件を満たすまでは断面は弾性としているため、高目の耐力を与えたわけである。したがって座屈問題、特に断面内の塑性域の広がり敏感な塑性座屈問題では、1次元部材の場合を含め、一般に初期塑性化から塑性化を考慮する塑性化判定基準-2を用いる必要があると考えられる。このような解析は次章で行うが、本解析例により塑性節点法の座屈崩壊問題への基本的な適用性は明らかとなった。

なお、弾塑性大たわみ解析では1.5.2項(具体的には付録1)に述べた弾性接線剛性マトリックスを各荷重段階で要素の変形を考慮して計算する必要がある。この計算に相当時間を要するため、微小弾塑性問題と比べて塑性節点法の適用による計算時間の短縮効果は減じる。本解析の場合、塑性節点法による計算時間は有限要素法の約3/4であった。

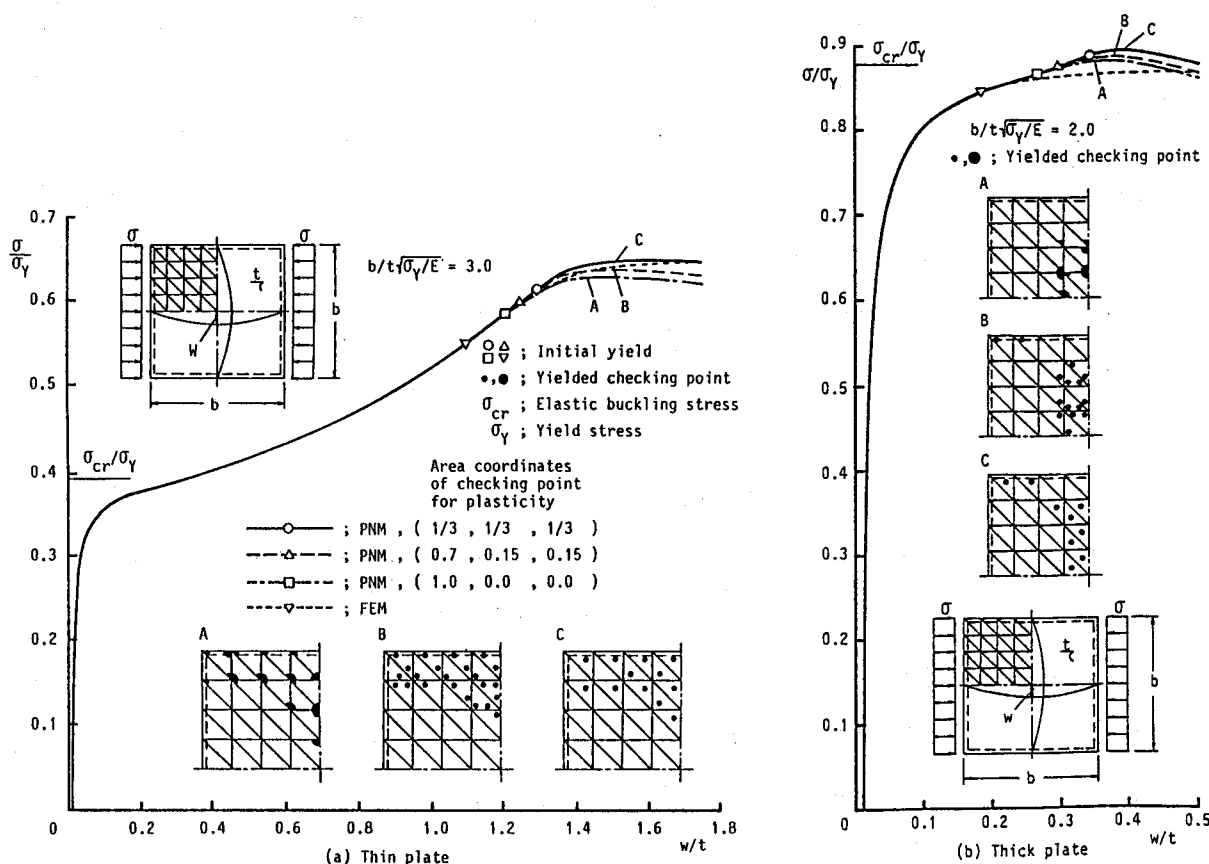


Fig. 8.4.3 Elastic-plastic large deflection behavior of square plates under thrust

8.5 3次元塊体の微小弾塑性解析

8.5.1 直方体の2軸曲げおよびねじり

Fig.8.5.1 に示す直方体の2軸曲げ、およびねじりによる微小弾塑性挙動を7.4.2節の8節点六面体アイソパラメトリック要素を用いて解析した。塑性条件には3次元応力場に対する Misesの式 (式(2.2.1)および式(2.2.2)) を用いた。また、いずれの解析でも図中に示すように節点に強制変位 u を与えた。ここでは節点を塑性化判定点として塑性節点法を適用することにより、非常に少ない要素数で全塑性状態を精度良く解析できることになる。

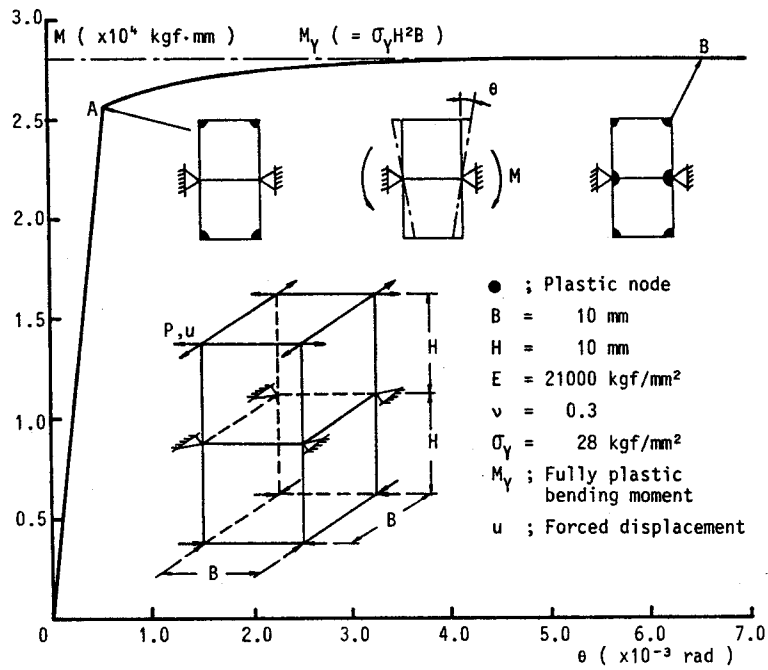
Fig.8.5.1(a)の2軸曲げ問題の場合、中性面で分けた2要素のみで解析している。図のA点で、上下面の節点に塑性化が生じた後も要素は剛性を維持し、B点で変位の拘束されている中性面にも塑性化を生じて崩壊に至る。この時の崩壊モーメントは2軸応力場の全断面塑性モーメントにほぼ完全に一致している。このように中性面の塑性化を追跡できるのは、8.3.2項に示した面内曲げを受ける平板の解析例と同様に、上下面の初期塑性化に起因して中性面上に塑性節点変位が現れることによる。つまり全節点変位が零になる中性面では塑性節点変位を打ち消す方向に弾性節点変位が生じ、これが応力増加をもたらしたわけである。

次に、ねじりによる弾塑性挙動を解析する。Fig.8.5.1(b)のように解析対象を、ねじり中心で4要素に分割した。2軸曲げの場合と同じ塑性変形特性が機能して要素全体に塑性域が広がる。この解析では断面のそり変形を許容しているが、得られた崩壊ねじりモーメントは理論値より少し高めである。これは主に要素の変位関数の影響によると考えられる。なおガウス積分点で塑性化を判定した場合、いずれの解析でも理論値よりはるかに大きな崩壊荷重が得られる事が分かった。

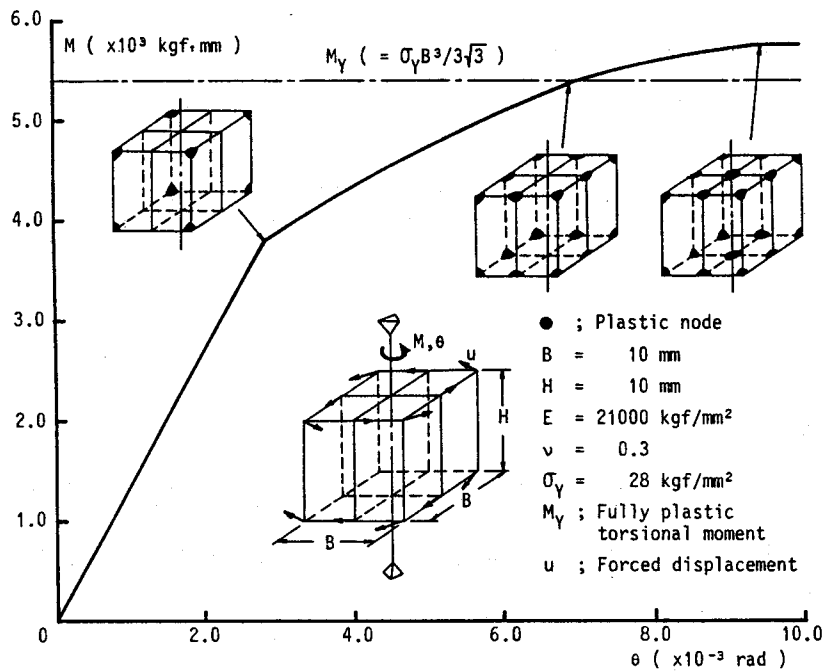
8.5.2 厚肉長円筒の両端閉じ押し広げ

両端を閉じた厚肉長円筒を内圧 p により押し広げる問題で、中央断面近傍を解析する。これは軸対称の弾塑性問題であるので、Fig.8.5.2(a)に示すように、中央断面の単位長さ（斜線部A）を考え、さらに単位角度の部分を取り出して解析するが、円筒端部のB、C面に作用する内圧によって軸方向荷重も加わるため、3次元問題となる。また解析モデルの横断面は平面を維持し、かつ平行に変位すると仮定し、8節点六面体アイソパラメトリック要素を用いて塑性節点法により解析した。この問題に対しては、Hillがトレスカの降伏条件を用いて解析解を示している²³⁾。本解析でも同じ塑性条件を用い、塑性化判定点には節点と2次のガウス積分点の2種類を取り上げた。

Fig.8.5.2(b)に内圧 p と外面の半径方向変位 u の関係、およびFig.8.5.2(c)には半径方向および周方向の応力分布を示す。かなり粗い要素分割ではあるが、本解析法の結果はHillの解と非常に良く一致している。また前項の解析例と異なり、各要素の応力場が比較的一様であるため、判定点の位置による解の差は余り表れていない。



(a) Solid body under bi-axial bending moments



(b) Solid body under torsional moment

Fig. 8.5.1 Elastic-plastic behavior of prismatic solid bodies

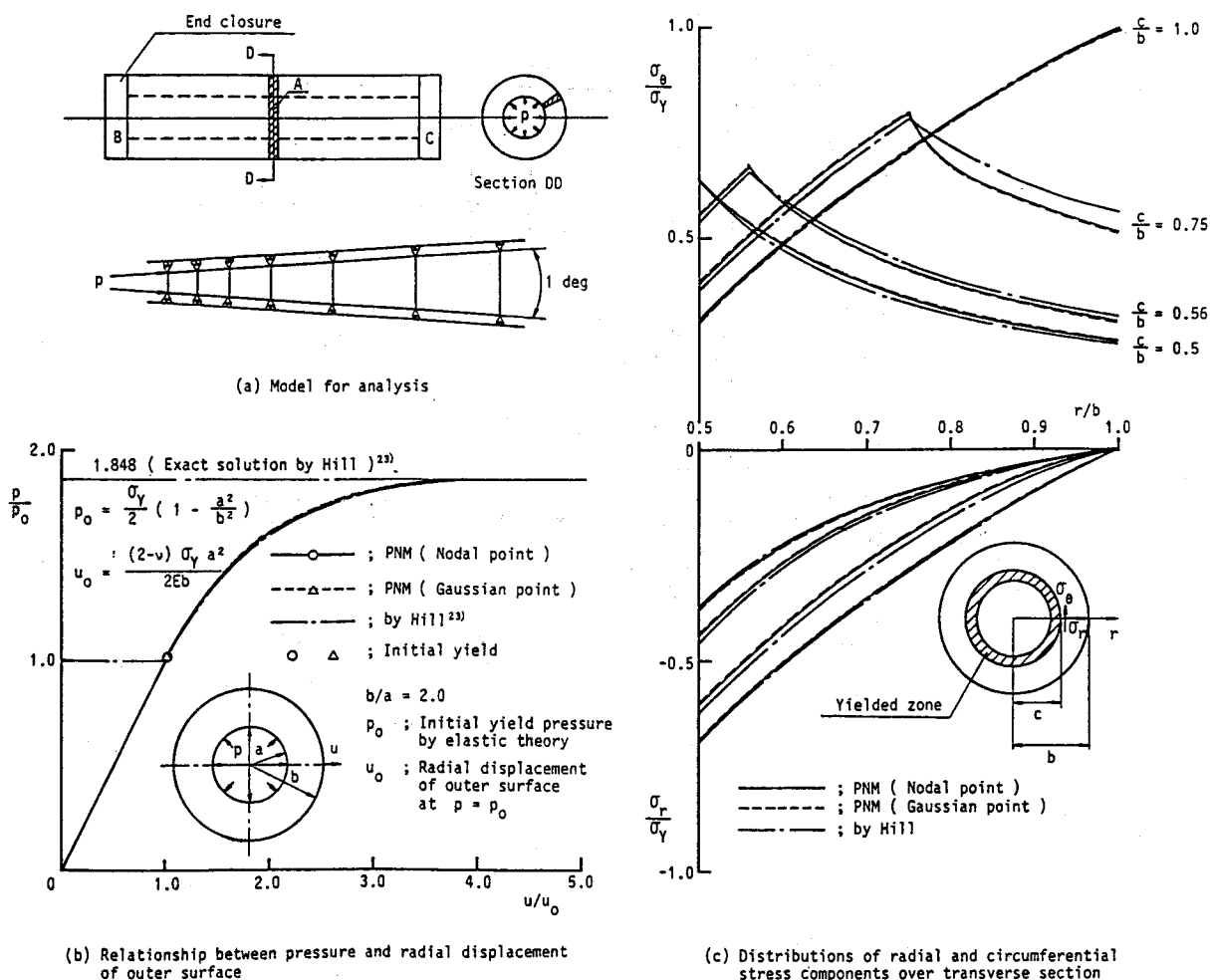


Fig. 8.5.2 Elastic-plastic behavior of long cylindrical tube with closed ends under internal pressure

8.6 結言

本章では、第1章および第6章に展開した理論に従って完全弾塑性体の静的弾塑性解析を行い、塑性節点法の適用性を検討した。これらの結果より、まず塑性節点法による解の基本的特性は次のようにまとめられる。

- (1) 塑性化した判定点における内力比および要素の剛性は、塑性化点の塑性条件を満足しながら自動的に調節される。この場合、塑性化点の内力の降伏曲面からのずれは荷重増分の粗さに依存する。
- (2) 一般に荷重増分および要素分割を細かくしていくと解析結果は正解に収束する。但し、

崩壊荷重が高めからあるいは低めから収束するか等の収束傾向は、要素の応力場の特性、塑性条件および塑性化判定位置に依存する。

また、各節で個々に得られた主な結論は以下の通りである。

- (3) 8.2 節では、径間および節点に荷重を受ける平面骨組構造物の塑性崩壊解析を実施し、部材結合部のみに節点を配した最少個の要素分割で、短時間かつ高精度に塑性崩壊挙動が求められることを明らかにした。

部材の塑性条件が曲げモーメントのみで決定される塑性曲げ崩壊解析の場合、塑性節点法は従来からの塑性解析法と等価となる。しかし塑性節点法によれば、軸力と曲げモーメントとの塑性相関関係を考慮した解析も容易に行える。また塑性関節法のように塑性化の判定位置に関する制約はなく、径間の任意の断面における塑性関節機構の形成を考慮できる。

- (4) 8.3 節では、平板の微小弾塑性挙動を平面問題および板曲げ問題を対象に解析し、塑性条件の妥当性を確認すると共に、以下の結果を得た。

塑性節点法では要素内の任意の点の塑性化を考慮できる。また塑性変形は節点に縮約されて現れる。長方形双1次平面要素による面内曲げを受ける平板の塑性崩壊解析では、この特性が機能して、わずか2要素で板の初期塑性状態から全塑性状態に至る挙動が得られることを示した。またCloughらおよびBazeleyらの板曲げ要素による厚板の曲げ崩壊解析では、要素分割に対する解の収束性、および解の精度に及ばず塑性化判定位置の影響を明らかにした。同じ問題に対するMorleyの板曲げ要素による解析では、第7章で示した断面塑性法と全領域塑性法の有効性を確認すると共に、断面塑性法によれば、塑性関節線を形成して板が崩壊する挙動を要素分割の影響を受けることなく高い精度で解析できることを明らかにした。

- (5) 8.4 節では、塑性節点法による弾塑性大たわみ解析を行い、有限要素法による解析結果や実験結果との比較を通して、本解析法の大変形問題への精度の高い適用性を明らかにした。但し、本章では塑性化判定基準-1を用いたため、板厚方向に塑性域が部分的に広がった状態で崩壊に至る塑性座屈問題については高めの崩壊荷重が得られた。したがってこのような問題においては、塑性化判定基準-2により初期塑性状態から塑性化を考慮する必要がある。この塑性化判定基準-2に基づく解析結果は、次章の9.3.3項で示す。

(6) 8.5 節では、8 節点六面体アイソパラメトリック要素による 3 次元塊体の微小弾塑性解析を行い、塊体要素への適用性を示した。既述のように塑性節点法では弾塑性剛性マトリックスがマトリックス演算のみで得られる。このため、通常の有限要素法では積分次数が高く計算時間を非常に要する 3 次元塊体の解析に特に効果的と考えられる。

第9章 歪硬化体の静的弾塑性解析

9.1 緒言

本章では、塑性節点法による歪硬化体の静的弾塑性解析を行う。塑性節点法では要素内部は常に弾性挙動し、塑性変形は節点に縮約されて変位の次元で現れる。したがって、歪硬化を考慮するためには、要素内部の塑性歪場を別途評価すると共に、この領域における歪硬化の影響を節点の塑性挙動に対する効果に変換する必要がある。その対策として、第2章では、塑性歪が要素に分布する場合の塑性仕事と、本解析理論で節点でなされる塑性仕事を等値することにより、塑性節点変位に対して有効な節点変位歪硬化係数 H_n' を導出した。これを用いて、歪硬化を考慮する場合も弾塑性剛性マトリックスをマトリックス演算のみで得られることを示した。ここでは以上のような解析理論の妥当性と計算効率を幾つかの解析を通じて明らかにしていく。なお、8.1 節に述べたように、合応力表示型塑性条件で塑性化判定基準-2を適用する解析では、材料を完全弾塑性体と仮定する場合も歪硬化体と同様の定式化が必要となる。そこで、このような問題も疑似歪硬化問題として本章で解析する。

9.2 節では、骨組構造物の弾塑性挙動を歪硬化を考慮して解析する。ここでは平面骨組問題を微小変形の枠内で解析する。

9.3 節では、平板の弾塑性挙動を解析する。微小曲げ崩壊解析の他、大たわみの影響を考慮した座屈崩壊解析も実施する。

なお、材料は等方硬化則に従うものとし、その単軸応力・歪関係として Fig.2.1.1 に破線で表した bi-linear な関係を仮定する。また解析では各塑性化判定点が塑性条件を丁度満足して塑性化するよう荷重増分を調節している。

9.2 骨組構造物の微小弾塑性解析

9.2.1 解析の手順

微小変形の梁・柱要素を用いて骨組構造物の弾塑性解析を行った。塑性化判定点として節点を選んだ。梁・柱要素の節点変位歪硬化係数 H_n' の導出に必要な、式(2.3.13)' のパラメータ h_i を計算するためには、Fig.2.3.1に示した塑性化判定点 i からの塑性域長さ l_i^p を求める必要がある。解析では、この l_i^p を各荷重段階毎に内力分布と塑性条件より精

度良く求め、続く1荷重増分間では一定とした。式(2.3.13)'の積分のための数値積分点の間隔は部材長の1/50とし、各積分点および $x = l_i^p$ での $\sigma_o(x)g(x)$ を用いて台形則により数値積分した。

なお Eggerの降伏関数を用いる場合に特有の、式(2.2.21)の項 $\partial Y / \partial \bar{\epsilon}^p$ は、2.2.2項(2-iii)に述べたように $\bar{\epsilon}^p = 0$ 、すなわち初期塑性状態では無限大となる。これを有限な値に設定して解析するため、 $\bar{\epsilon}^p$ の初期値には、初期塑性化した時点の応力 $\{\sigma_{iy}\}$ を1.001倍した応力状態に対して式(2.2.20)を満足する次の値を用いた。

$$\bar{\epsilon}^p = (B(N_Y - Y_0)/(Y_1 - N_Y))^{1/A} \quad (9.2.1)$$

ここで、 $Y_0 = Y_0(\{\sigma_i\})$, $Y_1 = Y_1(\{\sigma_i\})$
 $\{\sigma_i\} = 1.001\{\sigma_{iy}\}$

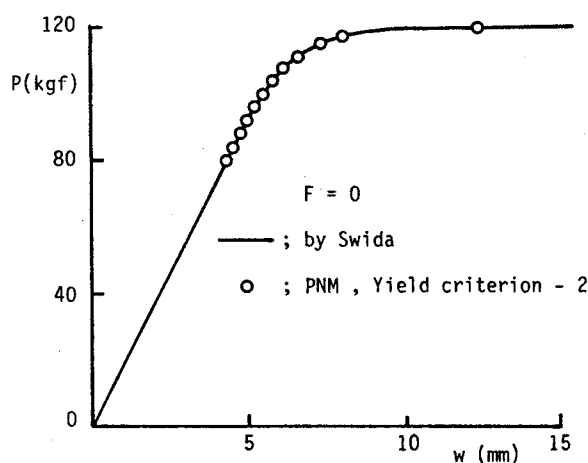
またFig.2.2.3のように $\partial Y / \partial \bar{\epsilon}^p$ は、初期塑性化後しばらくは $\bar{\epsilon}^p$ の増加に対して急激に変化する。このため次節に示すシェルの解析を含め塑性化判定基準-2による解析では、各荷重段階で応力と塑性歪が正しく塑性条件を満足するよう収束計算を行う必要がある。付録3-(2)にこの収束計算の手順を示す。塑性化判定基準-1の解析ではこのような収束計算は不要である。

9.2.2 軸力および集中横荷重を受ける矩形断面片持梁

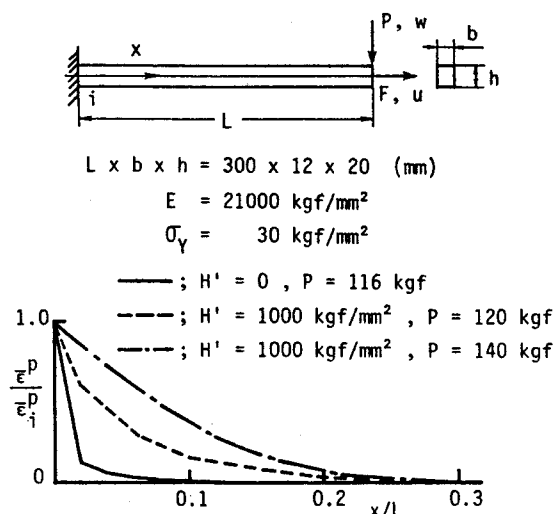
矩形断面片持梁が、自由端に集中横荷重Pおよび軸力Fを受ける場合の弾塑性挙動を1要素のみで解析した。

材料を完全弾塑性体とし、塑性化判定基準-2を用いた場合の曲げ崩壊解析結果をFig. 9.2.1(a)に丸印で示す。実線はSwidaによる厳密解である²⁴⁾。本解析結果は、これとほぼ完全に一致している。Fig.2.2.4で明らかなように、本解析で用いたEggerの降伏関数($A = 0.84$, $B = 0.0002$)が表す断面の曲げモーメント・曲率関係は非常に精度が良い。したがって、本解析結果は要素の塑性挙動に対する塑性条件以外の影響因子、すなわち 2.2.2項に述べた要素内部の塑性歪場の評価法、および、この領域に生じる歪硬化(ここでは降伏曲面の形状の変化によるみかけの硬化)の影響を節点変位歪硬化係数によって節点への縮約する方法の妥当性を表している。Fig.9.2.1(b)の実線は $P = 116\text{kg}$ における相当塑性歪 $\bar{\epsilon}^p$ の分布である。塑性歪が固定端近傍に集中し、いわゆる塑性関節が形成される様子が良く分かる。

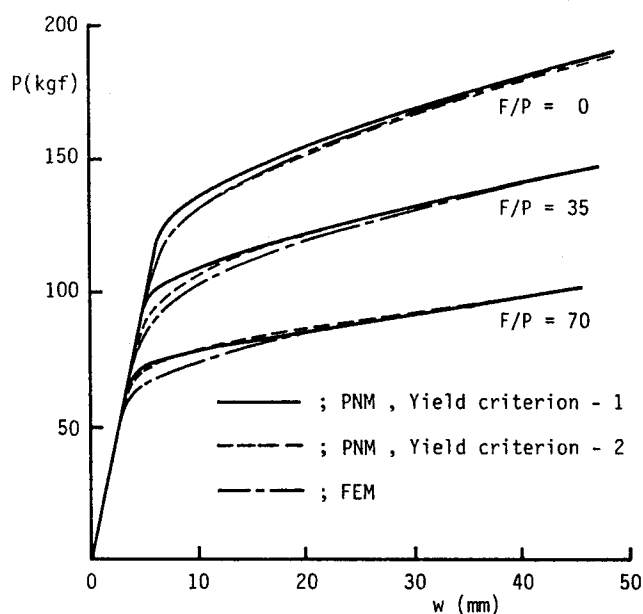
Fig.9.2.1(c)および(d)は横荷重Pと軸力Fが比例的に作用する場合の荷重とたわみ、



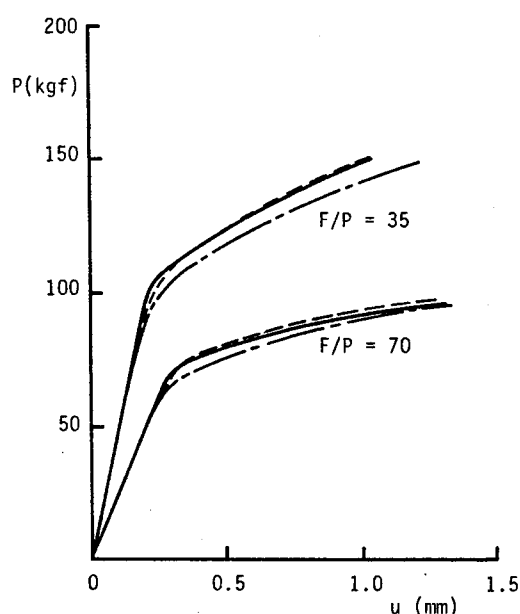
(a) Load - deflection relationship ($H' = 0$)



(b) Distributions of equivalent plastic strain



(c) Load - deflection relationship ($H' = 1000 \text{ kgf/mm}^2$)



(d) Load - axial displacement relationship ($H' = 1000 \text{ kgf/mm}^2$)

Fig. 9.2.1 Elastic-plastic behavior of a cantilever beam under concentrated lateral load and/or axial load at end

および荷重と軸変位の関係を表している。ここでは材料の歪硬化を考慮している。実線および破線は、それぞれ塑性化判定基準-1および2を用いた塑性節点法による結果である。一点鎖線は層分割法を用いた有限要素法による解析結果である。部材を長さ方向に10要素に等分し、各要素をさらに20層に分割して各層の重心で塑性化を判定している。また各層が塑性条件を丁度満足して塑性化するよう荷重増分を調節している。

Fig.9.2.1(c)を見ると、塑性化判定基準－1による解析結果は、塑性化（全断面塑性化）の生じた付近では有限要素法による結果より高めの耐力を与えている。しかし、いずれの荷重比の場合も変形の増加と共に有限要素法の結果に良好に収束してゆく。また軸力の割合が増すほど初期塑性状態と全断面塑性状態の間の内力差が減じるため収束は速くなる。Fig.9.2.1(d)の軸変位についても同様の傾向が見られる。

以上の結果より、まず塑性化判定基準－1における塑性条件と断面歪硬化係数の妥当性が確かめられた。この判定基準を用いる解析の場合、初期塑性状態から全断面塑性状態に至る中間過程の変形の精度は必然的に劣るが、Fig.9.2.1(c),(d)によれば、その誤差が非常に顕著となる矩形断面梁の場合にも良好な精度の荷重・変位曲線が得られている。また動的崩壊など塑性変形が大きく生じる問題では、この解析法は精度が良く、しかも短時間に計算可能である。したがって、歪硬化を考慮した骨組構造の弾塑性解析のための極めて効果的な解析法であると結論できる。

一方、塑性化判定基準－2に式(2.2.18)の H_0' を適用した破線の結果は、曲げ崩壊の場合、有限要素法解析結果とほぼ完全に一致している。しかし他のケースでは実線よりも高めの耐力を与える場合も見られ、特に組合わせ荷重下の解析への適用性に問題があると考えられる。このようにEggerの降伏関数に適した歪硬化係数については、今後さらに検討を要する。したがって一般に、塑性化判定基準－2は、断面内のわずかな塑性域の広がりには敏感な塑性座屈問題や、初期塑性化後の変形を正確に求める必要のある問題の解析に特に有効性を発揮すると考えられる。Fig.9.2.1(b)の破線および一点鎖線は、Fig.9.2.1(c)の曲げ崩壊の場合の相当塑性歪分布の一例である。完全弾塑性体の場合に比べ塑性歪は広い範囲に分布する。なお本項の解析に要した時間は1ケースあたり0.5秒から2秒の範囲であり、有限要素法の1/10から1/3であった。

9.2.3 矩形断面部材からなる門型ラーメン

Fig.9.2.2に示す矩形断面部材からなる門型ラーメンの塑性曲げ崩壊解析を、4つの梁要素を用いて実施した。ここでは、塑性化判定基準－1を用いて解析した。実線が塑性節点法の結果、破線は栖原等の弾塑性関節法による結果である²⁴⁾。弾塑性関節法は、要素内部の塑性化領域で曲率の塑性成分を求め、この積分値を弾性の梁・柱要素の節点におけるたわみ角に縮約する解析法である。対象が骨組構造物に限定される点、動的問題への拡張が困難な点があるが、静的問題に対しては極めて精度の良い結果を与えることが明らか

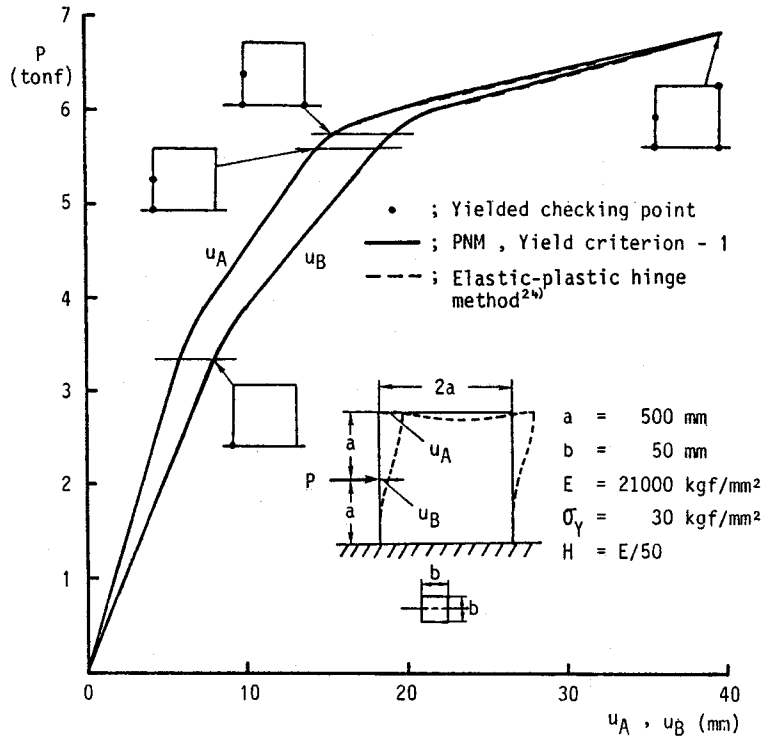


Fig. 9.2.2 Load-displacement relationship of an one-story frame

にされている。両解析法の結果は、ほぼ完全に一致しており、塑性節点法の骨組構造物への適用性が確認できた。なお、本解析例は不静定問題であり 2.3.2 項(2)に述べた節点力増分の比に関する繰返し計算が必要であるが、1 回の繰返しで良好に収束した。計算時間は約 1.5 秒であった。

9.2.4 I 型断面部材からなる 2 層ラーメン

Fig.9.2.3 の I 型断面部材からなる二層ラーメンの塑性崩壊解析を、8 つの梁・柱要素を用いて行った。ここでは軸力の影響も考慮し、塑性化判定基準 - 1 を用いて解析した。塑性条件、式(2.2.10)の Y_1 には塑性中性軸がウェブに含まれる場合の次の全断面塑性降伏関数を用いた。

$$Y_1^2 = N_Y^2 (p n^2 + 0.5 m^2 + \sqrt{0.25 m^4 + p n^2 m^2}) \quad (9.2.2)$$

ここで、 $p = \{1 - (\frac{2b t_f}{A})^2 (1 - \frac{t_w}{b})\}^{-1}$; Fig.9.2.3 参照

N_Y, n, m ; 式(2.2.5)参照

本解析法の結果は破線の弾塑性関節法の結果と良く一致している²⁵⁾。但し、弾塑性関

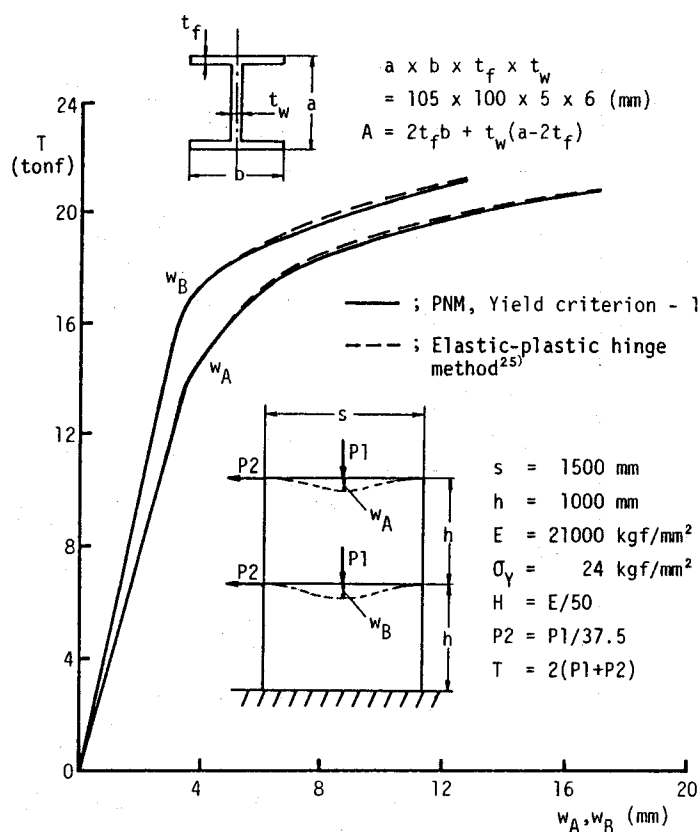


Fig. 9.2.3 Load-displacement relationship of a two-story frame

節法では部材の軸方向の塑性変形を無視するため、本解析結果の変位の方がやや大きめとなっている。

9.3 平板の弾塑性解析

9.3.1 解析の手順

周辺単純支持正方形板の曲げ崩壊および座屈崩壊挙動を解析した。板曲げ要素には 7.3.2 項に示したBazeleyの非適合三角形要素を、平面要素には7.2.1項の一様歪三角形要素を用いた。8.3.3項(1)で述べた通りBazeleyの板曲げ要素の場合、塑性化判定点として要素の重心点が精度上適している。ここでも、塑性化判定点として重心点を採用した。また比較のため、通常の有限要素法による解析も実施した。要素を20層に分割し、各層の重心点で塑性化を判定している。

9.3.2 横圧を受ける正方形板の塑性曲げ崩壊

8.3.3項(1)と同じ正方形の厚板に対して、歪硬化を考慮した塑性曲げ崩壊解析を行った。Fig.9.3.1に、荷重と板中央のたわみの関係を示す。

まず完全弾塑性体($H' = 0$)の場合の結果をみると、塑性化判定基準-1を用いた塑性節点法の結果は、有限要素法による結果とほぼ等しい崩壊荷重を導いている。しかし初期塑性化から塑性化を考慮していないため変形には差が現れている。他方、これを考慮した塑性化判定基準-2による解析結果は変形、崩壊荷重とも有限要素法の結果と非常に良く一致している。これより、Eggerの降伏関数の平板の弾塑性解析への適用性、および2.3.2項(3)に述べた節点変位歪硬化係数の評価法の妥当性が確かめられた。

歪硬化($H' = E/30$)を考慮した解析では、塑性化判定基準-1を用いた場合、耐力は有限要素法の結果よりもやや高めであるが、塑性変形が進行した段階の剛性は良く一致している。また塑性化判定基準-2による結果は、 $H' = 0$ の場合と同様、有限要素法と全体にわたって非常に良く一致している。既述のように、式(2.2.38)の H_s' は帯板の塑性挙動を基に導いた歪硬化係数の近似的な評価式である。しかし、本解析結果を見ると、定量的には妥当な値を表していると考えられる。なお、図中の二点鎖線は安川ら¹³⁾および

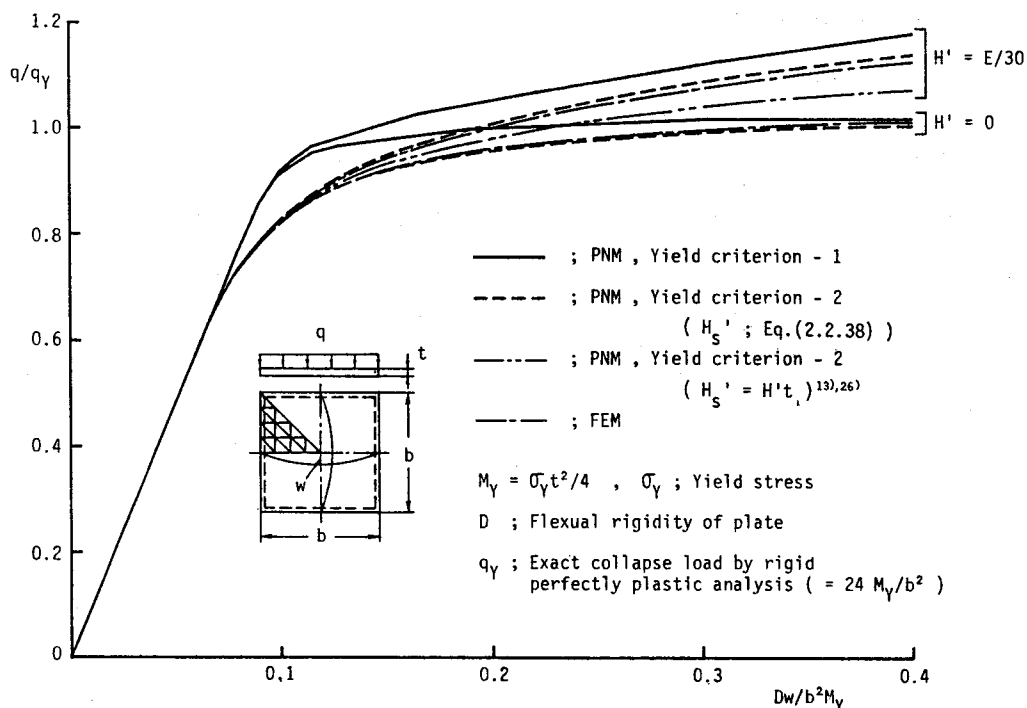


Fig. 9.3.1 Elastic-plastic behavior of a simply supported square plate under uniformly distributed lateral loads

Eidsheimら²⁶⁾の提案している $H_s' = H' t$ を用いて解析した結果であるが、この H_s' は歪硬化の影響を過小評価しているようである。

計算時間は、塑性化判定基準－１を用いた場合が有限要素法解析の約 $1/8$ 、Eggerの降伏関数に関する収束計算（付録３－（２））を要する判定基準－２の場合が、約 $3/5$ であった。したがって、梁・柱要素の場合と同様、初期塑性化からの弾塑性挙動を詳しく求める必要のある場合、塑性化判定基準－２が効果的であるが、塑性崩壊荷重あるいは比較的塑性変形の進行した段階の挙動に注目する場合は塑性化判定基準－１が適していると考えられる。

9.3.3 面内圧縮を受ける正方形板の座屈崩壊

Fig.9.3.2 に、初期たわみを有する薄板および厚板の座屈崩壊解析結果を示す。本解析は8.4.3項と同じ解析対象について行った。すなわち、境界条件は周辺単純支持、初期たわみは板厚の $1/100$ とした。また材料は完全弾塑性体と仮定した。但し、ここでは塑性化判定基準－２により断面の塑性化を初期塑性化から考慮する場合も解析した。

Fig.9.3.2(a)の薄板の場合、いずれの塑性化判定基準を用いた塑性節点法によっても、有限要素法解析結果と良く一致した崩壊荷重が得られている。この結果は、圧縮力による薄板の座屈崩壊が非載荷辺中央部における膜力による全断面塑性化を支配的要因として起きることから理解できる。一方、Fig.9.3.2(b)の厚板の場合、板厚方向のわずかな塑性域の広がりや崩壊につながるが、これを考慮しない塑性化判定基準－１による解析では、高めの崩壊荷重が得られている。しかし判定基準－２によれば、このような問題に対しても精度の良い崩壊荷重が求められている。このように、Eggerの降伏関数を用いれば、塑性節点法で効率良く板やシェルの塑性座屈問題を解析できることが明らかとなった。

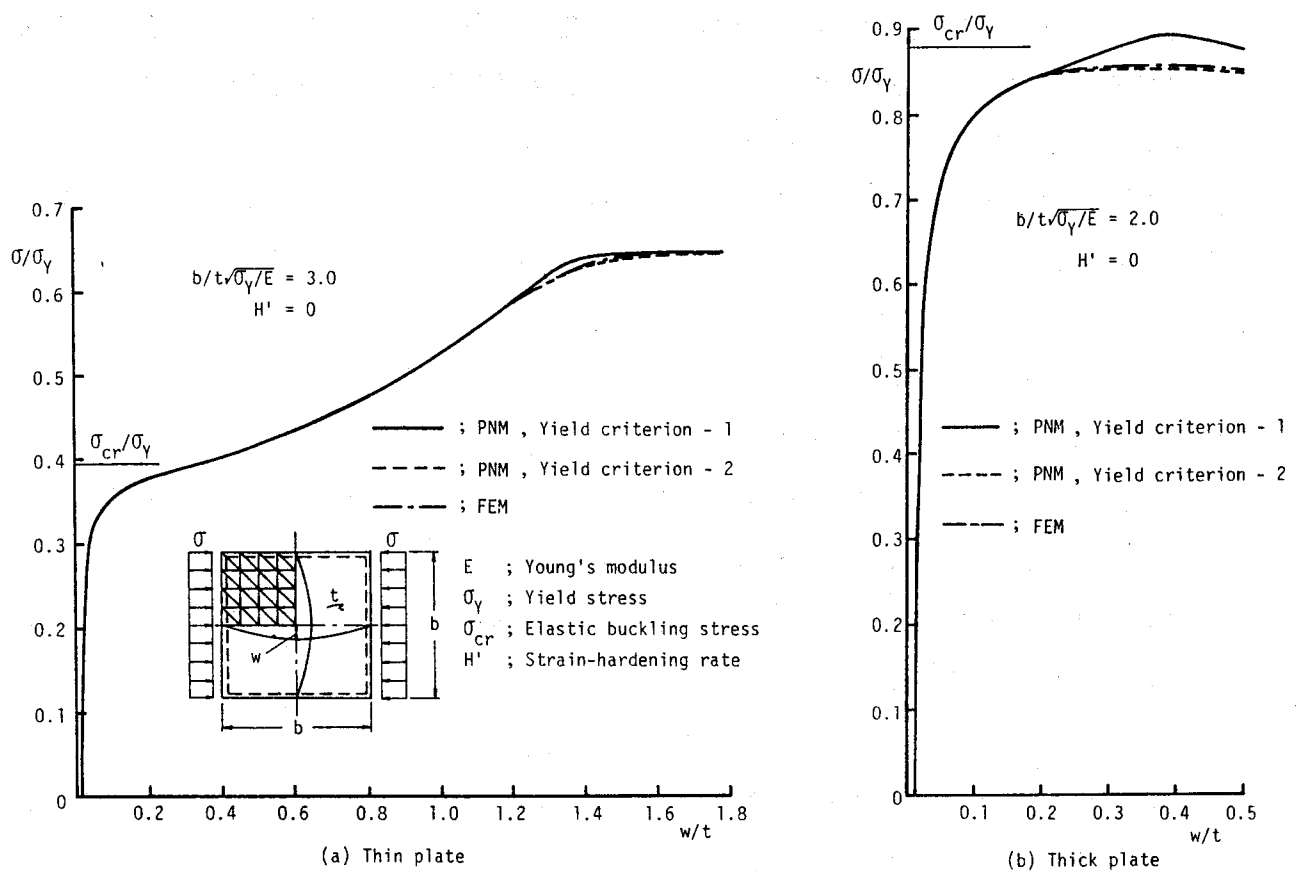


Fig. 9.3.2 Elastic-plastic large deflection behavior of square plates under thrust

9.4 結言

本章では、第2章で展開した理論を用いて歪硬化体の静的弾塑性解析を行った。そして合応力表示型塑性条件に対して提案した断面歪硬化係数の妥当性、および要素内部の歪硬化の影響を節点に縮約した節点変位歪硬化係数の妥当性を調べると共に本解析理論の精度と計算効率について検討を加えた。主な結論を以下に示す。

(1) 9.2 節では、骨組構造物の弾塑性挙動を梁・柱要素を用いて解析した。

矩形断面片持梁の解析では、まず断面の曲げモーメント・曲率関係を精度良く表せることが保証されている Eggerの降伏関数を塑性条件に用いて1要素で曲げ崩壊解析を行い、精度の良い荷重・たわみ関係を得た。これより本解析法の精度に及ばず塑性条件以外の影響因子、すなわち要素の塑性歪場の評価法とここに生じる歪硬化の影響の節点への縮約法（節点変位歪硬化係数の評価法）の妥当性が検証された。

- (2) 次に、片持梁に軸力と曲げ荷重が種々の荷重比で作用する場合を材料の歪硬化を考慮して解析し、式(2.2.18)の梁・柱要素の断面歪硬化係数 H_0' の妥当性を示すと共に、これを用いた塑性節点法の精度と計算効率両面の優れた適用性を示した。
- (3) 門型および二層ラーメンの塑性崩壊解析を行い、本解析法の一般の不静定構造物への適用性を明らかにした。
- (4) 9.3 節では、平板の弾塑性解析を実施した。微小曲げ崩壊解析ではシェル要素に対する Egger の降伏関数および式(2.2.38)の断面歪硬化係数 H_0' の妥当性と、これらを用いた塑性節点法の適用性を明らかにした。
- (5) 面内力と曲げモーメントの連成応力場にある平板の崩壊問題として、平板の座屈崩壊挙動を解析した。そして Egger の降伏関数を用いることにより、厚板の塑性座屈問題も非常に精度良く解析できることを示した。骨組構造物の場合を含めて、一般に座屈崩壊問題では塑性化判定基準-2 が適している。

以上の結果、歪硬化体の弾塑性解析への塑性節点法の精度の良い適用性が確認された。塑性変形の縮約という塑性解析的取り扱いを有限要素法に取り入れた弾塑性解析法は従来より種々提案されているが、いずれも対象とし得る構造形状が限定されたり、材料を完全弾塑性体と仮定する必要がある等の適用限界を有した。しかし本解析法にはこのような制約は一切なく、極めて適用範囲の広い、かつ効率良い弾塑性解析法であると結論できる。

第 10 章 熱弾塑性および動的弾塑性解析

10.1 緒言

第3章の熱弾塑性解析理論および第4章の動的弾塑性解析理論を基に、基本的な例題を解析し、塑性節点法の熱弾塑性および動的弾塑性問題への適用性を調べる。

10.2 節では、長方形双1次平面要素を用いて熱弾塑性解析を行う。この要素の応力は要素内部で線形に変化する。始めに、応力分布と同様に温度分布も要素内で線形に変化するとして温度変化を与えた時の熱応力の履歴を1要素で解析し、要素の適用性を調べる。次に実際的な問題として平板の突合せ溶接継手の溶接残留応力の解析を行う。

10.3 節では、動的弾塑性問題として衝撃横荷重を受ける梁や平板の曲げ崩壊挙動を解析する。4.3.1 項(1)では、慣性力の取り扱い方にランプト・マス法、コンシステント・マス法-1 および 2 の3通りあることを述べた。そこで各慣性力の評価法に基づいて解析を行い、その適用性を比較検討する。

いずれの解析でも、得られた結果を有限要素法による結果と比較し、塑性節点法の解析精度と計算効率を検討する。

10.2 熱弾塑性解析

10.2.1 解析の手順

長方形双1次平面要素の応力は要素内で線形に変化し節点で極大となる。ここでは応力分布と同様に温度分布も要素内で線形に変化するとして解析し、複雑な応力あるいは温度場の問題に対して、少数の要素で解析できる可能性を検討した。また塑性化は節点で判定した。

Fig.10.2.1に解析に用いた材料の力学的性質を示す。力学的熔融温度（冷却時、剛性回復温度）を750℃とし、それ以上の温度域では材料は変形抵抗を有さず、それ以下では図のような温度依存性を示すものとした。ここでは高張力鋼等に見られる相変態は無視した。また、瞬間線膨張率 α はヤング率 E や降伏応力 σ_Y と比べると温度依存性は小さいためここでは一定とした。この結果、歪は温度分布と同様に要素内で線形に変化し、長方形双1次要素の境界変位の適合条件は熱変形についても満足される。なお温度750℃以下ではヤング率、降伏応力とも温度に依存して要素内で変化するとしたが、750℃以上で

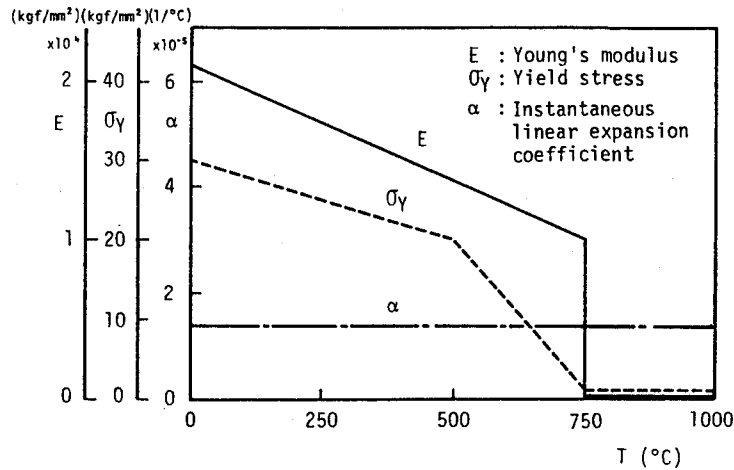


Fig. 10.2.1 Mechanical properties

は、解を安定化するため4つの節点の平均温度に対するヤング率を要素内一定として解析した。

10.2.2 長方形双1次平面要素の熱弾塑性解析への適用性

まず、長方形双1次平面要素の適用性を調べる。1要素を用いてFig.10.2.2に示す境界条件のもとで温度変化を与えた。図のように、x軸方向には一様でy軸方向に線形変化する温度分布（要素上辺が高温側(T_1)、下辺が低温側(T_2))を考え、時間 $t = t_m$ で最高温度分布となり、以後上昇過程と逆の温度履歴をたどって元の温度まで冷却されるものとした。このような温度変化に伴う要素の熱膨張および収縮は拘束されるため、要素には熱応力が生じる。Fig.10.2.2に示すように、まず高温側の上下節点の圧縮応力が降伏応力に達して塑性化し、続いて低温側の節点も塑性化する。冷却過程に入ると上下辺共に除荷を起こし、その後順次引張で塑性化して最後に引張応力が残留する。以上の結果は有限要素法による詳細な熱弾塑性解析結果と良く一致することが確かめられている。このように本要素では、要素内で歪および温度の線形変化を考慮できるため、1要素でも精度の良い熱応力の履歴が求められ適用性が高いことが明らかになった。

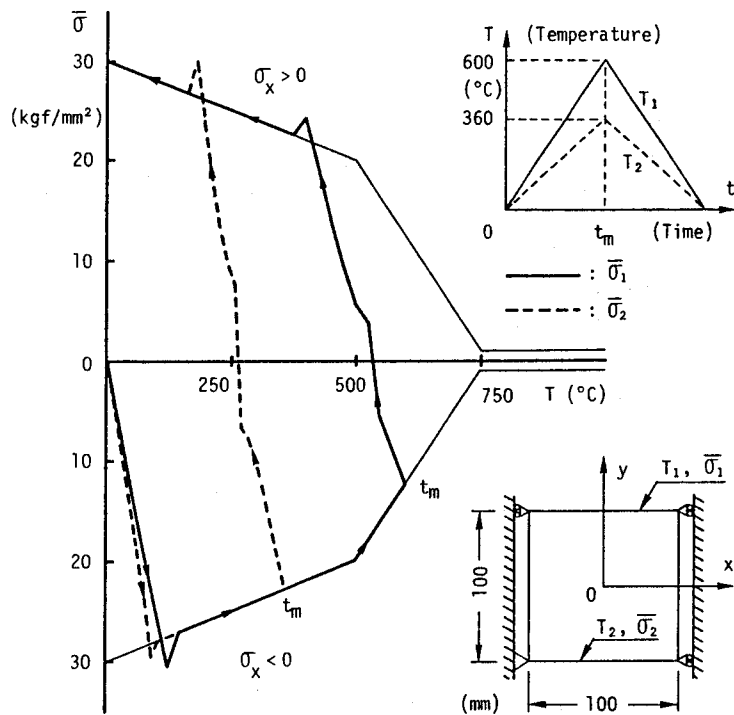


Fig. 10.2.2 Histories of thermal stresses produced along upper and lower boundaries of the linear-strain rectangular plane element

10.2.3 平板の突合せ溶接継手の残留応力の解析

塑性節点法による熱弾塑性解析例として、Fig.10.2.3に示す平板の突合せ溶接で、溶接が溶接線上瞬間熱源で行われたと仮定した場合を解析した。溶接条件を板の寸法と共に図中に示す。対称性を考慮してFig.10.2.3に破線で示すような溶接線に垂直方向の細長い片を解析領域とした。境界条件は、破線で示す片の側面を常に平面に保ち、溶接部が剛性、すなわち変形抵抗を示さない時期は、その面が平行移動と回転を起こすとし、剛性を回復すると回転変位は拘束され平行移動のみ生じるものとした。

解析はまず要素内の歪および温度が一定の三角形平面要素を用いて有限要素法で行った。この解を厳密解として比較の対象とするため、板幅方向（細長片の長さ方向）に充分細かく40分割し、計80要素を用いた。次に長方形要素を用いた塑性節点法による解析では、要素内の応力および温度分布の精度が高いので、Fig.10.2.3に示すように板幅方向に10分割するだけとした。

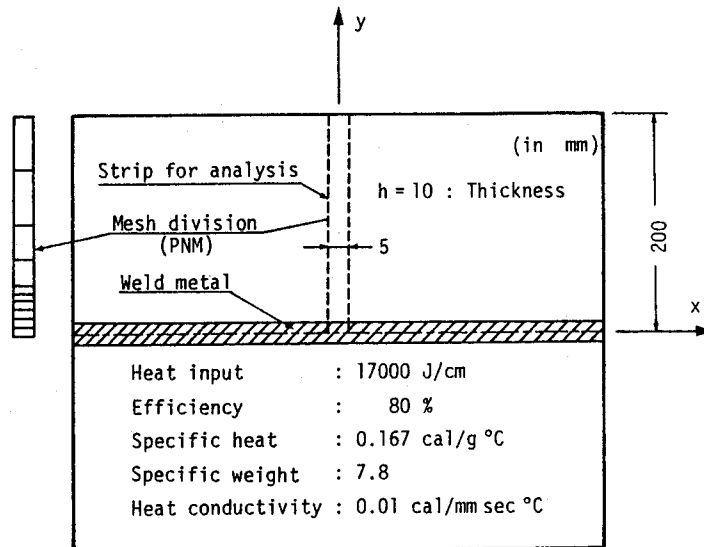


Fig. 10.2.3 Model for thermal elastic-plastic analysis (Butt weld)

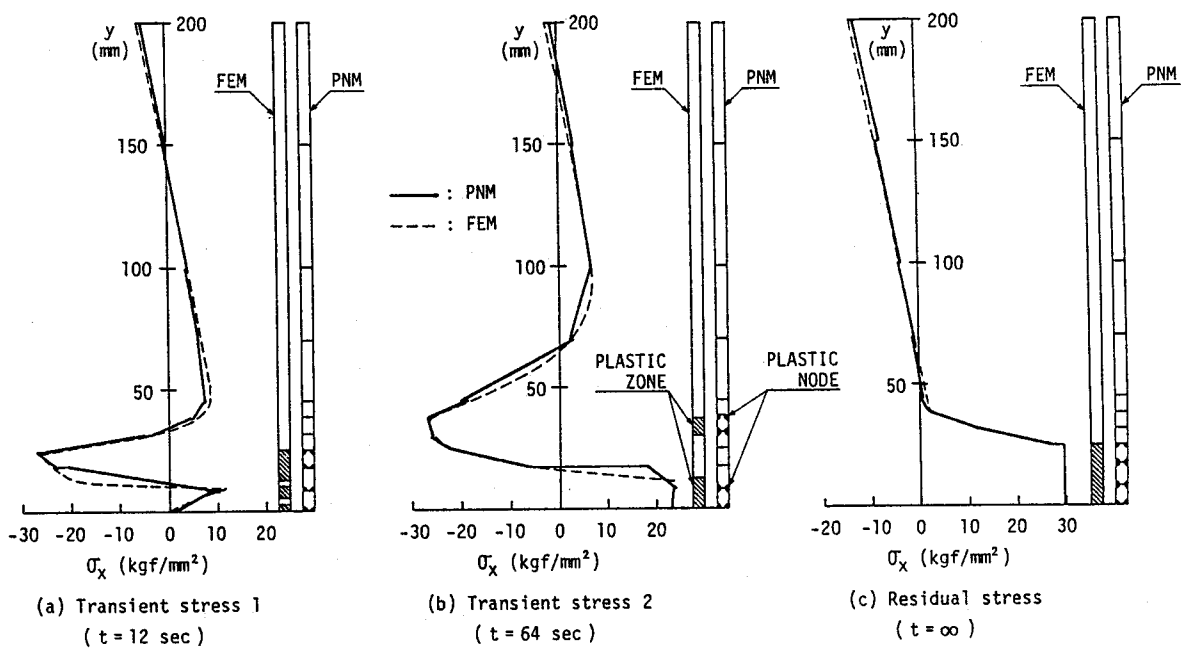


Fig. 10.2.4 Distributions of transient and residual stresses

以下解析結果を示す。まず有限要素法による結果をFig.10.2.4に破線で示す。Fig.10.2.4は溶接線方向応力の板幅方向の分布を示したもので、過渡および残留応力をその時点での塑性化領域と共に示している。同図(a)は溶接部が剛性を回復した直後で、その後(b)のように変化し、(c)は残留応力分布である。このFig.10.2.4に塑性節点法の結果を実線で示す。また各時点での塑性化節点の生成状態も併せ示す。要素内で応力が変化していること、また節点の位置により温度が異なるため降伏応力が異なることにより、同じ要素内でも塑性化節点と弾性の節点が見られる。2つの解析法による結果を比較すると、過渡および残留応力分布、また塑性化の状態とも非常に良く一致しており、本解析法は要素内で歪および温度が変化する精度の高い要素への適用が容易であることより、かなり粗い要素分割でも高い精度の解が得られることが判明した。

10.3 動的弾塑性解析

10.3.1 解析の手順

動的弾塑性問題として衝撃横荷重を受ける梁および平板の曲げ崩壊挙動を解析した。梁要素、板曲げ要素とも節点で塑性化を判定し、材料を完全弾塑性体と仮定した場合の塑性化判定基準-1を用いた。比較のため層分割法による有限要素法解析も行った。いずれの解析でも変形は微小とし、さらに減衰は無視している。

式(4.3.22)および式(4.3.28)の時間積分には4.3.2項に示した Newmarkの β 法を用いた。パラメータ β には主として $\beta = 1/6$ を採用したが、この場合、解は時間増分に対して条件安定となる。そこで時間増分を種々変化させてまず弾性解析を行い、系の弾性状態での最高次固有周期の約 $1/2$ を選ぶことにより安定かつ良好な精度の弾性解が得られることを確認した。これを弾塑性解析にも採用した。塑性化が生じると剛性の低下により系の最高次固有周期は長くなる。したがって、弾性状態の固有周期を基準に時間増分を選べば、弾塑性状態で Newmarkの β 法の安定性が損なわれることはない。また一般に動的弾塑性挙動においては振動に起因して塑性化部で除荷、再負荷が繰り返される。このため解析に当たっては除荷、再負荷の判定を厳密に行い、各時間ステップ毎に正しい平衡状態を求めつつ時間積分を行った。

10.3.2 両端固定梁の衝撃曲げ崩壊

両端固定の矩形断面梁にステップ状の中央集中荷重が作用する問題を解析した。Fig.10.3.1に解析モデルおよび梁中央のたわみの時刻歴を示す。荷重の大きさは静的崩壊荷重の80%とし、最初の一時間増分間(0.0009msec)に立ち上がり、以後一定荷重として作用し続けるものとした。

4.3.1項で述べたように、塑性節点法の場合、慣性力の取り扱い方に次の三つの方法がある。

(I) ランプト・マス法 ; 式(4.3.1)

(II) コンシステント・マス法-1 (塑性変形が節点に縮約されていると考える場合)
; 式(4.3.6)

(III) コンシステント・マス法-2 (塑性変形が要素内に分布していると考えられる場合)
; 式(4.3.8)

この内、(I)のランプト・マス法と(III)のコンシステント・マス法-2は通常の有限要素法におけるランプト・マス法およびコンシステント・マス法と同じ慣性力の評価法である。他方、コンシステント・マス法-1は塑性変形が節点に縮約される塑性節点法の特性を厳密に考慮した本解析法特有の取り扱い方である。ここでは、まず(I)および(III)、すなわち塑性節点法と有限要素法で同じ形式の慣性力を用いる場合について両解析法の結果を比較し、本解析法の動的問題に対する基本的な適用性を調べる。具体的には、ランプト・マス法よりも一般に精度が高いとされるコンシステント・マス法を両解析法に適用する。Fig.10.3.1(a)に解析結果を示す。パラメータ β は $\beta = 1/6$ とした。

まず、部材を長さ方向に20要素に等分割した場合の塑性節点法の結果(実線)と有限要素法の結果(破線および一点鎖線)を比較する。有限要素法では、各要素を深さ方向に20層に等分割しただけの場合(EL-I)と、さらに長さ方向にも10分割して弾塑性の領域判定をより厳密にした場合(EL-II)の二つの要素内分割を考えた。

全ての解析を通じて初期塑性化は部材中央に生じ、その後中央および両固定端が全断面塑性化した後、最大変位に達している。時刻Stage-CおよびDでの塑性域の様子を同図に併せ示す。最大変位には各解析ケースで若干の違いが見られるが、塑性節点法は、有限要素法で弾塑性の領域判定の精度を高めたEL-IIの場合に近い結果を与えている。またEL-IからEL-IIへの収束の方向を見ると、有限要素法でさらに要素数や塑性化判定領域数を増した場合、両解析法の結果はより近づくものと考えられる。この点は上田らに

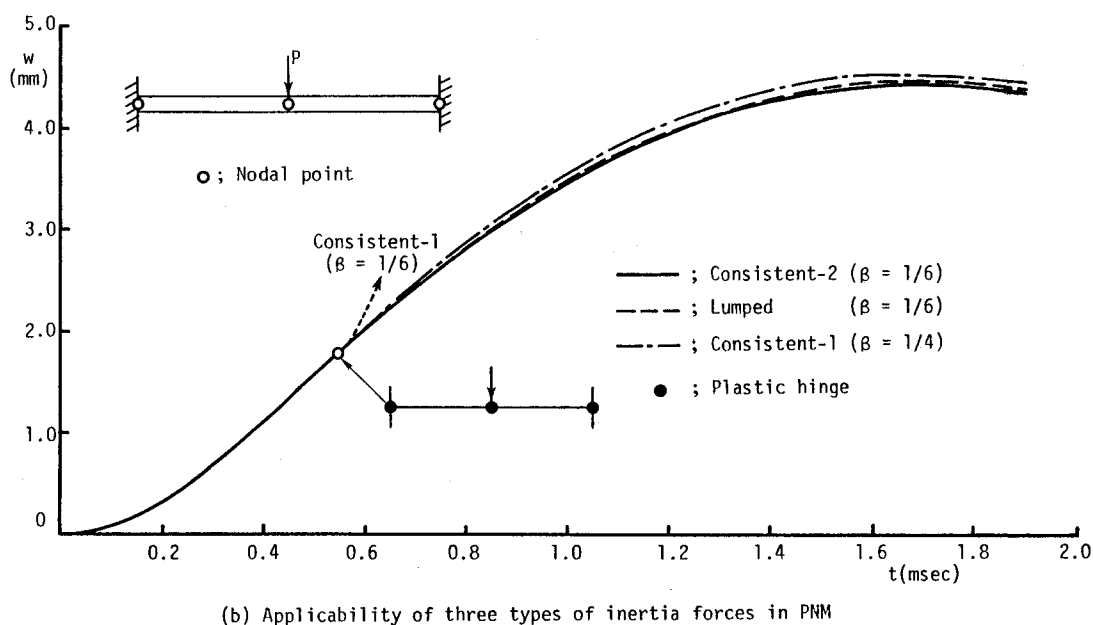
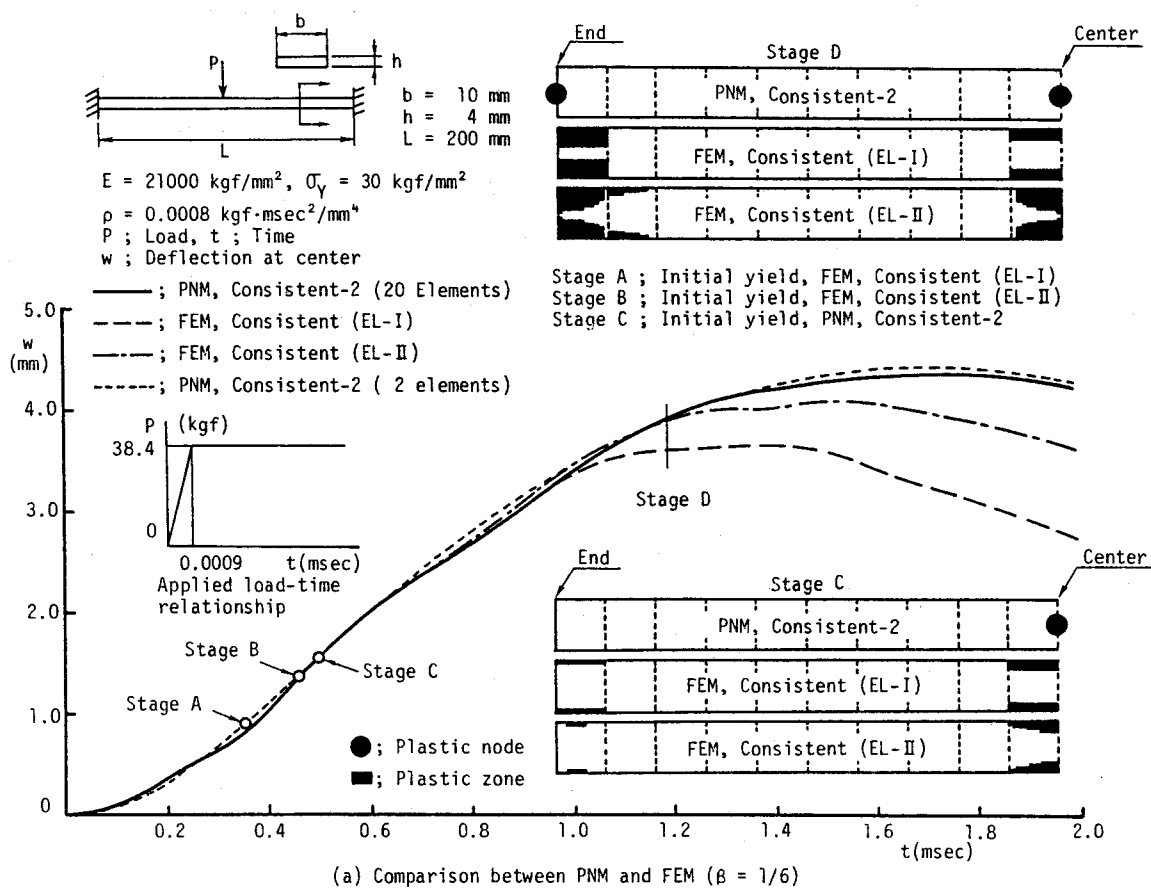


Fig. 10.3.1 Time histories of deflection of a beam fixed at both ends under centrally concentrated lateral impact load

よっても確かめられている²⁷⁾。これより塑性節点法の良い解析精度が確かめられた。

ところで、有限要素法では弾性、塑性を通じて要素間およびその内部の変形の連続性が要求される。この連続性の条件は、要素分割を無限に細かくした極限における解の収束性を保証するが、反面、本例の如く塑性変形が局部的に集中するような現象の場合、よほど分割を細かくしない限り実際の変形を変位関数によって拘束することになる。換言すれば要素分割が粗い場合、解析精度が極端に低下する。これに対し、塑性節点法では塑性変形は節点に縮約されるため局部的な変形の集中を容易に表現できる。したがって崩壊機構における塑性関節の形成位置に節点が位置すれば、必要最小限の要素分割数で十分な精度の解が得られる可能性がある。

以上の点を明らかにするため、部材をその中央で2要素のみに分割したモデルを用いてコンシステント・マス法-2により解析した。結果をFig.10.3.1(a)に点線で示す。最大変位を始めとして変形の時刻歴は実線の20要素の場合と良く一致している。要素数が少ないため実線に見られる振動の高次成分は追跡できていないが、一般に動的弾塑性問題では高次の応答波形よりも最大変位や残留変形および系の吸収エネルギーの評価が重要であり、これらについては高い精度の応答量が求められている。

次に冒頭に述べた塑性節点法における三つの慣性力の評価法の適用性を調べる。ここでは部材を2要素に分割した。Fig.10.3.1(b)に各慣性力を用いて得られた結果を合わせて示す。実線はコンシステント・マス法-2の結果であり、Fig.10.3.1(a)の点線と同じものである。これと破線のランプト・マス法の結果を比べると両者は極めて良く一致している。ランプト・マス法では回転慣性を無視するため、一般にコンシステント・マス法より精度が劣るとされるが、このような粗い分割でも高精度の解が求められることが判明した。このことは衝撃横荷重を受ける梁の挙動に対して支配的な慣性力が、たわみ方向の慣性力であることを同時に示唆している。

一方、コンシステント・マス法-1によっても一点鎖線で示すように良好な精度の解が得られており、式(4.3.6)の慣性力の妥当性が検証された。但し上記の二つの慣性力の場合、Newmarkの β 法のパラメータ β を $\beta = 1/6$ としても、 $\beta = 1/4$ としても安定な解が得られたのに対し、コンシステント・マス法-1では $\beta = 1/6$ では初期塑性化後、慣性力が急増し解が発散する結果となった。Fig.10.3.1(b)の一点鎖線のみは $\beta = 1/4$ の結果である。4.3.2項(1)に述べた如くNewmarkの β 法では、 $\beta = 1/6$ の場合、解は時間増分に対して条件安定、 $\beta = 1/4$ では無条件安定である。このように安定性については本

来 $\beta = 1/4$ が優るが、ランプト・マス法およびコンシステント・マス法-2 では $\beta = 1/6$ で安定な解が得られたことから察して、発散はコンシステント・マス法-1 自体に数値解析上の不安定性が内在するためと考えられる。この点は今後の検討課題である。

以上、梁の衝撃曲げ崩壊問題を対象に塑性節点法の動的問題への適用性を検討した。コンシステント・マス法を塑性節点法に適用する場合2つのタイプが考えられ、その内タイプ-1 は塑性変形が節点に縮約される本解析法の変形機構を厳密に考慮した慣性力の評価法であるが、タイプ-2 に比べやや数値解析上の安定性に欠ける。しかし安定な応答が得られる場合の解の精度は非常に高い。一方塑性歪が要素に分布するとしたコンシステント・マス法-2 および質量を節点に集中させたランプト・マス法は、慣性力を要素の変形機構と切り離して評価した近似的取り扱いであるが、いずれも安定かつ精度の高い適用性を有することが確認された。さらに塑性節点法によれば、非常に少ない要素数で精度良く動的弾塑性挙動を追跡できることが判明した。

なお、塑性節点法で要した計算時間は有限要素法の約 $1/5$ であった。

10.3.3 正方形板の衝撃曲げ崩壊

Fig.10.3.2に示す周辺単純支持正方形板にステップ状の等分布横荷重が作用する場合を解析した。荷重は静的崩壊荷重の80%とし、時間増分は0.013msec に設定した。要素には7.3.2項の Bazeleyの非適合板曲げ要素を用いた。梁要素と異なり本要素では各節点の応力は要素の全節点の節点力の関数となる。したがって、1つの節点が塑性化した場合も塑性変形は全節点に現れる。有限要素法による解析では各要素を板厚方向に20層に等分割し、各層の重心点で塑性化を判定した。

Fig.10.3.2に板中央のたわみの時刻歴を示す。解析は図中の5ケースに対して実施した。コンシステント・マス法-1 に基づく塑性節点法の解析では、 $\beta = 1/6$ 、 $1/4$ の両ケースとも初期塑性化後しばらくして解が発散したが、他の4ケースの場合はいずれの β を用いても安定な応答が得られ、その時刻歴は良く一致している。これより塑性節点法の平板の動的弾塑性解析に対する適用性が確かめられた。この例からも分かるように、塑性節点法にコンシステント・マス法を適用する場合、解の安定性と慣性力の定式化の容易さの両面でコンシステント・マス法-2 が実用上適していると言える。

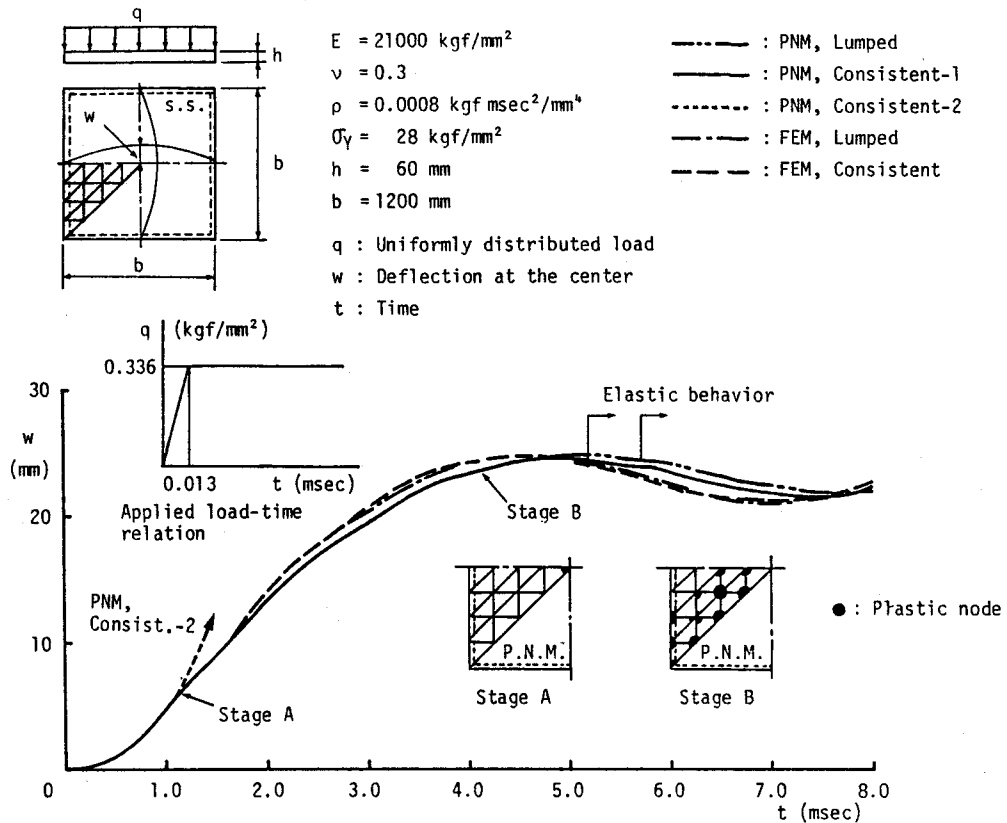


Fig. 10.3.2 Time histories of deflection of a simply supported square plate under uniformly distributed lateral impact loads

10.4 結言

本章では塑性節点法の熱弾塑性および動的弾塑性解析への適用性を調べた。

- (1) 10.2 節では、平板の熱弾塑性挙動を要素内で応力が線形に変化する長方形双1次平面要素を用いて解析した。ここでは応力と共に温度も要素内で線形変化すると考え、これらが極大となる節点で塑性化を判定することにより、1要素のみで線形の温度分布場の熱応力履歴を精度良く解析できることをまず明らかにした。
- (2) 次に材料が剛性を失う力学的溶融温度まで温度が上昇するような、温度変化の激しい場の熱弾塑性解析として、平板の突合せ継手の熱応力履歴と残留応力の解析を行った。そして上記の長方形要素を用いることにより、かなり粗い要素分割で精度の高い解が得られることを明らかにした。
- (3) 10.3 節では、動的弾塑性問題として両端固定梁に中央集中荷重が、また周辺単純

支持平板に等分布荷重が衝撃的に加わる場合をそれぞれ解析した。慣性力の評価法としてランブト・マス法およびコンシステント・マス法－２を用いた塑性節点法と通常の有限要素法の結果は良く一致し、本解析法の精度の高い適用性が確認された。一方、コンシステント・マス法－１は理論的に最も厳密な慣性力の評価法であり、解の精度も高いが、数値積分法によっては解が不安定になる場合がある。

- (4) 塑性節点法では塑性変形が節点に縮約される。骨組構造物の場合、この節点の塑性変形は塑性解析法に言う塑性関節機構に対応する。したがって、塑性関節の生じる位置に塑性化判定点が設定されておれば、非常に少ない要素数で十分な精度の動的弾塑性解析を行える。

総括

近年、構造物の強度上の安全性と信頼性を検討する上で、弾性応力解析のみならず塑性化等の材料非線形性を考慮に入れた弾塑性解析の重要性が増してきている。このような弾塑性解析のための有効手段に有限要素法があり、既に構造物の弾塑性挙動に対する非常に精度の高いシミュレーション手法としての位置づけを確立している。しかし要素の剛性マトリックスを数値積分により計算するため、対象が大規模、複雑化した場合、莫大な計算時間を要するために解析不能な事態にしばしば至ることも事実である。このため、より計算効率の優れた弾塑性解析法の開発が待たれている。

ところで、塑性変形を塑性関節や塑性関節線の形に単純化して取り扱う塑性解析法は、対象としうる構造形状に限界があるものの、極めて簡潔にまた短時間に構造物の弾塑性挙動を把握できる利点を有している。そこで本研究では、有限要素法の汎用性を維持しつつ計算効率の大幅な向上を図る目的で、有限要素法に塑性変形の縮約という塑性解析的取り扱いを一般的に取り入れることのできる新しい弾塑性解析理論として、塑性節点法を開発した。そして一連の解析を通じて、本解析理論の有効性について検討を行った。

本研究で得られた結果をまとめると、以下の通りである。

第1編では、塑性節点法の理論を6章にわたって展開した。

[1] 第1章では、基礎理論として完全弾塑性体の静的弾塑性解析理論を展開し、微小変形の場合と大変形を考慮する場合のそれぞれに対して弾塑性剛性方程式を定式化した。さらに要素の塑性変形と剛性に関する考察を基に、本解析理論の妥当性と弾塑性解析法としての理論的位置づけを明らかにした。塑性節点法の特徴は次のようにまとめられる。

- (1) 弾性解析は通常の有限要素法と一致する。
- (2) 塑性化判定点の塑性条件は要素の節点力の関数の形で定義される。これを塑性ポテンシャルと見なして塑性流れ理論を適用することにより、要素には塑性変形が塑性節点変位の形で節点に縮約されて現れる。他方、要素内部は常に弾性挙動をする。
- (3) 弾塑性剛性マトリックスをマトリックス演算のみで導出でき、数値積分は不要である。
- (4) 要素の剛性は、塑性節点変位を要素の節点変位・歪マトリックスに乗じて求まる塑

性歪が要素内部に分布するとした場合と等価である。また要素が一定歪あるいは一定曲率の状態全域塑性化すると、弾塑性剛性マトリックスは有限要素法によるものと完全に一致する。したがって、要素分割を無限に細かくして行くと解析結果は正解に収束する。

(5) 節点力が、要素境界の断面合応力に等しい場合には、節点力は物理的意味を有する。このような特性を持つ梁・柱要素、板曲げ要素および平面要素の場合、節点を塑性化判定点として本理論を適用すると境界断面に塑性関節、塑性関節線およびすべり線機構を導入できる。

[2] 第2章では、塑性節点法による歪硬化体の静的弾塑性解析理論を展開し、以下の結果を得た。

(1) 骨組やシェル構造の解析において、曲率などの一般化歪と曲げモーメントなどの一般化応力（合応力）の關係を用いて部材断面の歪硬化の影響を表すための、断面歪硬化係数を提案した。

(2) 部材の一点あるいは一断面の歪硬化を表す歪硬化係数は、応力あるいは合応力と塑性歪あるいは一般化塑性歪との増分比として定義される。一方、塑性節点法では塑性変形は節点に縮約され、歪ではなく変位の次元で現れる。そこで要素内部の歪硬化の影響を、要素の塑性仕事の観点から節点に縮約する手法を明らかにし、新たに塑性節点変位に対して有効な節点変位歪硬化係数を提案した。これを用いて歪硬化を考慮する場合も弾塑性剛性マトリックスをマトリックス演算のみで定式化できることを示した。

(3) 骨組やシェルにおける断面の初期塑性化から全断面塑性化に至る中間過程を、歪硬化と同様の現象として定式化できる合応力表示の降伏関数、すなわち Eggerの降伏関数を導入することにより、従来の塑性解析法では不可能であった初期塑性化から塑性化を考慮した解析を行えることを示した。

[3] 第3章では、熱歪の生成と材料の機械的性質の温度依存性を考慮した熱弾塑性解析理論を展開した。ここでは、塑性変形が節点のみに縮約され要素内部は常に弾性挙動する塑性節点法の特性を考慮して、温度変化の影響を要素の体積変化および弾性剛性に関するものと、節点での塑性挙動に関するものに分離して理論展開に取り入れた。

[4] 第4章では、塑性節点法による動的弾塑性解析理論を展開した。動的外力の内、慣性力に対してはランブト・マス法とコンシステント・マス法の二つの評価法を取り上げた。特に後者については、塑性変形が節点に縮約される本理論の特性を厳密に考慮する場合

(コンシステント・マス法-1)と、要素内部に塑性歪が分布すると仮定する場合(コンシステント・マス法-2)の二通りの考え方を示し、動的弾塑性剛性方程式を定式化した。

[5] 第5章では、第1章から第4章にわたる理論を統合した歪硬化体の動的熱弾塑性解析理論を展開した。そして歪硬化、温度変化および動的外力の影響の連成項を明らかにすると共に、塑性節点法によれば、このような複雑な弾塑性挙動の解析の場合も弾塑性剛性方程式をマトリックス演算のみで導出できることを明らかにした。

[6] 第6章では、第1章および第2章に展開した静的弾塑性解析理論を要素径間に荷重を受ける1次元要素に応用することにより、任意の径間および節点荷重を受ける骨組構造物の塑性崩壊挙動を、部材結合部のみに節点を配した最少個の要素分割で、歪硬化も考慮して精度良く解析できる理論を展開した。本理論は骨組構造物の塑性崩壊解析のための最も効率良い解析理論と結論できる。

第2編では、前編の理論に基づいて一連の解析を実施し、塑性節点法の有効性を検討した。

[7] 第7章では、第8章以降の解析に用いる有限要素を中心にいくつかの要素を取り上げ、これらに対する塑性節点法の適用法を具体的に明らかにした。まず要素の応力場の特徴を考察し、これを基に塑性条件と塑性化判定点の設定法を示した。続いて塑性節点変位の定式化に必要な塑性化判定点の応力と要素の節点力の関係式の導き方を述べると共に、各要素に現れる塑性変形について考察を加えた。

[8] 第8章では、骨組構造物から3次元塊体に至る種々の構造物に対して、材料を完全弾塑性体と仮定して静的弾塑性解析を行い、塑性節点法の基本的な適用性を調べた。得られた主な知見を以下に示す。

(1) 塑性化判定点の内力比は塑性条件を満足するよう自動的に調節される。内力の降伏曲面からのずれは荷重増分の粗さに依存する。一般に、荷重増分および要素分割を細かくしていくと解析結果は正解に収束する。

(2) 骨組構造物の塑性崩壊解析の結果、任意の径間および節点荷重を受ける骨組構造物の塑性崩壊挙動が、部材結合部のみに節点を配した最少個の要素分割で、極めて短時間に、また高精度に求められることが確認された。骨組の塑性曲げ崩壊解析の場合、本解析法は従来の塑性解析法と等価となる。但し本解析法によれば、組合せ応力下の塑性相

関関係をも考慮した解析を行える。

(3) 種々の平面および板曲げ要素を用いて平板の塑性崩壊解析を行い、塑性節点法の良好な解析精度と要素分割に対する解の収束性を確認した。Morleyの板曲げ要素を用いる場合、要素境界辺を含む要素の任意の断面での塑性関節線の形成を考慮でき、塑性解析法と等価な解が求められる。また平板の座屈崩壊解析を行い、本解析法の弾塑性大変形解析への適用性を確認した。

(4) 8節点六面体アイソパラメトリック要素による微小弾塑性解析を行い、塑性節点法の塊体要素への適用性を示した。本解析法では弾塑性剛性マトリックスがマトリックス演算のみで得られるため、積分次数の高い立体要素による解析に非常に効果的と考えられる。

[9] 第9章では、骨組構造物と平板を対象に歪硬化を考慮した静的弾塑性解析を行い第2章の理論の適用性を検討した。これらの結果より、

(1) 梁・柱要素およびシェル要素に対して提案した断面歪硬化係数の妥当性、および要素内部の歪硬化の影響を節点に縮約するための節点変位歪硬化係数の評価法の妥当性がそれぞれ検証された。

(2) Egger の降伏関数を用いることにより、骨組構造物や平板の弾塑性挙動を断面の初期塑性状態から追跡でき、さらに塑性座屈の如く断面内が部分的に塑性化した段階で崩壊に至る現象も精度良く解析できることが明らかとなった。

(3) これまで提案されている塑性解析的有限要素法は、いずれも材料を完全弾塑性体と仮定して定式化されており、適用しうる材料は軟鋼等に限定された。しかし塑性節点法にはこのような制約はなく、極めて多様な材料の解析に適用できる。

[10] 第10章では、熱弾塑性および動的弾塑性解析を実施した。

(1) 熱弾塑性問題として材料が剛性を消失する状態まで温度が上昇する温度変化の激しい溶接問題を取り上げ、平板の突合せ継手の残留応力の解析を行った。要素の任意の位置の塑性化を考慮できる本解析法の利点を生かして、要素内で応力と温度が共に線形変化する長方形双1次平面要素を用いた結果、かなり粗い要素分割でも精度の高い解が得られた。

(2) 動的弾塑性問題としては、梁や平板に衝撃横荷重が作用する場合の曲げ崩壊問題を取り上げた。慣性力の評価法に関して、コンシステント・マス法-1は塑性節点法の要素の塑性変形機構と最も適合した評価法であり解の精度も高いが、やや数値時間積分上

の不安定性が内在する。他方、ランプト・マス法およびコンシステント・マス法-2によれば安定かつ精度の高い解を求めることができ、本解析法の動的問題への適用性が確かめられた。また骨組構造物の解析の場合、塑性関節が生じる位置に塑性化判定点が設定された分割であれば、非常に少ない要素数で十分な精度の解析を行える。

以上のように、塑性節点法の精度と計算効率の両面の優れた適用性が確認された。

一般に有限要素法では、要素は節点で結合される。塑性節点法はこの節点に塑性変形を縮約して塑性挙動を表そうとするものであり、極めて自然な形で有限要素法と組み合わせることができる。実際、剛性マトリックスの作成に関するプログラムを一度用意しておけば、これをサブルーチンとして組み込むだけで、どのような要素に対する有限要素法解析プログラムも塑性節点法による弾塑性解析プログラムに簡単に修正できる。さらに弾塑性剛性マトリックスがマトリックス演算のみで得られる結果、計算効率は有限要素法に比べて大きく向上する。また解析精度も非常に高い。これらのことより、塑性節点法は有限要素法という離散化による近似解析法に非常に適した形に定式化された新しい概念の塑性理論とすることができ、有限要素法の持つ汎用性を考慮するとその適用範囲は非常に広いと考えられる。

一方、節点に縮約された塑性変位場（隣接要素の弾性領域間の不連続変位場）は要素の特性や塑性化の判定法によって様々な形態をとる。特定の有限要素の場合、この変位場は塑性解析法に言う塑性関節や塑性関節線機構を明確に表現することになる。この意味で、本解析法は塑性解析法やこれと有限要素法を組み合わせた従来の塑性解析的有限要素法を特定の場合として含む非常に一般化された弾塑性解析法であると言える。また、以上の塑性変形特性を積極的に利用することにより、コンクリートの崩壊解析、あるいは結晶微粒子のミクロ的なすべり現象の解析等にも応用できる可能性を有している。これらの問題への応用は今後の課題としたい。

最後に、本研究の数値計算には主として広島大学総合情報処理センターHITAC M-200Hを使用したことを付記する。

謝 辞

本研究は大阪大学溶接工学研究所教授 上田幸雄博士の御指導のもとに、同研究所弾塑性学部門ならびに広島大学工学部船舶海洋工学教室の教職員、卒業生の方々から数々の御協力を得て行われたものである。

特に、上田幸雄教授には研究の計画、実施、結果の検討など研究の全般にわたって終始たえまない御指導と御鞭撻を賜った。

また、広島大学工学部教授 為広正起博士には終始暖かい激励を頂くと共に、研究遂行上の数々の御便宜をお図り頂いた。

さらに本論文をまとめるにあたり、大阪大学工学部教授 松浦義一博士、福本喙士博士から有益な御指示と御討論を頂いた。

研究の当初においては、広島大学工学部助教授 矢尾哲也博士から多大なる御指導、御討論を頂いた。また大阪大学溶接工学研究所助手 中長啓治博士には、熱弾塑性および動的弾塑性解析理論の開発に際して数々の御援助、御討論を賜った。同研究所助教授 村川英一博士には、本研究に関する有益な御討論を頂いた。

さらに本研究遂行期間中、大阪大学大学院に在籍していた田伏範幸氏（石川島播磨重工業）、石川嘉一氏（日本鋼管）、広島大学大学院に在籍していた三浦正博氏（出光エンジニアリング）を始めとして多くの卒業生の方々から御援助を頂いた。

本研究は以上の方々の御指導と御協力を得てはじめてなしたものであり、本論文を終えるにあたり、これらの方々に心からの謝意を表します。

参考文献

- 1) 例えば, O.C.Zienkiewicz: 基礎工学におけるマトリックス有限要素法, 培風館, 1981, pp.369-382.
- 2) P.G.Hodge: Plastic Analysis of Structures, McGraw-Hill, 1959.
- 3) M.A.Save and C.E.Massonnet: Plastic Analysis and Design of Plates, Shells and Disks, 1972.
- 4) 堀田佳克: 塑性関節線による板の有限要素解析, 日本機械学会論文集, 第43巻 373号 (1977), pp.3246-3255.
- 5) Bäcklund: Proc. Conf. FEM in Civil Engng., McGill Univ., Montreal, 1972.
- 6) 山本善之, 大坪英臣, 栗生和夫: 有限要素法による平板構造物の簡易弾塑性解析法, 日本造船学会論文集, 第145号(1979), pp.125-131.
- 7) 渡辺正明, 川井忠彦: ハイブリッドストレスモデルによるすべり線, 塑性関節, 塑性関節線の表現, 日本造船学会論文集, 第147号(1980), pp.297-305.
- 8) G.M.McNeice and K.O.Kemp: Comparison of Finite Element and Unique Limit Analysis Solution for certain Reinforced Concrete Slabs, Proc. Inst. of C.E., Vol.43(1967).
- 9) 上田幸雄, 松石正克, 山川武人, 赤松毅人: マトリックス法による骨組構造物の弾塑性解析, 日本造船学会論文集, 第124号(1968), pp.183-191.
- 10) 上田幸雄, 赤松毅人, 近江義夫: マトリックス法による骨組構造物の弾塑性解析 (その2), 日本造船学会論文集, 第126号(1969), pp.253-262.
- 11) L.S.D.Morley: On the Constant Moment Plate Bending Element, J. Strain Anal., Vol.8(1971), pp.20-24.
- 12) H.Egger and B.Kröplin: Yielding of Plate with Hardening and Large Deformation, Int. J. Num. Meths. in Engrg., Vol.12(1978), pp.739-750.
- 13) 安川 度, 川上 肇, 吉川孝男: 初期不整を有する球殻の圧壊強度解析, 日本造船学会論文集, 第151号(1982), pp.197-207.
- 14) M.Robinson: A Comparison of Yield Surfaces for Thin Shells, Int. J. Mech. Sci., Vol.13(1971), pp.345-354.
- 15) 栖原二郎, 永野裕康: 弾塑性関節法による骨組構造の強度解析, 西部造船会会報, 第

45号(1972), pp.211-230.

- 16) E.L.Wilson : A Computer Program for the Dynamic Stress Analysis of Underground Structures, USAEWES, Contract Report No.1-175(1968).
- 17) 近藤一夫 : 骨組の弾塑性崩壊解析に於ける一離散化手法, 日本鋼構造協会第13回大会研究集会マトリックス解析法研究発表論文集(1979), pp.231-236.
- 18) R.W.Clough and J.L.Tocher : Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plates in Bending, Proc. of the Second Conference on Matrix Methods in Structural MEchanics(1969), pp.515-546.
- 19) G.P.Bazeley, Y.K.Cheung, B.M.Irons and O.C.Zienkiewicz : Triangular Elements in Bending - Conforming and Non-conforming Solutions, Proc. of the Second Conference on Matrix Methods in Structural MEchanics(1969), pp.547-576.
- 20) 鷲津久一郎 他 : 有限要素法ハンドブック I, 培風館(1981), pp.282-287.
- 21) 楠田忠雄 : 垂直荷重を受ける板の塑性設計について, 日本造船学会論文集, 第107号(1960), pp.195-202.
- 22) 鶴田彰介, 後藤大三, 本間康之, 藤井登喜男, 内野和雄 : 水圧を受ける平板の強度, 日本造船学会論文集, 第107号(1961), pp.305-316.
- 23) R. Hill : The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford Univ. Press, 1950, pp.106-125.
- 24) 栖原二郎, 永野裕康 : 材料の加工硬化特性を考慮した骨組構造物の弾塑性解析, 西部造船会会報, 第40号(1970), pp.171-190.
- 25) 栖原二郎, 永野裕康 : 補足エネルギーによる鋼骨組構造の弾塑性解析法, 西部造船会会報, 第62号(1981), pp.247-259.
- 26) O.Eidsheim, P.Lalsen : Nonlinear Analysis of Elasto-plastic Shells by Hybrid Stress Finite Element, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., Vol.34(1982), pp.989-1018.
- 27) 上田幸雄, 村川英一, 宇野清隆, 小椋 隆 : 衝突荷重下におけるフレーム構造の弾塑性応答解析, 日本造船学会論文集, 第158号(1985), pp.348-358.
- 28) 上田幸雄, 山川武人, 藤原昭文 : 有限要素法による、はり、柱、平板の弾塑性大たわみ解析 : 日本鋼構造協会第7回大会研究集会マトリックス解析法研究発表論文集(1968), pp.411-417.

本研究に関連した発表論文

- 1) 上田幸雄, 矢尾哲也, 藤久保昌彦: 塑性関節法の一般化に関する研究, 日本造船学会論文集, 第146号(1979), pp.307-313.
- 2) Y.Ueda, T.Yao and M.Fujikubo: Plastic Node Method for Plate Problems, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.30(1981), pp.163-180.
- 3) 上田幸雄, 中長啓治, 藤久保昌彦, 石川嘉一: 塑性節点法の熱弾塑性および動的弾塑性問題への適用, 日本造船学会論文集, 第153号(1983), pp.200-208.
- 4) Y.Ueda, K.Nakacho, M.Fujikubo: Application of the Plastic Node Method to the Thermal Elastic-plastic and Dynamic Problems, Comput. Meths. Appl. Mech. Engng., Vol.51(1985), pp.157-175.
- 5) 上田幸雄, 藤久保昌彦, 三浦正博: 塑性選点法の開発-塑性節点法の拡張-, 日本造船学会論文集, 第158号(1985), pp.328-339.
- 6) 上田幸雄, 藤久保昌彦, 為広正起: 径間荷重を受ける骨組構造物の弾塑性解析-塑性選点法の応用-, 日本造船学会論文集, 第158号(1985), pp.340-347.
- 7) 上田幸雄, 藤久保昌彦: 歪硬化を考慮した塑性選点法, 日本造船学会論文集, 第160号(1986), pp.306-317.

付録 1 大たわみを考慮した平面シェル要素の弾性剛性方程式

幾何学的非線形性を考慮した剛性方程式の定式化の例として、大たわみを考慮した平面シェル要素の弾性剛性方程式を導く²⁸⁾。

座標系と変位をFig.A.1.1のように定義する。面内変位 u, v および面外変位 w を生じた状態における変位・歪関係は次式となる。

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)\end{aligned}\tag{A.1.1}$$

各式の右辺第1項は面内変位による微小面内歪を、第2項は面外変位による微小曲げ歪を、さらに第3項は大たわみによる非線形面内歪を表す。

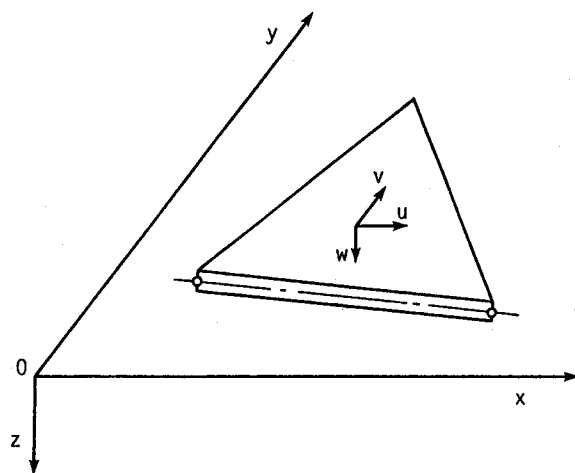


Fig. A.1.1 Coordinate system for plane-shell element

次に、要素の面内変位および面外変位に関する節点変位ベクトルをそれぞれ $\{s_n\}$, $\{w_n\}$ で表す。平面シェル要素は平面要素と板曲げ要素をそのまま合成して得られる。したがって、要素の面内変位 u, v は $\{s_n\}$ で、面外変位 w は $\{w_n\}$ で独立に規定され、式(A.1.1)の各偏微分項と節点変位の関係は次の形で表される。

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\}^T = [B_p] \{s_n\}$$

$$\left\{ \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial x} \right\}^T = [B_{b1}] \{w_n\} \quad (A.1.2)$$

$$\left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^T = [B_{b2}] \{w_n\}$$

マトリックス $[B_p]$ 、 $[B_{b1}]$ および $[B_{b2}]$ は要素の変位関数を適宜偏微分して得られる。式(A.1.2)を用いると、式(A.1.1)は次のようにマトリックス表示される。

$$\{\varepsilon\} = [B_p] \{s_n\} - z[B_{b2}] \{w_n\} + \frac{1}{2}[C_o][B_{b1}] \{w_n\} \quad (A.1.3)$$

ここで $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T$

$$[C_o] = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix}^T$$

1.5.2項、式(1.5.15)の $[B_L]$ は上式の $[B_p]$ および $-z[B_{b2}]$ に、また $[B_{NL}]$ は上式の $1/2[C_o][B_{b1}]$ に対応する。

今、ある荷重状態で歪 $\{\varepsilon\}$ が式(A.1.3)で表されているとする。この状態で次の荷重増分が与えられ変形が増加した状態での全歪は、

$$\begin{aligned} \{\varepsilon + d\varepsilon\} &= [B_p] \{s_n + ds_n\} - z[B_{b2}] \{w_n + dw_n\} \\ &\quad + \frac{1}{2} [C_o + dC_o][B_{b1}] \{w_n + dw_n\} \end{aligned} \quad (A.1.4)$$

したがって、この間の歪増分 $\{d\varepsilon\}$ は式(A.1.4)と式(A.1.3)の差として次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \{d\varepsilon\} &= [B_p] \{ds_n\} - z[B_{b2}] \{dw_n\} + [C_o][B_{b1}] \{dw_n\} \\ &\quad + \frac{1}{2} d[C_o][B_{b1}] \{w_n\} \end{aligned} \quad (A.1.5)$$

1.5.2項、式(1.5.16)の $[B]\{du^o\}$ は上式右辺の第3項までは、 $d[B_{NL}]\{du^o\}$ は第4項に対応する。

歪増分 $\{d\varepsilon\}$ による応力増分 $\{d\sigma\}$ は、

$$\{d\sigma\} = [D^o] \{d\varepsilon\} \quad (A.1.6)$$

ここで、 $[D^o]$; 弾性の応力・歪マトリックス

さて、節点力 $\{x + d x\}$ の作用下で応力 $\{\sigma + d \sigma\}$ が生じている要素が平衡状態にあるためには、仮想仕事の原理より次式が成立せねばならない。

$$\{\delta d u\}^T \{x + d x\} = \int_V \{\delta d \varepsilon\}^T \{\sigma + d \sigma\} d V \quad (A.1.7)$$

ここで、

$$\{u\} = \{s_n w_n\}^T$$

$\{\delta d u\}$; 仮想節点変位増分

$\{\delta d \varepsilon\}$; 仮想歪増分

仮想歪増分 $\{\delta d \varepsilon\}$ は式(A.1.5)を増分量に関して変分して、

$$\begin{aligned} \{\delta d \varepsilon\} = & [B_p] \{\delta d s_n\} - z [B_{b2}] \{\delta d w_n\} \\ & + [C_o] [B_{b1}] \{\delta d w_n\} + d [C_o] [B_{b1}] \{\delta d w_n\} \end{aligned} \quad (A.1.8)$$

式(A.1.5)、式(A.1.6)および式(A.1.8)を式(A.1.7)に代入し、増分の二次以上の高次項を微小項として無視すると、弾性剛性方程式が次のように得られる。

$$\{d x\} + \{R\} = [K_I] \{d u\} \quad (A.1.9)$$

ここで、

$$\{R\} = \{x\} - \{F\} ; \text{荷重修正項}$$

$$[K_I] = [K_{pp}] + [K_{bb}] + [K_{pb}] + [K_{bp}] + [K_I] + [K_G]$$

; 弾性接線剛性マトリックス

$$\{F\} = \int_V ([B_p] + [C_o] [B_{b1}])^T \{\sigma\} d V$$

$$[K_{pp}] = \int_V [B_p]^T [D^*] [B_p] d V$$

$$[K_{bb}] = \int_V z^2 [B_{b2}]^T [D^*] [B_{b2}] d V$$

$$[K_{pb}] = [K_{bp}] = \int_V [B_p]^T [D^*] [C_o] [B_{b1}] d V$$

$$[K_I] = \int_V [B_{b1}]^T [P] [B_{b1}] d V$$

$$[K_G] = \int_V [B_{b1}]^T [C_o]^T [D^*] [C_o] [B_{b1}] d V$$

$$[P] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

なお、式(A.1.9)は要素に固定した局部座標系に対して定式化されている。したがって、構造全体の解析のためには各要素の剛性方程式を全体座標系に変換した後、足し合わせる必要がある。式(1.5.19)の弾塑性剛性方程式についても同様である。

付録2 塑性関節、塑性関節線およびすべり線機構を有する要素の弾塑性剛性方程式

1.6.2項に例を挙げた、節点力が要素境界断面の合応力に一致する有限要素において、 k 個の節点（断面）が塑性化した状態を考える。弾塑性剛性方程式は塑性変形の現れない節点変位に関する成分 α (式(1.6.10)の $d v_{i\alpha}^p$, $d \theta_{i\alpha}^p$ および $d v_{m\alpha}^p$ に対応) と、塑性変形の現れる節点変位に関する成分 β (式(1.6.10)の $d \theta_{m\beta}^p$ に対応) に分けて次のように表せる。

$$\{d x\} = [K^\circ] \{d u\} \quad (A.2.1)$$

ここで、 $\{d x\} = \{d x_\alpha \ d x_\beta\}^T$

$$\{d u\} = \{d u_\alpha \ d u_\beta\}^T$$

$$[K^\circ] = \begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha}^\circ & K_{\alpha\beta}^\circ \\ K_{\beta\alpha}^\circ & K_{\beta\beta}^\circ \end{bmatrix}$$

なお、ここでは塑性解析法やこれと有限要素法を組み合わせた従来の塑性解析的有限要素法と塑性節点法とを比較するため、材料は完全弾塑性体とし、さらに塑性化節点の内力の塑性相関関係は考えない。すなわち、 i 番目の節点の塑性条件 F_i は、次のように i 節点の1節点力成分 $X_{\beta i}$ のみの関数として表されるものとする。

$$F_i(X_{\beta i}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (A.2.2)$$

さて従来の塑性解析的有限要素法^{4)~8)}では、節点力 $\{x_\beta\}$ が塑性条件を満足すると、その作用方向の節点変位 $\{u_\beta\}$ を隣接2要素間で独立にして塑性関節、塑性関節線およびすべり線などの変形の不連続場を導入している。そして自由度を一定に保つため、次のようにいずれか一方の要素の節点変位 $\{u_\beta\}$ を $\{d x_\beta\} = \{0\}$ を用いて消去する。

まず式(A.2.1)を次のように展開する。

$$\{d x_\alpha\} = [K_{\alpha\alpha}^\circ] \{d u_\alpha\} + [K_{\alpha\beta}^\circ] \{d u_\beta\} \quad (A.2.3)$$

$$\{0\} = [K_{\beta\alpha}^\circ] \{d u_\alpha\} + [K_{\beta\beta}^\circ] \{d u_\beta\} \quad (A.2.4)$$

式(A.2.4)より次の $\{d u_\alpha\}$ と $\{d u_\beta\}$ の関係が得られる。

$$\{d u_\beta\} = -[K_{\beta\beta}^\circ]^{-1} [K_{\beta\alpha}^\circ] \{d u_\alpha\} \quad (A.2.5)$$

これを式(A.2.3)に代入すると $\{u_\alpha\}$ に関する項のみに縮退された弾塑性剛性方程式が次のように得られる。

$$\{d x_{\alpha}\} = ([K_{\alpha\alpha}^{\circ}] - [K_{\alpha\beta}^{\circ}][K_{\beta\beta}^{\circ}]^{-1}[K_{\beta\alpha}^{\circ}])\{d u_{\alpha}\} \quad (A.2.6)$$

これを全体剛性方程式に足し込んで不連続場を有する構造の剛性が評価される。

一方、式(1.5.12)より、塑性節点法を適用した場合の要素の弾塑性剛性方程式は次式となる。

$$\{d x\} = [K^p]\{d u\} \quad (A.2.7)$$

ここで、 $[K^p] = [K^{\circ}] - [K^{\circ}][\Phi]([\Phi]^T[K^{\circ}][\Phi])^{-1}[\Phi]^T[K^{\circ}]$

$$[\Phi] = [\{\phi_1\} \{\phi_2\} \dots \{\phi_k\}]$$

$$\{\phi_i\} = \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial x} \right\}$$

塑性条件 F_i が式(A.2.2)のように x_{β_i} のみの関数となることから、上式のベクトル $\{\phi_i\}$ の成分は節点力 x_{β_i} に関する微分項を除いてすべて0である。したがって、マトリックス $[\Phi]$ は次の形となる。

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \Phi_{\alpha} \\ \Phi_{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_{\beta} \end{bmatrix} \quad (A.2.8)$$

これを式(A.2.7)の $[K^p]$ に代入し、展開すると、

$$[K^p] = \begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha}^{\circ} & K_{\alpha\beta}^{\circ} \\ K_{\beta\alpha}^{\circ} & K_{\beta\beta}^{\circ} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [K_{\alpha\beta}^{\circ}][A][K_{\beta\alpha}^{\circ}] & [K_{\alpha\beta}^{\circ}][A][K_{\beta\beta}^{\circ}] \\ [K_{\beta\beta}^{\circ}][A][K_{\beta\alpha}^{\circ}] & [K_{\beta\beta}^{\circ}][A][K_{\beta\beta}^{\circ}] \end{bmatrix} \quad (A.2.9)$$

ここで、 $[A] = [\Phi_{\beta}][\Phi_{\beta}]^T[K_{\beta\beta}^{\circ}][\Phi_{\beta}]^{-1}[\Phi_{\beta}]^T$ (A.2.10)

ところで、式(A.2.10)の両辺に右から $[K_{\beta\beta}^{\circ}][\Phi_{\beta}]$ を乗じると次式を得る。

$$\begin{aligned} [A][K_{\beta\beta}^{\circ}][\Phi_{\beta}] &= [\Phi_{\beta}][\Phi_{\beta}]^T[K_{\beta\beta}^{\circ}][\Phi_{\beta}]^{-1}[\Phi_{\beta}]^T[K_{\beta\beta}^{\circ}][\Phi_{\beta}] \\ &= [\Phi_{\beta}] \end{aligned} \quad (A.2.11)$$

これより、 $[A][K_{\beta\beta}^{\circ}] = [I]$ (A.2.12)

ここで、 $[I]$ ；単位マトリックス

すなわちマトリックス $[A]$ は、

$$[A] = [K_{\beta\beta}^{\circ}]^{-1} \quad (A.2.13)$$

となる。

これを再び式(A.2.9)に代入すると、弾塑性剛性方程式は結局次式となる。

$$[K^p] = \begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha}^p & K_{\alpha\beta}^p \\ K_{\beta\alpha}^p & K_{\beta\beta}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{\alpha\alpha}^{\circ}] - [K_{\alpha\beta}^{\circ}][K_{\beta\beta}^{\circ}]^{-1}[K_{\beta\alpha}^{\circ}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

上式において、節点変位 $\{u_\alpha\}$ に関する部分マトリックス $[K_{\alpha\alpha^p}]$ は、式(A.2.6)の縮退剛性マトリックスと同一である。他方、 $\{u_\beta\}$ および $\{x_\beta\}$ に関する項はすべて0であり、このままでは剛性マトリックスは特異となっている。ところで、1.6.2項に示したように塑性節点法では、ここで取り上げている要素を用いる解析の場合、隣接する2要素の内いずれか一方のみで塑性化を考慮し、他は弾性のままとする。したがって、式(A.2.14)の $[K^p]$ を全体マトリックスに足し込むことは、式(A.2.6)を足し込むことと等価である。以上の結果、塑性条件を式(1.6.8)あるいは式(A.2.2)の形で定義できる1.6.2項に示した一連の要素に塑性節点法を適用した場合、節点変位を独立にして不連続場を導入する従来の塑性解析的有限要素法と同一の弾塑性剛性方程式が得られることが証明された。

また、ここでは内力の塑性相関関係を無視したが塑性節点法ではこれを考慮した解析を行える。これに対し、他の方法では各節点力成分に対して独立に $\{d x_\beta\} = \{0\}$ なる条件を課すことになり内力間の相関は考慮できない。

付録3 Eggerの降伏関数を用いる解析 の手順

(1) パラメータA、Bの決定に必要な曲げモーメント・曲率関係式の定式化

Eggerの降伏関数Yおよびこれを用いる場合の塑性条件fはそれぞれ次式で与えられる。

$$Y^2 = \frac{Y_1^2 (\bar{\varepsilon}^p)^A + Y_0^2 B}{(\bar{\varepsilon}^p)^A + B} \quad (A.3.1)$$

$$f = Y(\{\sigma\}, \bar{\varepsilon}^p) - \sigma_0(\bar{\varepsilon}^p) = 0 \quad (A.3.2)$$

ここで

Y_0 ; 初期塑性状態を表す降伏関数

Y_1 ; 全断面塑性状態を表す降伏関数

$\bar{\varepsilon}^p$; 相当塑性歪あるいは一般化相当塑性歪

$\{\sigma\}$; 応力あるいは一般化応力ベクトル

σ_0 ; 降伏曲面の大きさを表す正值パラメータ

A, B ; 断面形状と材料定数に依存するパラメータ

パラメータA, Bは、2.2.2項に述べたように材料を完全弾塑性体と仮定し、式(A.3.2)の塑性条件fを塑性ポテンシャルと見なして得られる曲げモーメント・曲率関係が、層分割法による結果と一致するよう試行錯誤的に定められる。

ここでは、まず Eggerの降伏関数を用いる場合の塑性域の一般化応力と一般化歪の増分関係式を、歪硬化も考慮して導出する手順を示す。次にAおよびBの決定に必要な、完全弾塑性体の曲げモーメント・曲率関係式の求め方を、梁・柱要素とシェル要素のそれぞれの場合について示す。

塑性化した断面では、次の塑性負荷条件が満足されねばならない。

$$\begin{aligned} df &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}^p} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_0} \cdot \frac{d\sigma_0}{d\bar{\varepsilon}^p} \right) d\bar{\varepsilon}^p \\ &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}^p} - H'_{\text{SECT}} \right) d\bar{\varepsilon}^p = 0 \end{aligned} \quad (A.3.3)$$

ここで、 H'_{SECT} ; 断面歪硬化係数

今、一般化応力 $\{\sigma\}$ に対する一般化歪を $\{\varepsilon\}$ で表す。 $\{\sigma\}$ および $\{\varepsilon\}$ は例えば平面骨組問題に用いる梁・柱要素の場合では次式となる。

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= \{N \ M\}^T \\ \{\varepsilon\} &= \{e \ \kappa\}^T \end{aligned} \quad (A.3.4)$$

ここで、 N ; 軸力 , M ; 曲げモーメント
 e ; 平均軸歪 , κ ; 曲率

また、シェル要素では一般に、

$$\begin{aligned}\{\sigma\} &= \{N_x \ N_y \ N_{xy} \ M_x \ M_y \ M_{xy}\}^T \\ \{\varepsilon\} &= \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_{xy} \ \kappa_x \ \kappa_y \ \kappa_{xy}\}^T\end{aligned}\quad (\text{A.3.5})$$

となる。

ここで、 N_x, N_y, N_{xy} ; 単位長さ当りの面内力成分
 M_x, M_y, M_{xy} ; 単位長さ当りの曲げモーメント成分
 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$; 膜歪成分
 $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$; 曲率成分

塑性状態では全歪増分 $\{d\varepsilon\}$ は弾性歪増分 $\{d\varepsilon^e\}$ と塑性歪増分 $\{d\varepsilon^p\}$ の和となる。

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^e\} + \{d\varepsilon^p\} \quad (\text{A.3.6})$$

この内塑性歪増分 $\{d\varepsilon^p\}$ は、式(A.3.2)の f を塑性ポテンシャルとして塑性流れ理論を適用すると次式で与えられる。

$$\{d\varepsilon^p\} = d\lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \quad (\text{A.3.7})$$

$d\lambda$ は正のスカラー量であり、式(2.2.15)に示した通り相当塑性歪増分 $d\bar{\varepsilon}^p$ に一致する。
すなわち、

$$\{d\varepsilon^p\} = d\bar{\varepsilon}^p \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \quad (\text{A.3.8})$$

一方、応力増分 $\{d\sigma\}$ と弾性歪増分 $\{d\varepsilon^e\}$ の関係は次式となる。

$$\{d\sigma\} = [D^e] \{d\varepsilon^e\} \quad (\text{A.3.9})$$

但し、 $[D^e]$ は上記の梁・柱要素の場合では次式となる。

$$[D^e] = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.10})$$

ここで、 E ; ヤング率
 A ; 断面積
 I ; 断面二次モーメント

シェル要素の場合は、

$$[D^e] = \frac{E t}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2/12 & \nu t^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu t^2/12 & t^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu t^2/12 \end{bmatrix} \quad (A.3.11)$$

ここで、 ν ; ポアソン比 , μ ; $(1-\nu)/2$
 t ; 板厚

式(A.3.6)および式(A.3.8)を式(A.3.9)に代入すると、

$$\{d\sigma\} = [D^e] \left(\{d\varepsilon\} - d\bar{\varepsilon}^p \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \right) \quad (A.3.12)$$

これを式(A.3.3)に代入すると $d\bar{\varepsilon}^p$ が $\{d\varepsilon\}$ の関数として次のように求められる。

$$d\bar{\varepsilon}^p = \frac{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D^e] \{d\varepsilon\}}{H'_{SECT} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D^e] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} - \frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}^p}} \quad (A.3.13)$$

上式を再び式(A.3.12)に代入すると、 $\{d\sigma\}$ と $\{d\varepsilon\}$ の関係が結局次のように求められる。

$$\{d\sigma\} = [D^p] \{d\varepsilon\} \quad (A.3.14)$$

$$\text{ここで、} [D^p] = [D^e] - \frac{[D^e] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D^e]}{H'_{SECT} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D^e] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} - \frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}^p}}$$

; 塑性の一般化応力・一般化歪関係式

さてパラメータA, B の決定に際しては、材料を完全弾塑性体と仮定する。すなわち、式(A.3.14)で $H'_{SECT} = 0$ とする。そして梁・柱要素の場合は 軸歪 $e = 0$ として M と κ の関係を求め、層分割法による結果と比較する。他方シェル要素の場合、曲げ曲率 κ_x 以外の一般化歪をすべて0とおいた時の M_x と κ_x の関係（帯板の曲げモーメント・曲率関係）を求め、同じく層分割法による結果と比較する。

(2) 収束計算の手順

荷重ステップAで応力 $\{\sigma\}_A$ 、相当塑性歪 $\bar{\varepsilon}^p_A$ が生じて式(A.3.2)の塑性条件 $f_A = 0$ す

なわち $Y_A = \sigma_{oA}$ が満足されているとする。この状態を Fig. A.3.1 の応力空間上の点 A で表す。続く荷重増分に対して式 (A.3.14) あるいは式 (2.3.35) を適用すると、新しい荷重ステップ N の応力 $\{\sigma\}_N$ および相当塑性歪 $\bar{\epsilon}^p_N$ が次のように得られる。

$$\{\sigma\}_N = \{\sigma\}_A + \{d\sigma\} \quad (\text{A.3.15})$$

$$\bar{\epsilon}^p_N = \bar{\epsilon}^p_A + d\bar{\epsilon}^p \quad (\text{A.3.16})$$

一方、パラメータ σ_o は次の σ_{oN} に増加する。

$$\sigma_{oN} = \sigma_{oA} + H_A' d\bar{\epsilon}^p \quad (\text{A.3.17})$$

ところで、式 (A.3.3) の塑性負荷条件に含まれる $\partial f / \partial \bar{\epsilon}^p (= \partial Y / \partial \bar{\epsilon}^p)$ は、断面内に塑性域が広がる影響を表す Egger の降伏関数に特有の項である。この項は、Fig. 2.2.3 の $Y - \bar{\epsilon}^p$ 曲線からも知られるように、 $\bar{\epsilon}^p$ が小さな初期塑性状態近傍では材料の歪硬化係数 H_A' よりはるかに大きなオーダーの値となる ($\bar{\epsilon}^p = 0$ では $\partial Y / \partial \bar{\epsilon}^p \rightarrow \infty$)。同時に $\bar{\epsilon}^p$ の増加に対して非常に非線形な関係で変化する。このため、ステップ A で求めた $\partial Y / \partial \bar{\epsilon}^p$ を、続く 1 荷重増分間では一定として解析すると、Fig. A.3.2 に示すように降伏関数 Y の値の増加量 $dY (= \partial Y / \partial \bar{\epsilon}^p \cdot d\bar{\epsilon}^p)$ の方が $d\sigma_o (= H_A' \cdot d\bar{\epsilon}^p)$ よりも大となり、 $\{\sigma\}_N$ を表す応力空間上の点 N は、降伏曲面 $Y = \sigma_{oN}$ の大きく外側に移動する。したがって、ステップ N で塑性条件を精度良く満足させるには、点 N が降伏曲面上に乗る

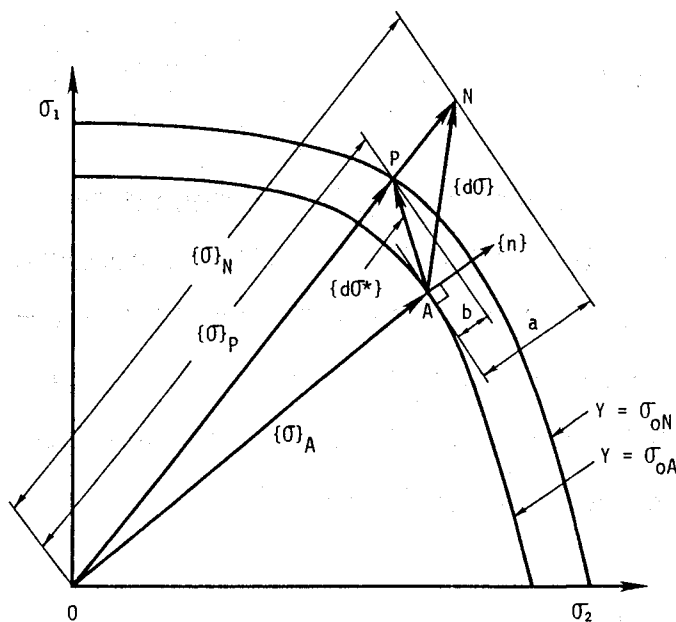


Fig. A.3.1 Stress space

式(A.3.1)で $\bar{\epsilon}^p$ を一定にして、 Y_0 および Y_1 に含まれる応力 $\{\sigma\}$ のみを β 倍すると、降伏関数 Y の値は βY となる。したがって、ステップ N に対する現近似解 $\{\sigma\}_N$ を基に β を次のように定めると、

これを $\{\sigma\}_N$ に乗じた応力 $\{\sigma\}_p$ は、次の関係を満たす。

そこで、 $\{\sigma\}_P = \beta \{\sigma\}_N$

$$\{d\sigma^*\} = \beta\{\sigma\}_N - \{\sigma\}_A \quad (\text{A.3.20})$$

The graph plots stress Y against strain ϵ^D . The vertical axis is labeled Y and the horizontal axis is labeled ϵ^D . A curve starts from the origin and passes through point A . Point N is located above point A . A line segment connects A and N . Point N_1 is located above point N . A line segment connects A and N_1 . Point E is located on the curve to the right of point A . A line segment connects A and E . The graph shows the change in stress dY and strain $d\epsilon^D$ during a process. The initial position is at point A and the final position is at point E . The graph also shows the change in stress $d\sigma_o$ and the change in strain $d\epsilon^D$ during a process. The graph includes labels for the initial and final positions, the change in stress dY , the change in strain $d\epsilon^D$, and the change in stress $d\sigma_o$. The graph also includes labels for the initial and final positions, the change in stress dY , the change in strain $d\epsilon^D$, and the change in stress $d\sigma_o$.

-176-

$$\{n\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}_A / \left| \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}_A \right| \quad (A.3.21)$$

この単位ベクトル $\{n\}$ と応力増分 $\{d\sigma\}$ および $\{d\sigma^*\}$ の内積 a および b を考える。但し、

$$\begin{aligned} a &= \{n\}^T \{d\sigma\} \\ b &= \{n\}^T \{d\sigma^*\} \end{aligned} \quad (A.3.22)$$

a および b は、それぞれ Fig.A.3.1に示した距離を表す。明らかに $a \geq b$ である。本論文では、この a と b の比として次のパラメータ α (≤ 1)を定義し、

$$\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\{n\}^T \{d\sigma^*\}}{\{n\}^T \{d\sigma\}} \quad (A.3.23)$$

これをステップAにおける $\partial Y / \partial \bar{\epsilon}^p$ に乘じて、 $\partial Y / \partial \bar{\epsilon}^p$ を小さめの値に修正した。そして改めてステップAに戻って式(A.3.14)により解析した。(式(2.3.35)では各塑性化点の $\partial f / \partial \bar{\epsilon}^p$ にその点の α を乗じた $[H']$ を用いて解析した。)その結果、Fig.A.3.2においてA点からほぼP点を通る直線上の、改善された応力状態 N_1 を得た。但し、 $\partial Y / \partial \bar{\epsilon}^p$ を減じたことで断面の剛性が低下するため、Fig.A.3.2に示すように、新たに生じた相当塑性歪増分 $d\bar{\epsilon}^p_{N_1}$ は始めに得られた $d\bar{\epsilon}^p$ より一般に大きくなる。このため応力点 N_1 は再び降伏曲面 $Y = \sigma_{0N_1}$ の外側に移動する。しかし以後、式(A.3.18)から(A.3.23)の操作を繰り返すことにより、最終的に塑性条件を満足する状態Eが得られた。本論文では以上の手順によって、各荷重段階で塑性条件を精度良く満足させつつ解析を行った。第 n 繰り返しステップに用いる $\partial Y / \partial \bar{\epsilon}^p$ は、一般的な形として次式で表せる。

$$\frac{\partial Y}{\partial \bar{\epsilon}^p} = \frac{\partial Y}{\partial \bar{\epsilon}^p} \Big|_A \cdot \prod_{i=1}^n \alpha_i \quad (A.3.24)$$

ここで、 α_i ; 第 $i-1$ 繰り返しステップ終了時の応力状態に対応する 式(A.3.23)のパラメータ α

なお、上式のように $\partial Y / \partial \bar{\epsilon}^p$ は繰り返し過程で変化させるが、A点からの塑性歪増分および塑性節点変位増分の方角を表す式(A.3.7)の $\{\partial f / \partial \sigma\}$ および式(2.3.4)のベクトル $\{\phi_i\}$ には、常にA点で計算された値を用いる必要がある。すなわち塑性変形はA点で降伏曲面に立てた外向き法線の向きに生じると考える。

付録4 面内力と曲げモーメントを受けるシエルの全断面塑性条件式

全断面塑性状態にあるシエル断面の応力 σ_x 、 σ_y および τ_{xy} の分布をFig.A.4.1のように仮定する。各応力成分の分布は、左側の面内力のみに寄与する一様応力分布と、右側の曲げモーメントのみに寄与する応力分布の和で表されている。

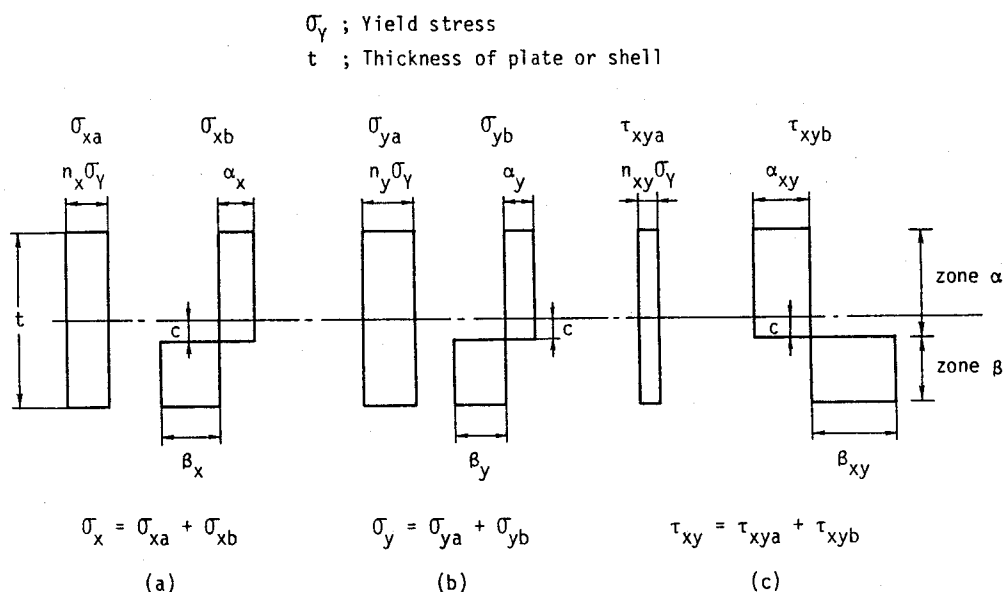


Fig. A.4.1 Assumed distributions of stress components at section in fully plastic condition

無次元化膜力として次の n_x 、 n_y および n_{xy} を定義する。

$$n_x = \frac{N_x}{N_Y}, \quad n_y = \frac{N_y}{N_Y}, \quad n_{xy} = \frac{N_{xy}}{N_Y} \quad (\text{A.4.1})$$

ここで、 N_x 、 N_y 、 N_{xy} 、 N_Y ; 単位長さ当りの3面内力成分および全断面塑性膜力

$$N_Y = \sigma_Y t \quad (t ; \text{板厚}, \sigma_Y ; \text{降伏応力})$$

このとき一様応力 σ_{xa} 、 σ_{ya} および τ_{xya} はそれぞれ次式のように表される。

$$\sigma_{xa} = n_x \sigma_Y, \quad \sigma_{ya} = n_y \sigma_Y, \quad \tau_{xya} = n_{xy} \sigma_Y \quad (\text{A.4.2})$$

一方、Fig.A.4.1(a)の σ_x を考えると、曲げモーメントのみに寄与する応力分布について次の関係が成立する。

$$\alpha_x \left(\frac{t}{2} + c \right) + \beta_x \left(\frac{t}{2} - c \right) = 0 \quad (\text{A.4.3})$$

$$\alpha_x t^2 - \alpha_x \left(\frac{t}{2} + c \right)^2 + \beta_x \left(\frac{t}{2} - c \right)^2 = 2M_x \quad (\text{A.4.4})$$

ここで、 M_x ; 単位長さ当りの x 方向曲げモーメント

これより次の関係を得る。

$$\alpha_x = \frac{4M_x}{t^2 \left(1 + \frac{2c}{t} \right)}, \quad \beta_x = - \frac{4M_x}{t^2 \left(1 - \frac{2c}{t} \right)} \quad (\text{A.4.5})$$

ここで単位長さ当りの全断面塑性モーメント $M_y (= \sigma_y t^2 / 4)$ を用いて次の無次元曲げモーメントを定義すると、

$$m_x = \frac{M_x}{M_y} = \frac{4M_x}{\sigma_y t^2} \quad (\text{A.4.6})$$

式(A.4.5)は、

$$\alpha_x = \frac{m_x}{1 + \frac{2c}{t}} \sigma_y, \quad \beta_x = - \frac{m_x}{1 - \frac{2c}{t}} \sigma_y \quad (\text{A.4.7})$$

同様に、

$$\alpha_y = \frac{m_y}{1 + \frac{2c}{t}} \sigma_y, \quad \beta_y = - \frac{m_y}{1 - \frac{2c}{t}} \sigma_y \quad (\text{A.4.8})$$

$$\alpha_{xy} = \frac{m_{xy}}{1 + \frac{2c}{t}} \sigma_y, \quad \beta_{xy} = - \frac{m_{xy}}{1 - \frac{2c}{t}} \sigma_y \quad (\text{A.4.9})$$

ところで、平面応力状態でのMisesの降伏条件は、

$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_y^2 \quad (\text{A.4.10})$$

したがって、Fig.A.4.1のゾーン α および β で上式が成立して、断面全体が塑性化している時、

$$\begin{aligned} & (\sigma_{xa} + \alpha_x)^2 + (\sigma_{xa} + \alpha_x)(\sigma_{ya} + \alpha_y) + (\sigma_{ya} + \alpha_y)^2 \\ & \quad + 3(\tau_{xya} + \alpha_{xy})^2 = \sigma_y^2 \\ & (\sigma_{xa} + \beta_x)^2 + (\sigma_{xa} + \beta_x)(\sigma_{ya} + \beta_y) + (\sigma_{ya} + \beta_y)^2 \\ & \quad + 3(\tau_{xya} + \beta_{xy})^2 = \sigma_y^2 \end{aligned} \quad (\text{A.4.11})$$

となる。

上式に式(A.4.7)～(A.4.9)を代入し整理すると、

$$Q_n + \frac{Q_m}{(1 + \frac{2c}{t})^2} + \frac{2Q_{nm}}{1 + \frac{2c}{t}} = 1 \quad (\text{A.4.12})$$

$$Q_n + \frac{Q_m}{(1 - \frac{2c}{t})^2} - \frac{2Q_{nm}}{1 - \frac{2c}{t}} = 1 \quad (\text{A.4.13})$$

ここで、

$$Q_n = n_x^2 - n_x n_y + n_y^2 + 3n_{xy}^2$$

$$Q_m = m_x^2 - m_x m_y + m_y^2 + 3m_{xy}^2$$

$$Q_{nm} = n_x m_x + n_y m_y - 0.5(n_x m_y + n_y m_x) + 3n_{xy} m_{xy}$$

式(A.4.12)および式(A.4.13)を辺々相引くと、

$$Q_{nm}(\frac{2c}{t})^2 + Q_m(\frac{2c}{t}) - Q_{nm} = 0 \quad (\text{A.4.14})$$

これより、

$$\frac{2c}{t} = \frac{-0.5Q_m + \sqrt{0.25Q_m^2 + Q_{nm}^2}}{Q_{nm}} \quad (\text{A.4.15})$$

一方、式(A.4.12)と式(A.4.13)より Q_{nm} を消去すると、

$$Q_n - 1 + \frac{Q_m}{1 - (\frac{2c}{t})^2} = 0 \quad (\text{A.4.16})$$

上式の左辺第3項は式(A.4.15)を用いると次式のように変形できる。

$$\begin{aligned} \frac{Q_m}{1 - (\frac{2c}{t})^2} &= -\frac{Q_{nm}^2}{0.5Q_m - \sqrt{0.25Q_m^2 + Q_{nm}^2}} \\ &= 0.5Q_m + \sqrt{0.25Q_m^2 + Q_{nm}^2} \end{aligned} \quad (\text{A.4.17})$$

これを式(A.4.16)に代入すると、次の全断面塑性条件式を得る。

$$Q_n + 0.5Q_m + \sqrt{0.25Q_m^2 + Q_{nm}^2} - 1 = 0 \quad (\text{A.4.18})$$

付録5 一様歪有限要素の剛性と塑性仕事

ここでは、一様歪有限要素の場合、塑性節点法と通常の有限要素法で同一の弾塑性剛性方程式が得られ、要素でなされる塑性仕事も両解析法で一致することを示す。

要素として7.2.1項の三角形平面要素を考える。要素の応力は一定であり、任意の1点*i*を塑性化判定点に採用できる。*i*点の合応力を $\{\sigma_i\}$ とすると、塑性条件 f_i は次式のように表される。

$$f_i(\{\sigma_i\}, \sigma_{oi}(\bar{\varepsilon}_i^p)) = 0 \quad (\text{A.5.1})$$

ここで、 $\{\sigma_i\} = \{N_{xi}, N_{yi}, N_{xyi}\}^T$ ；単位長さ当りの3面内力成分
 σ_{oi} ；降伏曲面の大きさを表すパラメータ
 $\bar{\varepsilon}_i^p$ ；相当塑性歪

なお、ここでは温度変化の影響は無視する。式(7.2.11)に示したように $\{\sigma_i\}$ は要素の全節点力 $\{x\}$ の関数である。したがって、上式の f_i は節点力 $\{x\}$ の関数 F_i に改められる。

$$F_i(\{x\}, \sigma_{oi}(\bar{\varepsilon}_i^p)) = 0 \quad (\text{A.5.2})$$

この F_i を塑性ポテンシャルと見なして塑性節点法を適用すると、式(2.3.35)より静的弾塑性剛性マトリックス $[K^p]_{PNM}$ は次式となる。

$$[K^p]_{PNM} = [K^e] - \frac{[K^e]\{\phi_i\}\{\phi_i\}^T[K^e]}{H_{ni}' + \{\phi_i\}^T[K^e]\{\phi_i\}} \quad (\text{A.5.3})$$

ここで、 $[K^e] = A[B]^T[D^e][B]$ ；弾性剛性マトリックス
 $[D^e]$ ；弾性の応力・歪マトリックス（式(7.2.6)参照）
 $[B]$ ；節点変位・歪マトリックス（式(7.2.5)参照）
 A ；要素の面積

$$\{\phi_i\} = \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial x} \right\}$$

上式の節点変位歪硬化係数 H_{ni}' は式(2.3.7)で与えられる。再記すると、

$$H_{ni}' = - \left(\frac{\partial F_i}{\partial \bar{\varepsilon}_i^p} + \frac{\partial F_i}{\partial \sigma_{oi}} \cdot \frac{d \sigma_{oi}}{d \bar{\varepsilon}_i^p} \right) h_i \quad (\text{A.5.4})$$

この内 $\partial F_i / \partial \bar{\varepsilon}_i^p$ は、曲げ変形と共に断面内に塑性域が広がる影響を表す項であり、平面要素では消失する。また $d \sigma_{oi} / d \bar{\varepsilon}_i^p$ は式(2.2.38)の断面歪硬化係数 H_s' を表し、平面要素（ $f = f(\bar{N})$ 、 $\bar{N}$ ；式(2.2.34)参照）では式(2.2.38)より $H_s' = H' t$ （ t ；板厚）

となる。これらと $\partial F_i / \partial \sigma_{\sigma_i} = -1$ なる関係を考慮すると H_{ni}' は次式となる。

$$H_{ni}' = H' t h_i \quad (A.5.5)$$

パラメータ h_i は式(2.3.27)で与えられる。ここでは塑性化判定点の個数を1としているので式(2.3.27)の面積 a 、すなわち各塑性化判定点の歪硬化の影響が及ぶとする領域の面積は要素の全面積 A となる。したがって h_i は、

$$h_i = 1/A \quad (A.5.6)$$

式(A.5.6)を式(A.5.5)に代入し、この H_{ni}' を式(A.5.3)に代入すると、弾塑性剛性マトリックスが結局次式のように求められる。

$$[K^p]_{PNM} = [K^e] - \frac{[K^e]\{\phi_i\}\{\phi_i\}^T[K^e]}{H' t/A + \{\phi_i\}^T[K^e]\{\phi_i\}} \quad (A.5.7)$$

一方、通常の有限要素法では、塑性化した断面の合応力・歪マトリックス $[D^p]$ を要素内で積分して弾塑性剛性マトリックス $[K^p]_{FEM}$ を求める。 $[D^p]$ が要素内で一定であることを考慮すると $[K^p]_{FEM}$ は、

$$[K^p]_{FEM} = A[B]^T[D^p][B] \quad (A.5.8)$$

となる。合応力・歪マトリックス $[D^p]$ は、式(A.5.1)の塑性条件 f_i を塑性ポテンシャルとして塑性流れ理論を適用することにより、次のように求められる。(式(A.3.14)の $[D^p]$ で $H'_{SECT} = H' t$, $\partial f / \partial \varepsilon^p = 0$ とした場合。)

$$[D^p] = [D^e] - \frac{[D^e]\left\{-\frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i}\right\}\left\{-\frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i}\right\}^T[D^e]}{H' t + \left\{-\frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i}\right\}^T[D^e]\left\{-\frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i}\right\}} \quad (A.5.9)$$

ここで、 $\left\{-\frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i}\right\} = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial N_{xi}} \quad \frac{\partial f_i}{\partial N_{yi}} \quad \frac{\partial f_i}{\partial N_{xyi}} \right\}^T$

これを式(A.5.8)に代入すると $[K^p]_{FEM}$ は、

$$[K^p]_{FEM} = [K^e] - \frac{A[B]^T[D^e]\left\{-\frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i}\right\}\left\{-\frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i}\right\}^T[D^e][B]}{H' t + \left\{-\frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i}\right\}^T[D^e]\left\{-\frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i}\right\}} \quad (A.5.10)$$

となる。

ところで式(7.2.11)のように、要素の応力 $\{\sigma_i\}$ と節点力 $\{x\}$ の間には次の関係が成立する

$$\{\sigma_i\} = [A']\{x\} \quad (A.5.11)$$

ここで、 $[A'] = ([B][B]^T)^{-1}[B]/A$

これより式(A.5.3)の $\{\phi_i\}$ と式(A.5.10)の $\{\partial f_i / \partial \sigma_i\}$ の間に次の関係が成立する。

$$\begin{aligned}
 \{\phi_i\} &= \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial X} \right\} \\
 &= \frac{\partial f_i}{\partial N_{xi}} \left\{ \frac{\partial N_{xi}}{\partial X} \right\} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial N_{xvi}} \left\{ \frac{\partial N_{xvi}}{\partial X} \right\} \\
 &= \left[\left\{ \frac{\partial N_{xi}}{\partial X} \right\} \left\{ \frac{\partial N_{vi}}{\partial X} \right\} \dots \left\{ \frac{\partial N_{xvi}}{\partial X} \right\} \right] \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i} \right\} \\
 &= [A']^T \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i} \right\} = [B]^T ([B][B]^T)^{-1} \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i} \right\} / A \quad (A.5.12)
 \end{aligned}$$

両辺に左から $[B]$ を乗じると、次式を得る。

$$\left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i} \right\} = A[B]\{\phi_i\} \quad (A.5.13)$$

これを式(A.5.10)に代入すると $[K^p]_{FEM}$ は式(A.5.7) の $[K^p]_{PNM}$ と完全に一致する。これより一様歪要素の場合、両解析法で同じ弾塑性剛性方程式が得られることが証明された。

なお $[K^p]_{PNM}$ と $[K^p]_{FEM}$ の導出に要する四則演算の回数は、前者が後者の約 2/3 であり、塑性節点法によれば計算時間が短縮されることが分かる。

次に塑性仕事を考える。1.4.2項に述べた如く、塑性節点法では節点力 $\{x\}$ の作用下で要素でなされる塑性仕事増分 dW^p_{PNM} を次式で定義する。

$$dW^p_{PNM} = \{x\}^T \{du^p\} \quad (A.5.14)$$

塑性節点変位増分 $\{du^p\}$ は式(2.3.29)および式(2.3.34)より次式となる。

$$\{du^p\} = \frac{\{\phi_i\}\{\phi_i\}^T [K^e] \{du\}}{H_{ni}' + \{\phi_i\}^T [K^e] \{\phi_i\}} \quad (A.5.15)$$

式(A.5.15)を式(A.5.14)に代入すると、

$$dW^p_{PNM} = \frac{\{x\}^T \{\phi_i\} \{\phi_i\}^T [K^e] \{du\}}{H_{ni}' + \{\phi_i\}^T [K^e] \{\phi_i\}} \quad (A.5.16)$$

一方、要素内に塑性歪が分布するとする有限要素法の場合、塑性仕事増分 dW^p_{FEM} は次式となる。

$$dW^p_{FEM} = \int_A \{\sigma\}^T \{d\varepsilon^p\} dA = A \{\sigma_i\}^T \{d\varepsilon_i^p\} \quad (A.5.17)$$

$\{\sigma_i\}$ は要素内各点の応力であり、節点力 $\{x\}$ と次の関係にある。

$$\{x\} = \int_A [B]^T \{\sigma\} dA = A[B]^T \{\sigma_i\} \quad (A.5.18)$$

また $\{d\varepsilon_i^p\}$ は要素に分布する塑性歪増分を表し、塑性流れ理論に従うと全歪増分 $\{d\varepsilon\}$ との間に次の関係が成立する。

$$\{d\varepsilon_i^p\} = \frac{\left\{\frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i}\right\} \left\{\frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i}\right\}^T [D^e] \{d\varepsilon\}}{H' t + \left\{\frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i}\right\}^T [D^e] \left\{\frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i}\right\}} \quad (\text{A.5.19})$$

式(A.5.19)を式(A.5.17)に代入し、式(A.5.18)および次の全歪増分 $\{d\varepsilon\}$ と節点変位 $\{du\}$ との関係、

$$\{d\varepsilon\} = [B]\{du\} \quad (\text{A.5.20})$$

をそれぞれ考慮すると、式(A.5.17)の dW_{FEM}^p が、式(A.5.16)の dW_{PNM}^p に完全に一致することが分かる。これより両解析法で評価される塑性仕事等しいことが証明された。

ここでは一様歪平面要素を例に挙げたが、7.4.1項の一様歪四面体要素を用いる場合や、7.3.3項のMorleyの板曲げ要素で断面塑性法を適用する場合（要素に生じる一様な曲げモーメントを基に塑性化を判定する場合）についても、弾塑性剛性方程式および塑性仕事等塑性節点法と有限要素法で一致することが同様に証明される。但し要素の塑性変形機構は両解析法で異なる。すなわち塑性節点法では塑性変形が式(A.5.15)の形で節点に縮約されるのに対し、有限要素法では要素の変形は全域で連続で、塑性変形は要素内各点に式(A.5.19)に示した歪の形で現れる。