複合材料の材料特性および
動的挙動の解析

昭和60年２月

宇　郷　良　介

「複合材料の材料特性および動的挙動の解析」

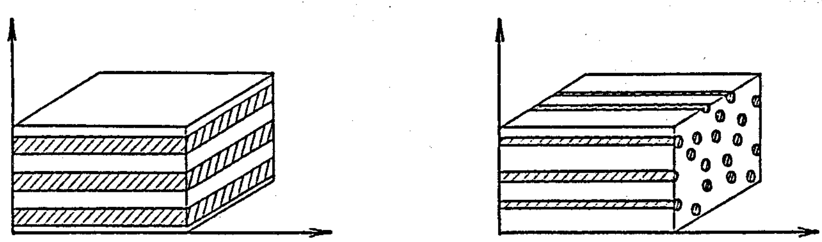
目　次

頁

第1章　緒　言

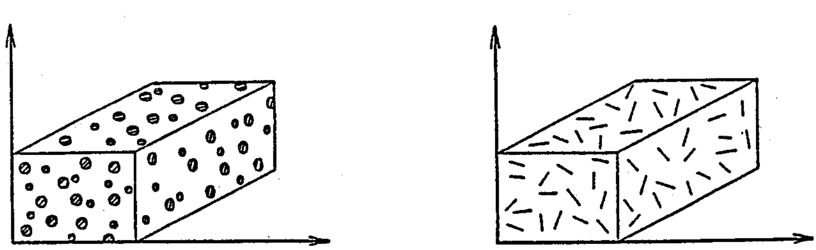
1．1　研究対象

異種媒質の組合せからなる種々の複合材は、その構造から大きく積層系複合材と分散系複合材の二つに分類することができる。さらに、積層系複合材には異種媒質を層状に積み重ねて作る合板（ベニヤ板）やバイメタルなどのような層状複合材（Laminated composite materials ），母材の中に長い繊維を一方向に配列させた繊維強化複合材（Fiber reinforced composite materials）がある。（図 1-1）　前者は異種媒質の二次元的な積層であるのに対して、後者は三次元的な積層として考えることができ、これらをモデル化するときに後者では繊維方向に沿って切り出せば、両者は同一構造とみなすことができる。さらに、布状強化材を積層して作られた繊維強化複合材も積層系複合材の一種と考えることができる。



（a）層状複合材　　（b）繊維強化複合材（長繊維）

図 1-1　積層系複合材のモデル



（a）粒子分散形複合材　　（b）繊維強化複合材（短繊維）

図 1-2　分散系複合材のモデル

一方、分散系複合材には、充填する強化材によって、粒子状の強化材を使う粒子分散形複合材（Dispersion strengthened composite materials）と短繊維を充填させる繊維強化複合材（Discontinuous reinforced composite materials）とを考えることができる。（図 1-2） 粒子分散形複合材は、たわみ振動に対する減衰効果を有することから各種防振材として注目され、音響機器用のフレームなどへの応用も考えられている。短繊維の強化複合材は、抽出成形で作られる部品の強度の向上のために部品素材として利用されている。

このような複合材に対する研究は、静的な特性，動的な特性共に種々の特徴に注目して多方面からのアプローチが試みられている。積層系複合材の静的な問題としては、まずその構造に依存した異方性，有効剛性理論などの議論で考えられる平均的な材料強度，たわみや座屈などに関しての変形特性などが挙げられる。また、動的な研究対象としては、音響に関連した調和波の遮断現象や分散関係についての議論，衝撃に対する問題として複合材中の過渡波の挙動などが扱われている。（1）－（5）

このような種々の研究対象の中に、積層系複合材の設計または応用上の重要な問題の一つとして層間はく離がある。一般に、積層系の複合材に外力が加わった場合、材料自体の破壊と層間あるいは繊維表面と母材との間でのはがれによる破壊とが考えられ、実際の設計にあたってはこの両者の強度を考慮する必要がある。さらに、複合材が衝撃を受けるときには、この層間のはがれは静的な場合に比べてより生じ易く、破損の大きな原因となることが知られている。これまで、衝撃に対する積層系複合材の動的挙動についての議論は多くの研究者によってなされており、PeckやGurtman ら（6）は材料が衝撃を受けたときに材料中に生じる応力波について解析的な議論を行い、波頭近似法（The head-of-the-pulse method）を用いて衝撃端から十分遠方での解を求めている。これに対して、新川ら（7）は同じ過渡波の問題を衝撃端近傍で取扱い、波頭展

開法（The wave-front expansion method ）を用いて衝撃直後の解析解を求めている。これらの研究では層内の変形に対して、せん断応力は各層内で直線的な分布をするという仮定を設け、応力波の状態変化を解析している。しかし、仮定されている変形自体や層間のせん断応力を取り扱ったものは少なく、わずかにPaytonら（ 8）が応力波の伝ぱによって層間に生じるせん断応力について理論的な議論を行っているだけである。さらに、複合材の動的な挙動に関する実験的な研究報告は非常に少なく、応力波の伝ぱに伴う層内の変形状態，特に層間の相互作用に依って生じるせん断応力に関する報告はほとんどなされていない。

そこで、本研究ではまず積層系複合材に対して、層間はく離の問題に関連した層内の変形及び層間のせん断応力に注目して、これらについて実験的に解析することを目的とした。

以上のような積層系複合材の問題に対して、分散系複合材に関する研究は少ないが、その中で強化材の充壌による材料特性の変化には実際の応用面から大きな興味が寄せられいる。特に、加える強化材についてはカーボン・ブラックやガラス繊維をはじめとして、その生成方法や特性などはかなり詳しく調べられている。強化材の充壌効果に関する研究では、Einsteinのサスペンジョンの粘性変化に対する理論的な考察（16）が行われて以来、これを基にして粒子分散形複合材の特性に関して種々のアプローチがなされて、議論が展開されてきた。（17）－（20）

例えば、Smallwood ら（21）が、均質媒質中に剛体球粒子を充壌した複合材の弾性率変化について考察した報告が1944年に発表されている。彼らは充壌粒子の体積濃度をパラメータとして理論的に弾性率に対する特性式を導出し、検証のためにゴムと炭素粒子を使った簡単な実験も行っている。さらに、Guthは

(22) 剛体球粒子のいくつかの連結を考え、n次の多項式によって特性式の一般化を試みている。これらの考察では、いずれも粒子を剛体・球形として議論し、複合材の材料特性が充填粒子の体積濃度にだけ依存して変化するという結果を得ている。しかし、実際には同体積濃度であっても加える粒子によって材料特性が変化することが知られており、粒子の充填体積濃度以外の別のパラメータを考慮する必要がある。そこで、本研究では粒子の持つパラメータの中で特に形状の違いに注目して、材料特性がどのように変化するかについて解析を試みた。

分散系複合材の動的な問題としては振動に対する減衰があるが、これまでわずかにその効果が充填材の体積濃度との関係から実験的に測定して調べられているだけである。本研究では、粒子分散形複合材の動的な問題として、材料中に生じる応力波の伝ぱ速度の変化，減衰及び分散的な効果に注目して、衝撃に対する動的挙動を解析することを目的とした。

また、分散系複合材のもう一つの場合である短繊維を分散させた繊維強化複合材に対してもその材料特性の変化について、粒子分散形複合材の場合と同様の解析を行い、強化材による充填効果の違いを調べた。

1．2　本研究の概要

本研究では、複合材の材料特性及び衝撃に対する動的挙動の解析を目的とした。前述のように、層状複合材中の応力波に関する実験的な研究はあまり報告されておらず、特に各層中の変位分布，応力，ひずみ状態を実際に観測して解析を加えた報告はほとんどなされていない。そこで、本研究では複合材としてサンドウィッチ形の三層からなる層状複合材を取り上げ、これが層に平行に一様な衝撃を受けたときの動的挙動を観測し、解析を試みることを目的とした。実験において、複合材中の応力波の伝ぱによって生じる実際の変位場を可視化

して観測することを考え、ここでは微小変形の観測に適しているホログラフィ干渉法を採用した。ホログラフィ干渉法を変位測定に応用し、三次元的な変位成分を定量的に求めることができるという可能性はすでに多くの研究者によって指摘されているが（ 9）－（14）、これまで実際の物体の変形測定に応用して定量的に変位を求めた報告はなく、ほとんどの報告が現象の可視化に留まっているだけである。そこで、まず第２章では、ここで扱うような材料中の応力波の伝ぱ問題にホログラフィ干渉法を適用する際、変位測定法としてのホログラフィ干渉法に内在する問題点をいくつか取り上げ理論的に考察している。そして、実際の変位測定における測定精度や測定範囲を調べるために、基礎実験として移動物体の面内，面外変位成分を求めて検定を行った。また、実際に物体の動的挙動の観測に対してホログラフィ干渉法を応用するために、簡単な一次元的現象として鋼単体の角棒中を伝ぱする応力波を取り上げ、ダブルパルスルビーレーザを用いた高速ホログラフィ干渉法によって観測を試みた。そして、変位場の定量的な解析を行い、測定法の有効性を検討した。

以上の基本的な実験の後、第３章では層状複合材中の応力波の伝ぱに伴う層状複合材中の変形状態，特に層間のせん断応力についての実験的な解析を行っている。解析に際して、まず層間の相互作用によるせん断応力が複合材のどのようなパラメータによって支配されているかを理論的に考察し、また波頭展開法を用いてそのせん断応力を理論的に解析した。そして、せん断応力を支配するパラメータを考慮して、実際に二枚のアルミ板の間にエポキシ樹脂を挟んだサンドウィッチ形の層状複合材を作成し、衝撃実験を行って複合材中を伝わる応力波を観測した。さらに、ホログラム撮影で得られた干渉像をパーソナル・コンピュータを中心とする画像処理システムによって高速・自動的に処理し、観測領域全体にわたって変位場を定量的に解析して面内変位の分布を求めた。その結果から層中のひずみや応力の分布，層間のせん断応力分布を求めて理論

的な解析結果と比較検討し、層状複合材中の応力波の挙動を考察した。

次に、第４章以下で分散系複合材を扱う。第４章では、まず材料特性として弾性率に注目し、粒子の形状や配合状態に対してそれがどのように変化するかを調べている。そのために、粒子形状を楕円形として複合材の平均的な弾性率の変化を理論的に考察した。次に、種々の粒子形状を考えて複合材モデルを作り、これらに対して有限要素法及び実験によって粒子形状や配向に対する弾性率変化を解析し、理論的考察との比較検討を行った。

母材が高分子樹脂のような粘弾性体であるときには、弾性率だけでなく粘性係数も複合材の重要な特性値である。分散系の粘性に関する研究は、この分野が開かれてから多くのアプローチがなされているが、材料の構成式が複雑になるためにそれらの議論のほとんどがかなり煩雑なものとなっている。そこで、これらの複雑な議論に対して、第５章では母材を粘弾性体とするときの複合材の粘性変化に対して、対応原理を用いて簡単に考察することを考えた。また、粘弾性体に対する有限要素法を構成して複合材の緩和現象を数値的に解析するとともに実際に材料の緩和実験を行って、理論的考察の検討をした。

第６章では、粒子分散形複合材が衝撃を受けたときの動的な応答を調べている。ここでは複合材中を伝ぱする一次元的な応力波の伝ぱ問題を考え、静的な特性を考慮して伝ぱ速度及び応力波の減衰に対する理論的考察を行った。そして、前章と同様の複合材モデルに対してこれらの動的挙動を有限要素法及び実験によって解析した。さらに、複合材中の応力波の通過前後の波形をフーリエ解析し、粒子充塡の効果による複合材の分散的な特性についても検討した。

最後に、第７章では短繊維の強化複合材の特性変化について、有限要素法を用いて粒子分散形複合材の場合と同様の解析を試みている。

第2章　ホログラフィ干渉法による変位測定に対する基礎実験

2．1　まえがき

物体の三次元的な情報をそのまま記録し，再生できる技術としてホログラフィが確立されて以来、その応用が急速に発達し、かつ応用範囲も多岐に渡ってきている。中でもホログラフィ干渉法は、物体の複雑な振動モードの観測や変位測定などにおいて実用化の域に達している。この方法は、実物の変形を非接触で観測できること，光の干渉を用いるために微小変位が測定できること，物体表面は粗面でもよいことなど多くの利点を有している。

ホログラフィ干渉法（特に、二重露光法）による変位測定において、変形前後の二つの物体光の干渉によって生じる干渉じまは物体表面の変位状態に依存しており、従って干渉じまと物体表面上の各点の変位との関係を知れば干渉じまを観測することによって変位を求めることができる。一枚のホログラムから一般的な変位ベクトルの三成分を全て求める方法としては、Ennos ら（11）によって提案された「絶対しま次数法」とAleksandrov　（12）らによる「相対しま次数法」がある。前者は、各しま次数の絶対値を知る必要があるため、板のたわみのように視野の中に不動点（または零次のしま）がある場合には容易に適用できる。しかし、一般的な物体の変形ではこのような不動点を見つけることは困難である。これに対して、相対しま次数法は視点を移動させることによって生じるしま次数の変化を測定して三次元変位を求める方法であり、この方法は、波動の伝ば問題のように絶対しま次数が分からない場合にも適用でき、非常に有効な手段となり得る。

しかし、このホログラフィ干渉法を実際の変形測定法として応用するとき、注意を要するいくつかの問題点がある。その一つは、ホログラム撮影時の参照光と再生時の再生光が異なるとき、再生される像はその波長の比に相当して縮小あるいは拡大されて現れるということである。従って、この効果が再生像中

の干渉じまを観測してしま次数を測定する際にどのように影響するかを検討しておく必要がある。

また、相対しま次数法では、しま次数の増分を求めるとき像中のしま次数が単調に変化するという条件を必要とするが、一般には物体表面の変位状態や観測条件によりしま次数がある位置で極値をとる場合もあり、必ずしも単調に変化していない。そこで、このような場合については相対しま次数をどのように決定すれば良いかが問題となり、これについても考察してみた。

2．2　ホログラフィ干渉法における理論的考察

2.2.1　再生光と参照光の波長変化の効果

ホログラフィ撮影に用いる光源はコヒーレントであり、その位相は空間座標（x，y，z）のみの関数であるとする。点光源Sから出た球面波は次のように表される。

$$
\begin{aligned}
\Phi(t,\mathbf{r}) &= \frac{\phi}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|}\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|-ct)-i\theta_0\right] \\
&= a(\mathbf{r})\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|-ct)-i\theta_0\right] \\
&= A(\mathbf{r})\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}ct\right], \qquad (2\text{-}2\text{-}1)
\end{aligned}
$$

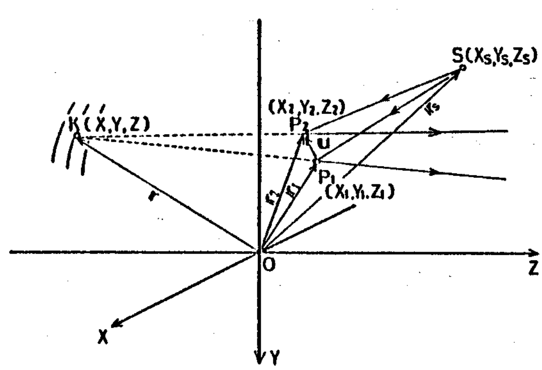


図 2-2-1　変形前後の物体光の干渉

ここで、ϕは発振時の初期振幅，Ａ（$\mathbb{r}$）は複素振幅と呼ばれるものであり、ａ（$\mathbb{r}$）はＡ（$\mathbb{r}$）の絶対値である。$\mathbb{r}_S$ は光源Ｓの位置ベクトル、λ，ｃ，θ_0 は各々光の波長，位相速度，初期位相である。図2-2-1 に示されているように、変形前の物体表面上の点P_1 で反射された光は次のように表される。

$$\Phi_1(t,\mathbb{r}) = \frac{\phi}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}_1|\cdot|\mathbb{r}_1-\mathbb{r}_S|} \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda}(|\mathbb{r}-\mathbb{r}_1|+|\mathbb{r}_1-\mathbb{r}_S|-ct)-i\theta_0\right]$$
$$= a_1(\mathbb{r}) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda}(|\mathbb{r}-\mathbb{r}_1|+|\mathbb{r}_1-\mathbb{r}_S|-ct)-i\theta_0\right]$$
$$= A_1(\mathbb{r}) \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}ct\right] \qquad (2\text{-}2\text{-}2)$$

同様に、点P_1 に対応する変形後の表面上の点P_2 からの反射光は次式で表される。

$$\Phi_2(t,\mathbb{r}) = \frac{\phi}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}_2|\cdot|\mathbb{r}_2-\mathbb{r}_S|} \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda}(|\mathbb{r}-\mathbb{r}_2|+|\mathbb{r}_2-\mathbb{r}_S|-ct)-i\theta_0\right]$$
$$= a_2(\mathbb{r}) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda}(|\mathbb{r}-\mathbb{r}_2|+|\mathbb{r}_2-\mathbb{r}_S|-ct)-i\theta_0\right]$$
$$= A_2(\mathbb{r}) \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}ct\right] \qquad (2\text{-}2\text{-}3)$$

別に、

$$\Phi_R(t,\mathbb{r}) = \frac{\phi_R}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}_R|} \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda}(|\mathbb{r}-\mathbb{r}_R|-ct)-i\theta_R\right]$$
$$= a_R(\mathbb{r}) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda}(|\mathbb{r}-\mathbb{r}_R|-ct)-i\theta_R\right]$$
$$= A_R(\mathbb{r}) \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}ct\right] \qquad (2\text{-}2\text{-}4)$$

で与えられる参照光とともにこれらの物体光が一枚のホログラム乾板上に記録されると、乾板上での全強度分布I_T は次式で与えられる。

$$I_T = |A_1(\mathbb{r})+A_R(\mathbb{r})|^2 + |A_2(\mathbb{r})+A_R(\mathbb{r})|^2$$
$$= \left\{|A_1|^2+|A_2|^2+2|A_R|^2\right\} + \bar{A}_R(A_1+A_2) + A_R(\bar{A}_1+\bar{A}_2) \qquad (2\text{-}2\text{-}5)$$

ここで、「－」は複素共役量を表す。このような乾板を現像すると、乾板は強度分布 I_T に比例した振幅透過率Tを持ち、再生光を照射すると式（2-2-5 ）の第二項により記録された物体光と全く同じ波面が再生されることになる。

　このとき、式（2-2-4 ）の参照光と全く同じ光が再生光として用いられるなら再生される二つの物体光は各々次のように書ける。

$$\begin{aligned}\Phi_{01} &= k\,\Phi_R \bar{A}_R A_1 \\ &= k\,a_R^2 a_1 \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|+|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_s|-ct)-i\theta_0\right]\end{aligned} \qquad (2\text{-}2\text{-}6)$$

$$\begin{aligned}\Phi_{02} &= k\,\Phi_R \bar{A}_R A_2 \\ &= k\,a_R^2 a_2 \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|+|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_s|-ct)-i\theta_0\right]\end{aligned} \qquad (2\text{-}2\text{-}7)$$

ここで、kは I_T とTとの間の比例定数である。この二つの波面の干渉によって生じる空間内での光の強度分布I　は次のように計算される。

$$\begin{aligned}I_i &= |\Phi_{01}+\Phi_{02}|^2 \\ &= K^2(|A_1|^2+|A_2|^2) \\ &\quad + K^2 a_1 a_2 \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda}\{(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|+|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_s|)-(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|+|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_s|)\}\right] \\ &\quad + K^2 a_1 a_2 \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}\{(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|+|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_s|)-(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|+|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_s|)\}\right] \\ &= K^2(|A_1|^2+|A_2|^2)+2K^2 a_1 a_2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}D\right)\end{aligned} \qquad (2\text{-}2\text{-}8)$$

$$K^2 = k^2|A_R|^4 = k^2 a_R^4$$

ここに、

$$D = (|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|+|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_s|)-(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|+|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_s|) \qquad (2\text{-}2\text{-}9)$$

であり、Dは物体の変形前後で生じる光路差である。式（2-2-8 ）において、第二項は光の強度分布の空間的な変化，すなわち再生像中の干渉じまを表している。

今、再生光の波長λ'が記録時の参照光と異なる場合を考えてみる。式（2-2-5 ）で表される光の強度分布を記録しているホログラムを再生光

$$
\begin{aligned}
\Phi'_R(t,\mathbb{r}) &= \frac{\phi'_R}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}_R|}\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda'}(|\mathbb{r}-\mathbb{r}_R|-ct)-i\theta'_R\right] \\
&= a'_R(\mathbb{r})\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda'}(|\mathbb{r}-\mathbb{r}_R|-ct)-i\theta'_R\right] \\
&= A'_R(\mathbb{r})\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda'}ct\right] \quad ,
\end{aligned}
\tag{2-2-10}
$$

で照明したとき、再生される二つの物体光は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\Phi'_{01} &= k\,\Phi'_R\bar{A}_R A_1 \\
&= k\,a'_R a_R a_1 \exp\Big[-i\frac{2\pi}{\lambda'}(|\mathbb{r}-\mathbb{r}_R|-ct) \\
&\qquad -i\frac{2\pi}{\lambda}(|\mathbb{r}-\mathbb{r}_1|+|\mathbb{r}_1-\mathbb{r}_S|-|\mathbb{r}-\mathbb{r}_R|)-i(\theta_0-\theta_R+\theta'_R)\Big]
\end{aligned}
\tag{2-2-11}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi'_{02} &= k\,\Phi'_R\bar{A}_R A_2 \\
&= k\,a'_R a_R a_2 \exp\Big[-i\frac{2\pi}{\lambda'}(|\mathbb{r}-\mathbb{r}_R|-ct) \\
&\qquad -i\frac{2\pi}{\lambda}(|\mathbb{r}-\mathbb{r}_2|+|\mathbb{r}_2-\mathbb{r}_S|-|\mathbb{r}-\mathbb{r}_R|)-i(\theta_0-\theta_R+\theta'_R)\Big] \ .
\end{aligned}
\tag{2-2-12}
$$

この二つの波面の干渉によって生じる光の強度分布は式（2-2-8 ）と同様に次のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
I'_i &= |\Phi'_{01}+\Phi'_{02}|^2 \\
&= K'^2(|A_1|^2+|A_2|^2) \\
&\quad + K'^2 a_1 a_2 \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda}\{(|\mathbb{r}-\mathbb{r}_1|+|\mathbb{r}_1-\mathbb{r}_S|)-(|\mathbb{r}-\mathbb{r}_2|+|\mathbb{r}_2-\mathbb{r}_S|)\}\right] \\
&\quad + K'^2 a_1 a_2 \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}\{(|\mathbb{r}-\mathbb{r}_1|+|\mathbb{r}_1-\mathbb{r}_S|)-(|\mathbb{r}-\mathbb{r}_2|+|\mathbb{r}_2-\mathbb{r}_S|)\}\right] \\
&= K'^2(|A_1|^2+|A_2|^2)+2K'^2 a_1 a_2\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}D\right)
\end{aligned}
\tag{2-2-13}
$$

$$
K'^2 = k^2|A'_R|^2|A_R|^2 = k^2 a'^2_R a^2_R \ .
$$

式（2-2-8）と（2-2-13）を比較すると、両式とも干渉じまの変化を受け持つ同形の余弦関数を含んでおり、したがってこの二つの式は全く同じ干渉像を表すことがわかる。このことは、再生光が参照光と異なる光であっても、同じ視点から観測される干渉じまには何ら影響はないということを意味している。すなわち、再生像中の干渉じまは再生光の変化には影響を受けず、記録時の光の波長λと光路差Dとの比にのみ依存している。

2.2.2 変位測定における相対しま次数の確定法

一枚のホログラムから変位ベクトルの三成分を求める基本的な方法として、絶対しま次数法と相対しま次数法が知られている。

絶対しま次数法では、物体表面の任意の点Pの変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ とその点のしま次数nとの次の関係を用いる。

$$(\boldsymbol{k}_i - \boldsymbol{h})\cdot\boldsymbol{u} = n\lambda \qquad i=1,2,3 \tag{2-2-14}$$

ここで、$\boldsymbol{h}$ は照明方向を表す単位ベクトル，$\boldsymbol{k}_i$ は観測方向の単位ベクトル，λは照明光の波長である。この式では、三方向から観測したときの各点でのしま次数の絶対値さえわかれば変位の三成分が求まることになる。

それに対して、相対しま次数法では、四つの異なる観測方向を選んで各方向から物体表面の任意の点Pを観測し、次の式によって点Pでの変位ベクトルの三成分を求めることができる。（図2-2-2）

$$(\boldsymbol{k}_i - \boldsymbol{k}_0)\cdot\boldsymbol{u} = (n_i - n_0)\lambda. \qquad i=1,2,3 \tag{2-2-15}$$

ここで、$\boldsymbol{k}_i$（i=0,1,2,3）は観測方向を表す単位ベクトル，n_i（i=0,1,2,3）は各観測方向に対する物体点のしま次数，λは照明光の波長，$\boldsymbol{u}$ は変位ベクトルである。この式からわかるように、変位量を求めるためには各点で

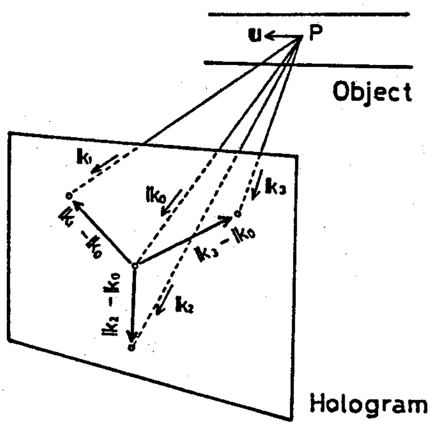


図 2-2-2　物体点の観測

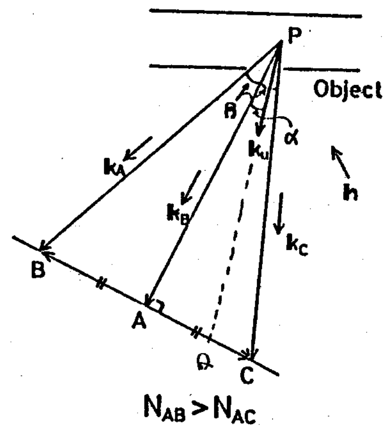


図 2-2-3　変位ベクトルと観測ベクトルの関係

の相対しま次数，すなわち視点の変化に対する物体点のしま次数の変化：$\Delta n = (n_i - n_0)$ さえわかればよい。物体点Ｐを視点Ａから観測しており、視点をＡからＢへ連続的に移動させたとき点Ｐでのしま次数が n_A から n_B に変化したとすると、しま次数が単調に変化しているのであれば、このときの点Ｐでの相対しま次数は視点の移動にともなって点Ｐを通り抜けたしまの本数に等しくなる。しかし、いま、図2-2-3 に示すような特別な場合，すなわち視点を点Ａから点Ｃへ移動するときその間に変位ベクトルの方向の点Ｑを含むような場合を考えると、式 (2-2-14) から容易にわかるように、視点が点Ｑにきたとき観測方向を表す単位ベクトル $\mathbf{k}$ が物体点Ｐの変位ベクトルと一致するため点Ｐでのしま次数は最大値をとることになる。このとき、物体点Ｐを通り抜けるしま本数はＡ→Ｑの視点移動に対しては（$n_Q - n_A$），Ｑ→Ｃに対しては（$n_Q - n_C$）となる。したがって、物体点を通り抜けるしま本数の総数は（$n_A - n_C$）ではなく｛$2n_Q - (n_A + n_C)$｝であり、実際のしま次数変化の観測にこのような場合をあるときには誤った結果をもたらすことになる。　このような誤りを避けるために、次のような方法を考えた。物体表面上の点Ｐが初

め点Aから観測されているものとし、別に二つの異なる視点B，CをAを通ってAP方向に垂直な直線上でお互いに反対側にAから等距離ににとる。このとき、変位ベクトルの方向ベクトル $\boldsymbol{k}_u$ は $\boldsymbol{k}_A$ と $\boldsymbol{k}_c$ の間にあるものとし、視点の移動A→B，A→Cに対して物体点Pを通過するしま本数を各々N_{AB}，N_{AC}と表す。AP方向に対して変位ベクトルのなす角をα，APとAB，ACとのなす角をβとすると、これらを用いてN_{AB}，N_{AC}は次のように書ける。

$$N_{AB} = |n_A - n_B| = \frac{|u|}{\lambda}\left[\cos\alpha - \cos(\beta+\alpha)\right] \tag{2-2-16}$$

$$N_{AC} = |2n_a - (n_A + n_c)| = \frac{|u|}{\lambda}\left[2 - (\cos\alpha + \cos(\beta-\alpha))\right], \tag{2-2-17}$$

ただし、$0 \leqq \alpha \leqq \beta$，$0 < \beta < \pi/2$　である。

このような観測では、常にN_{AB}がN_{AC}よりも大きくなることが以下のように簡単に示すことができる。今、次式で定義される関数f（α）を考える。

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= N_{AC} - N_{AB} \\ &= \frac{|u|}{\lambda}\left[\left\{2 - (\cos\alpha + \cos(\beta-\alpha))\right\} - \left\{\cos\alpha - \cos(\beta+\alpha)\right\}\right]. \end{aligned} \tag{2-2-18}$$

このf（α）には次の性質があることが容易にわかる。

$$\begin{aligned} f(\alpha)\Big|_{\alpha=0} &= 0 \\ f(\alpha)\Big|_{\alpha=\beta} &= \frac{2|u|}{\lambda}\cos\beta\,(\cos\beta - 1) < 0 \end{aligned} \tag{2-2-19}$$

そして、f（α）は sinβ＝ tanαのとき最大値をとり、

$$f(\alpha)\Big|_{\sin\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = 2 - \frac{2}{\sin\alpha} \leqq 0 \quad . \tag{2-2-20}$$

である。したがって、$0 \leqq \alpha \leqq \beta$，$0 < \beta < \pi/2$に対してf（α）は常に負または0である。

$$f(\alpha) \leqq 0 \quad , \tag{2-2-21}$$

すなわち、

$$N_{AB} > N_{AC} \quad . \tag{2-2-22}$$

である。このことから、しま次数がある位置で極値をもつような特殊な場合にも正確なしま次数の変化を得るためには、初めの観測方向に対して垂直に視点を移動させ、次数変化の大きな方向を採用すればよいことがわかる。

2．3　ホログラフィ干渉法による面内・面外変位測定における精度の検定

ホログラフィ干渉法（二重露光法）は光の干渉を用いるため、この応用には自ら限界のあることが容易に考えられる。物体表面上の各点の変位量が大きすぎると、変形前後の像が別々の像として分離されて互いに干渉しなくなるおそれがある。逆に、変位量が光の波長と同程度に小さくなると、変形前後の像間の干渉はあっても干渉じまは現れない。これまで多くの研究者によって変位測定に対する適用は早くから議論されてきたが、実際に物体の変形に応用する場合には、さらにその測定範囲や精度についても詳しい考察をしておく必要がある。そこで、ここでは基礎実験として、ホログラフィ干渉法の応用上必要な測定精度や測定範囲について調べた。

精度検定のために、予め変位を設定して与えなければならないが、物体表面の任意の変位ベクトルは観測方向の面外成分と観測方向に対して垂直な面内成分とに分解できることから、ここでは面内及び面外に剛体的な平行変位を与えて相対しま次数法による測定に対して精度検定を行った。

2.3.1　実験方法及び実験装置

図2-3-1 にホログラフィ撮影に用いた光学系を示す。光源としてはHe-Ne ガスレーザ光（波長 $\lambda = 6328\text{Å}$）を使用している。試験片には、光の反射を良く

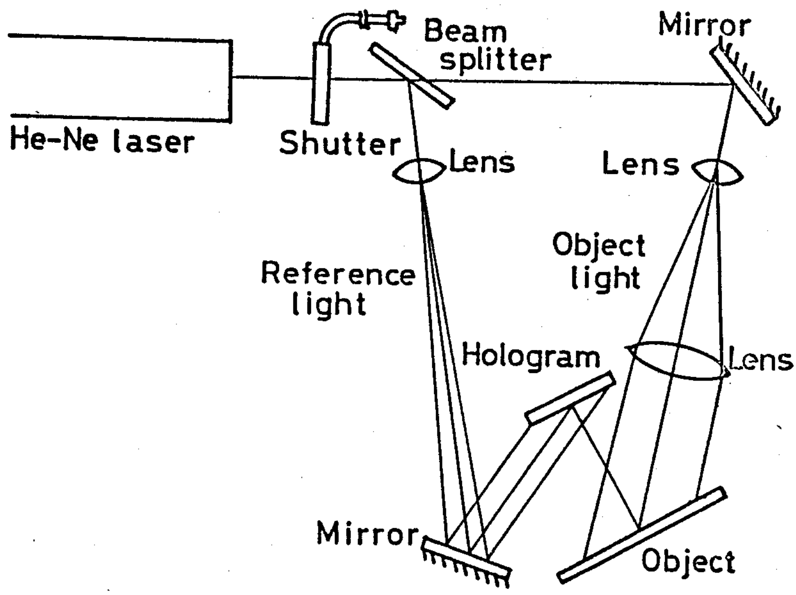


図 2-3-1　ホログラム撮影の光学系

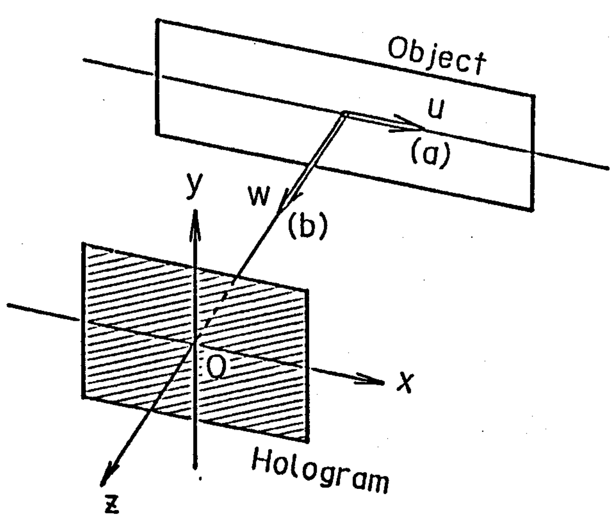


図 2-3-2　設定変位の方向

するために表面を白く塗ったアクリルの平板（60 mm × 300 mm, 厚さ10 mm）を使い、差動式高精度マイクロメータ（最小目盛 0.1μm）で予め設定した変位量を（a）面内方向,（b）面外方向に与える。（図2-3-2）

ホログラフィ撮影は、まず表面に標線をほどこした試験片の変位前の像を一回目の露光で記録しておき、次に設定変位を与えて二回目の露光を行う。こうして得られた干渉像を再生して観測し、視点を移動させて、そのときの物体点でのしま次数の変化を測定する。各々の測定量を式（2-2-15）に代入して変位量を求めることができる。変位量は、面内変位では 5μm ～150 μm，面外変位は50μm ～1000μm の範囲で与えた。

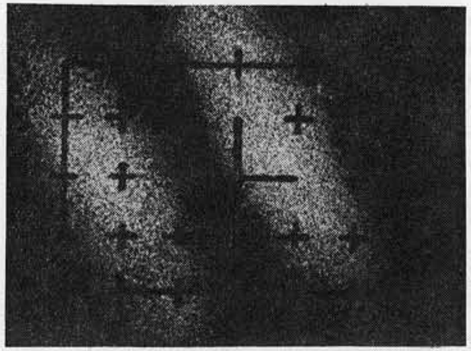
2.3.2 実験結果

（i）ホログラム再生像

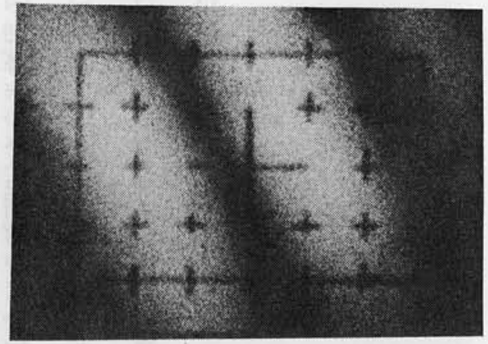
図2-3-3，2-3-4 は、各々変位量 5μm，60μm の場合の面内の剛体変位に対する実験及び計算結果である。－（a）は物体表面に焦点を合わせた場合の再生像，－（b）は干渉じまに焦点を合わせた場合の再生像，－（c）はそのときに与えた変位量に対応して式（2-2-14）から得られる理論的なしま模様を示しており、図中の数値はしま次数の絶対値である。また、図2-3-5，2-3-6 は各々50μm，200 μm のときの面外変位に対する結果である。

（ii）変位量の算出

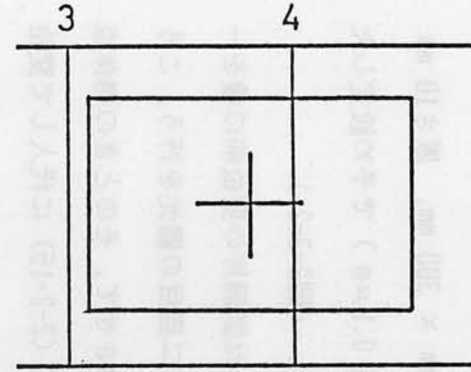
相対しま次数法の式（2-2-15）に物体表面上の任意の点の座標（x，y，0）及び視点Oの座標（x_o，0，z_o）を代入する。視点Oをx軸に平行に移動させてそのときの移動量をXとすれば、面内変位に対して式（2-2-15）は次のようになる。



（a）焦点：物体面上

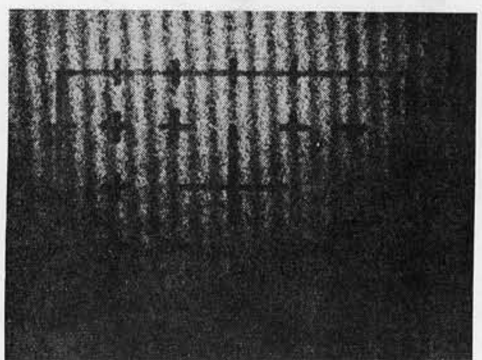


（b）焦点：干渉じま

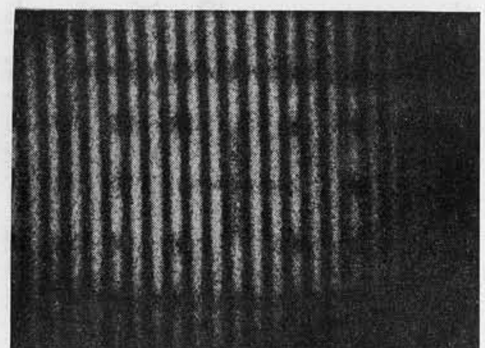


（c）理論しま形状

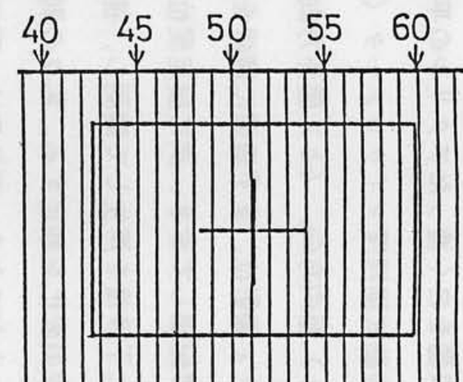
図 2-3-3　面内変位のホログラム再生像（u＝5 μm の場合）



（a）焦点：物体面上

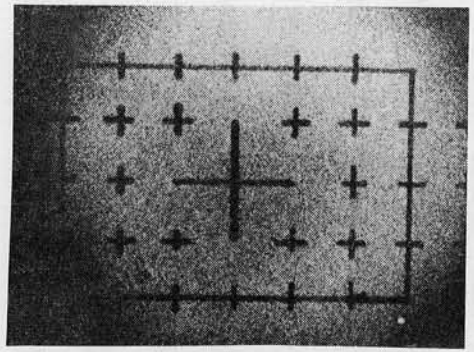


（b）焦点：干渉じま

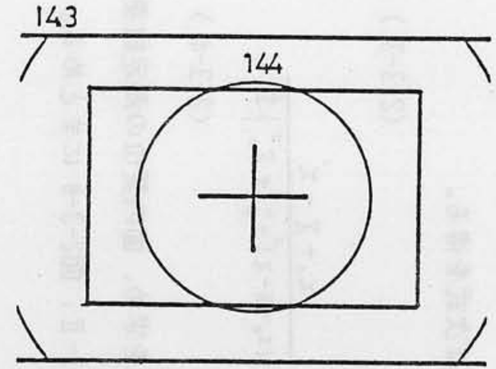


（c）理論しま形状

図 2-3-4　面内変位のホログラム再生像（u＝60μm の場合）

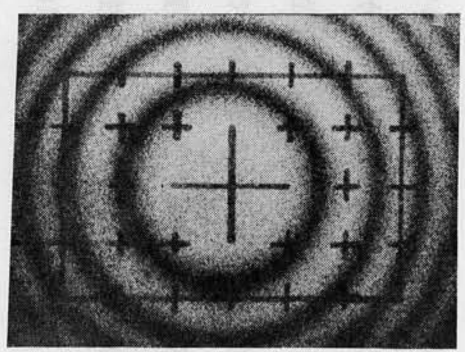


（a）観測結果

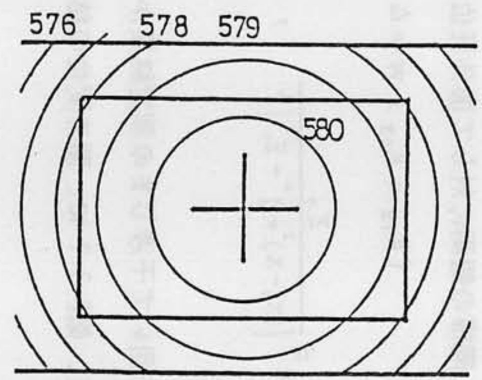


（b）理論しま形状

図 2-3-5　面外変位のホログラム再生像（w＝50μm の場合）



（a）観測結果



（b）理論しま形状

図 2-3-6　面外変位のホログラム再生像（w＝200　μm の場合）

$$(k_{1x} - k_{0x})\, u = \Delta n \lambda \qquad (2\text{-}3\text{-}1)$$

$$k_{0x} = \frac{x_0 - x}{\{(x_0 - x)^2 + y^2 + z_0^2\}^{\frac{1}{2}}} \;,\; k_{1x} = \frac{x_0 + X - x}{\{(x_0 + X - x)^2 + y^2 + z_0^2\}^{\frac{1}{2}}} \qquad (2\text{-}3\text{-}2)$$

また、同様の観測に対して面外変位に対しては次式を得る。

$$(k_{1z} - k_{0z})\, w = \Delta n \lambda \qquad (2\text{-}3\text{-}3)$$

$$k_{0z} = \frac{z_0}{\{(x_0 - x)^2 + y^2 + z_0^2\}^{\frac{1}{2}}} \quad,\quad k_{1z} = \frac{x_0 + X - x}{\{(x_0 + X - x)^2 + y^2 + z_0^2\}^{\frac{1}{2}}} \qquad (2\text{-}3\text{-}4)$$

これらを用いて干渉じまの測定結果から変位量を求め、面内変位の測定結果を表2-3-Ⅰ，図2-3-7 に、面外変位の結果を表2-3-Ⅱ，図2-3-8 にまとめる。

2.3.3 考 察

(ⅰ) 面内変位の測定範囲及び測定精度

図2-3-3 のホログラム再生像をみると、数 μm 程度の変位量では干渉によって生じるしまの空間周波数が小さいため、観測している視野に現れるしまの本数が少なくなり、しかもしまの幅が太くかつコントラストも低下することがわかる。このような干渉像からの変位の測定では、視野の中のしま本数が少ないために視点の移動に対する物体点でのしま次数の変化も小さくなり、Δnの小数部の読み取り精度が変位量の精度に大きく影響する。そのため数 μm 以下の面内変位の測定には大きな誤差を生じる可能性がある。

一方、図2-3-4 では、変位量が100 μm 程度になると視野内のしま密度が非常に高くなり、各々のしまを識別することが困難になっている。また、しまの局在位置が遠方になるため物体点としまの位置との対応がつきにくく、正確な観測が難しくなり、やはり測定変位に含まれる誤差が大きくなる。

表2-3-Ⅰ及び図2-3-7 をみると、5 μm ～150 μm までの範囲の変位量に対

表2-3-I　面内平行変位の測定結果
（a）視点の近い場合（z_o =307 mm）

設定変位 u μm	測定値 u μm	誤　差 Δu μm	設定変位 u μm	測定値 u μm	誤　差 Δu μm
5.0	3.3	- 1.7	70.0	70.9	+ 0.9
10.0	11.2	+ 1.2	80.0	80.1	+ 0.1
15.0	19.8	+ 4.8	90.0	89.9	- 0.1
20.0	21.7	+ 2.1	100.0	98.4	- 1.6
25.0	24.1	- 0.9	110.0	108.7	- 1.3
30.0	29.2	- 0.8	120.0	——	——
40.0	39.9	- 0.1	130.0	——	——
50.0	50.0	0	140.0	——	——
60.0	59.7	- 0.3	150.0	——	——

（b）視点が遠方の場合（z_o =575 mm）

設定変位 u μm	測定値 u μm	誤　差 Δu μm	設定変位 u μm	測定値 u μm	誤　差 Δu μm
5.0	3.5	- 1.5	70.0	69.8	- 0.2
10.0	11.3	+ 1.3	80.0	82.1	+ 2.1
15.0	20.4	+ 5.4	90.0	91.6	+ 1.6
20.0	21.8	+ 1.8	100.0	103.0	+ 3.0
25.0	24.3	- 0.7	110.0	111.0	+ 1.0
30.0	29.5	- 0.5	120.0	124.3	+ 4.3
40.0	40.2	+ 0.2	130.0	132.5	+ 2.5
50.0	50.7	+ 0.7	140.0	142.1	+ 2.1
60.0	60.9	+ 0.9	150.0	153.0	+ 3.0

表2-3-Ⅱ　面外変位の測定結果
（a ）視点の近い場合（z_o =315 mm）

設定変位 w μm	測定値 w μm	誤　差 Δw μm	設定変位 w μm	測定値 w μm	誤　差 Δw μm
100.0	107.1	+ 7.1	- 100.0	- 96.3	+ 3.7
150.0	160.6	+ 10.6	- 200.0	- 184.7	+ 15.3
200.0	206.9	+ 6.9	- 300.0	- 270.9	+ 29.1
250.0	263.1	+ 13.1			
300.0	316.9	+ 16.9			
500.0	506.3	+ 6.3			
1000.0	904.9	- 95.1			

（b）視点が遠方の場合（z_o =580 mm）

設定変位 w μm	測定値 w μm	誤　差 Δw μm	設定変位 w μm	測定値 w μm	誤　差 Δw μm
100.0	——	——	- 100.0	——	——
150.0	——	——	- 200.0	- 160.6	+ 39.4
200.0	214.1	+ 14.1	- 300.0	- 247.5	+ 52.5
250.0	270.7	+ 20.7			
300.0	330.4	+ 30.4			
500.0	514.9	+ 14.9			
1000.0	864.8	-135.2			

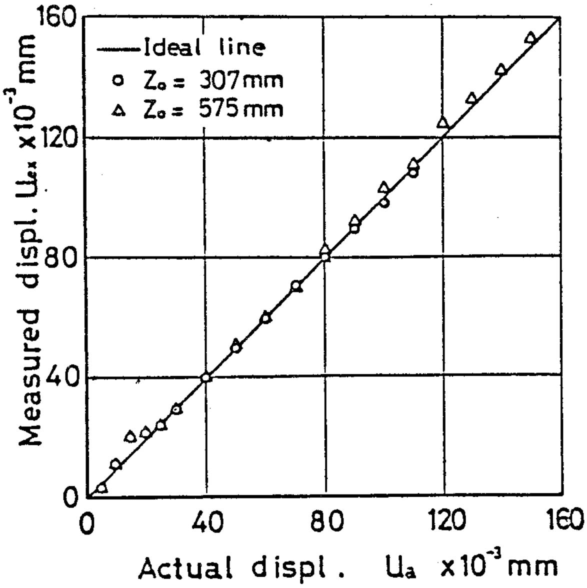


図 2-3-7　面内変位の測定結果

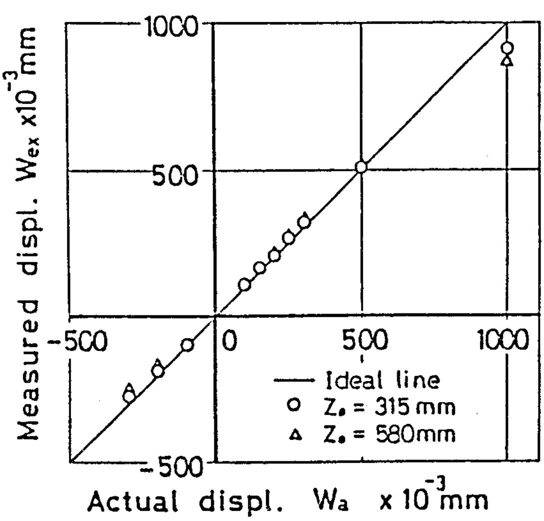


図 2-3-8　面外変位の測定結果

して、測定結果は非常に正確な値を示していることがわかる。実験時の設定変位量の誤差を考慮するとかなり良い精度で測定が可能であると言える。すなわち、ホログラフィ干渉法を利用して定量的に変位を求める場合、波長（λ＝6328Å）のレーザ光を使用する場合には面内変位の測定ではおよそ数μm ～百数十μm の範囲の変位量を精度良く測定できるものと考えられる。

観測を容易にし，できるだけ正確なしま次数の変化を読み取るためには、視点の位置を適当に選ぶことが必要であり、観測位置と乾板との距離は重要な要素となる。表2-3-Ⅰにおいて、視点が近い場合と遠方の場合での測定結果を比較すると、z_o ＝307 mmからの測定では、変位量が小さいときには相対的に誤差が大きくなっているが、25μm 以上になると誤差は最大で設定変位量の約4%以下となり、かなり正確であることが示されている。z_o ＝575 mmの遠方の位置からの観測では、近くからの観測に比べて誤差の絶対値が若干大きくなっている。これは式（2-3-2 ）の分母のｚ座標が大きな値をとり、移動量Ｘの効果が弱められるためである。しかし、視点を遠方にとると干渉じまの間隔が拡がって大きな変位量の干渉像が観測しやすくなり、表2-3-Ⅰからわかるように大きな変位も測定可能となる。

すなわち、ホログラフィ干渉法での変位測定における干渉じまの観測には、測定する変位量の範囲に応じて最適な視点の位置を選定することが必要であると言える。

（ⅱ）面外変位の測定範囲及び測定精度

表2-3-Ⅱ及び図2-3-8 より、ホログラム再生像の干渉じまから精度良く測定できる面外変位の範囲はほぼ数十μm ～数百μm であることがわかる。この範囲外では観測に対して視野中のしま密度が小さ過ぎるか，逆に大き過ぎるために測定誤差を生じやすくなる。変位量が大きいときにはしまの局在が非常に遠

方になるので観測しにくく、さらに測定値に誤差を生じやすくなる。

視点の位置に対しては、遠方及び近くからの観測ともに面内変位に比較して誤差の絶対量は大きくなっている。しかし、測定される変位量の絶対値も大きくなっているため、視点が近いときには誤差は最大で設定変位量の約7％であり、精確な測定がなされているといえる。遠方での観測では、誤差が大きくなっているが、これは面内変位と同様に式（2-3-4 ）中の分母のｚ座標に大きな値が代入され、視点の移動量ＸやΔｎの読み取り誤差が大きく影響してくるためである。

（iii）面内変位と面外変位との測定誤差の比較

変位量を算出する式について検討してみる。面内，面外変位各々に対して、変位を求める式は次式で与えられる。

$$(k_{1x} - k_{0x})\, u = \Delta n \lambda \qquad (2\text{-}3\text{-}1)$$

$$(k_{1z} - k_{0z})\, w = \Delta n \lambda \qquad (2\text{-}3\text{-}3)$$

ここで、簡単のために物体点を（ｘ，０，０），基準視点を（０，０，z_0）とし、視点は物体表面から十分離れていて$x < z_0$であるとする。

今、視点をｘ軸に沿ってΔｘだけ移動するとき、方向ベクトルの成分は次式で与えられる。

$$k_{0x} = \frac{-x}{(x^2 + z_0^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad k_{1x} = \frac{\Delta x - x}{\{(\Delta x - x)^2 + z_0^2\}^{\frac{1}{2}}} \qquad (2\text{-}3\text{-}5)$$

$$k_{0z} = \frac{z_0}{(x^2 + z_0^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad k_{1z} = \frac{z_0}{\{(\Delta x - x)^2 + z_0^2\}^{\frac{1}{2}}} \qquad (2\text{-}3\text{-}6)$$

ここで、（$k_{1x} - k_{0x}$）と（$k_{1z} - k_{0z}$）の大きさを検討する。式（2-3-5 ）を用いると（$k_{1x} - k_{0x}$）はΔｘが小さいものとして、次のように書ける。

$$k_{1x} - k_{0x} = \frac{d}{dx}\left\{ \frac{-x}{(x^2+z_0^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} \Delta x$$
$$= \frac{-z_0^2}{r^3} \Delta x \qquad , \quad r = (x^2+z_0^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\tag{2-3-7}$$

同様に、（$k_{1z} - k_{0z}$）は、

$$k_{1z} - k_{0z} = \frac{d}{dx}\left\{ \frac{z_0}{(x^2+z_0^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} \Delta x$$
$$= -\frac{x z_0}{r^3} \Delta x \tag{2-3-8}$$

となる。観測条件から $x < z_0$ としており、$r \fallingdotseq z_0$ となるから

$$|k_{1x} - k_{0x}| \approx \frac{\Delta x}{r} \tag{2-3-9}$$

$$|k_{1z} - k_{0z}| \approx \left(\frac{x}{r}\right)\left(\frac{\Delta x}{r}\right) \tag{2-3-10}$$

とできる。

従って、移動量 Δx に対して（$k_{1x} - k_{0x}$）は（$k_{1z} - k_{0z}$）よりも感度が高いことがわかる。すなわち、面外変位の方が面内変位に比べて、視点の位置変化に対する感度が低いために測定値の中により大きな誤差を生じやすくなる。

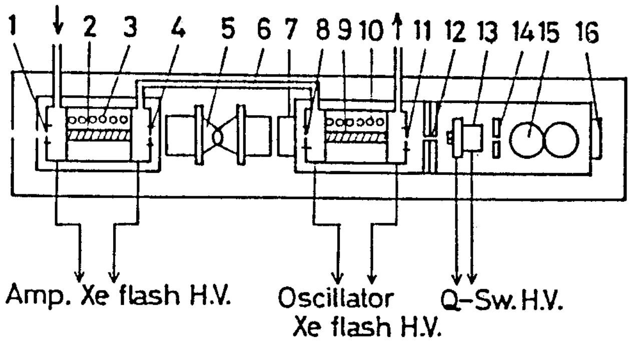
2．4　高速現象の解析への応用 ——— 角棒中の応力波の観測

ここでは縦衝撃を受ける角棒を考える。物体表面の各点は、その点の粒子速度によって伝ぱ方向に大きく変位すると共に、伝ぱ方向のひずみによってそれに垂直な方向にも変位成分を持つ。しかし、現実には伝ぱ方向の成分は他の成分に比べて非常に大きく、得られる干渉像はほぼこの成分にだけ依存しているものと考えられる。そこで、変形状態を調べるために、相対しま次数法における変位－しま次数の関係式を変位は波の伝ぱ方向成分のみであると近似して干

渉像から伝ぱ方向の面内変位成分を求める。そして、別にひずみゲージを使って測定した結果と比較して近似に対する測定精度を調べるとともに現象の一次元性を確かめた。

2.4.1 実験方法及び実験装置

図2-4-1 に本実験に用いた高速ホログラフィ撮影用光源のためのダブルパルス・ルビーレーザ発振装置（レーザ光波長 λ =6943Å）の構造を示す。この発振装置はレーザ光を安定に発振させるために増幅用のルビーロッドを設けた二段構造になっている。図2-4-2 はホログラフィ撮影時の光学系の配置を示したものである。この光学系において、基準となる座標系は図中に示してあるように、ホログラム乾板面をx－y面とし、それに垂直にz軸をとっている。図2-4-3 は実験装置全体の構成をブロック図で概略的に示している。試験片は断面60 mm ×20 mm の長方形で2.5 m の長さを持つ鋼の棒である。鋼球の振子を試験片の端面に衝突させて衝撃を加え、棒中に生じた応力波の伝ぱによる試験片表面の変形状態をホログラフィ撮影して、応力波の伝ぱする様子を観測する。試験片の撮影部分に応力波が到達したときちょうどルビーレーザ光が発振されるように、応力波の伝ぱとレーザ光の発振の同期をとるために試験片の衝撃端面から約1mm突き出た接点を設けて、振子とこの接点との接触でレーザ装置のXeランプのトリガーをかける。レーザ発振のためには、Xeランプの発光でルビーロッドが十分励起されるまでに約800 μs の遅延時間を必要とするので、振子がこの接点と接触して衝撃端に衝突するまでの時間をレーザ発振の遅延時間にほぼ等しくなるように設定しておく。試験片の衝撃端から約1m の位置を撮影部分とし、応力波がまだ到達していない物体の変形前の状態を一本目のパルス光で記録し、次にちょうど観測位置に応力波が到達したときの状態を二本目の光で同一乾板に重ねて記録する。レーザ光は高速感応形フォトダイオード



1 Pin hole	9 Ruby rod of oscillator
2 Ruby rod of amp.	10 Xe flash helical lamp of oscillator
3 Xe flash helical lamp of amp.	11 Pin hole
4 Pin hole	12 Pin hole
5 Telescope	13 Q-Sw. DKDP crystal
6 Cooler tube	14 Pin hole (variable)
7 Etalon at out put side	15 Polarizer
8 Pin hole	16 100% reflector

図 2-4-1　ダブルパルス・ルビーレーザ発振装置

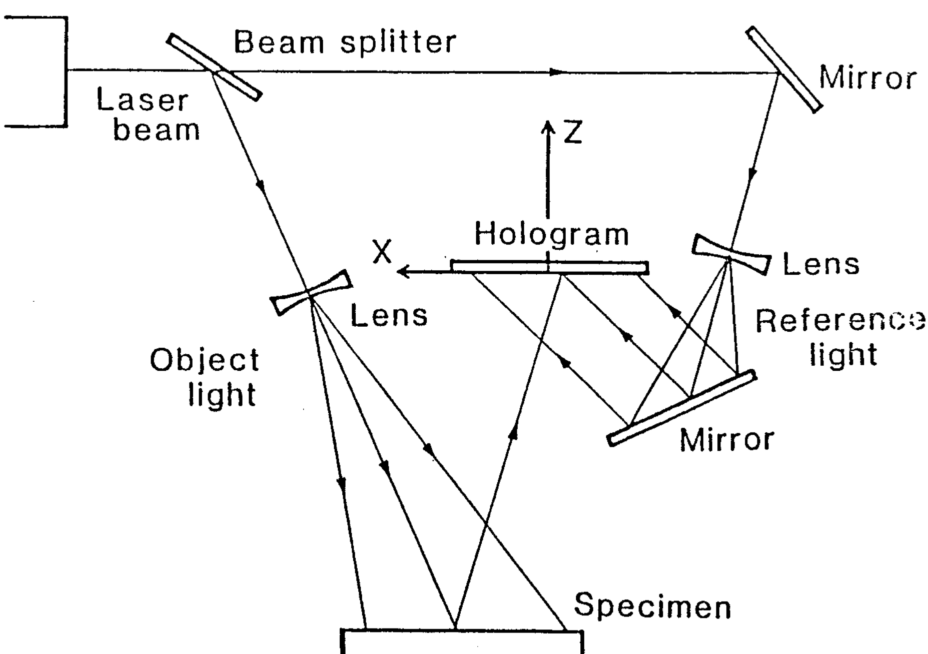


図 2-4-2　ホログラム撮影光学系

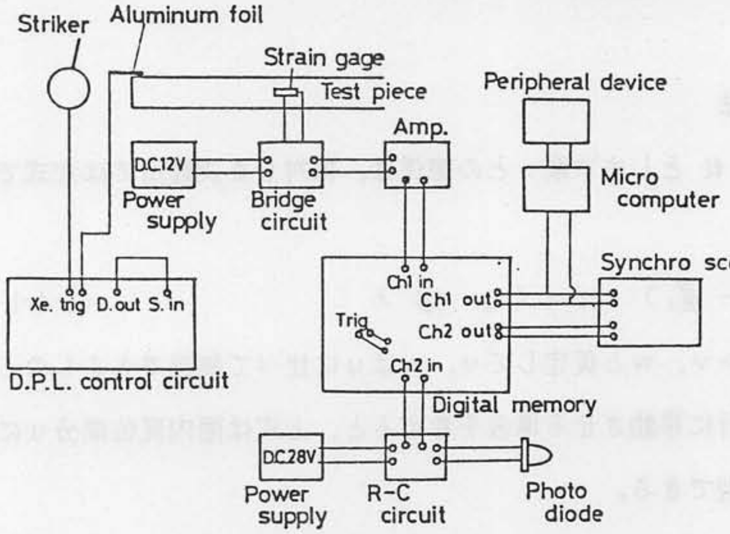


図 2-4-3　実験装置ブロック図

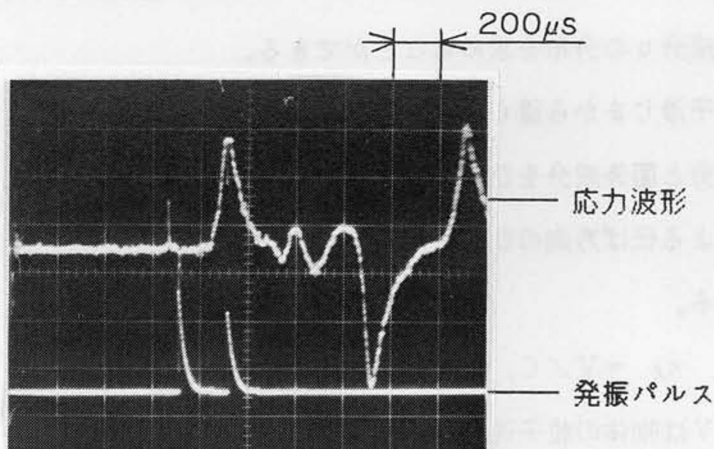


図 2-4-4　応力波と発振パルスの同期

（立ち上がり時間0.8 μs ）で観測し、応力波は衝撃端から１ｍ の位置に取り付けたひずみゲージ（ゲージ長：１mm，抵抗線型，ゲージファクタ：2.1 ）で記録した。この二つの信号は、一旦ディジタル式波形記憶装置に取り込み、それをシンクロスコープ上に出力させて応力波の伝ぱに対するレーザ光の発振時期の同期状態を確認する。応力波とレーザ光の発振の同期状態の一例を図2-4-4 に示す。この写真で、時間軸は一分割200 μs であり、二本のパルス光発振

の時間間隔は200 μs に設定してある。

2.4.2 解析方法

変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ としま次数 n との関係は、相対しま次数法では次式で与えられる。

$$(\boldsymbol{k}_i - \boldsymbol{k}_o)\cdot\boldsymbol{u} = (n_i - n_o)\,\lambda \qquad (2\text{-}4\text{-}1)$$

今の場合u＞＞v，wと仮定してv，wはuに比べて無視できるものとし、視点をx軸に平行に移動させる場合を考えると、上式は面内変位成分uに対して次のように近似できる。

$$(k_{ix} - k_{ox})\,u = \Delta n\cdot\lambda, \quad \Delta n = n_i - n_o \qquad (2\text{-}4\text{-}2)$$

この式を使って、x軸に平行な線上にとった二つの視点から干渉像を観測して面内変位成分uの分布を求めることができる。

一方、干渉じまから得られた変位分布と比較するために、応力波の伝ば方向の面内成分と面外成分をひずみゲージの信号から求めた。衝撃によって生じた応力波による伝ば方向のひずみ ε_ℓ およびそれに垂直方向のひずみ ε_t は次式で表される。

$$\varepsilon_\ell = V/C, \qquad \varepsilon_t = \nu\,\varepsilon_\ell \qquad (2\text{-}4\text{-}3)$$

ここで、Vは物体の粒子速度，Cは鋼の縦波の速度（この実験では C＝5120 m／s），νはポアソン比である。この式から面内変位成分uおよび面外変位成分wは次のように求められる。

$$u = \int_0^t V\,dt = \int_0^t C\,\varepsilon_\ell\,dt \approx \sum_i C\,\varepsilon_{\ell i}\cdot\Delta t \qquad (2\text{-}4\text{-}4)$$

$$w = \varepsilon_t\,\frac{S}{2} = \nu\,\varepsilon_\ell\,\frac{S}{2} \qquad (2\text{-}4\text{-}5)$$

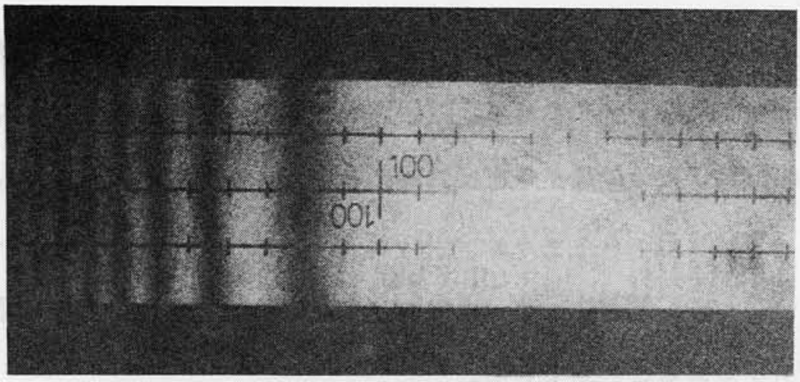
ここで、ｓは板厚，$\epsilon_{\ell i}$ は時間間隔Δｔ毎にサンプリングされている波形記憶装置内のディジタルデータである。試験片中の応力波は非分散性であると仮定すると、時間軸は次の関係から伝ぱ方向の座標（ｘ座標）に変換される。

$$C \cdot \Delta t = \Delta x \qquad (2\text{-}4\text{-}6)$$

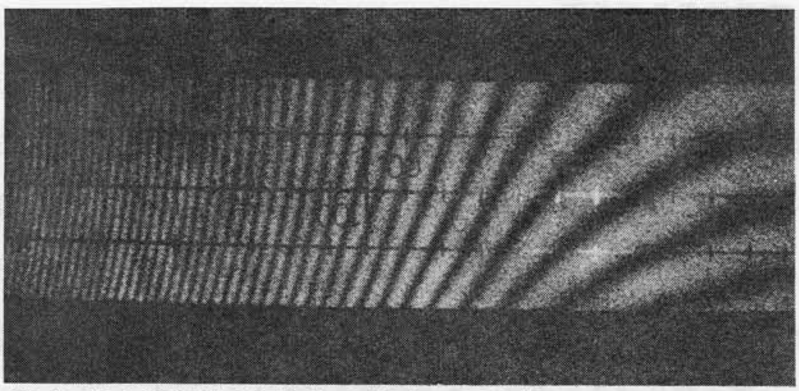
このようにして、試験片上の一点でのひずみの時間履歴を測定して面内・面外変位成分を求めることができる。

2.4.3 実験結果及び考察

図2-4-5 は、実験で得られたホログラム再生像写真である。像中の「100 」を記した点は衝撃端面から１ｍの位置を示している。応力波は写真中左から右の方向へ伝ぱしている。図 2-4-5（ａ）は応力波頭がちょうど１ｍの観測位置に到達した時の変形状態をとらえたものであり、（ｂ）は応力波が半分ほど通り過ぎたときの状態である。図 2-4-5（ｂ）の干渉じまから、角棒表面の中心線に沿って面内変位成分を求め、その結果を図2-4-6 にプロットしている。面外変位は面内変位に比べて非常に小さく、干渉じまから求めることは困難であった。図中の実線は、ひずみゲージで得られたデータから式（2-4-4 ）～（2-4-6 ）によって面内・面外成分の中心線に沿った分布を求めたものである。この結果から分かるように、応力波の伝ぱによる変形状態は伝ぱ方向の面内成分が主であり、他の成分はそれに比べて非常に小さい。したがって、干渉じまから面内変位だけを求めるために近似式（2-4-2 ）を用いても十分精度の良い結果が得られ、干渉じまから求められた面内変位の分布とひずみゲージで測定された結果とは非常によく一致した。このことは、応力波の伝ぱ問題に対して面内変位に注目して解析する場合、相対しま次数法が定量的測定法として十分適用できることを示している。



（a） 応力波頭が観測位置に到達したときの再生像



（b） 応力波が半分通過した場合の再生像

図2-4-5 鋼の角棒中を伝ぱする応力波－ホログラム再生像

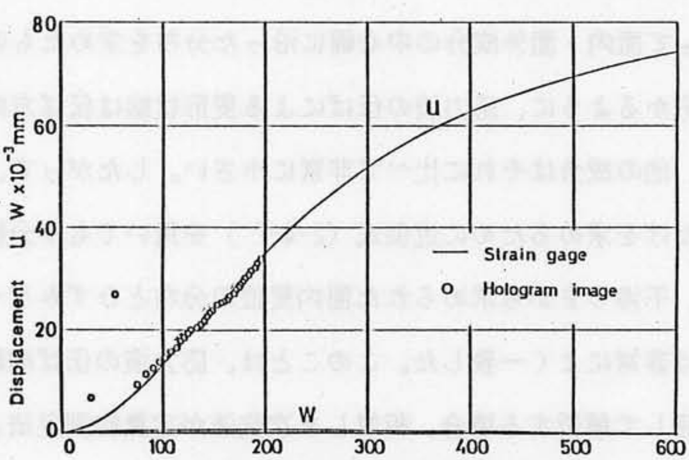


図2-4-6 角棒の中心線に沿った変位分布

2．5　結論

本章の研究において以下のような結果が得られた。

ホログラフィ干渉法に関して理論的な考察を行い、まず、撮影時の参照光と再生光の光の波長が異なっていても干渉像の観測には何ら影響がないことを確かめた。次に、実際に相対しま次数法を使って変位測定をする場合、正確な相対しま次数を求めるためには視点を第一視点の方向に対して対称に移動させ、しま次数変化の大きい方向に第二視点をとれば良いことがわかった。

ホログラフィ干渉法を変位測定に用いる場合の測定範囲及び測定精度を調べた結果、正確に測定できる範囲は面内変位に対してはおよそ数μm～百数十μmの範囲の変位量であり、面外変位ではおよそ数十μm～数百μmの範囲であることがわかった。

また、面内変位と面外変位の測定精度を比較して、相対しま次数法による観測に対しては面内変位の方が誤差が少なく、より正確に測定できることがわかった。

ホログラフィ干渉法を高速現象の解析に応用するために、ダブルパルス・ルビーレーザ光を光源として鋼の角棒中を伝ぱする応力波の観測を試みた。そして、このような現象では変形はほとんど面内だけであることを確かめ、応力波の伝ぱ方向の面内変位成分に比べて他の成分は非常に小さく、変形場を解析するにはこの面内成分だけに注目すれば十分であることが確認できた。干渉じまから求められた面内変位は、別にひずみゲージで測定された結果と非常によく一致した。したがって、応力波の伝ぱに伴う高速過渡的な変形場を面内変位に注目して解析する場合には、高速ホログラフィ干渉法は定量的測定法として十分適用できることがわかる。

第3章　サンドウィッチ形層状複合材中の応力波の観測

3．1　まえがき

層状複合材は、その中を伝ぱする応力波に対して異種媒質の層間に生じる相互干渉のために形状依存性の分散効果を有することが知られている。そして、衝撃などの動的な問題では、層間のはがれなどの現象に対してこの相互作用は重要な影響を及ぼす。層に平行に伝ぱする調和波に対する分散性に関する理論的研究としては、厳密な解析解についての議論、あるいはあるモデルについて近似的な解を議論したものがいくつか報告されている。また、衝撃問題に対しては、PeckやGurtman ら（ 6）の提案した「波頭近似法（Head-of-the-pulse apploximations）」による過渡波の解析や林，新川ら（ 7）による衝撃端近傍での応力波の挙動解析への「波頭展開法（Wave-front-expansion method ）」の応用などがある。層間のせん断応力については、Payton（ 8）が各層内の平均変位を変数として解析的な取り扱いを提案している。

しかし、複合材の動的挙動に関する実験的な研究の報告は非常に少なく、特に応力波の伝ぱによって生じた各層中の変位分布やひずみ分布まで取り扱った報告はほとんどない。本研究では、層状複合材中の応力波の挙動を実験的に調べ、これまで層状複合材中の過渡波の伝ぱ問題に対して仮定として取り扱われていた層内の変形，特に層間の相互作用によって生じるせん断応力について解析を試みた。まず、層間に生じるせん断応力が複合材の持っているどのようなパラメータによって支配されているかを理論的に考察した。次に、波頭展開法を用いて応力波頭近傍の層間に作用するせん断応力の分布を理論的に求めた。そして、実際にアルミニウムとエポキシ樹脂で作製したサンドウィッチ形の層状複合材モデルを用いて衝撃実験を行い、複合材中を伝ぱする応力波の観測を行った。　観測方法として、前章で動的問題への有効性を検討したダブルパルス・ルビーレーザ光を光源とする高速ホログラフィ干渉法を用いた。干渉じま

から変形を解析するために、前章で考察したように応力波の伝ぱ問題では変形は近似的に面内成分のみが存在すると仮定して相対しま次数法を使った。変位を求めるにあたっては、パーソナル・コンピュータを中心とする画像処理システムを利用し、干渉像に二値化，細線化などの適当な処理を施して、物体表面上の任意の点の変位量を自動的に算出した。このようにして離散したいくつかのサンプル点で求めた変位をデータとしてスプライン関数を用いて平滑化し、観測領域全体にわたっての連続的な変位分布を求めた。さらに、変位分布からひずみ分布及び応力分布も調べ、層状複合材中を応力波が伝ぱするときにどのような挙動を示し、また層間にどのような相互作用が生じるのかを観測して理論的解析結果との比較検討を行った。

3．2　層間のせん断応力を支配するパラメータについての理論的考察

図3-1 に示すように、二種類の媒質の周期的な繰り返しから成る層状複合材を考える。この複合材の端面に一様応力σ_0で衝撃荷重が加えられたとき、動的挙動を表す運動方程式は拡散連続体理論によって、次のように書ける。

$$\rho_i \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial t^2} = E_i \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x^2} + \frac{B}{h_i}\left(\bar{U}_j - \bar{U}_i\right) \quad i \neq j,\ i,j = 1,2 \tag{3-1}$$

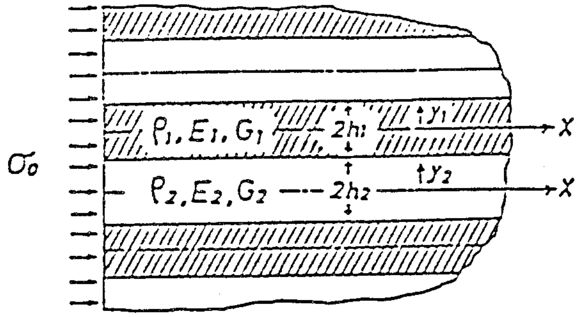


図 3-1　層状複合材モデル

ここで、座標系は図3-1 に示すようにとっており、x－z 平面が各層の中央面に一致し、波の伝ぱ方向にx軸、各層内でx軸に垂直にy_i 軸（i＝1,2）としている。i，j＝1,2 は層を表し、ρ_i，E_i は各々 i 層の密度，弾性率であり、$2h_i$ は層の厚さである。この方程式では、層内でのせん断応力分布が直線的であることを仮定して、y_i 軸方向の変位分布を i 層内で y_i 軸に沿って平均した変位$\overline{U}_i$ を代表変数としてx軸方向の運動を記述している。右辺の第二項が層間の相互作用を表す連成項であり、係数Bは各層の剛性率を使って次のように与えられる。

$$B = \frac{3G_1G_2}{h_1G_2 + h_2G_1} \tag{3-2}$$

この方程式の無次元化を考えるために、長さの次元を持つ任意の量hを導入し、各変数を次のように変換する。

$$\overline{U}_i = h u_i, \quad x = h\xi, \quad t = h\tau / C \tag{3-3}$$

$$C_i^2 = E_i / \rho_i, \quad C^2 = C_1 \cdot C_2 \tag{3-4}$$

これらの新しい変数で式（3-1）を書き直すと、次式を得る。

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial \tau^2} = \left(\frac{C_i}{C}\right)^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi^2} + \frac{Bh^2}{\rho_i h_i C^2}(u_j - u_i) \quad i \neq j \quad i,j = 1,2 \tag{3-5}$$

今、構成媒質の異なる二つの複合材Ⅰ，Ⅱを考えて、これらの間に次の関係が成立するものとする。

$$\left(\frac{C_1}{C_2}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{C_1}{C_2}\right)_{\mathrm{II}}, \quad \left(\frac{\rho_1 h_1}{\rho_2 h_2}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{\rho_1 h_1}{\rho_2 h_2}\right)_{\mathrm{II}} \tag{3-6}$$

hは任意の量であることから、

$$\left(\frac{B}{\rho_1 h_1 C^2}\right)_{\mathrm{I}} (h^2)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{B}{\rho_1 h_1 C^2}\right)_{\mathrm{II}} (h^2)_{\mathrm{II}} \tag{3-7}$$

が成立するように複合材Ⅰ，Ⅱに対して $(h)_{\mathrm{I}}$ ，$(h)_{\mathrm{II}}$ を適当に選ぶことができ、このとき二つの複合材に対する運動方程式（3-5 ）は全く同一形になり、二つの複合材の挙動の間に相似則が成り立つことになる。式（3-6 ）が成立するとき二種類の複合材の間で、

$$(C^2)_{\mathrm{I}} = k_1 (C^2)_{\mathrm{II}}, \quad (\rho_1 h_1)_{\mathrm{I}} = k_2 (\rho_1 h_1)_{\mathrm{II}}$$

$$(B)_{\mathrm{I}} = k_3 (B)_{\mathrm{II}} \tag{3-8}$$

と書くことができ、$(h)_{\mathrm{I}}$ と $(h)_{\mathrm{II}}$ との比は式（3-7 ）から、

$$\frac{(h)_{\mathrm{I}}}{(h)_{\mathrm{II}}} = \left\{ \frac{(B)_{\mathrm{II}}}{(B)_{\mathrm{I}}} \frac{(\rho_1 h_1)_{\mathrm{I}}}{(\rho_1 h_1)_{\mathrm{II}}} \frac{(C^2)_{\mathrm{I}}}{(C^2)_{\mathrm{II}}} \right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{k_3}} \tag{3-9}$$

と書け、式（3-8 ）で導入した三つの比例定数で表される。

そこで、式（3-1 ）の運動方程式で支配されている複合材の挙動において、層境界に生じるせん断応力を考えると、二つの複合材Ⅰ，Ⅱに各々生じるせん断応力 $(\tau)_{\mathrm{I}}$ ，$(\tau)_{\mathrm{II}}$ の比は次のようになる。

$$\frac{(\tau)_{\mathrm{I}}}{(\tau)_{\mathrm{II}}} = \frac{(Bh)_{\mathrm{I}}}{(Bh)_{\mathrm{II}}} = \sqrt{k_1 k_2 k_3} \tag{3-10}$$

すなわち、式（3-6 ）に示されているように、速度比及び形状比が等しいときに層間のせん断応力に対して相似則が成立し、これらによって層間の相互作用が支配されていることがわかる。

3．3　波頭展開法による層間せん断応力の解析

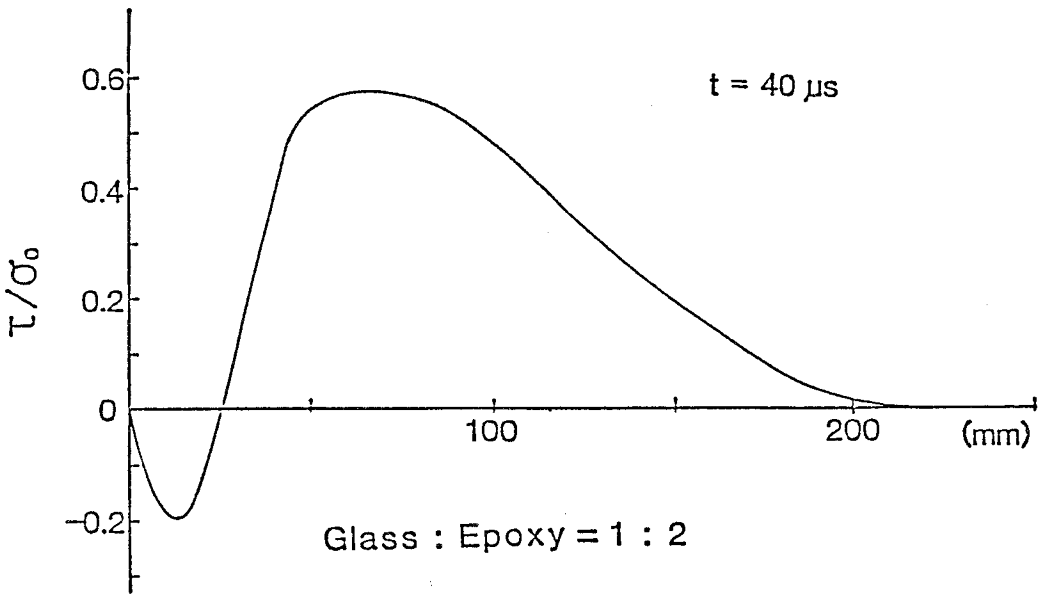
新川ら（ 7) は、層状複合材中を伝ぱする応力波の解析に波頭展開法（ 5) を導入し、層内の縦ひずみや垂直応力の変化について解析を行っている。

ここでは、同様の方法を用いて層境界に生じるせん断応力の分布を求めた。複合材モデルには、ガラスとエポキシ樹脂を構成媒質とし、１：２の構成比で積層した層状複合材を考えた。計算に際して、各媒質に対して次の材料定数を用いた。

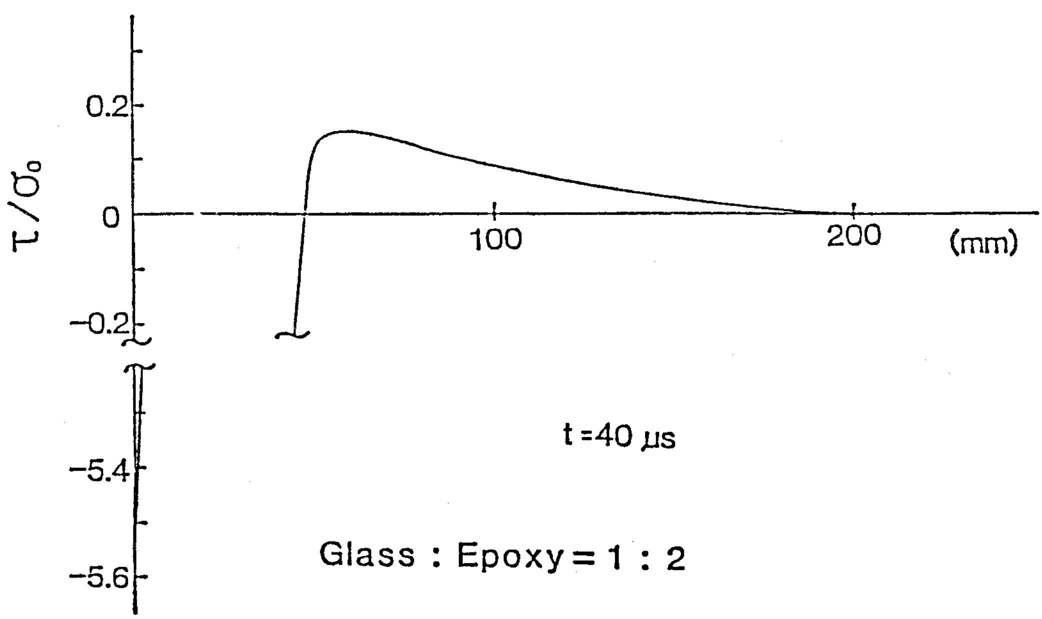
ガラス	エポキシ樹脂
$\rho = 2.5 \times 10^{-6}$ kg／mm^3	$\rho = 1.27 \times 10^{-6}$ kg／mm^3
E ＝73.5　GPa	E ＝2.45　GPa
G ＝26.3　GPa	G ＝0.74　GPa

その結果が図3-2 である。図 3-2（ａ）は入力として端面に一様速度 v_0 で衝撃を加えた場合の結果であり、（ｂ）は一様応力 σ_0 の衝撃荷重を与えた場合で、いずれも衝撃後40μs の状態を示したものである。横軸は衝撃端からの距離，縦軸は入力応力または初期速度をエポキシ層内の応力に換算した値で正規化して表したせん断応力である。

せん断応力の立ち上がり部分は伝ぱ速度の速いガラス層の応力波の到達位置に一致している。この解析結果からわかるように、縦衝撃を加えたにもかかわらず、波頭後方では層境界に徐々に増加するせん断応力が得られ、その大きさは速度入力の場合ではピーク値が垂直応力の約半分，応力入力の場合には端面で垂直応力の数倍になっており、大きなせん断応力を生じることがわかる。



（a）速度境界条件：v_o ＝1.08 m／s



（b）応力境界条件：σ_o ＝ 7.5×9.8 MPa

図 3-2　波頭展開法による層間のせん断応力分布

3．4　衝撃実験

3.4.1　実験方法及び実験装置

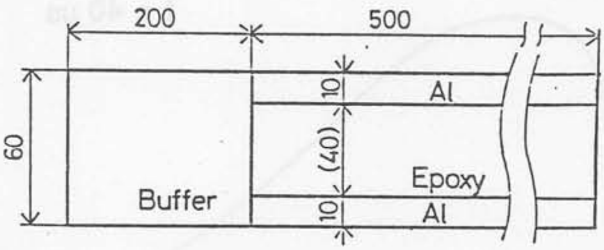


図 3-3　層状複合材試験片

図3-3 に実験に用いた試験片の形状を示している。試験片は、二枚のアルミニウム板（断面：10 mm × 20 mm，長さ：500 mm）の間にエポキシ樹脂（断面：40 mm × 20 mm，長さ：500 mm）をはさんで作製したサンドウィッチ形の層状複合材である。試験片の前には衝撃端の入力応力が断面で一様になるように、複合材と同断面積（60 mm × 20 mm）を持ち，長さ 200 mm の鋼のバッファを取りつけた。　角棒中を伝ぱする応力波の観測の際に2.4 節で用いた実験装置をそのまま使って衝撃実験を行い（図2-4-1 ～図2-4-3 ）、試料中に生じた応力波を観測した。

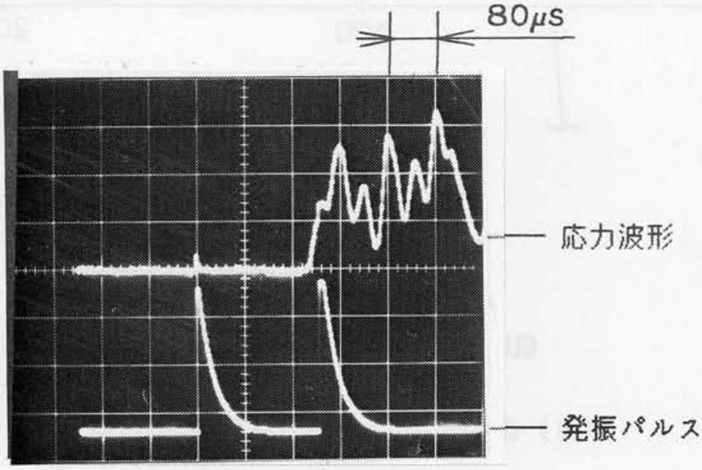


図 3-4　応力波と発振パルスの同期

図3-4 は、試料中の応力波と撮影時のレーザ光の発振時期の同期状態を捕らえた写真の一例である。時間軸は一分割 80 μs であり、二本のパルス光の時間間隔は200 μsである。これをみると、一本目のパルス光発振時には応力波がまだ観測領域に達しておらず、物体の変形前の状態が記録され、二本目ではちょうど応力波頭が到達して変形した状態が捕らえられていることがわかる。

3.4.2 解析方法

ここでの解析も問題が一次元的であることから面内成分に注目して行い、2.4 節で用いた相対しま次数法を使った。乾板上にx，y軸をとり、それらに垂直にz軸をとる。（図3-5 ）u，v，wを各々x，y，z軸方向の変位成分とすると、物体点P（x，y，z）を異なる二つの視点O_1（x_1，y_1，z_1），O_2（x_2，y_2，z_2）から観測したとき、式（2-1-4 ）より次式が得られる。

$$(k_{1x}-k_{2x})\,u+(k_{1y}-k_{2y})\,v+(k_{1z}-k_{2z})\,w=(n_1-n_2)\,\lambda \tag{3-11}$$

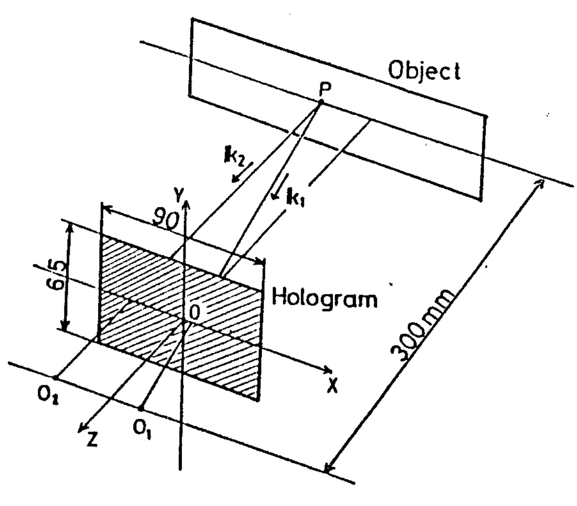


図 3-5　実験における観測方法

ここで、k_i（i =1,2）は観測方向の単位ベクトル、n_1，n_2 は各々視点O_1，O_2 から観測したときの物体上の点Pでのしま次数、λは照明光の波長である。この2つの視点をx軸に平行な線上にとったとき、

$$y_1 - y = y_2 - y \quad , \quad z_1 - z = z_2 - z \tag{3-12}$$

となる。また、物体と視点との間の距離がホログラム乾板の大きさに比べて十分大きいときは、

$$z_i - z \quad >> \quad x_i - x,\ y_i - y \qquad i = 1,\ 2 \tag{3-13}$$

となり、観測方向ベクトル k_1，k_2 に対して 2.3.3（iii）項で考察したように

$$k_{1x} - k_{2x} >> k_{1y} - k_{2y},\ \ k_{1z} - k_{2z} \tag{3-14}$$

となる。さらに、2.4 節で角棒中の応力波を観測して得た結果から、ここで取り扱っている問題ではx軸方向の成分uは他の成分に比べて十分大きく、

$$u \quad >> \quad v,\ w \tag{3-15}$$

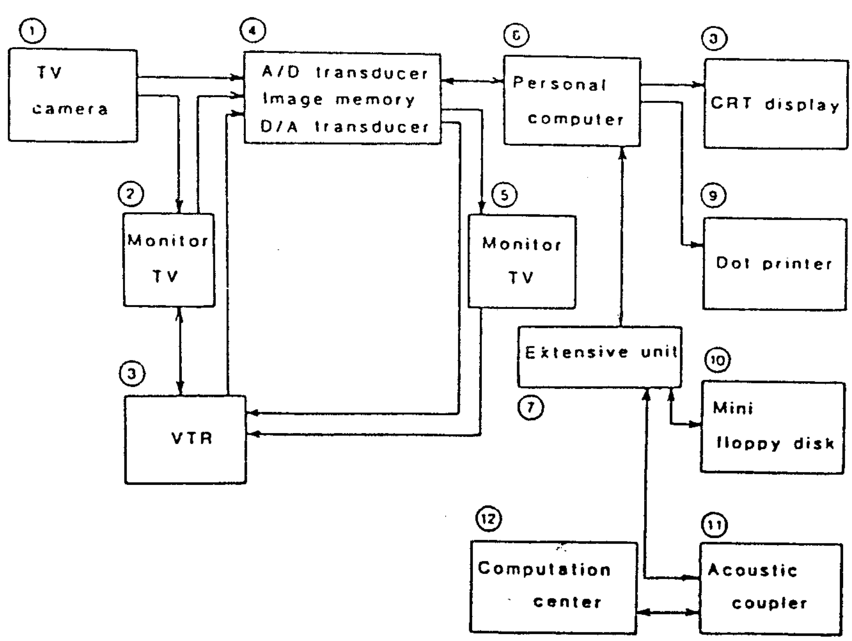


図 3-6　パーソナル・コンピュータを応用した画像処理システム

であり、v，wの干渉像に対する影響はuに比べて無視できる。したがって、変位解析は面内変位成分uに対してのみ行い、式（3-11）を次式のようにuに対する式に近似する。

$$(k_{1x}-k_{2x})\,u=(n_1-n_2)\,\lambda \tag{3-16}$$

この式中の相対しま次数（n_1-n_2）を求めるために、図3-6 に示すようなパーソナル・コンピュータによる画像処理システムを用いた。まず、CCD-TVカメラでx軸に平行な直線上に取った二つの視点O_1，O_2 からの再生像を原画像として別々に一旦画像メモリに取り込み、次にこのデータに二値化，細線化などの種々の処理を施してしま中心を抽出した細線画像を作る。得られた二枚の細線画像をを重ね合わせたのが図3-7 である。濃い実線は視点O_1 からの画像Ⅰで、淡い実線は視点O_2 からの画像Ⅱである。モデル図3-8 に示すように画像Ⅱでしま次数n_2 を持つしま中心線上の点Qを考えると、この点Qの画像Ⅰでのしま次数n_1 はしま中心の間を比例配分して一次以下のしま次数の小数部分を求めると、次のように与えられる。

$$n_1=n_i-\frac{t}{s+t} \tag{3-17}$$

したがって、点Qでの画像ⅠとⅡにおけるしま次数の差（n_1-n_2）は

$$n_1-n_2=n_i-n_2-\frac{t}{s+t} \tag{3-18}$$

で与えられる。このようにして物体表面上の各点で得られる相対しま次数を式（3-16）に代入して、面内変位成分uを求めることができる。

観測領域全体での連続的な変位分布を求めるために、スプライン関数を用いて物体表面上のサンプル点で求めた変位量を平滑化した。スプライン関数としては二次元の三次B－スプラインを用い、解析領域をx，y軸に平行に4×4の領域に分割して平滑を行う。従って、領域内の変位分布を表す関数u（x，

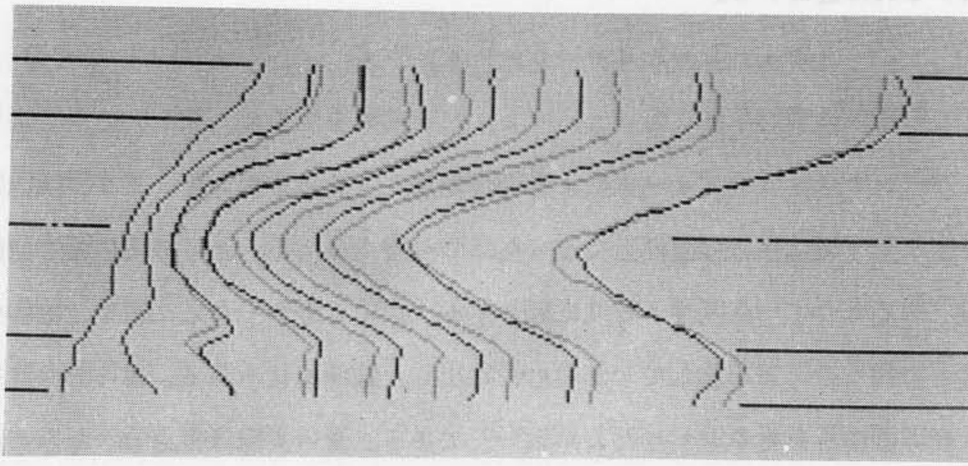


図 3-7 二枚の干渉像の細線画像による重ね合わせ

濃い線：視点O_1 淡い線：視点O_2

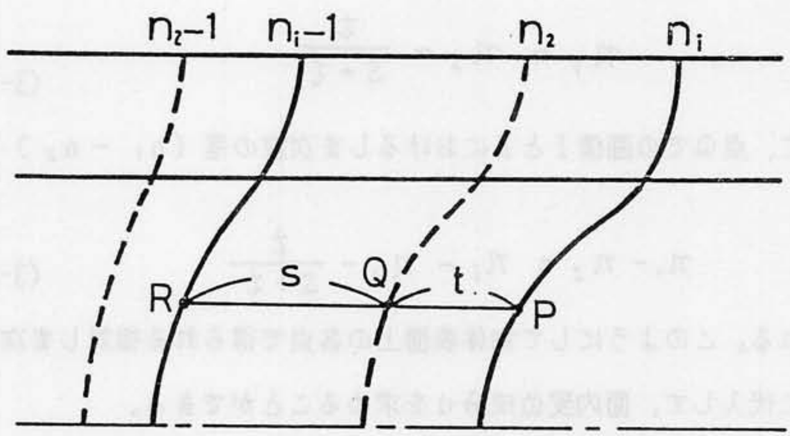


図 3-8 しま次数差の算出方法

y）を次のように仮定する。

$$u(x,y)=\sum_{i,j} C_{ij} M_{mi}(x)\cdot M_{mj}(y) \qquad (3\text{-}19)$$

$$i,j=1,2,\ldots,n+m-1$$

ここで、M_{rs} は一次元のB－スプライン関数であり、次の漸化式で与えられる。

$$M_{1s}(\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{\xi_s-\xi_{s-1}} & : \xi_{s-1}\leqq\xi<\xi_s \\ 0 & : \text{otherwise}\end{cases} \qquad s=1,2,\cdots,n \qquad (3\text{-}20)$$

$$M_{rs}(\xi)=\frac{(\xi-\xi_{s-r})M_{r-1,s-1}(\xi)+(\xi_s-\xi)M_{r-1,s}(\xi)}{\xi_s-\xi_{s-r}} \qquad (3\text{-}21)$$

$$r=1,2,\ldots,m$$

$$s=1,2,\ldots,n+r-1$$

ξ_s （$s=0,1,2,\ldots,n$）は領域を分割している節点の座標であり、mはスプライン関数の階数（一つのスプライン関数が持つ未知係数の数）で、三次のスプラインでは，$m=4$である。未知係数C_{ij}は次の推定関数

$$E(C_{ij})=\sum_t\left[u(x_t,y_t)-U_t\right]^2 \qquad (3\text{-}22)$$

を最小にする条件から決定される。ここで、U_t は第t番目の物体点（x_t，y_t）での変位量である。このようにして、C_{ij}が決まれば領域全体での変位分布（3-19）が得られる。

さらに、変形が一次元的であり、vだけでなく$\dfrac{\partial v}{\partial x}$の絶対値も非常に小さいことから、変位分布から層内のせん断ひずみ分布やせん断応力分布を、ここでは近似的に次式で算出した。

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}\quad,\quad \tau_{xy}=G\gamma_{xy} \qquad (3\text{-}23)$$

3．5　実験結果及び考察

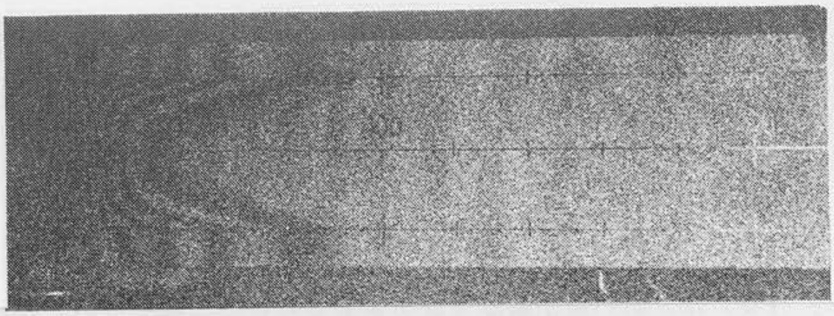
図3-9 の写真は層状複合材中を伝ぱする応力波を捕らえたホログラム再生像で、像中応力波は左から右方向へ伝ぱしている。図3-9 （a）は応力波が複合材中を伝ぱしはじめた直後（複合材に衝撃を入力後約18μs ）の状態を捕らえている。－（b），－（c），－（d）は各々衝撃後32μs，36μs， 110 μs 後の複合材中の応力波の状態を示している。

図3-9 （a）において、一次のしまは波頭近くの変形状態を示している。エポキシ層の中央部では、しまは伝ぱ方向に垂直な直線となっており、変形が各層の断面に対して一様になっていることがわかる。このことは、変形の初期段階では層内を固有の伝ぱ速度を持って伝ぱする応力波によって各層が別個に一様変形することを意味している。しかし、エポキシ層とアルミ層の層境界近くではアルミ層の波頭とエポキシ層の波頭とを結ぶ傾きを持ったしまが現れている。これらのしまは、アルミ層内を伝ぱしていく応力波による両層の相互作用で生じたエポキシ層内の変形場を表している。

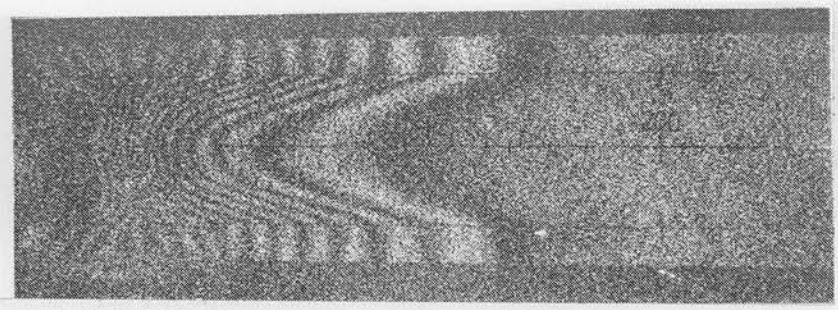
図 3-9（a）と（b）を比較するとアルミ層，エポキシ層各々の応力波頭間の距離は時間の経過に伴って大きくなっていき、最終的にはエポキシ層内の波頭部分はアルミ層中の応力波の影響だけによって引き起こされるようになることがわかる。エポキシ層内のこの現象は一種のマッハ波とみなすことができ、波面と境界面とのなすマッハ角θは次の式で求められる。

$$\theta = \sin^{-1}\frac{C_{ep}}{C_{Al}} \tag{3-24}$$

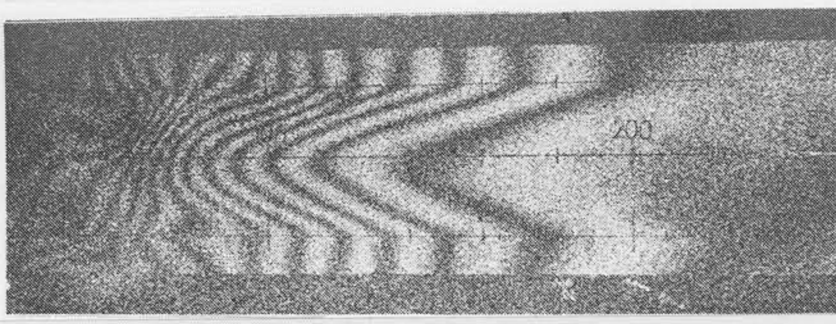
ここで、C_{ep}，C_{Al}は各々エポキシ樹脂，アルミニウム中での縦波の伝ぱ速度であり、ここでは$C_{ep}=1350$ m／s，　$C_{Al}=5000$ m／s とした。従って、この場合マッハ角は$\theta=15.7^\circ$ となる。一方、図3-9 （b）で一本目のしまと境界面のなす角を測定すると$\theta=19^\circ$ であった。速度の比から得られた結果と約



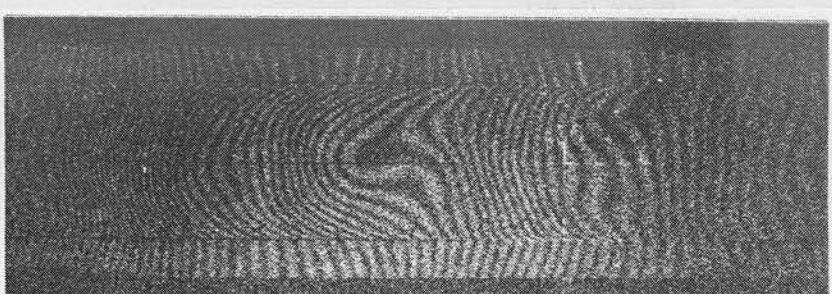
（a）衝撃後約 18 μs



（b）衝撃後約 32 μs



（c）衝撃後約 36 μs



（d）衝撃後約110 μs

図 3-9　層状複合材中の応力波の観測－ホログラム再生像

3° の差があるが、これはCep が静的引っ張り試験で測定されたヤング率から計算されたものであり、現実の速度より幾分小さめに与えられているためである。角度を測定した第一次のしまが厳密にはマッハ波の波頭に対応していないことも考慮すると、ほぼ良い値が得られているものと考えられる。

図3-9 （d）は、応力波が観測領域を通過した後の状態を示している。変位量は時間とともに増加し、複合材表面の全ての点が大きな変位をしており、干渉像のしま密度が高くなっていることがわかる。

層内の変形状態を調べるために、図3-9 （C）の干渉像を用いて変形場を定量的に解析した。その結果を図3-10以下に示している。図3-10は面内変位の分布図である。これは干渉じまとよく似た分布をしており、干渉じまがほぼ等変位線に近いことがわかる。変位場を表すスプライン関数は、上下面での自由境界条件及び層境界での応力・変位の連続条件を満たすように決定した。図3-11は、変位場をｙ軸方向に一回微分して得られたせん断ひずみおよびせん断応力の分布である。ここでは、各材料の剛性率の値を G_{Al} = 25600 MPa, G_{ep} = 740 MPa とした。これらの結果では、せん断ひずみあるいはせん断応力はエポキ

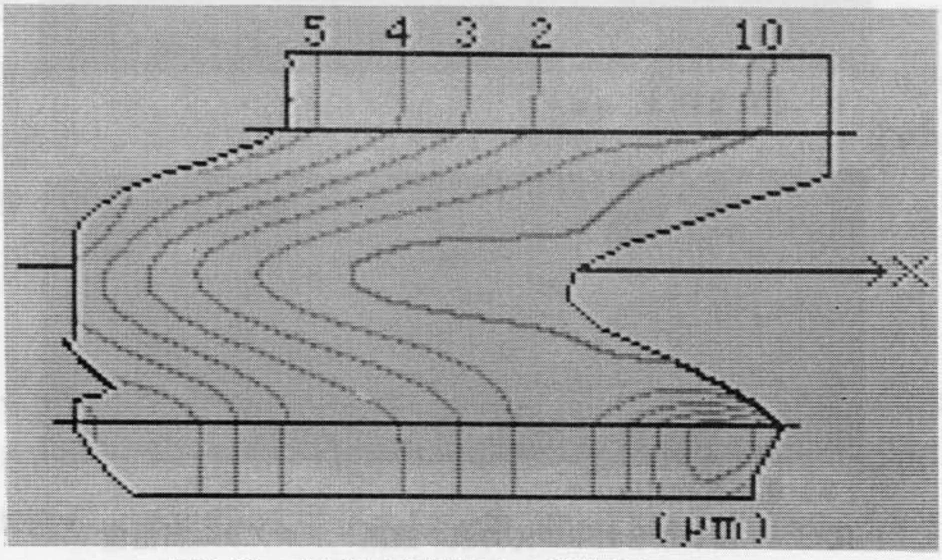
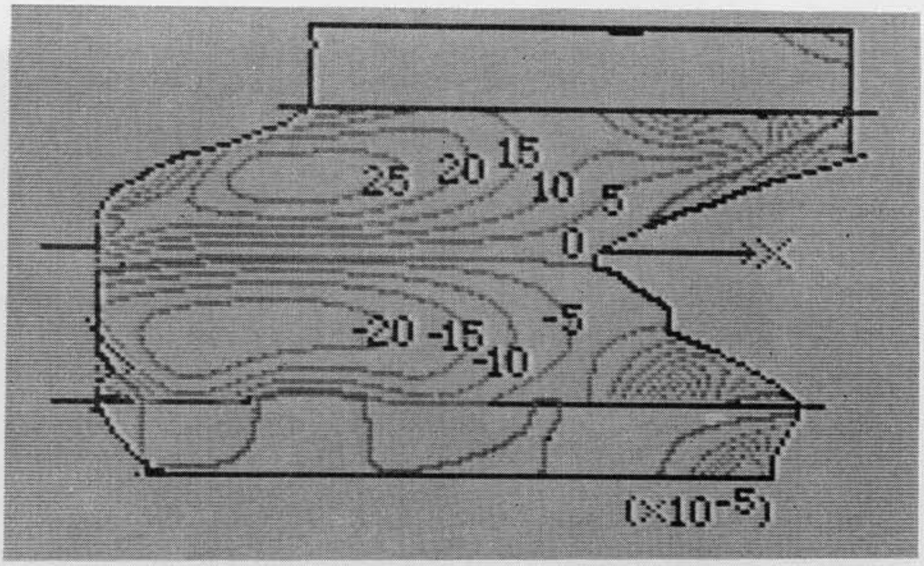
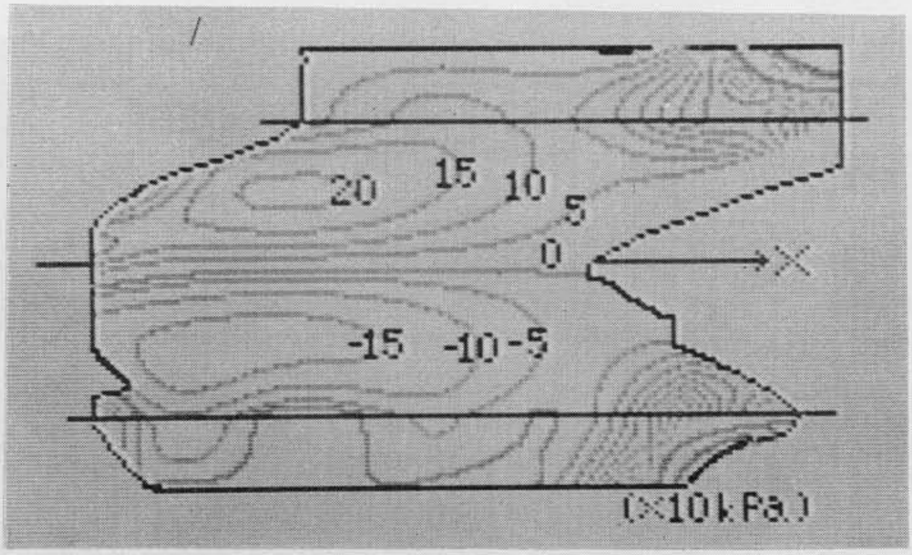


図3-10　応力波の伝ぱ方向の変位分布

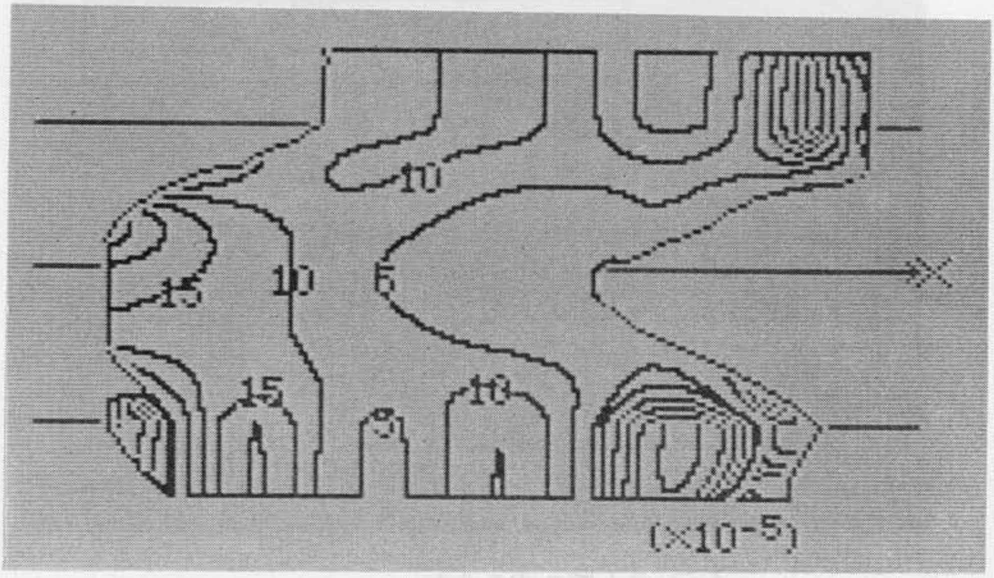


（a）せん断ひずみ分布

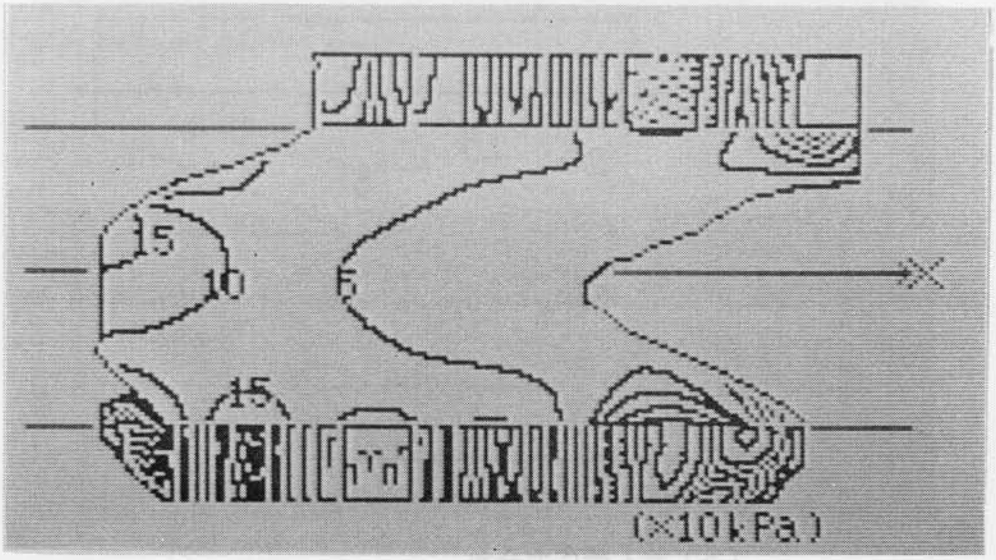


（b）せん断応力分布

図3-11　せん断変形の解析結果



（a）垂直ひずみ分布

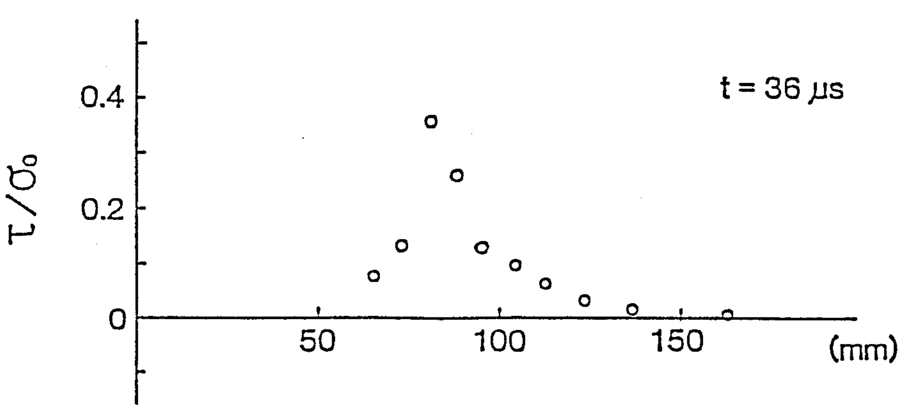


（b）垂直応力分布

図3-12　応力波の伝ぱ方向の変形の解析結果

シ層の中央部ではほとんど零で、アルミ層との境界に向かうにつれてしだいに増加している。そして、境界より少し内側で最大値をとり、層境界ではピーク値よりも若干小さくなっていることがわかる。また、x軸方向に変位場を微分して得られた垂直ひずみ分布および垂直応力の分布を図3-12に示す。図3-11（a）のせん断ひずみの分布と比較すると、縦衝撃を加えたにもかかわらず垂直ひずみに比べてかなり大きなせん断ひずみを生じていることがわかる。この結果は、エポキシ層内の波頭付近では変形はほとんど材料のせん断挙動によってのみ生じることを示している。この変形状態は、二枚の平行板の間に挟まれた流体のせん断流れ（Couette － Flow ）に類似した現象になっている。

層境界でのせん断応力の分布を解析した結果が図3-13である。波頭先端から徐々にせん断応力は増加していき、ある位置でピーク値をとっている。これは先に波頭展開法で理論的に解析した結果とよく一致する傾向を示しており、このように層に平行に応力波が伝ぱするとき層間の相互作用により層境界で大きなせん断応力を生じることがわかる。



Al : Epoxy = 1 : 2

入力速度：v_0 = 1.0 m／s

図3-13　実験による層間せん断応力分布の解析結果

3．6　結　論

本研究においては、まず、ダブルパルス・ルビーレーザ光を光源とする高速ホログラフィ干渉法を用いて、従来観測が困難であった層状複合材中を伝ぱする応力波の挙動を観測することができた。再生像中の干渉じまは、層状複合材が断面に一様な衝撃を受けたにもかかわらず層境界で不連続な勾配を持ち、興味深い形状を示した。衝撃直後には、各層内を固有の伝ぱ速度で伝わる縦波によって各層が個々に一様に変形するが、その後高速度層（アルミ層）中を伝ぱしている応力波によって低速度層（エポキシ層）が影響を受け、層内にしだいにマッハ波が発達していく様子を観測した。

得られた干渉像を解析するために、パーソナル・コンピュータを用いた画像処理システムを導入し、面内変位に対して相対しま次数法に適当な近似を加えた。その結果、解析領域全体での連続的な面内変位の分布が得られた。変位分布からは、各層内での応力波の伝ぱ速度の違いによる変形の差を定量的に確認することができた。

変位分布より、せん断ひずみ分布，せん断応力分布，垂直ひずみの分布を求めることができ、エポキシ層の中央でせん断ひずみやせん断応力はほとんど零となり、境界に向かって徐々に増加する結果を得た。そして、縦衝撃を加えたにもかかわらず、垂直ひずみに比べてせん断ひずみはかなり大きな値を持ち、波頭後方には大きなせん断変形を生じていることがわかった。これは、波頭展開法による解析結果とよく一致する傾向を示しており、層境界でのせん断応力を実験的に解析することができた。

第４章　粒子分散形複合材の材料特性について

――― 弾性率の変化について ―――

４．１　まえがき

母材中に固体粒子を分散させたときの弾性率の変化について、これまでの主な理論的な考察としては、サスペンジョンやエマルジョンの粘性係数の変化に関してなされた理論的な取り扱いを参考にして、基礎式の類似性から固体に拡張して同様の議論を行ったものがある。その中で、Smallwood ら（21）が均質媒質中に剛体球粒子を充塡した場合の複合材としての弾性率の変化について考察したものが1944年に発表されている。彼は理論的に充塡粒子の体積濃度をパラメータとして特性式を導出し、また検証のためにゴムと炭素粒子を使った簡単な実験も行った。さらに、Guthは（22）剛体球粒子の複数の連結を考え、n次多項式によって特性式の一般化を試みた。これらの研究では、全て充塡粒子を剛体・球形と仮定して議論を展開し、複合材の特性値変化は体積濃度だけに依存して粒子の大きさには関係しないとしている。しかし、実際の複合材では充塡粒子の形状は球形ではなく、同体積濃度でも特性値の変化が粒子形状に大きく依存することは容易に推測できる。

そこで、本章では粒子形状の変化に対して特性値がどのように変化するか調べることを目的とした。そのために問題を簡単に二次元化して考え、均質媒質中に粒子が存在する場合のひずみエネルギの変化から粒子形状が円と楕円で弾性率がどのように変わるか、その依存性を理論的に考察してみた。そして、実際に粒子の形状が正方形や長方形の複合材モデルを作り、有限要素法による数値解析によって弾性率の変化を調べるとともに、数値解析と同一のモデルをエポキシ樹脂と鋼片で作製し、実験的に材料特性を測定して数値解析の結果との比較検討を行った。

４．２　弾性率の粒子形状依存性に対する理論的考察

―――　二次元平面問題　―――

粒子分散形複合材の平均的な弾性率が、充填される粒子の形状によってどのように変わるかを理論的に考察してみる。簡単のため、問題を二次元で考えると基礎式は複素変数 z の任意関数 $\psi(z)$と $\phi(z)$で次のように表せる。

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\,\mathrm{Re}\left[\psi'(z)\right] \tag{4- 1}$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\left\{\bar{z}\,\psi''(z) + \phi''(z)\right\} \tag{4- 2}$$

$$2\mu\,(u + iv) = \kappa\,\psi(z) - z\,\bar{\psi}''(\bar{z}) - \bar{\phi}''(\bar{z}) \tag{4- 3}$$

ここで、

σ_x ，σ_y ，τ_{xy} ：ｘ軸，ｙ軸方向の垂直応力及びせん断応力

ｕ，ｖ：ｘ，ｙ軸方向の変位成分

$\mu = G$ ：剛性率，ν ：Poisson's 比

$\kappa = \dfrac{3-\nu}{1+\nu}$ 　：平面応力場

$\kappa = 3 - 4\nu$ 　：平面ひずみ場

$z = x + iy$，ｘ，ｙ：物理平面上の実数変数，　ｉ：虚数単位

［－］：複素共役，　$\phi' = \dfrac{d}{dz}\phi$

4.2.1　円形断面の粒子の場合

図4-1 に示すように、円形断面を持つ剛体粒子を一つ含む無限均質弾性媒質が無限遠方でｘ軸方向にσ_0 の応力で一様な引っ張りを受けたときの粒子近傍の変形を考える。この場合、基礎式（4- 1）～（4- 3）の解として、

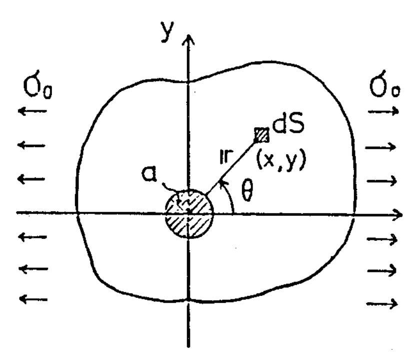


図 4-1　一つの円形粒子まわりの変形

$$\psi(z) = \frac{1}{4}\sigma_0 z + \frac{A}{z} \tag{4-4}$$

$$\phi(z) = -\frac{1}{2}\sigma_0 \bar{z} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z^3} \tag{4-5}$$

$z = r\exp(i\theta)$， A，B，C：定数

と置く。定数A，B，Cは、この問題の次の境界条件から決定される。

（i） 粒子境界において、

$z = a\exp(i\theta)$ or $(r = a)$ で $u = v = 0$ (4-6)

（ii） 無限遠点において、

$|z| \to \infty$ or $(r \to \infty)$ で $\sigma_x = \sigma_0$，$\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ (4-7)

これらの境界条件から定数は

$$A = -\frac{\sigma_0}{2k}a^2, \quad B = -\frac{(1-k)\sigma_0}{4}a^2, \quad C = -\frac{\sigma_0}{2k}a^4$$

となり、式（4-4），（4-5）は次のようになる。

$$\psi(z) = \frac{1}{4}\sigma_0 z - \frac{\sigma_0}{2K}\frac{a^2}{z} \tag{4-8}$$

$$\phi(z) = -\frac{1}{2}\sigma_0 \bar{z} - \frac{1}{4}(1-K)\sigma_0\frac{a^2}{z} - \frac{\sigma_0}{2K}\frac{a^4}{z^3} \tag{4-9}$$

従って、基礎式より応力成分及び変位成分は次のように求められる。

$$\sigma_x = \sigma_0 + \sigma_0\left\{\left(\frac{1}{K} + \frac{K-1}{4}\right)\frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta - \frac{1}{2K}\frac{a^2}{r^2}\left(3\frac{a^2}{r^2} - 2\right)\cos 4\theta\right\} \tag{4-10}$$

$$\sigma_y = \sigma_0\left\{\left(\frac{1}{K} - \frac{K-1}{4}\right)\frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta + \frac{1}{2K}\frac{a^2}{r^2}\left(3\frac{a^2}{r^2} - 2\right)\cos 4\theta\right\} \tag{4-11}$$

$$\tau_{xy} = \sigma_0\left\{\frac{K-1}{4}\frac{a^2}{r^2}\sin 2\theta - \frac{1}{2K}\frac{a^2}{r^2}\left(3\frac{a^2}{r^2} - 2\right)\sin 4\theta\right\} \tag{4-12}$$

$$u = \frac{\sigma_0}{8\mu}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\left\{(\kappa+1)r\cos\theta - \frac{2}{\kappa}\frac{a^2}{r}\cos 3\theta\right\} \qquad (4\text{-}13)$$

$$v = \frac{\sigma_0}{8\mu}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\left\{(\kappa-3)r\sin\theta - \frac{2}{\kappa}\frac{a^2}{r}\sin 3\theta\right\} \qquad (4\text{-}14)$$

これらを用いて、この変形において粒子の存在によってひずみエネルギがどれだけ増加するかを計算する。粒子のまわりに十分大きな領域S_0を考えると、S_0内の微小面積要素dSの有するひずみエネルギdWは厚さをhとして、

$$dW = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right)h\,dS \qquad (4\text{-}15)$$

で与えられる。ここで、平面応力場を仮定すると、上式は応力成分だけを用いて次のように表せる。

$$dW = \frac{1}{2E}\left\{(\sigma_x+\sigma_y)^2 + 2(1+\nu)(\tau_{xy}^2 - \sigma_x\sigma_y)\right\}h\,dS \qquad (4\text{-}16)$$

したがって、dWを全領域S_0にわたって積分することによって、ひずみエネルギWを求めることができる。積分の実行に際して、変数変換

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta,\quad dS = r\,d\theta\,dr \qquad (4\text{-}17)$$

を用い、式（4-10）～（4-12）を式（4-15）に代入すると、次の結果が得られる。

$$W = \int_{S_0} dW = \frac{1}{2}A^2Eh(S_0 + kS) \qquad (4\text{-}18)$$

ただし、

$$k = \frac{1}{8}(1+\nu)(\kappa-1)^2 + \frac{3-\nu}{2\kappa^2} - 1 \qquad (4\text{-}19)$$

$A = \sigma_0 / E,\quad S = \pi a^2$ ：粒子の面積

$S_0 = \int_{S_0} dS$：考えている領域S_0の面積

次に、図4-2 に示すように、媒質中に単位面積当たりｎ個の密度で粒子が一様に含まれている場合のひずみエネルギを考える。粒子間の平均距離は粒子径に比べて十分に大きいものとすると、式（4-16）より各粒子の効果を重ね合わせて領域S_o内の全ひずみエネルギWは次式のように求められる。

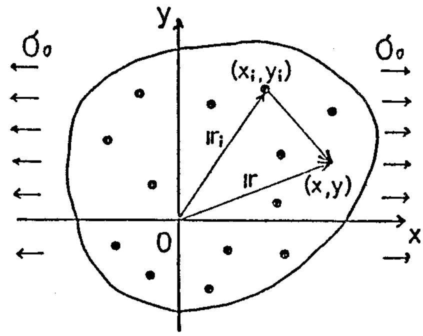


図 4-2　粒子が分布している場合の変形

$$W = \frac{1}{2} A^2 E S_o h (1 + k\phi) \tag{4-20}$$

$\phi = n S_o = n \pi a^2$ ：粒子密度

粒子の無い場合は、$\phi = 0$として、

$$W_o = \frac{1}{2} A^2 E S_o h \tag{4-21}$$

一方、粒子の数が十分多く一様に充塡されている場合の変形を考えてみる。粒子がないとき、平面応力状態の下で変位は次のように与えられる。

$$u = A x, \quad v = -\nu A y, \quad A = \sigma_o / E \tag{4-22}$$

ここで、Aはｘ方向のひずみである。一つの粒子については、そのまわりの変位場はｘ方向については式（4-13）から、

$$u = A x - \frac{\sigma_o}{E} x \left[\frac{a^2}{r^2} - \frac{2}{K(K+1)} \frac{a^2}{r^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)(1 - 2\cos 2\theta) \right] \tag{4-13 '}$$

で表される。十分大きな領域S_o内に単位面積当たりｎ個の密度で粒子が一様に含まれている場合、ｉ番目の粒子の中心を（x_i ，y_i）とすると任意の点（ｘ，ｙ）の変位はこの粒子による影響を考慮して式（4-13 '）より、

$$u = A x + u_i \tag{4-23}$$

と書ける。このとき、u_i は（x_i ，y_i ）を原点とする新しい座標系で、座標変換

$$\xi_i = x - x_i \ , \quad \eta_i = y - y_i \ , \qquad \rho_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2 \tag{4-24}$$

を用いて次のように書ける。

$$u_i = -\frac{\sigma_0}{E}\ \xi_i \cdot \frac{a^2}{\rho_i^2}\left[1 - \frac{2}{K(K+1)}\left(1 - \frac{a^2}{\rho_i^2}\right)(1 - 2\cos 2\theta)\right] \tag{4-25}$$

従って、全粒子を考慮すると任意の点の変位 u は、

$$u = A\,x + \sum_i u_i \tag{4-26}$$

で与えられる。粒子の分布が均等で複合材は x 方向に均一のひずみ A^* を受けていると考えると、この変位は式（4-22）と同じ形で

$$u = A^*\,x \tag{4-27}$$

と表すことができる。式（4-26），（4-27）より、複合材に対する係数 A^* と母材の A との間には次の関係がある。

$$A^* = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = A + \sum_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)_{x=0} = A - \sum_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)_{x=0} \tag{4-28}$$

上式の第二項は、領域 S_0 を十分大きな半径 R を持つ円と考え、和を積分で置き変えると Gauss の定理によって次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\sum_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)_{x=0} &= \int_{S_0}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)_{x=0} dn \\ &= \int_{S_0} \frac{\partial}{\partial x_i} u_i\Big|_{x=0}\, n\, dS \\ &= n\int_{\partial S_0} [u_i]_{x=0}\,\frac{x_i}{R}\, dl\end{aligned}$$

dl：円周上の線素 (4-29)

式（4-25）より、被積分関数は次のように求められる。

$$[u_i]_{x=0} = \frac{\sigma_0}{E} x_i \frac{a^2}{r_i^2}\left[1 - \frac{2}{K(K+1)}\left(1-\frac{a^2}{r_i^2}\right)(1-2\cos 2\theta)\right]$$

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 \tag{4-30}$$

従って、式（4-28）の第二項は

$$\sum_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)_{x=0} = \lim_{R\to\infty} n \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sigma_0}{E} x_i \frac{a^2}{r_i^2}\left\{1 - \frac{2}{K(K+1)}\left(1-\frac{a^2}{r_i^2}\right)(1-2\cos 2\theta)\right\}\frac{x_i}{R}\cdot R\,d\theta\right]_{r_i=R}$$
$$= A n \pi a^2 \tag{4-31}$$

となる。従って、式（4-28）より、

$$A^* = A\,(1-\phi), \qquad \phi = n\pi a^2 \ \text{：粒子密度} \tag{4-32}$$

となる。

そこで、複合材に対する平均的なひずみ A^* と平均的な材料定数 E^* を用いてひずみエネルギを式（4-19）と同じ形で与えると、次のように書ける。

$$\overline{W} = \frac{1}{2} A^{*2} E^* S_0 h \tag{4-33}$$

これを式（4-18）と等置し、式（4-32）を代入すると、ϕ の一次の項までを考慮して次式を得る。

$$E^* = \{1 + (2+k)\,\phi\}\,E \tag{4-34}$$

従って、母材中に粒子を充填することにより、母材に対して弾性率は粒子の体積濃度に比例して変化することになる。例として、$\nu = \frac{1}{2}$ のときは $k = \frac{8}{15}$ であるから

$$E^* = \left(1 + \frac{38}{15}\phi\right) E$$

となる。この結果は、Smallwood の導出した結果に一致するもので、彼の式

$$E^* = (1 + 2.5\,\phi)\,E \tag{4-35}$$

とは係数が異なっているが、これは問題を二次元平面問題として議論しているためである。

4.2.2 楕円形断面の粒子の場合

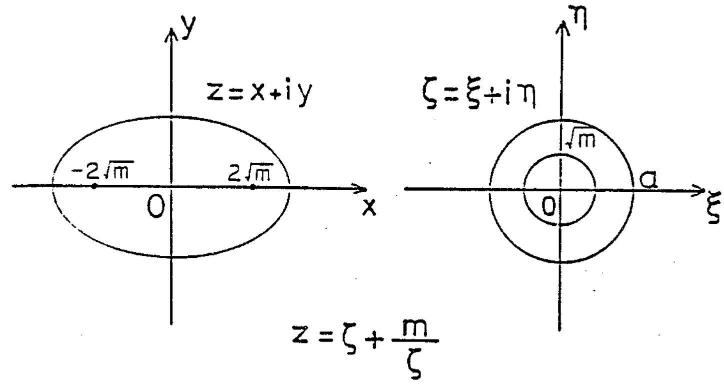


図 4-3 物理平面の写像

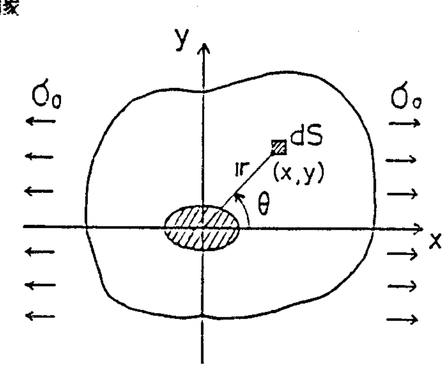


図 4-4 楕円形粒子近傍の変形

粒子の断面形状が楕円形の場合、弾性率がどのようになるか考えてみる。簡単のために、図4-3 に示すように物理平面 z から次の変換によって写像される ζ 平面上で問題を考える。

$$z = \zeta + m/\zeta, \quad \zeta = r\exp(i\theta) \tag{4-36}$$

この変換によって、ζ 平面上の半径 $r = a$ $(>\sqrt{m})$ の円：$\zeta = a\exp(i\theta)$ は

$$z = x + iy = a\exp(i\theta) + (m/a)\exp(-i\theta)$$

$$x = (a + m/a)\cos\theta, \quad y = (a - m/a)\sin\theta \tag{4-37}$$

となり、これは

$$x_0 = a + m/a, \qquad y_0 = a - m/a$$

x_0, y_0 ：各々楕円の長・短径の長さ

焦点：$x_f = \pm\sqrt{x_0^2 - y_0^2} = \pm 2\sqrt{m}, \quad y_f = 0$

の楕円を表す。この楕円は $m \gtrless 0$ によって x 方向または y 方向に細長い楕円となる。この楕円形粒子を含む無限均質媒質が無限遠方で x 軸方向に一様応力 σ_0

で引っ張りを受けるとき（図4-4 ）、その変形状態に対しても円形粒子の場合と同様に基礎式は式（4- 1）～（4- 3）となり、その解を次のように置く。

$$\psi(z) = \frac{\sigma_0}{4}\zeta + \frac{A}{\zeta} \tag{4-38}$$

$$\begin{aligned}\phi'(z) &= \left(-\frac{\sigma_0}{2}\zeta + \frac{B}{\zeta} + \frac{C}{\zeta^3}\right)\frac{d\zeta}{dz} \\ &= \frac{\zeta^2}{\zeta^2 - m}\left(-\frac{\sigma_0}{2}\zeta + \frac{B}{\zeta} + \frac{C}{\zeta^3}\right)\end{aligned} \tag{4-39}$$

このとき、境界条件は、

（i）無限遠点：｜z｜→∞（｜ζ｜→∞　or　r→∞）で

$$\sigma_x = \sigma_0 \ , \ \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \tag{4-40}$$

（ii）粒子境界：$\zeta = a\exp(i\theta)$　or（r＝a）で　u＝v＝0　(4-41)

とする。この条件下で定数A，B，Cは次のように決定できる。

$$A = \frac{1}{K}\frac{\sigma_0}{4}(m - 2a^2) \quad , \quad B = \frac{K-1}{K}\frac{\sigma_0}{4}\left(Ka^2 + 2m - \frac{m^2}{a^2}\right)$$

$$C = \frac{1}{K}\frac{\sigma_0}{4}\left\{(1-K^2)m - 2a^2\right\}a^2 \tag{4-42}$$

したがって、式（4-38），（4-39）は次式となる。

$$\psi(z) = \frac{1}{K}\frac{\sigma_0}{4}\frac{1}{\zeta}\left(K\zeta^2 + m - 2a^2\right) \tag{4-43}$$

$$\phi'(z) = -\frac{1}{K}\frac{\sigma_0}{4}\frac{1}{\zeta(\zeta^2-m)}\left[2K\zeta^4 + (1-K)\left(Ka^2 + 2m - \frac{m^2}{a^2}\right)\zeta^2 + \left\{(K^2-1)m + 2a^2\right\}a^2\right] \tag{4-44}$$

基礎式（4- 1）～（4- 3）より、応力成分，変位に対して次式を得る。

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_0 + \frac{\sigma_0}{K}\,\mathrm{Re}\left[\frac{(K-1)m + 2a^2}{\zeta^2 - m}\right] \tag{4-45}$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = -\sigma_0 + \frac{\sigma_0}{\kappa}\frac{1}{(\zeta^2-m)^3}\left[\left(\bar{\zeta}+\frac{m}{\bar{\zeta}}\right)\left\{(1-\kappa)m-2a^2\right\}\zeta^3 - \frac{\kappa-1}{2}\left(\kappa a^2+2m\right)\zeta^4 + \left\{\frac{\kappa(\kappa-1)}{2}ma^2+\frac{3}{2}\left((1-\kappa^2)m-2a^2\right)a^2\right\}\zeta^2 - ma^2\right] \tag{4-46}$$

$$2\mu(u+iv) = \frac{\sigma_0}{4}\left[(\kappa-1)\left(\zeta+\frac{m}{\zeta}\right)+\left\{(1-\kappa)m-2a^2\right\}\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{\kappa}\left(\zeta+\frac{m}{\zeta}\right)\frac{(\kappa-1)m+2a^2}{\bar{\zeta}^2-m} + \frac{1}{\bar{\zeta}(\bar{\zeta}^2-m)}\left\{2\bar{\zeta}^4+\frac{1-\kappa}{\kappa}\left(\kappa a^2+2m-\frac{m^2}{a^2}\right)\bar{\zeta}^2+\frac{1}{\kappa}\left((\kappa^2-1)m+2a^2\right)a^2\right\}\right] \tag{4-47}$$

ここで、$|\sqrt{m}|/|\zeta| \ll 1$として、

$$\frac{1}{(\zeta^2-m)^3} \approx \frac{1}{\zeta^6}\left(1+3\frac{m}{\zeta^2}\right) \tag{4-48}$$

と近似し、解をmについてのべき級数に展開してmの一次までの項を取ると、各成分は次のようになる。

$$\sigma_x = \sigma_0 + \frac{\sigma_0}{\kappa}\left[\frac{1}{4}(\kappa^2-\kappa+4)\frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta + \left(\frac{a^2}{r^2}-\frac{3}{2}\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 4\theta + \frac{m}{r^2}\left\{\left(\kappa-1+\frac{a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta + \left(\frac{\kappa-1}{2}+\frac{\kappa^2-4\kappa+7}{4}\frac{a^2}{r^2}\right)\cos 4\theta + \left(3\frac{a^2}{r^2}-4\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 6\theta\right\}\right] \tag{4-49}$$

$$\sigma_y = -\frac{\sigma_0}{\kappa}\left[\frac{1}{4}(\kappa^2-\kappa-4)\frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta + \left(\frac{a^2}{r^2}-\frac{3}{2}\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 4\theta + \frac{m}{r^2}\left\{\frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta + \left(\frac{\kappa-1}{2}+\frac{\kappa^2-4\kappa-1}{4}\frac{a^2}{r^2}\right)\cos 4\theta + \left(3\frac{a^2}{r^2}-4\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 6\theta\right\}\right] \tag{4-50}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_0}{\kappa}\left[\frac{\kappa(\kappa-1)}{4}\frac{a^2}{r^2}\sin 2\theta + \left(\frac{a^2}{r^2}-\frac{3}{2}\frac{a^4}{r^4}\right)\sin 4\theta + \frac{m}{r^2}\left\{\left(\frac{\kappa-1}{2}+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin 2\theta + \left(\frac{\kappa-1}{2}+\frac{\kappa^2-4\kappa+3}{4}\frac{a^2}{r^2}\right)\sin 4\theta + \left(3\frac{a^2}{r^2}-4\frac{a^4}{r^4}\right)\sin 6\theta\right\}\right] \tag{4-51}$$

これらを用いて、楕円形粒子の場合に平面応力状態下でのx軸方向の応力σ_0による一様引っ張りに対する変形時のひずみエネルギを計算する。z（x, y）平面とζ（ξ, η）平面の面積要素間の関係を考えると

$$x = (r + m/r)\cos\theta,\quad y = (r - m/r)\sin\theta \tag{4-52}$$

$$dS = dx\,dy = |J|\,dr\,d\theta$$

である。ここで、|J|は次のように与えられる。

$$|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(1-\dfrac{m}{r^2}\right)\cos\theta & -\left(r+\dfrac{m}{r}\right)\sin\theta \\ \left(1+\dfrac{m}{r^2}\right)\sin\theta & \left(r-\dfrac{m}{r}\right)\cos\theta \end{vmatrix} \tag{4-53}$$

したがって、平面応力状態での楕円形粒子を含む場のひずみエネルギWは、

$$\overline{W} = \int_0^{2\pi}\int_a^{\infty} \frac{h}{2E}\left\{(\sigma_x+\sigma_y)^2 + 2(1+\nu)(\tau_{xy}^2 - \sigma_x\sigma_y)\right\}|J|\,dr\,d\theta \tag{4-54}$$

で与えられ、式（4-49）～（4-51）を代入してmの一次の項まで求めると次の結果が得られる。

$$\overline{W} = \frac{1}{2}A^2 E h\,(S_0 + kS) \tag{4-55}$$

$$k = \left\{\frac{2}{K^2} + \frac{1}{8K^2}(1+\nu)(K+1)(K-2)(K^2-K+2) - 1\right\} + \frac{1}{2K^2}\left\{(1+\nu)(3K+1) - 4(K+1)\right\}\frac{m}{a^2} \tag{4-56}$$

$S = \pi\,(a^2 - m^2/a^2)$ ： 粒子面積

粒子が十分大きな領域S_0内に単位面積当たりn個の密度で十分多く一様に含まれている場合を考え、円形粒子の場合と同様の計算をすると、全領域S_0内での全ひずみエネルギWは全ての粒子の寄与を重ね合わせて、次のように求められる。

$$\overline{W} = \frac{1}{2}A^2 E S_0 h\,(1 + k\phi) \tag{4-57}$$

$\phi = nS$ ：粒子密度

一方、変形について考えてみると、粒子がない場合の平面応力状態下での変位場はx軸方向の成分uについては次式で与えられる。

$$u = Ax, \qquad A = \sigma_0 / E \tag{4-58}$$

楕円形粒子の近傍の変位場は式（4-47）より次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u = Ax + \frac{\sigma_0}{8\mu}\Big[&\Big\{-(\kappa+1)\frac{a^2}{r} + \frac{2}{\kappa}\Big(\frac{m}{r} - \frac{a^2 m}{r^3}\Big) - (\kappa+1)\frac{m}{r} + \frac{1-\kappa}{\kappa}\Big(\frac{m^2}{r^3} - \frac{m^2}{a^2 r}\Big)\Big\}\cos\theta \\ &+ \Big\{\frac{2}{\kappa}\Big(\frac{a^4}{r^3} + \frac{a^2}{r}\Big) + \frac{\kappa-1}{\kappa}\Big(\frac{m}{r} - \frac{a^2 m}{r^3}\Big) + \frac{2}{\kappa}\Big((\kappa-1)\frac{m^2}{r^3} + \frac{1}{\kappa}\frac{a^2 m^2}{r^5}\Big) + \frac{\kappa-1}{\kappa}\Big(\frac{m^3}{a^2 r^3} - \frac{m^3}{r^5}\Big)\Big\}\cos 3\theta \\ &+ \Big\{\frac{2}{\kappa}\Big(\frac{a^4 m}{r^5} - \frac{a^2 m}{r^3}\Big) + \frac{\kappa-1}{\kappa}\Big((\kappa+1)\frac{a^2 m^2}{r^5} - \frac{m^2}{r^3}\Big)\Big\}\cos 5\theta\Big] \end{aligned} \tag{4-59}$$

領域S_0内に単位面積当たりn個の密度で粒子が十分多く一様に充填されている場合、i番目の粒子の中心座標を（x_i ，y_i ）とすると、任意の点（x，y）での変位は全粒子の寄与を考慮して次のように書ける。

$$u = Ax + \sum_i u_i \tag{4-60}$$

ここで、u_i は次式で表される。

$$\begin{aligned} u_i = \frac{\sigma_0}{8\mu}\Big[&\Big\{-(\kappa+1)\frac{a^2}{\rho_i} + \frac{2}{\kappa}\Big(\frac{m}{\rho_i} - \frac{a^2 m}{\rho_i^3}\Big) - (\kappa+1)\frac{m}{\rho_i} + \frac{1-\kappa}{\kappa}\Big(\frac{m^2}{\rho_i^3} - \frac{m^2}{a^2 \rho_i}\Big)\Big\}\cos\theta \\ &+ \Big\{\frac{2}{\kappa}\Big(\frac{a^4}{\rho_i^3} - \frac{a^2}{\rho_i}\Big) + \frac{\kappa-1}{\kappa}\Big(\frac{m}{\rho_i} - \frac{a^2 m}{\rho_i^3}\Big) + \frac{2}{\kappa}\Big((\kappa-1)\frac{m^2}{\rho_i^3} + \frac{1}{\kappa}\frac{a^2 m^2}{\rho_i^5}\Big) + \frac{\kappa-1}{\kappa}\Big(\frac{m^3}{a^2 \rho_i^3} - \frac{m^3}{\rho_i^5}\Big)\Big\}\cos 3\theta \\ &+ \Big\{\frac{2}{\kappa}\Big(\frac{a^4 m}{\rho_i^5} - \frac{a^2 m}{\rho_i^3}\Big) + \frac{\kappa-1}{\kappa}\Big((\kappa+1)\frac{a^2 m^2}{\rho_i^5} - \frac{m^2}{\rho_i^3}\Big)\Big\}\cos 5\theta\Big] \end{aligned} \tag{4-61}$$

複合材の平均的な変位場を考えるとき、複合材に対する平均的ひずみA^*と母材のAとの関係は式（4-28）で与えられ、右辺の第二項に式（4-61）を代入し、また和を積分に置き換えて円形の場合と同様の計算すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \sum_i \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\Big)_{x=0} &= \int_{S_0} \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\Big)_{x=0} dn \\ &= \int_{S_0} \frac{\partial}{\partial x_i} u_i\Big|_{x=0}\, n\, dS \\ &= n \int_{\partial S_0} [u_i]_{x=0}\, dy \\ &= \lim_{R\to\infty} n \int_0^{2\pi} \Big[[u_i]_{x=0} \Big(r_i - \frac{m}{r_i}\Big)\cos\theta \Big]_{r_i = R} d\theta \end{aligned} \tag{4-62}$$

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$$

従って、これを実際に計算すると

$$\sum_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)_{x=0} = -n A S \left[1+\frac{(\kappa-1)(\kappa+2)}{\kappa(\kappa+1)}\frac{m}{a^2}\right] \tag{4-63}$$

となり、式（4-28）からA^*とAとの間に次の関係を得る。

$$A^* = A\,(1-k'\phi) \tag{4-64}$$

$$k' = 1+\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}\frac{m}{a^2} \tag{4-65}$$

そこで、複合材に対する平均的ひずみA^*および平均的材料定数E^*を用いてひずみエネルギWを

$$W = \frac{1}{2}A^{*2}E^{*}S_0 h \tag{4-66}$$

と与えると、これを式（4-57）と等置し、式（4-64）を代入して、

$$E^*(1-k'\phi)^2 = E\,(1+k\phi) \tag{4-67}$$

が得られる。ここで、$k'\phi \ll 1$としてϕの一次の項までで近似すると、最終的に次の結果が導かれる。

$$E^* = \{1+(2k'+k)\phi\}\,E \tag{4-68}$$

式（4-68）の結果は、円形粒子の場合と同様に楕円形粒子が配合されたときにも弾性率が充填粒子の体積濃度ϕに比例して増加することを示している。しかし、係数kやk'の中には楕円の形状や方向の違いを表すパラメータmを含んでおり、したがって粒子の形状や配列方向によっても弾性率の増加の割合が変化することがわかる。ϕの係数$2k'+k$はポアソン比νの適当な値に対して次のようになる。

（i）$\nu = 1/2 \Rightarrow \kappa = 5/3$ ： $2k'+k = 23/15+4m/5a^2$

（ii）$\nu = 1/3 \Rightarrow \kappa = 2$ ： $2k'+k = 3/2+m/a^2$

（iii）$\nu = 0 \Rightarrow \kappa = 3$ ： $2k'+k = 5/3+2m/a^2$

すなわち、ポアソン比の範囲 $0 \leqq \nu \leqq ½$ では、mの一次の項の係数は常に正である。これは、楕円形粒子の長軸の傾きによって材料定数が変化することを意味し、楕円形粒子の長軸が引っ張り方向と一致するときの方が引っ張り方向に垂直であるときよりも弾性率は大きく変化することを示している。

4．3　有限要素法による数値解析及び複合材弾性率の測定実験

前節では、分散している粒子間の距離は十分離れているものとし、粒子間の相互干渉は無視できると仮定して、無限平板中に一つの楕円形粒子が存在する場合の解を重ね合わせて複合材の弾性率を求め、それが粒子形状や粒子の配向状態に依存することを示した。しかし、実際に使われている複合材では、粒子間の相互干渉も考慮する必要がある。本節では、この影響を考慮するために、粒子分散形複合材をモデル化し、有限要素法による数値解析を行うとともに、実際の複合材試験片を作製して弾性率を測定し、各結果の比較検討をした。

4.3.1　計算方法及び計算モデル

有限要素法の計算において、弾性体に対しては平面応力場を仮定して次の構成式を用いる。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = E/(1-\nu^2) \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ½(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}69)$$

ただし、　$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$：工学ひずみ　　ν：ポアソン比

計算に用いたモデル分割を図4-5 に示す。モデルの形状は30 mm × 200mm, 厚さ 5 mm で、全体を480 要素に分割している。粒子の形状，大きさに合わせて縦，横の分割数，分割幅を入力すればプログラム内で自動的に要素分割が行われる。粒子形状や配向状態に対する弾性率の変化の傾向が得られるように、粒子形状として正方形及び長方形を考え、各粒子とも断面積は同一にした。

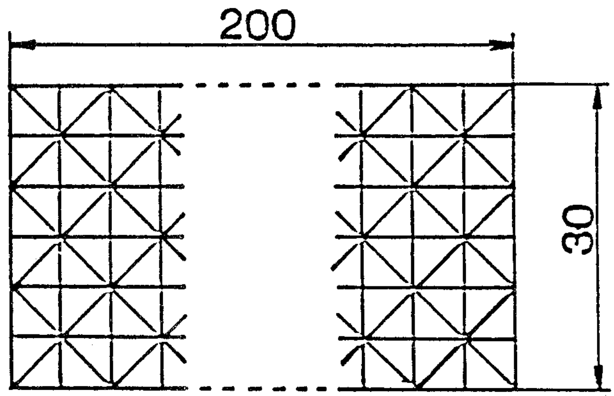


図 4-5　分割モデル

長方形では長・短辺の比を4：1とした。粒子要素の位置は乱数を用いて無作為に定め、同体積濃度で同じ粒子形状に対して粒子の位置のみが異なるモデルを四種類ずつ作った。計算において、変形は一端固着，一軸引っ張りで与え、境界条件は荷重拘束条件として、境界端面上に全荷重60.0×9.8 （N）を振り分けて一様負荷として与えた。複合材としての平均的な弾性率は、変形時の端面の平均変位から平均垂直ひずみを求めて算出する。尚、計算に用いた材料定数は以下のとおりである。

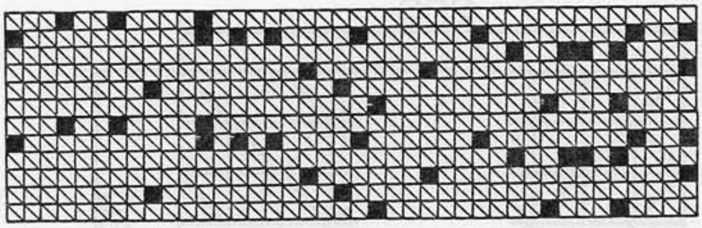
母材：　$E_m = 0.98$ GPa，　$\nu_m = 0.40$

粒子：　$E_p = 2.06 \times 10^2$ GPa，　$\nu_p = 0.33$

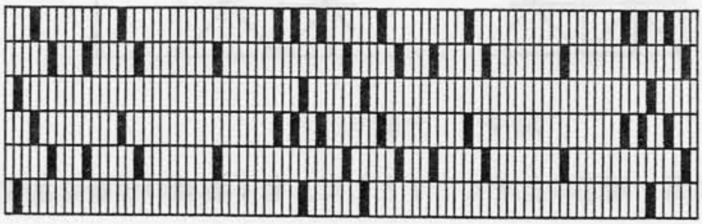
4.3.2　実験方法及び実験装置

理論的考察及び数値解析によって得られる結果と比較するために実際に複合材試験片を作製し、それらに対して特性値の測定実験を行った。

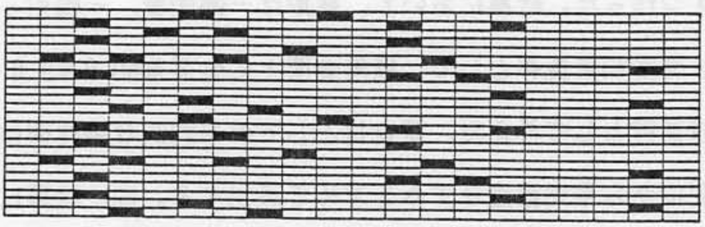
実験に用いた試験片のモデルの一例を図4-6 に示す。形状は、 60 mm× 200 mm，厚さ5 mmである。母材はエポキシ樹脂を用い重量比でエポキシポリマ：ポリサルファイド：硬化剤＝ 100： 40 ：8 の割合で合成したものである。粒子には鋼片を用いた。計算結果と比較するために、 30 mm× 200 mm の部分に



（a）正方形粒子モデル



（b）長方形粒子モデル（垂直）



（c）長方形粒子モデル（平行）

図 4-6　粒子分散形複合材モデル

計算モデルと同一のものを作り、これを幅方向に二本つなぎ合わせて、全幅を 60 mm の大きさにした。エポキシ樹脂は熱硬化性材料であるので、室温で合成して硬化後７時間 120℃で炉に入れて十分熱硬化させる。同時に、加熱，冷却に各々 6〜7 時間かけて温度を変化させて、粒子周辺の残留応力もできるだけ緩和させておく。エポキシ樹脂は作製時の環境の諸条件（気温，湿度など）によって微妙にその性質が変化するため、複合材と同じ合成原液から同寸法の単体も作り、同じ母材の試験片の間で測定結果を比較する。

実際の複合材の弾性率を測定するために、ここでは図4-7 に示すような三点

支持曲げ試験法を用いた。試験片が大きく、一般に用いられる一軸引っ張りに適さないため、中央に荷重を受ける梁のたわみを利用して弾性率を求める。試験片の長さが幅に比べて十分長い（l＞３ｂ，ｌ：試験片の長さ，ｂ：幅）場合には、ヤング率Ｅは長方形断面の試験片に対して次式で与えられる。

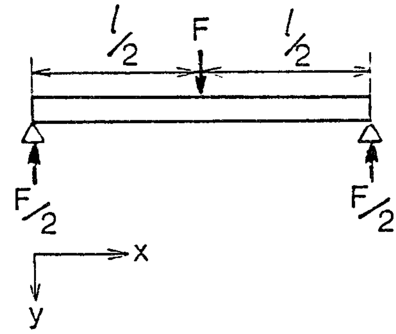


図 4-7　三点支持曲げ試験

$$E = \frac{\ell^3}{4bh^3} \cdot \frac{W}{y_W} \qquad (4\text{-}70)$$

Ｗ：荷重ーたわみ曲線上での任意の点の荷重

y_W ：荷重Ｗでの荷重点のたわみ量，　ｈ：試験片の厚さ

試験は、ＪＩＳ規格に従って、一定負荷速度2.0 mm／min で負荷し、一つの試験片に対して四回測定してその平均でヤング率を求める。曲げ試験の一例として、荷重ーたわみ線図を図4-8 に示す。この線図の直線部分，すなわち弾性変形状態の部分でその傾きを求めてヤング率を算出する。

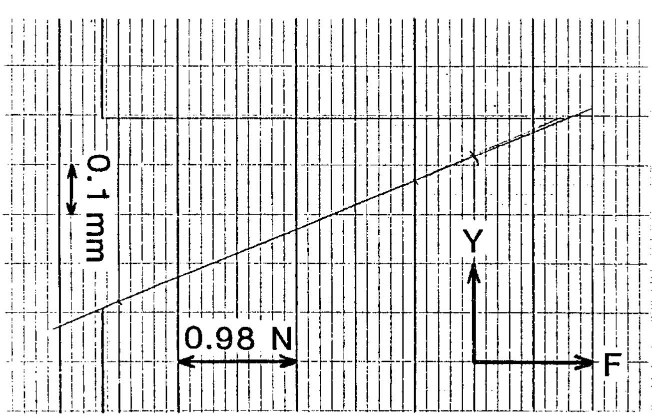


図 4-8　荷重ーたわみ線図の一例

4．4　計算・実験結果及び考察

表4-Ⅰは、母材単体に対する複合材の弾性率の増分を有限要素法によって求めた結果であり、百分率で示している。表4-Ⅱは、母材単体及び複合材の弾性率を実験によって測定した結果である。これらの解析では、全モデルについて体積濃度を10%で一定にしており、比較のために各粒子の断面積は正方形，長方形ともに同面積にしている。これらの結果からわかるように、全モデルにおいて計算結果，実験結果ともに複合材の弾性率は母材に比べて大きく増加しており、粒子の充填によってかなり強化されている。また、同一形状のモデルでは、各モデル間の結果にはばらつきが少なくほぼ同程度の増加率を示し、現実の粒子分散形複合材に対するモデルとしてこの程度の分割数及び粒子数でもほぼ統計的に正しく複合材の性質を示していることがわかる。

粒子別にみると、計算結果では、弾性率の増加は長辺が引っ張り方向に対して平行な場合の方が、垂直な場合に比べてはるかに大きな値を示して、正方形粒子の結果を加えて比較すると、長方形（垂直），正方形，長方形（平行）の順に弾性率は大きくなっており、平均値で23.7%，28.1%，52.0%となっている。実験結果においても同様の傾向が得られ、弾性率の増分は各形状に対して

表４－Ⅰ．　弾性率増分ΔＥの計算結果（%）

pattern	正方形	長方形（垂直）	長方形（平行）
1	30.6	25.1	53.3
2	27.5	22.7	44.1
3	27.4	24.3	59.2
4	27.0	22.7	51.5
avrage	28.1	23.7	52.0

体積粒子濃度：$\phi = 0.1$ ，$\Delta E = (E^{*} - E) / E$

表４－Ⅱ．　実験による弾性率増分の測定結果

（ａ）　正方形モデル（体積濃度：ϕ＝0.1 ）

pattern	単体 MPa	複合材 MPa	ΔＥ　％	計算値％
1	1670	2210	32.2	30.6
2	1810	2380	31.2	27.5
3	1660	2160	30.1	27.4
4	1660	2160	30.1	27.0
average	——	——	30.9	28.1

（ｂ）　長方形（垂直）モデル（体積濃度：ϕ＝0.1 ）

pattern	単体 MPa	複合材 MPa	ΔＥ　％	計算値％
1	1840	2210	20.1	25.1
2	1970	2170	10.2	22.7
3	1800	2180	21.1	24.3
4	2020	2300	13.9	22.7
average	——	——	16.3	23.7

（ｃ）　長方形（平行）モデル（体積濃度：ϕ＝0.1 ）

pattern	単体 MPa	複合材 MPa	ΔＥ　％	計算値％
1	1840	2970	61.4	53.3
2	1970	2710	41.9	44.1
3	1800	3020	67.8	59.2
4	2060	3270	58.7	51.5
average	——	——	57.5	52.0

平均で各々16.3%，30.9%，57.5%となり、計算結果によく一致している。試料中での粒子の分布状態によって測定結果に多少のばらつきがみられるが、形状による弾性率の変化にはそれ以上に大きな差があり、長方形（垂直）と（平行）を比べると、計算では平均値に約 30 %，実験では約 40 %の差があり、粒子の配向状態に依存して弾性率が大きく変化することがわかる。楕円形粒子に対する理論的考察において導いたように、楕円の形状変化を表すパラメータmが負，0，正となるのに対応して、式（4-68）より複合材の弾性率は縦長楕円，円，横長楕円の順に大きくなることを示したが、この正方形，長方形粒子を使った解析においてもやはり同様の傾向を得ることができ、粒子形状及び粒子の配向によって弾性率が大きく変化することがわかる。

図4-9 は、体積濃度変化に対して複合材の弾性率増分の変化を調べた結果である。図中の実線及び一点鎖線は、参考のために平面応力状態に対する楕円形断面粒子の特性式（4-68）を粒子の方向を表すパラメータmが$m=\pm\ 0.6a^2$，すなわち長軸と短軸の長さの比が 4：1 の場合について弾性率の変化を表したものである。この計算では、粒子形状として三角形，正方形を考えているが、

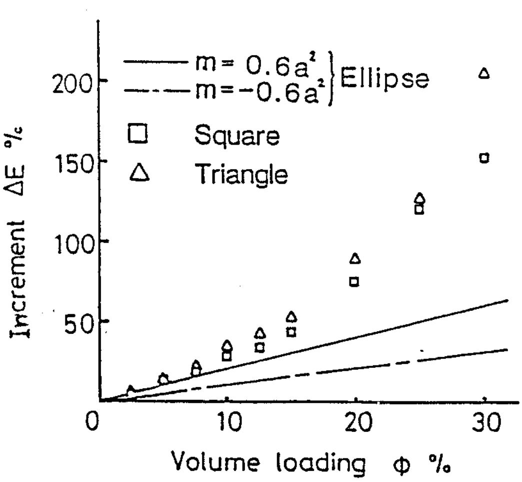


図 4-9　弾性率増分の体積濃度変化

どちらの場合にも体積濃度が 10 ％を越えて大きくなると弾性率は著しく増加し、二本の直線の間から大きくはずれてくる。この結果は、10％を越える大きな体積濃度では式（4-68）を導出したときに無視した粒子相互の干渉や体積濃度の二次以上の項が急激に大きく影響してくることを意味している。

4．5　結　論

本研究では、粒子分散形複合材の材料特性について理論的に考察を行い、さらに有限要素法による数値解析及びそれに対応する実験的測定を行なうことによって、以下の結果を得た。

まず、粒子形状として円形と楕円形の場合を考えた理論的考察から、粒子形状や変形方向に対する粒子の配向によって複合材の弾性率が変化することを示した。

粒子形状の変化に対する弾性率変化を解析するために、体積濃度を一定にして正方形及び長方形粒子を乱数によって無作為に分散させた複合材モデルを作り、これに対して数値解析及び実験的な解析を行った。その結果、どちらの解析においても弾性率の増加を確かめることができ、両者の結果は定量的にもよく一致した。また、粒子形状別に比較すると、数値解析，実験共に引っ張り方向に対して縦長の長方形の場合，正方形，横長の長方形の順に弾性率は大きくなる結果が得られ、楕円形粒子に対して理論的に得られた結果に一致する粒子形状の違いや配向に依存した弾性率の変化を確かめることができた。

体積濃度に対する弾性率の変化を数値解析によって調べると、濃度の低い範囲では弾性率はほぼ直線的に増加するが、10％を越えて高濃度になると弾性率は急激に大きくなる。これは、粒子濃度の効果を表す特性式を導出する際に無視した粒子相互の干渉及び体積の二次以上の項の影響が、高濃度では一次の項に対して強く現れてくることを意味している。

第5章　粒子分散形複合材の材料特性 ——— 粘性の変化について

5．1　まえがき

材料特性として、母材の弾性率とともに母材を粘弾性体としたときの粘性も複合材の重要な性質である。前章で触れたように、従来粒子分散形複合材の材料特性に関する研究は、サスペンジョンやエマルジョンなどのように粘性流体中に粒子状の充塡物質が分散した場合の粘性特性についての議論を基にしている。そして、この議論を拡張してSmallwood らによって粒子分散形の複合材の弾性率変化についての考察がなされた。これに対して、複合材自体の粘性を議論したものは非常に少なく、粒子を球形に限定した分散系の線形粘弾性体を流体力学的に取り扱った考察が、Fröhlich (23) や岡野ら (26) によってなされているだけである。しかし、粘弾性体の構成式そのものを使った考察では非常に議論が煩雑となり、得られる結果も複雑なものとなっている。

ここでは、母材を粘弾性体として、粒子の充塡による複合材の粘性変化を対応原理を用いてより簡単に考察することを考えた。よく知られているように、ラプラス変換面で考えると粘弾性体の支配方程式は弾性体のものと全く同じ形になる。したがって、同じ境界条件に対してラプラス変換面での粘弾性体の解が弾性体の解と同じ形になる。これを対応原理と呼んでいる。この原理を使って一軸引っ張りを受けたときの材料の緩和現象の変化を理論的に調べてみた。そして、粒子形状として三角形や四角形を用いて、前章と同様の複合材モデルを考え、粘性を考慮した有限要素法を構成して複合材の緩和現象を数値解析した。同時に、エポキシ樹脂と鋼片で作製した複合材試験片を使って緩和実験を行い、計算結果との比較検討をした。

5．2　粘性に対する粒子充塡効果の理論的考察

―― 対応原理による考察 ――

材料の粘弾性を考慮するために、図5-1に示す二つのバネと一つのダシュポットを要素とする三要素標準粘弾性モデルを考える。このモデルに対する構成式は次式で与えられる。

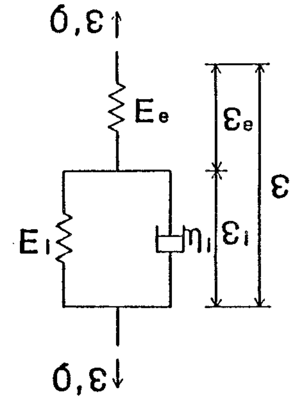


図 5-1　三要素粘弾性モデル

$$\sigma + p_1\dot{\sigma} = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon} \quad , \quad 「\cdot」: \frac{\partial}{\partial t} \qquad (5\text{-}1)$$

$$p_1 = \frac{\eta_i}{E_e + E_i} \quad , \quad q_0 = \frac{E_e E_i}{E_e + E_i} \quad , \quad q_1 = \frac{E_e \eta_i}{E_e + E_i} \qquad (5\text{-}2)$$

式（5- 1）をラプラス変換

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt \qquad (5\text{-}3)$$

すると、次式を得る。

$$\bar{\sigma}(s) = \bar{E}(s)\,\bar{\varepsilon}(s) , \quad E(t)：緩和弾性率 \qquad (5\text{-}4)$$

$$\bar{E}(s) = \frac{q_0 + q_1 s}{1 + p_1 s} \cdot \frac{1}{s} \qquad (5\text{-}5)$$

このとき、このモデルで緩和時間Ｔｍ を図5-2 に示すように全緩和量の１／ｅになるまでの時間として定義すると、式（5- 5）の零でない一位の極からＴｍは次式で表される。

$$T_m = p_1 = \frac{\eta_i}{E_e + E_i} \qquad (5\text{-}6)$$

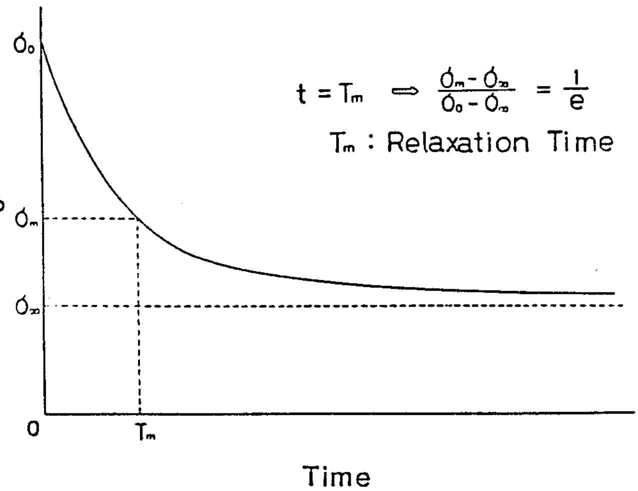


図 5-2　緩和時間の定義

今、対応原理を用いると、粒子を充填することによって弾性率が、

$$E^{*} = (1 + k\phi)\,E,\quad \phi：粒子の体積濃度 \tag{5- 7}$$

と変化するのに対して、線形粘弾性体ではラプラス変換を行った構成式における $\overline{E}$, $\overline{E}^{*}$ の間に

$$\overline{E}^{*}(s) = (1 + k\phi)\,\overline{E}(s) \tag{5- 8}$$

が成立する。従って、

$$\overline{E}^{*}(s) = (1 + k\phi)\cdot\frac{q_0 + q_1 s}{1 + p_1 s}\cdot\frac{1}{s} \tag{5- 9}$$

である。このとき、粒子充填効果は分母には影響がなく、式 (5- 9) から複合材の場合の緩和時間 T^{*}_{m} も

$$T^{*}_{m} = p_1 = \frac{\eta_i}{E_e + E_i} = T_m \tag{5-10}$$

で与えられ、母材単体の緩和時間 T_m に一致する。すなわち、粒子が充填されても緩和時間は不変であり、緩和現象は同じ過程をとることが予測できる。さらに、緩和時間が粘性係数と弾性率との比で与えられていることから、粘性係数も弾性率と同じだけの影響を受け、

$$\eta^{*} = (1 + k\phi)\ \eta \qquad (5\text{-}11)$$

と変化することになる。

この結果は、Fröhlichや岡野らが球形粒子に対して導出した結論において、粒子を剛体とした場合の結果に一致するのみならず前章で求めたｋの値を用いることによって楕円形，長方形等の各種形状粒子の場合にも拡張できることを示すものである。

５．３　有限要素法による数値解析及び緩和現象の観測

5.3.1　計算方法

粘弾性体に対する構成式は、図5-1 に示したモデルの構成式を用いる。数値計算に対してはひずみ成分，応力成分を体積成分と偏差成分に分け、ここで扱う問題では体積変化に伴う粘性効果はせん断による効果に比べて小さく、無視できるものと仮定する。微分形で与えられる構成式をラプラス変換し、複素コンプライアンスを求めて逆変換を実行すれば応力成分とひずみ成分との直接的な関係を得ることができるが、実際に逆変換の複素積分を実行することは一般には困難である。そこで、山田らの手法（27）にしたがって微小時間内での応力変化に注目してこれを線形近似し、微小時間での応力増分，ひずみ増分に対する構成式を求める。二次元平面問題に適用するために、平面ひずみ状態を仮定して次のような増分形の構成式を得ることができる。

$$\begin{bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\gamma_{xy} \end{bmatrix} - \Delta\mathscr{E}_a'(t) \,/\, C_G\ (t)$$

(5-12)

ここで、

$$A = \frac{1}{C_K} + \frac{4}{3C_G(t)}, \quad B = \frac{1}{C_K} - \frac{2}{3C_G(t)}, \quad C = \frac{1}{C_G(t)}$$

$$\Delta\varepsilon_a'(t) = C_{Gi}\left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{T_{Gi}}\right)\right]\sigma'(t) - 2\left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{T_{Gi}}\right)\right]\varepsilon_i'(t)$$

であり、 $\sigma'(t)$ は応力の偏差成分, $\varepsilon_i'(t)$ はダッシュポットの受け持つひずみの偏差成分である。さらに、上式中の変数 C_K , C_G は次式で与えられる。

$$C_K = C_{Ke} + C_{Ki}, \quad C_G(t) = C_{Ge} + C_{Gi}\left[1 - \left\{\exp\left(-\frac{\Delta t}{T_{Gi}}\right)\right\}\frac{T_{Gi}}{\Delta t}\right]$$

$$C_{Ge} = \frac{2}{E_e}(1 + \nu_e), \quad C_{Ke} = \frac{3}{E_e}(1 - 2\nu_e),$$

$$C_{Gi} = \frac{2}{E_i}(1 + \nu_i), \quad C_{Ki} = \frac{3}{E_i}(1 - 2\nu_i)$$

$$T_{Gi} = \eta_{Gi}\, C_{Gi}, \quad \eta_{Gi} = \frac{\eta_i}{2(1 + \nu_\eta)}$$

ν_e , ν_i , ν_η は、各々材料定数Ｅｅ，Ｅｉ，ηｉに対するポアソン比を示している。

計算モデルは、弾性率変化の解析の場合と同様に作り、粒子形状は三角形，正方形及び長方形とした。粒子の体積濃度は10％で一定とし、同じ粒子形状に対して粒子の位置のみがランダムに異なるモデルを五種類ずつ作った。変形は一端固着，一軸引っ張りで与え、境界条件は変位拘束条件として境界端面上に一様変位0.03 mm を与える。変位固定後4500秒までの材料中の応力変化を解析した。尚、計算に用いた材料定数は以下のとおりである。

粘弾性体：Ｅｅ＝2.45　GPa，　Ｅｉ＝4.41　GPa

η ｉ＝3.43×10^3 GPa s，　ν ｍ＝0.40

粒子：　Ｅｐ＝2.06×10^2 GPa，　ν ｐ＝0.33

5.3.2　実験方法及び実験装置

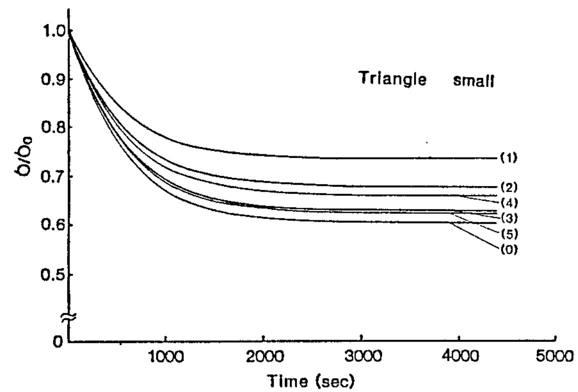
理論的考察及び数値解析によって得られた結果を検証するために実際に複合材試験片を作製し、材料の緩和の観測を行った。試験片は弾性率変化の解析の場合と同様に形状：60 mm ×20 mm ，厚さ５mmで、母材はエポキシ樹脂，粒子に鋼片を用い、粒子形状は三角形及び正方形とした。

緩和現象を調べるために、試験片を引っ張り試験機に装着し、初めに一定の引っ張り速度３mm／min で一定変位0.5 mmに達するまで引っ張りを与える。設定値になった時点で変位を固定し、それ以後の荷重の緩和状態を観測する。観測は、荷重の変化率が緩和曲線の最大曲率点での値の約５％になる時刻（約90分）まで行う。このとき、収束緩和値としては近似的に観測終了時点での荷重を採用する。また、緩和現象は観測時の気温に大きく影響されるため、室温は 19 ℃で一定に保って観測を行った。

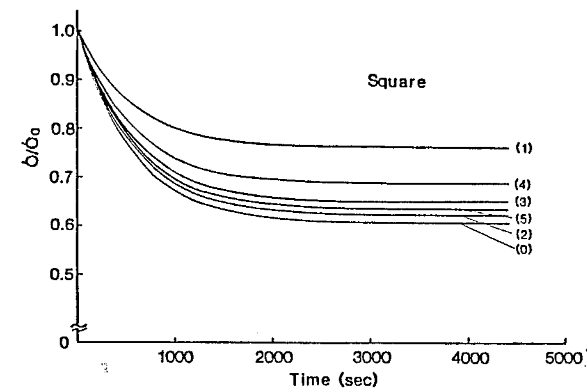
５．４　計算・実験結果及び考察

図5-3 は複合材モデル及びエポキシ単体に対して計算によって求めた緩和の状態を示したものであり、図5-4 は実験による観測結果である。横軸は変位固定後の経過時間，縦軸は初期応力で正規化した応力値である。

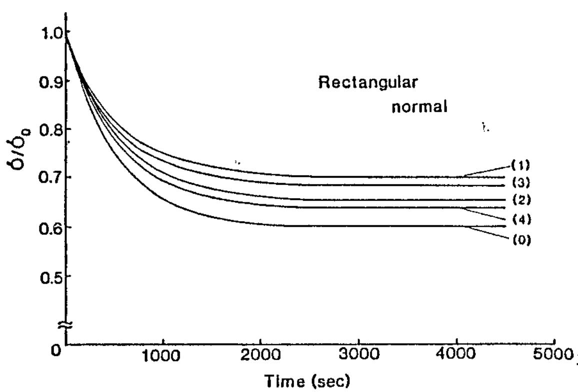
図5-3 の計算結果をみると、モデル中での粒子の分布の違いによって最終的な緩和量の収束値は異なっているが、緩和曲線の収束する速さはほぼ等しいことがわかる。実験では図 5-4に示しているように、三角形，四角形モデルともに緩和曲線は粒子の分布状態にかかわらず互いに非常に接近しており、収束値もほぼ等しくなって単体の緩和曲線に一致している。また、粒子形状の違いによる緩和の変化をみるために、分布状態の似たモデルに対する結果を図5-5 で比較している。－（ａ）は計算結果，－（ｂ）は実験結果の場合である。どちらの結果においても、母材単体，三角形，四角形モデルの各緩和曲線は非常に



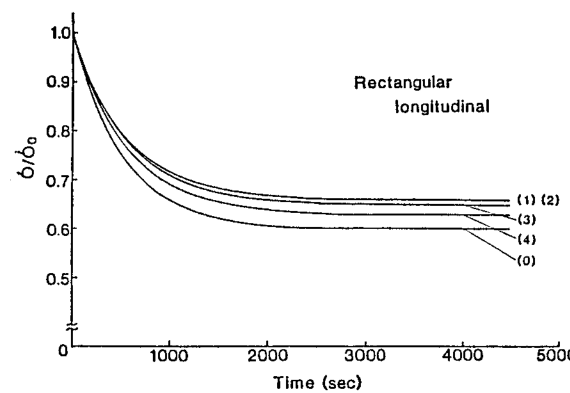
（a）三角形（小）粒子モデル



（b）正方形粒子モデル

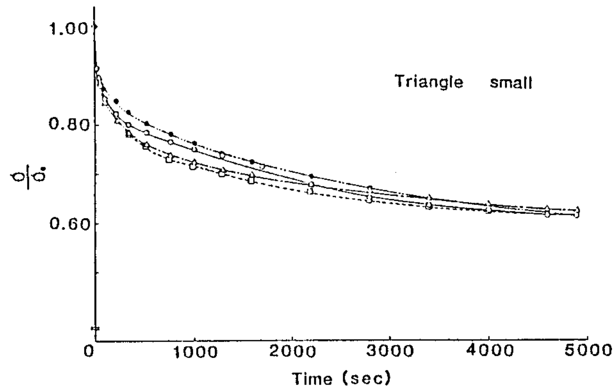


（c）長方形（垂直）粒子モデル

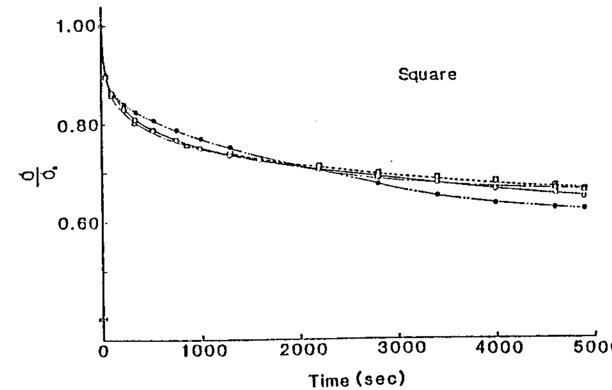


（d）長方形（平行）粒子モデル

図 5-3　有限要素法による緩和の解析結果

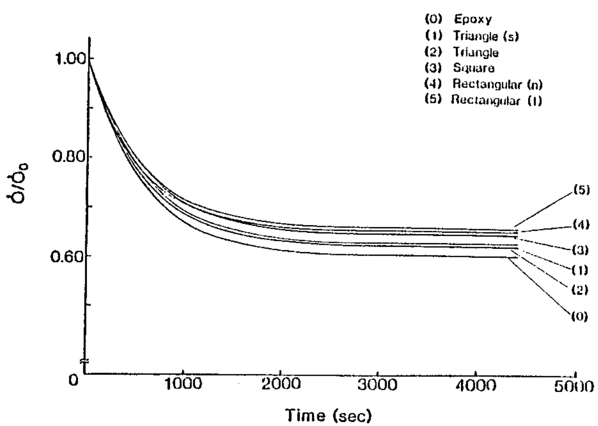


（a）三角形（小）粒子モデル

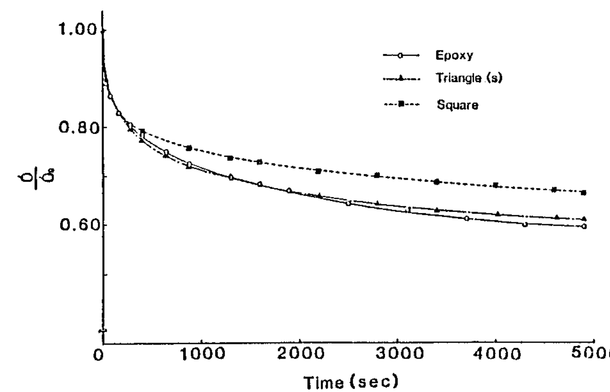


（b）正方形粒子モデル

図 5-4 緩和実験による観測結果



（a）計算結果での比較



（b）実験結果での比較

図 5-5 粒子形状の相違による緩和曲線の比較

接近していることがわかる。

これらの結果から、前節で定義した緩和時間を求めて表5-Ⅰ，5-Ⅱにまとめている。表5-Ⅰで計算結果から求めた各モデルの緩和時間を比較すると、どのモデルに対しても緩和時間にはあまり差がなく、ほぼ単体の場合に等しくなっていることがわかる。実験結果では、表5-Ⅱに示しているように、試料の作製時の環境条件（硬化温度，湿度など）の違いによって母材単体自体の緩和時間に大きなばらつきを生じた。しかし、複合材の緩和時間を母材に対する比で比較すると同じ粒子形状で分布状態によって多少の差はあるが、緩和現象が1℃以下の僅かな温度差にも大きく影響を受けて変化し，実際の観測では温度制御

表５－Ⅰ　緩和時間の計算結果（sec ）

pattern	単体	三角形小	三角形大	正方形	長方形縦	長方形横
1	570 (1.00)	1.04	1.04	1.00	1.02	1.06
2		1.00	1.04	1.05	1.08	1.10
3		1.02	1.08	1.02	1.04	1.08
4		1.02	1.06	1.02	1.06	1.10

複合材は単体の緩和時間に対する比を示す。

表５－Ⅱ　緩和時間の測定結果（sec.）

pattern	単体	三角形小	正方形
1	990	970 (0.98)	840 (0.84)
2	605	580 (0.96)	550 (0.91)
3	725	650 (0.90)	710 (0.98)
4	1265	1350 (1.07)	1500 (1.19)

（　）内は単体に対する比

が完全にはできなかったことや緩和時間が非常に長い時間であることを考慮すると、計算結果の場合と同様に、やはりほぼ一定の値が得られているものとみなせる。

これらの結果は、粒子を粘弾性母材に充填しても材料の緩和特性にはほとんど影響がないことを示している。すなわち、緩和現象は充填粒子の形状にも分布状態にも依存せず、母材単体と同じ緩和過程をたどり、理論的考察と一致する結果が得られている。

5．5 結 論

本研究では、粒子分散形複合材の粘性について対応原理を用いて理論的な考察を行い、複合材の緩和時間が粒子充填の影響を受けないことを示した。この結果は、粒子形状が与えられていれば、充填体積濃度が小さな範囲では弾性率変化と同様に複合材の粘性係数も粒子の体積濃度に比例して変化することを意味している。この結論はFröhlich，岡野らの導いた結果に一致しており、対応原理を使って簡単な議論でこれを導くことができた。

複合材の緩和現象を実際に調べるために、粘弾性体に対する有限要素法を構成して数値解析を行うと同時に実験による観測を行った。その結果、複合材の緩和時間には数値解析及び測定結果ともにほとんど差はみられず、ほぼ母材単体の緩和時間に等しくなり、理論的な考察結果を確かめることができた。

第６章　粒子分散形複合材の動的挙動の解析

ここでは、粒子分散形複合材の動的な特性を調べるために、衝撃を加えたときに材料中に生じる応力波の挙動の解析を試みた。材料中を伝ぱする応力波の伝ぱ速度，減衰について有限要素法による計算と同時に実験によって解析を行い、さらにそれらの結果をFourier 解析して応力波に含まれる各周波数成分毎の減衰や分散的な挙動について考察した。

６．１　理論的考察

6.1.1　複合材中での応力波の伝ぱ速度

複合材の動的挙動を調べるために、最も特徴的な材料の伝ぱ速度や波の減衰に注目し、これらが粒子の配合によってどのように変化するか、理論的な考察をする。ここでは、簡単のために問題を一次元として考える。

今、母材の性質を図6-1 に示すような二つのバネと一つのダッシュポットからなる三要素標準粘弾性体モデルを仮定して考える。一般に、線形粘弾性体モデルの微分形の構成式は次の形に書ける。

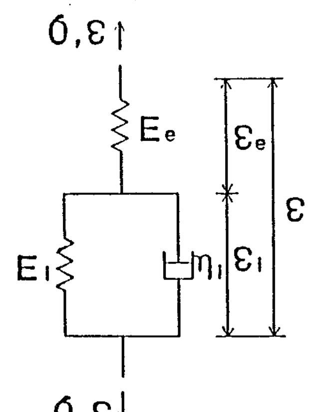


図 6-1　三要素粘弾性モデル

$$\sum_{n=0}^{n_0} p_n \frac{\partial^n \sigma}{\partial t^n} = \sum_{m=0}^{m_0} q_m \frac{\partial^m \varepsilon}{\partial t^m} \quad , \quad n_0 \geqq m_0 \qquad (6\text{-}1)$$

一方、一次元での運動方程式は、密度を ρ、変位成分を u として、

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \qquad (6\text{-}2)$$

で与えられるから、これに上式を代入すると、

$$\rho \sum_{n=0}^{n_0} p_n \frac{\partial^{n+2} u}{\partial t^{n+2}} = \sum_{m=0}^{m_0} q_m \frac{\partial^{m+2} u}{\partial x^2 \partial t^m} \tag{6-3}$$

となる。$n_0 = m_0$ のとき、応力波は固有の伝ぱ速度を有し、この速度は最高次の係数の比で与えられる。

$$C^2 = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{q_{m_0}}{p_{n_0}} \tag{6-4}$$

図6-1 のモデルでは、構成式は具体的に

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon} \tag{6-5}$$

$$p_1 = \frac{\eta_i}{E_e + E_i} \quad , \quad q_0 = \frac{E_e E_i}{E_e + E_i} \quad , \quad q_1 = \frac{E_e \eta_i}{E_e + E_i} \tag{6-6}$$

と書け、このとき、伝ぱ速度Ｃは次式で表される。

$$C^2 = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{q_1}{p_1} = \frac{E_e}{\rho} \tag{6-7}$$

さて、上式で定義される伝ぱ速度が、母材中に粒子を混合することによりどのように変化するか調べてみる。粒子の混合により、ヤング率Ｅｅが第一次近似としてSmallwood の導出した特性式に従って変化するものと仮定する。

$$E_e^* = (1 + k\phi) E_e \tag{6-8}$$

k ：粒子形状を表す係数，ϕ ：粒子の体積濃度

E_e，E_e^* ：母材及び複合材のヤング率

粒子の混合による複合材の平均的な密度変化は、やはり粒子の体積濃度 ϕ を用いて次のように書ける。

$$\rho^* = \left\{ 1 + \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right) \phi \right\} \rho \tag{6-9}$$

ρ_p ：粒子素材の密度

複合材としての平均的な伝ば速度が、複合材に対する諸量を使って式 (6-7

）と同じ形で表すことができるものとすれば、複合材の伝ぱ速度 C^* と母材の速度Cの間に次の関係を得る。

$$C^* = \sqrt{\frac{E_e^*}{\rho^*}} = \alpha C \tag{6-10}$$

$$\alpha = \left\{ \frac{1 + k\phi}{1 + \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1\right)\phi} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{6-11}$$

式中の係数kは粒子の形状に依存しており、第４章で考察したように、同体積濃度でも正方形，長方形粒子に対する弾性率の増加は、長方形（垂直），正方形，長方形（平行）の順に大きくなる。すなわち、式（6-8 ）の表現では

$$k_n < k_s < k_\ell \tag{6-12}$$

である。ここで、以後、添字sは正方形，nは長方形（垂直），ℓ は長方形（平行）を表わす。同濃度では、密度変化は等しいから、係数αは、

$$\alpha_n < \alpha_s < \alpha_\ell \tag{6-13}$$

となり、正方形，長方形粒子で複合材の伝ぱ速度を比較すると、

$$C_n^* < C_s^* < C_\ell^* \tag{6-14}$$

すなわち、弾性率変化の粒子形状依存性に対応して、複合材の伝ぱ速度も粒子形状の影響を受けることがわかる。

また、第４章では、粒子形状が同一であっても体積濃度によって弾性率増分が変化することも示した。この結果は、kが体積濃度φの関数であり、φの増加とともに単調に増加していくことを示している。従って、kの値が小さく、$k < (\rho_p / \rho) - 1$ の範囲では $\alpha < 1$ となり、粒子の充填にもかかわらず複合材の伝ば速度が母材単体の速度よりも小さくなることがわかる。しかし、図6-2 に示すように、φ＝ 1.0，すなわち体積濃度100 ％では粒子素材の単体で

あるから伝ぱ速度は母材よりはるかに大きい。従って、伝ぱ速度は粒子の混合に対して単調には変化せず、初め母材の伝ぱ速度Ｃm よりも小さくなり、ある体積濃度で最小値をとった後増加し、最終的に、$\phi=1.0$ で粒子素材での伝ぱ速度Ｃp に等しくなるものと考えられる。（図6-2 ）

$$\frac{d\alpha}{d\phi}=\frac{1}{2\alpha}\frac{1}{\left\{1+\left(\frac{\rho_p}{\rho}-1\right)\phi\right\}^2}\left[\left\{k-\left(\frac{\rho_p}{\rho}-1\right)\right\}+\frac{dk}{d\phi}\phi\left\{1+\left(\frac{\rho_p}{\rho}-1\right)\phi\right\}\right] \tag{6-15}$$

に対して、

$$\left.\frac{d\alpha}{d\phi}\right|_{\phi=\phi_{min}}=0 \tag{6-16}$$

を満たすϕmin でαは最小値をとり、従って、複合材は体積濃度がϕmin のとき最小の伝ぱ速度Ｃmin を持つことになる。ϕmin はｋが具体的にϕの関数として与えられれば、理論的に求められる。

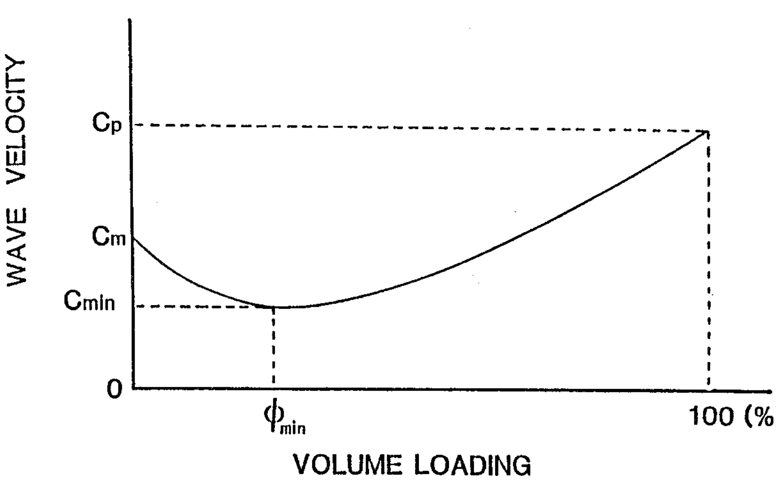


図 6-2　伝ぱ速度の体積濃度変化

6.1.2 複合材の応力波の減衰効果

応力波が、粒子が分散している複合材中を伝ぱしていくとき、どのような減衰効果を受けるのか検討する。このモデルに対する運動方程式は、式（6-2 ）を式（6-5 ）に代入して次式のように得られる。

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\rho p_1\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}=g_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g_1\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t} \tag{6-17}$$

ここで、一般に、ある関数ｆ（ｘ、ｔ）の波頭に沿っての増分をＤｆとすると

$$\frac{Df}{Dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \tag{6-18}$$

より、

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}=\left(\frac{D}{Dx}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)^n f \tag{6-19}$$

を得る。これを用いて、式（6-17）は、

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\rho p_1\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}=g_0\left(\frac{D}{Dx}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u+g_1\left(\frac{D}{Dx}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \tag{6-20}$$

と書き直せ、さらに、式（6-7 ）を用いて整理すると次式が得られる。

$$g_0\left\{\frac{D^2 u}{Dx^2}-\frac{2}{c}\frac{D}{Dx}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right\}+g_1\left\{\frac{D^2}{Dx^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)-\frac{2}{c}\frac{D}{Dx}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\right\}+\left(\frac{g_0}{c^2}-\rho\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{6-21}$$

この式を図6-3 に示した波頭の特性曲線をはさんで、B_1 からB_2 まで一回ｔで積分して、さらにB_1 ，B_2 を各々B_0 に近づけた極限を考えると、ｔの微分に関して二次の項は粒子速度の不連続量〔$\frac{\partial u}{\partial t}$〕となり、他は全て零となる。従って、上式は

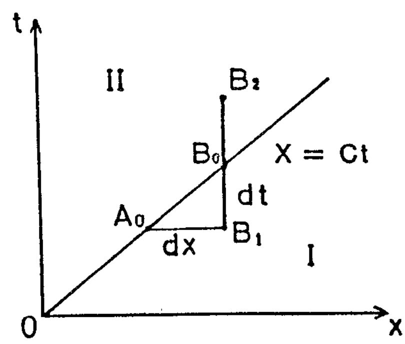


図 6-3　x-t 平面での応力波頭

$$\frac{2g_1}{C}\frac{D}{Dx}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]-\left(\frac{g_0}{C^2}-\rho\right)\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=0 \qquad (6\text{-}22)$$

となる。ここで、

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=A\ \exp\left[-\lambda x\right] \qquad (6\text{-}23)$$

λ：減衰係数

となる粒子速度の不連続量の減衰を考える。式（6-23）を式（6-22）に代入すると、減衰係数は次のようにもとめられる。

$$\lambda=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho}{P_1 g_1}}\cdot\frac{g_1-P_1 g_0}{g_1}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\rho E e}}{\eta_i} \qquad (6\text{-}24)$$

さて、複合材ではこの減衰係数λがどのように変化するのかを考えてみる。粒子の充塡により、弾性率Ｅｅ、密度ρは前節と同様、各々式（6-8）、式（6-9）に従って変化する。さらに、前節で示したように粘性係数η^*もE*eと同様の特性式に従う。

$$\eta_i^*=(1+k\phi)\ \eta_i \qquad (6\text{-}25)$$

複合材の減衰係数λ^*を、複合材に対する諸量を使って式（6-24）と同じ形で与えると、λ^*とλの間に次の関係を得る。

$$\lambda^*=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\rho^* Ee^*}}{\eta^*_i}=\frac{\lambda}{\alpha} \qquad (6\text{-}26)$$

$$\alpha=\left\{\frac{1+k\phi}{1+\left(\frac{\rho_p}{\rho}-1\right)\phi}\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (6\text{-}27)$$

粒子形状による違いを考えるために、前節と同じく正方形と長方形（平行）を

取り上げると、同濃度では、$\alpha s < \alpha_\ell$ であったから、

$$\lambda^*_s > \lambda^*_\ell \qquad (6\text{-}28)$$

となる。すなわち、一定距離ℓ間の応力波の伝ぱを考えると、応力波の減衰量は、正方形粒子の方が大きく、粒子形状に依存することがわかる。

これに対して、一定時間T間での伝ぱを考えると、時間Tでの伝ぱ距離は各々、

$$\ell_\ell = C^*_\ell\ T、\quad \ell s = C^*_s\ T$$

であるから、このときの減衰量を定める指数は、

$$\lambda^*_\ell\ \ell_\ell = \lambda^*_\ell\ C^*_\ell T = \left(\frac{\lambda m}{\alpha_\ell}\right)(\alpha_\ell C_m)T = \lambda_m C_m T$$

$$\lambda^*_s\ \ell_s = \lambda^*_s\ C^*_s T = \left(\frac{\lambda_m}{\alpha_s}\right)(\alpha_s C_m)T = \lambda m\ C_m T$$

λm, Cm ：各々母材の粘性係数と伝ぱ速度

となる。この結果は、一定時間での減衰効果は粒子形状にも体積濃度にも依存せず、母材そのものの減衰効果に等しくなることを示している。

以上の結果から、粒子の混合効果は応力波の減衰に対しては空間的な変化にのみ影響し、時間的な変化には影響しないことがわかる。

次に、体積濃度変化に対する減衰係数の変化を考える。前述のように式(6-27)のαは濃度の増加に対して初めは小さくなり、ある濃度で最小となった後大きくなっていく。従って、濃度を変化させていくと、複合材の減衰係数は初めしだいに大きくなり、αの最小になる濃度で最大値をとった後小さくなっていく。すなわち、粒子の充填にともなって濃度の小さい範囲では応力波の減衰量は増加するが、減衰量が最大となる濃度が存在し、それを越えて充填すると応力波はむしろ減衰しなくなる。

6. 2　有限要素法による数値解析及び衝撃実験

6.2.1　計算モデルおよび計算方法

有限要素法による数値解析に用いたモデルの分割を図6-4 に示す。配合粒子の形状には正方形と長方形を選び、長方形では応力波の伝ぱ方向に長辺を垂直にした長方形（垂直）と長辺を平行にした長方形（平行）の二種類の配合状態を考えた。静的な解析の場合と同様に、粒子要素は体積濃度に相当する個数だけ乱数表を用いて選び出す。複合材部の前後にゲージ要素（GageⅠ、Ⅱ）を取り付けて、応力波の時間的変化を検出する。入力には、図6-5 に示すような山形波の衝撃荷重を端面に加え、パルス幅が 75 μs と150 μs の二種類の場合について解析を行った。母材は粘弾性体として、その性質は図6-1 に示す三要素標準粘弾性体モデルを用いて考慮し、粒子は弾性体として計算を行う。なお、計算に用いた材料定数は以下の値とした。

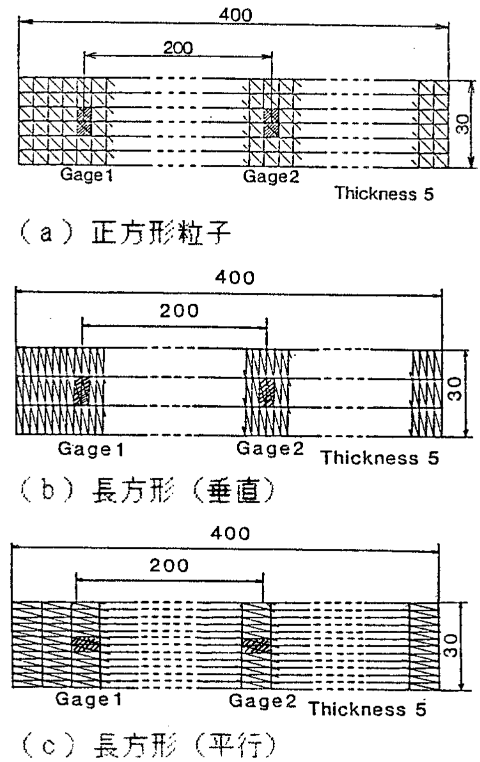


図 6-4　モデル分割

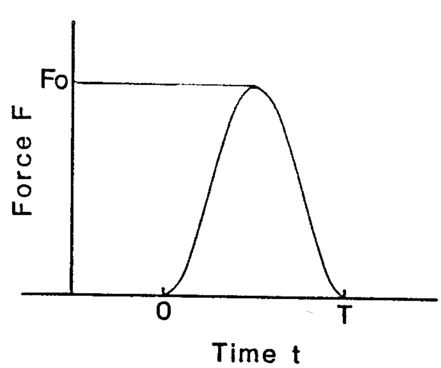


図 6-5　入力波形

母材：$E_e = 2.45$ GPa，　$\nu_m = 0.40$：Poisson's ratio

$E_i = 0.245$ GPa，　$\rho_m = 1.27 \times 10^{-6}$ kg／mm³

$\eta_i = 0.98$ MPa s

粒子：$E_p = 2.06 \times 10^{2}$ GPa，　$\nu_p = 0.33$

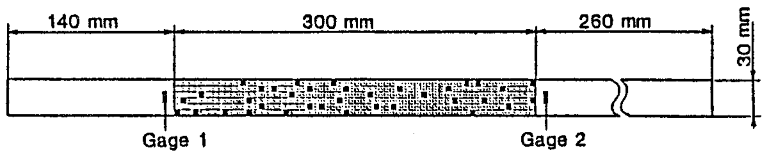
$\rho_p = 7.86 \times 10^{-6}$ kg／mm³

さらに、数値解析によって得られた応力波形をFourier 解析して、周波数成分毎に複合材の性質の変化も調べる。(28) － (30)

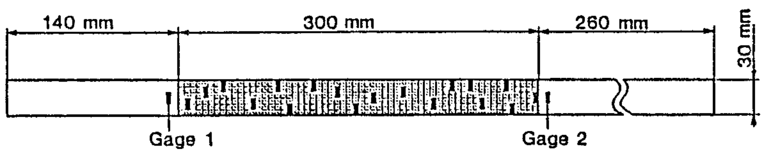
6.2.2 実験方法及び実験装置

計算で考えた複合材モデルと同じものを実際に作製して衝撃試験を行い、材料中に生じる応力波がどのような挙動を示すか観測する。試験片は図6-6 に示すように、粒子形状や分布状態を計算モデルと全く同一にし、母材をエポキシ樹脂、粒子を鋼片として作製する。エポキシ樹脂は、エポキシポリマ：ポリサルファイド：硬化剤＝ 100：60：8 の重量比で合成する。入力端より140 mmの部分は母材単体とし、その後部に長さ300 mmの複合材部を接続し、さらに反射波の影響を受けないように260 mmの単体を取り付けて全長を700 mmとする。断面は 30 mm× 10 mmである。母材単体は、複合材部の断面に一様に応力波を入射できるように緩衝材として用いている。応力波を検出するために、ひずみゲージ（ゲージ長：1 mm，120 Ω，ゲージファクタ：2.22（共和））を入力端から 85 mmと470 mmの位置に取り付け、複合材部分を通過する前後の応力波の状態を観測する。

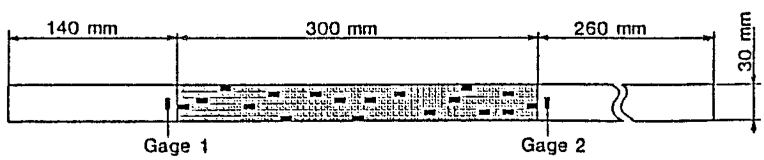
衝撃実験のための装置をブロック図で図6-7 に示す。試験片への衝撃は、鋼球を振子として入力端に衝突させて加える。実験では、3 mm，10 mm，15 mmの三種類の径の鋼球を使用し、各球に対して入力波のパルス幅は約 80 μs，200 μs，300 μs となった。試験片中を伝ぱする応力波はひずみゲージⅠ，Ⅱ



（a）正方形粒子モデル



（b）長方形（垂直）粒子モデル



（c）長方形（平行）粒子モデル

図6-6 粒子分散形複合材の試験片モデル

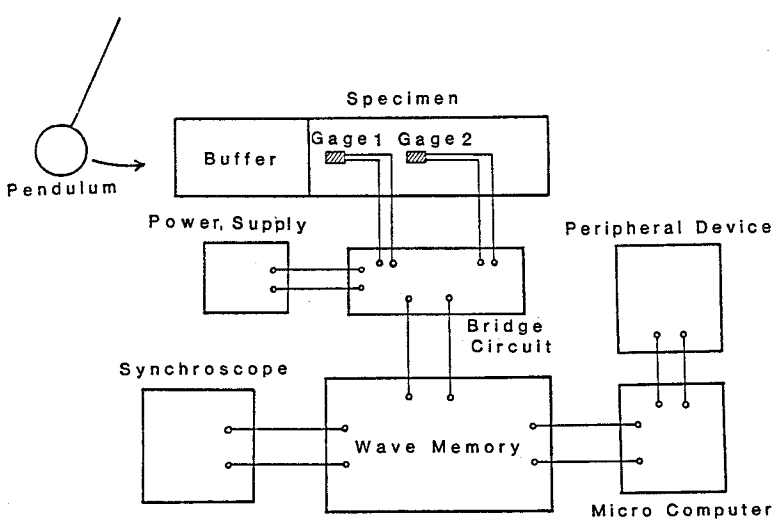


図 6-7 衝撃実験ブロック図

で検出し、その信号は分割回路を介して波形記憶装置に記録すると同時にシンクロスコープ上で観測する。観測でも計算と同様に応力波の減衰量と伝ぱ速度について調べるために、応力波ピーク値の減少量及びピーク値間の時間差を測定する。各試験片に対して、10回ずつ衝撃試験を試行してそれらの平均をとって測定値を求める。

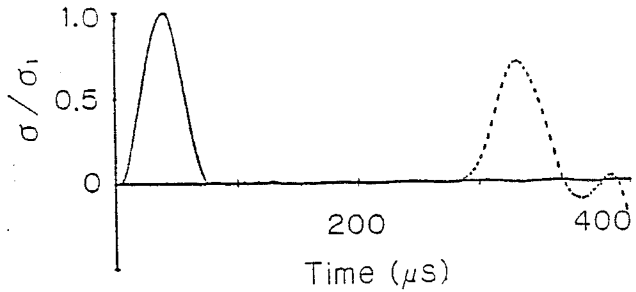
また、観測波形に含まれている各周波数成分に対して粒子充填の効果を調べるために、応力波形のFourier 解析を行う。

6．3 解析・実験結果及び考察

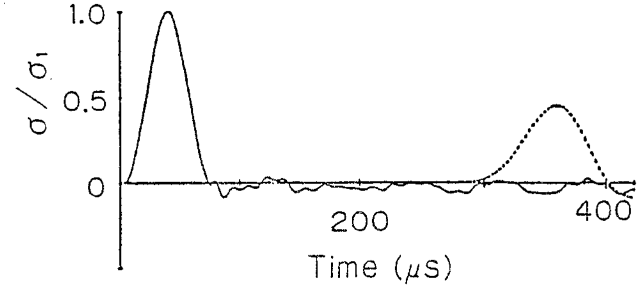
6.3.1 体積濃度一定（$\phi = 10$ %）の場合の解析結果

図6-8，-9は、数値計算及び実験によって複合材中での応力波の変化を解析した結果の例である。これらの結果は体積濃度が 10 %の複合材モデルに対するもので、図 6-8（a）はパルス幅が75μs の場合，（b）は150 μs の場合のものである。図 6-9（a），（b），（c）は、各々径が3 mm，10mm，15mmの球による入力に対応する結果であり、入力パルス幅は各々約80μs，200μs，300μs になっている。（a）- 1 は単体中での応力波の変化，（a）- 2 は正方形粒子の複合材中での変化を示しており、他の場合も同様である。図6-8中の横軸は応力波が入力端面に入力されて以後の時間、縦軸は入力波のピーク値で正規化した応力である。実線は複合材部を通過する前の応力波形、破線は通過後の応力波形である。図6-9 の横軸は時間軸で、（a）は50μs ／div.であり、（b），（c）は100 μs ／div.である。

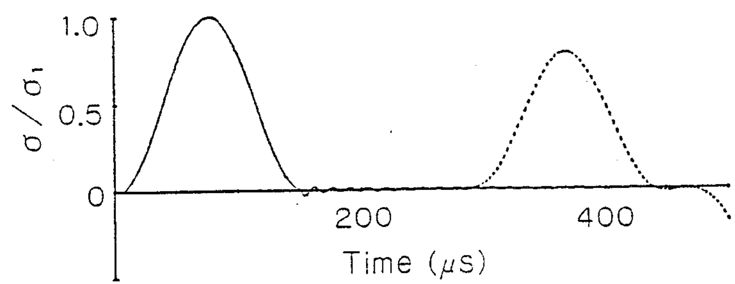
これらを見ると、母材単体中でも粘性のために応力波のピーク値は減少しているが、複合材中では単体に比べてより大きく減少しており、出力波形の変化が大きくなっていることがわかる。ピーク値間の時間間隔に注目すると、単体中に比べて複合材中では間隔が広くなっており、応力波の伝ば速度が単体より



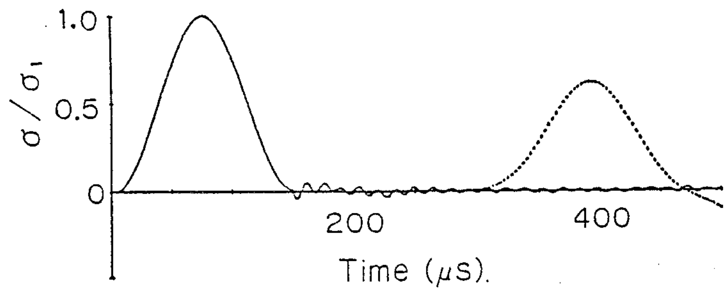
（a）- 1 単体中を伝ぱする応力波



（a）- 2 複合材（正方形粒子）中の応力波



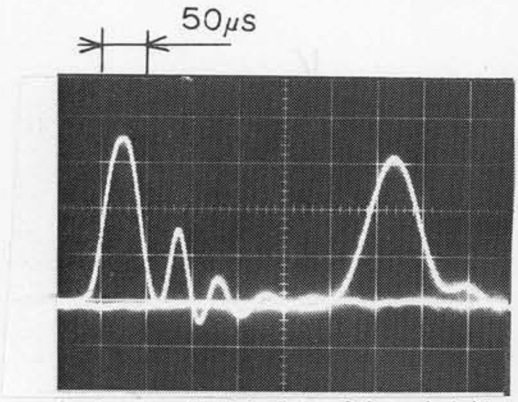
（b）- 1 単体中を伝ぱする応力波



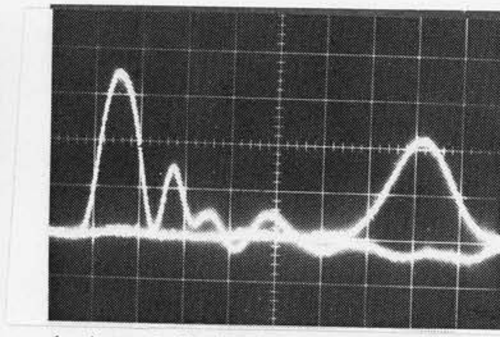
（b）- 2 複合材（正方形粒子）中の応力波

図 6-8　有限要素法による複合材中での応力波の変化

（a）パルス幅： 75 μs ，（b）パルス幅：150 μs

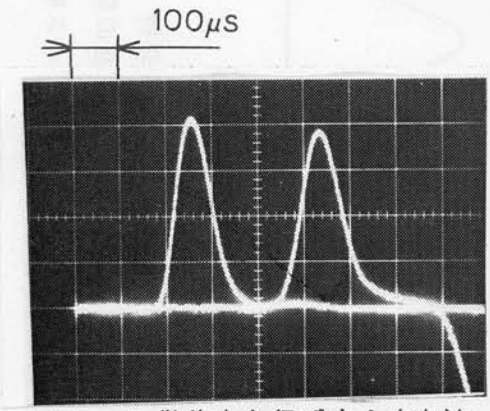


（a）－1 単体中を伝ぱする応力波

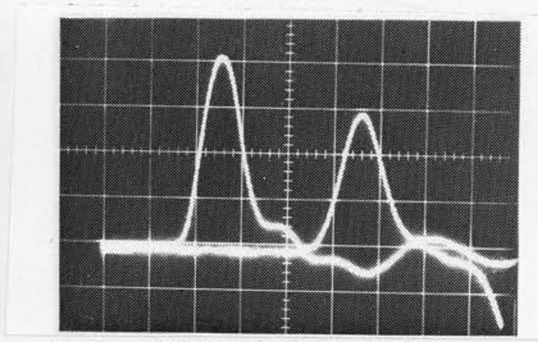


（a）－2 複合材（正方形粒子）
中の応力波

（a）パルス幅： 80 μs （3 mm球）

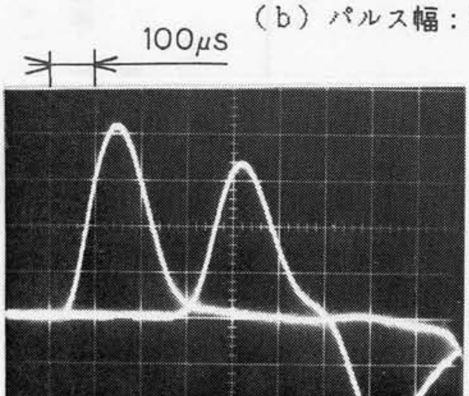


（b）－1 単体中を伝ぱする応力波

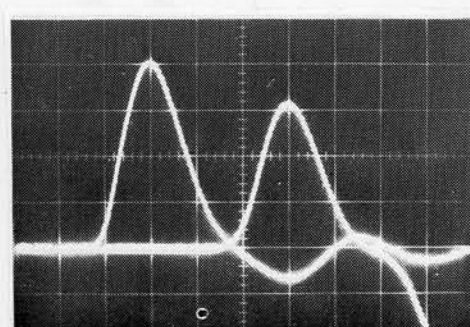


（b）－2 複合材（正方形粒子）
中の応力波

（b）パルス幅：200 μs （10mm球）



（c）－1 単体中を伝ぱする応力波



（c）－2 複合材（正方形粒子）
中の応力波

（c）パルス幅：300 μs （15mm球）

図 6-9 複合材中を伝ぱする応力波形－観測結果

も遅くなっていることもわかる。これらの現象は、明らかに粒子充塡による複合材としての効果を示すものである。

これらを定量的に調べるために、数値計算及び実験による解析結果から応力波のピーク値の減少率及び伝ぱ速度及びエネルギ変化を求めた。ここでは、ピーク値の減少率$\Delta\sigma$，伝ぱ速度C及びエネルギ減衰率ΔKを次のように定義する。

$$\Delta\sigma = (\sigma_1 - \sigma_2)/\sigma_1 \times 100 \quad (\%)$$

σ_1，σ_2：入・出力応力波のピーク値

$$C = L/\Delta T$$

ΔT：入・出力波のピーク値間の時間差，　L：ゲージ間距離

$$\Delta K = (K_1 - K_2)/K_1 \times 100 \quad (\%)$$

K_1，K_2：入・出力応力波の有する全エネルギ

得られた結果を表6-Ⅰ～Ⅴにまとめる。表6-Ⅰ，Ⅲ，Ⅴは計算結果から求めた値で、各々応力波の伝ぱ速度，ピーク値の減少率，エネルギ減衰率である。また、（a）は入力パルス幅75μs の場合，（b）は150 μs の場合の結果である。同様に、表6-Ⅱ，Ⅳは、応力波の伝ぱ速度，ピーク値の減少率を実験結果から求めた値であり、（a），（b），（c）は各々3mm，10mm，15 mm 球による入力に対する結果である。

（i）応力波の伝ぱ速度

伝ぱ速度については、表6-Ⅰの計算結果では、複合材の伝ぱ速度は全て単体より遅くなっていることがわかる。これは、体積濃度10%では平均的な密度の増加に対して弾性率の増加の割合の方が小さく、式（6-11）のαが，$\alpha<1$となっているためである。第４章で考察した粒子分散形複合材の弾性率変化の解析結果において、正方形粒子10%のモデルの弾性率増分は計算では平均28.1%

表６―Ｉ　伝ぱ速度の計算結果（ｍ／ｓ）
（ａ）パルス幅 75 μs の場合

pattern	単体	正方形	長方形（垂直）	長方形（平行）
1	―	990	950	990
2	―	990	950	1010
3	―	990	960	1020
4	―	1000	960	1030
平均	1080	990	960	1010

（ｂ）パルス幅150 μs の場合

pattern	単体	正方形	長方形（垂直）	長方形（平行）
1	―	1000	950	1000
2	―	990	960	1020
3	―	1000	960	1020
4	―	1000	960	1020
平均	1090	1000	960	1020

であった。この値を用いると、αは

$$\alpha = \left\{ \frac{1 + k\phi}{1 + \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1\right)\phi} \right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1.28}{1.52}} \fallingdotseq 0.918$$

となる。従って、表6-Ｉ（ｂ）の単体の速度1090 m／s に対して正方形粒子モデルに対する伝ぱ速度は、

$$C^{*} = \alpha C = 0.918 \times 1090 \fallingdotseq 1000 \text{ m/s}$$

となる。これは、数値解析の結果によく一致しており、6.1.1 で行った簡単な考察で複合材中の応力波の挙動がよくとらえられていることがわかる。

粒子の形状別に比較すると、計算結果では分布状態の違いによる差はほとん

表６－Ⅱ　伝ぱ速度の測定結果（m／s）

（a）パルス幅 80 μs の場合（3 mm球）

pattern	単体	正方形	長方形（垂直）	長方形（平行）
1	—	1210	1200	1210
2	—	1190	1210	1220
3	—	1200	1200	1230
4	—	1200	1200	1220
平均	1340	1200	1200	1220

（b）パルス幅200 μs の場合（10mm球）

pattern	単体	正方形	長方形（垂直）	長方形（平行）
1	—	1190	1200	1210
2	—	1220	1230	1240
3	—	1220	1230	1250
4	—	1210	1210	1220
平均	1310	1210	1220	1230

（c）パルス幅300 μs の場合（15mm球）

pattern	単体	正方形	長方形（垂直）	長方形（平行）
1	—	1230	1200	1230
2	—	1220	1220	1240
3	—	1210	1190	1220
4	—	1210	1200	1230
平均	1340	1220	1200	1230

表６－Ⅲ　応力波ピーク値の減少率Δσの計算結果（％）
（a）パルス幅 75 μs の場合

pattern	単体	正方形	長方形（垂直）	長方形（平行）
1	—	54.7	64.0	66.7
2	—	55.1	59.2	62.1
3	—	50.7	61.8	64.0
4	—	57.9	62.0	63.0
平均	29.4	54.6	61.8	64.0

（b）パルス幅150 μs の場合

pattern	単体	正方形	長方形（垂直）	長方形（平行）
1	—	39.1	41.6	45.2
2	—	38.1	38.0	45.2
3	—	35.6	41.0	44.8
4	—	41.0	39.0	41.2
平均	21.0	38.5	40.0	44.1

どなく速度はほぼ一定の値をとっているのに対して、粒子形状の違いによって明らかな差が現れており、長方形（垂直），正方形，長方形（平行）の順に速度は速くなっていることがわかる。これも、理論的考察で示した順序に一致する結果であり、粒子形状に対する依存性を示すことができた。

表6-Ⅱに示した実験結果では、粒子形状の違いによる差ははっきりと現れていないが、複合材中では全て単体に比べて速度がかなり遅くなっており、やはり粒子の充塡による複合材としての効果が得られている。また、入力波長に対しては、計算，実験結果ともにほとんど差は無く、伝ぱ速度はここで与えた範囲のパルス幅には影響を受けないことがわかる。

表6－Ⅳ　応力波ピーク値の減少率Δσの測定結果（%）
（a）パルス幅 80 μs の場合（3 mm球）

pattern	単体	正方形	長方形（垂直）	長方形（平行）
1	—	44.1	58.9	50.0
2	—	41.3	49.6	48.5
3	—	47.8	48.7	54.3
4	—	44.5	53.7	53.0
平均	30.2	44.4	52.7	51.5

（b）パルス幅200 μs の場合（10mm球）

pattern	単体	正方形	長方形（垂直）	長方形（平行）
1	—	17.2	29.7	30.8
2	—	18.5	34.9	21.9
3	—	32.4	20.1	20.2
4	—	30.3	23.7	30.1
平均	21.1	24.6	27.1	25.8

（c）パルス幅300 μs の場合（15mm球）

pattern	単体	正方形	長方形（垂直）	長方形（平行）
1	—	20.4	29.8	45.2
2	—	23.1	35.8	25.4
3	—	34.6	22.0	18.2
4	—	25.7	19.8	24.8
平均	21.7	26.0	26.9	28.4

（ii）ピーク値の減少率

表6-Ⅲ，Ⅳよりピーク値の減少率を比較すると、計算，実験結果ともに全ての複合材モデルで単体よりもピーク値が、より小さくなって、減少率は大きな値を示し、粒子充填の効果をみることができる。粒子形状の相違による影響については、ピーク値の減少率が粒子の分布状態の違いによってもばらついており、形状の違いによる差を明瞭に確かめることはできない。計算結果表6-Ⅲ（a）と（b）でパルス幅の相違による影響をみると、粒子形状にかかわらず入力パルス幅の短い方が平均値でピーク値の減少が大きく、さらに単体でも減少率の大きくなっていることがわかる。このことは、より高周波成分を持っている応力波の方が減衰が大きく、粒子の影響が高周波成分に対してより強いことを意味しており、さらにピーク値の減少が、応力波自体の減衰と材料が持つ分散性による波形変化との複合効果によって生じることを示している。また、表6-Ⅳの実験結果を比べると、パルス幅の短い場合（a）と長い場合（b）では計算と同様に（a）の方が減少率が大きくなっているが、さらに幅の長い（c）と（b）とではほとんど差を生じていない。このことは、モデル中に分散させた粒子の大きさに対する入力パルス幅の比がある程度大きくなると、応力波の伝ぱに対して粒子の影響が平均化されて現れることを示している。

（iii）エネルギの減衰

表6-Ⅴは応力波の持つエネルギの変化を計算によって求めた結果である。やはり、単体中での減衰に比べて複合材ではどの場合もより大きく減衰していることがわかる。しかし、形状の違いによる差は小さく、粒子の分布状態の変化によるばらつきと同程度であるため、この結果にははっきりとした形状差は現れなかった。また、入力パルス幅の違いに対しては僅かではあるが明らかな差を生じており、パルス幅 75 μs に対する結果では150 μs の場合に比べてエ

表6—V　エネルギ減衰率ΔKの計算結果（%）
（a）パルス幅 75 μs の場合

pattern	単体	正方形	長方形（垂直）	長方形（平行）
1	—	47.1	47.8	47.1
2	—	47.5	49.1	46.0
3	—	47.2	48.7	46.8
4	—	47.5	46.1	44.2
平均	43.2	47.3	47.9	46.0

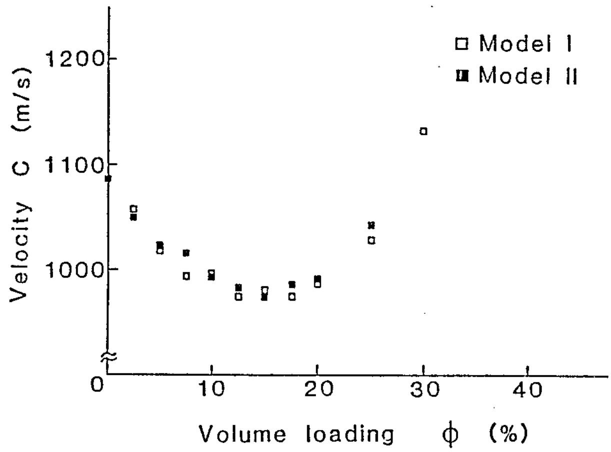
（b）パルス幅150 μs の場合

pattern	単体	正方形	長方形（垂直）	長方形（平行）
1	—	45.3	46.2	44.7
2	—	44.2	45.9	44.4
3	—	44.6	45.6	44.1
4	—	44.3	45.4	44.0
平均	41.8	44.6	45.8	44.3

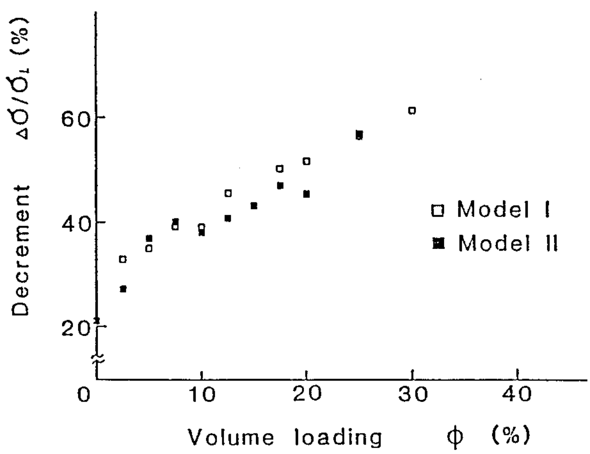
ネルギの減衰量は約2～3%大きくなっている。これは、短いパルス幅の波が持つ高周波数成分の減衰に対して粒子充填の効果がより大きいことを示す。

6.3.2　体積濃度変化に対する解析結果

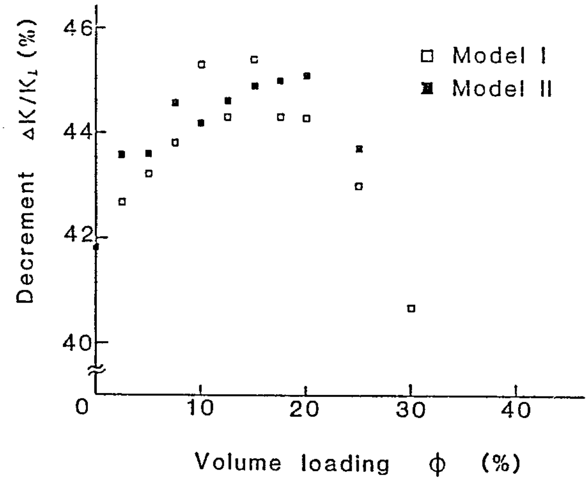
粒子濃度に対する複合材の動的な特性変化を数値計算によって解析し、その結果を図6-10にプロットしている。粒子形状を正方形として、同一濃度で粒子の分布状態が異なるモデルを二種類ずつ作り、体積濃度0～ 30 %の範囲で調べた。図6-10（a）は応力波の伝ば速度に対する結果である。濃度を大きくしていくと、初め速度は減少して母材自身の速度よりも小さくなっていく。そして、濃度15%付近で最小値をとり、それ以後は単調に増加する。これは、伝ば



（a）伝ぱ速度の体積濃度変化の解析結果



（b）応力波ピーク値の減少率の変化

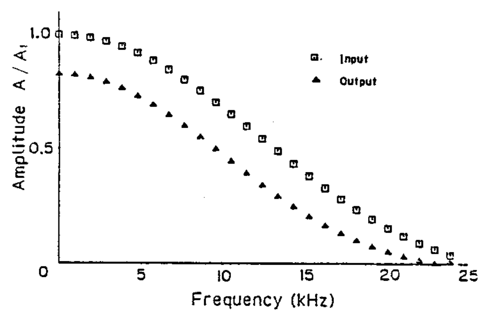


（c）エネルギの減衰率変化

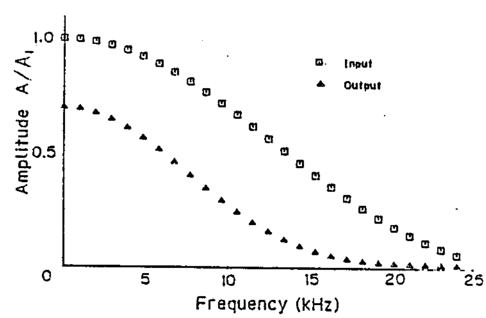
図6-10　体積濃度に対する特性変化の解析結果

速度の変化に関して、理論的考察で得た結果と一致するものである。

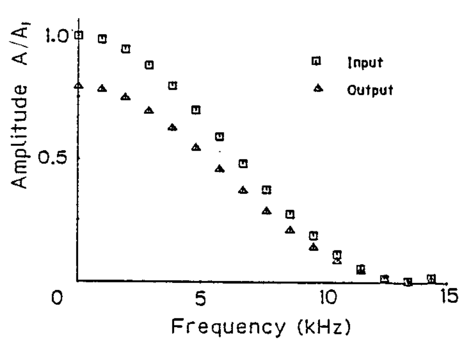
応力波の減衰については、複合材通過前後の応力波のピーク値の減少率及びエネルギの減衰率を求めて、各々図6-10（b），（c）にその結果をまとめている。図からわかるように、体積濃度の増加に伴ってピーク値は単調に小さくなっていくが、エネルギの減衰率は濃度の増加に伴って初めは大きくなっていき、15%付近で最大値をとった後は逆に小さくなっている。このエネルギの変化も、前節で複合材の減衰係数に対して行った理論的な考察で得られた結論に一致するものである。また、エネルギの減衰が最大になった後小さくなるにもかかわらずピーク値の減少はさらに大きくなっていくことから、ピーク値の減少は応力波自体の減衰によるものだけでなく粒子充填による分散的な効果としての波形変化も含んでいることがわかる。



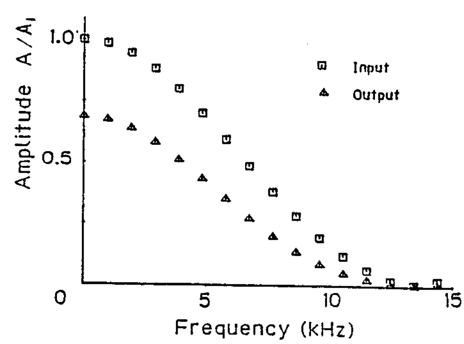
（a）-1　単体の場合



（a）-2　複合材（正方形）の場合

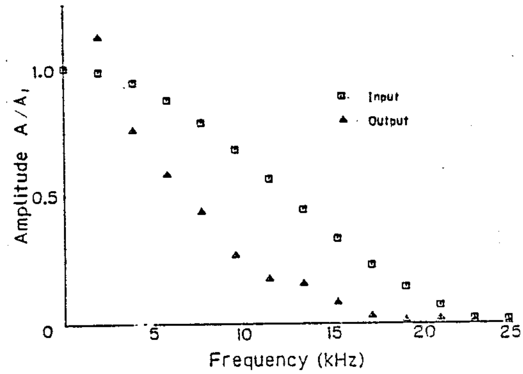


（b）-1　単体の場合

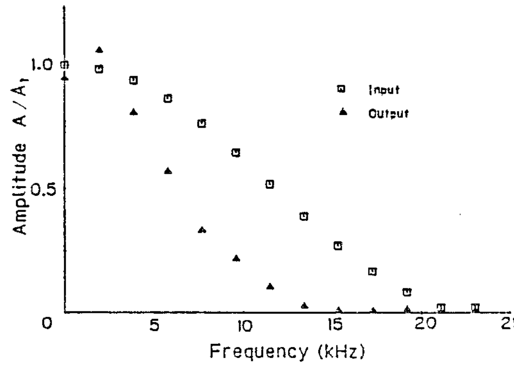


（b）-2　複合材（正方形）の場合

図6-11　Fourier 解析による解析結果－振幅分布（計算）
（a）パルス幅：75 μs，（b）パルス幅：150 μs

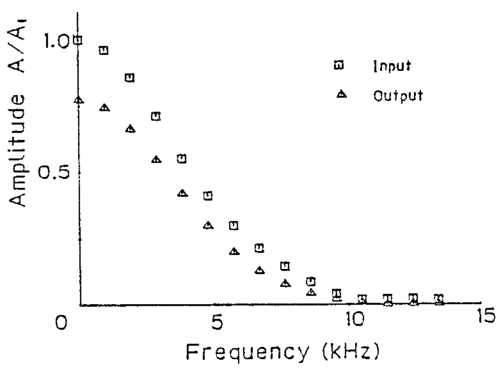


（a）-1　単体の場合

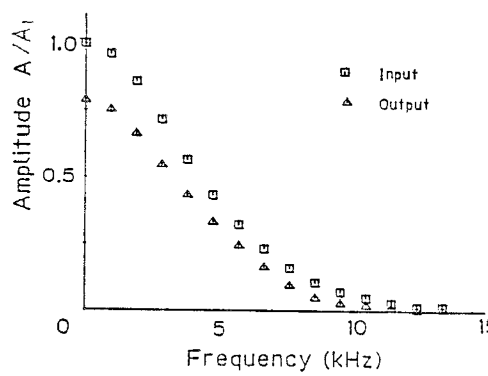


（a）-2　複合材（正方形）の場合

（a）パルス幅：80 μs　(3 mm球)

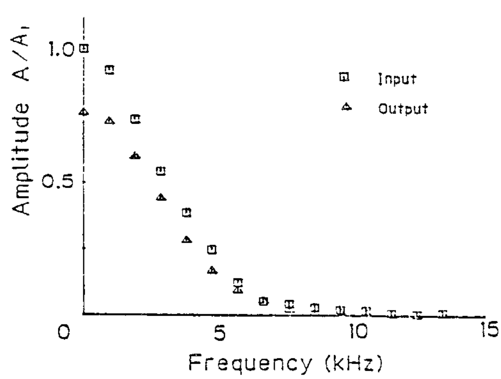


（b）-1　単体の場合

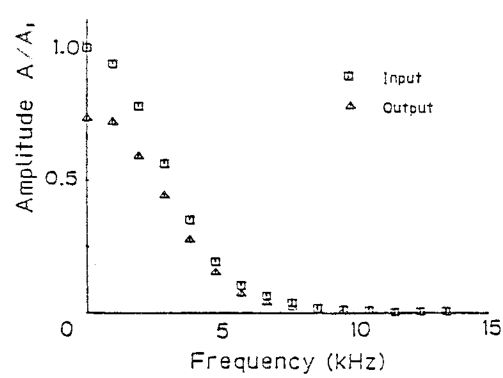


（b）-2　複合材（正方形）の場合

（b）パルス幅：200 μs　(10mm球)



（c）-1　単体の場合



（c）-2　複合材（正方形）の場合

（c）パルス幅：300 μs　(15mm球)

図6-12　Fourier 解析による解析結果－振幅分布（実験）

6.3.3 応力波形のFourier 解析による考察

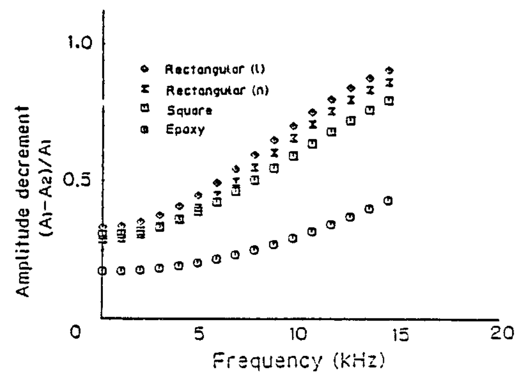
6.3.1，6.3.2 での考察をさらに詳しく調べるために、体積濃度10％の場合の応力波形をFourier 解析して各周波数の成分毎の変化を比較した。

その結果を図6-11以下に示す。図6-11は、計算で得られた応力波形を解析して振幅分布を求めた結果で、（a）はパルス幅75μs の場合，（b）は150 μs の場合である。パルス幅が異なるために、（a）では（b）の二倍程度解析周波数帯域が広くなっているが、どちらの場合も母材エポキシ樹脂単体の結果（（a），（b）－1）に比べて、正方形粒子モデル（（a），（b）－2）では出力波の振幅は全ての周波数帯域で小さくなっており、複合材では減衰効果が大きくなっていることを示している。

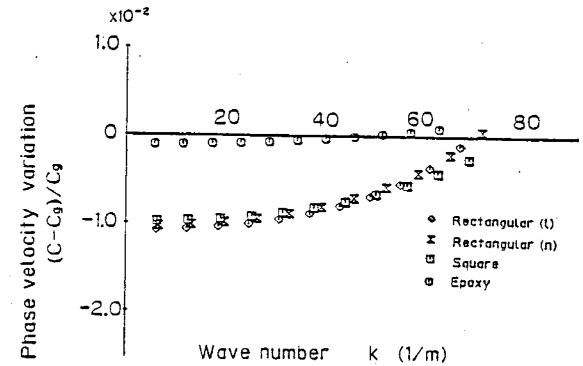
図6-12は、実験で観測した応力波形を同様に解析した結果である。（a），（b），（c）は、各々3mm，10mm，15 mm 径の球での入力に対する結果であるが、実験結果の解析では単体と複合材の振幅分布に大きな違いが無く、はっきりした差を認めることは困難である。

さらに詳しく、入力波の振幅に対して入出力波の振幅差の比をとった振幅減衰率の分布，及び各成分の位相変化から求めた位相速度の変化を、各々図6-13～17の（a），（b）に示している。位相速度の変化は、各応力波形で入出力波形のピーク値間の時間間隔から求めた伝ぱ速度 C_g を用いて、この値からの差で表している。図6-13，14は計算結果に対して、図6-15～17は実験結果に対して調べたものである。

図6-13はパルス幅 75 μs の場合の結果である。図6-13（a）において、振幅の減衰率は単体，複合材ともに高周波数になるほど増加し、減衰が大きくなっていることがわかる。単体と複合材を比較すると、複合材ではいずれのモデルでも単体より減衰率が大きくなっており、その変化も複合材の方が急になっている。それに対して、複合材の間では粒子形状の違いによる減衰率の差はほ

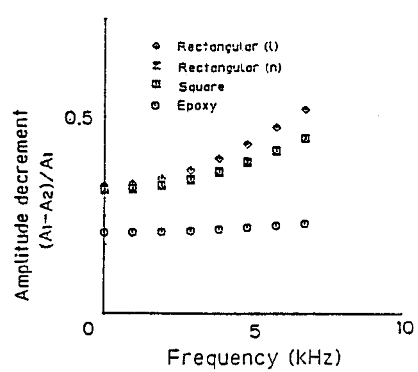


（ａ）振幅減衰率の分布

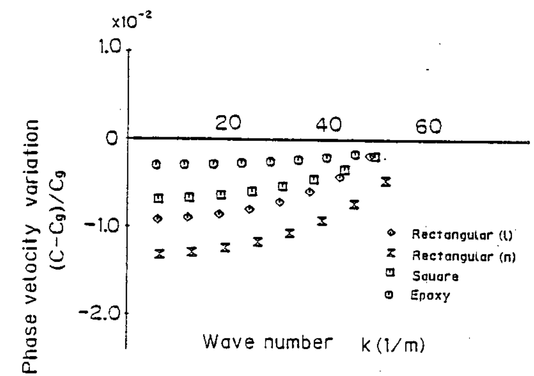


（ｂ）位相速度変化

図6-13 Fourier 解析による解析結果（計算），パルス幅： 75 μs の場合

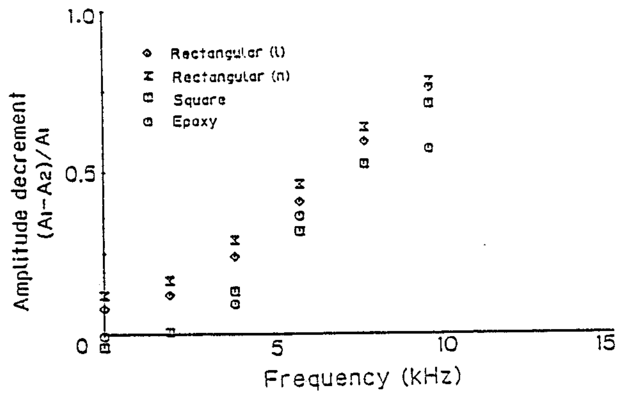


（ａ）振幅減衰率の分布

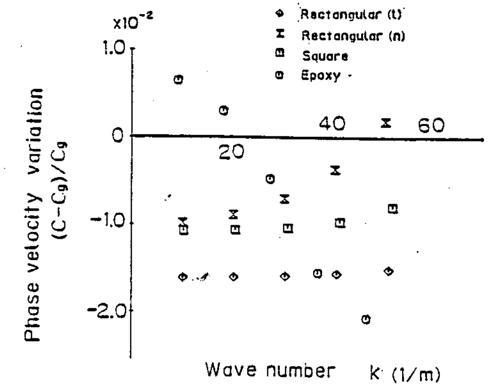


（ｂ）位相速度変化

図6-14 Fourier 解析による解析結果（計算），パルス幅：150 μs の場合

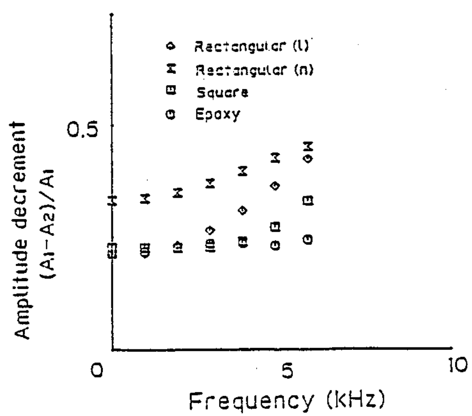


（a）振幅減衰率の分布

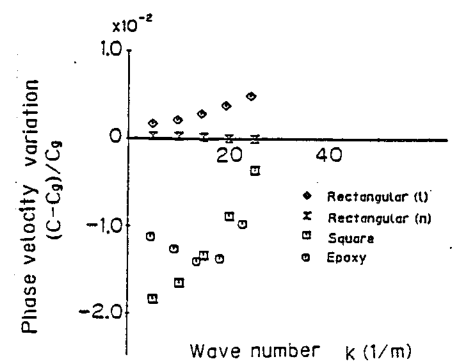


（b）位相速度変化

図6-15　Fourier 解析による解析結果（実験）：3 mm球による入力の場合

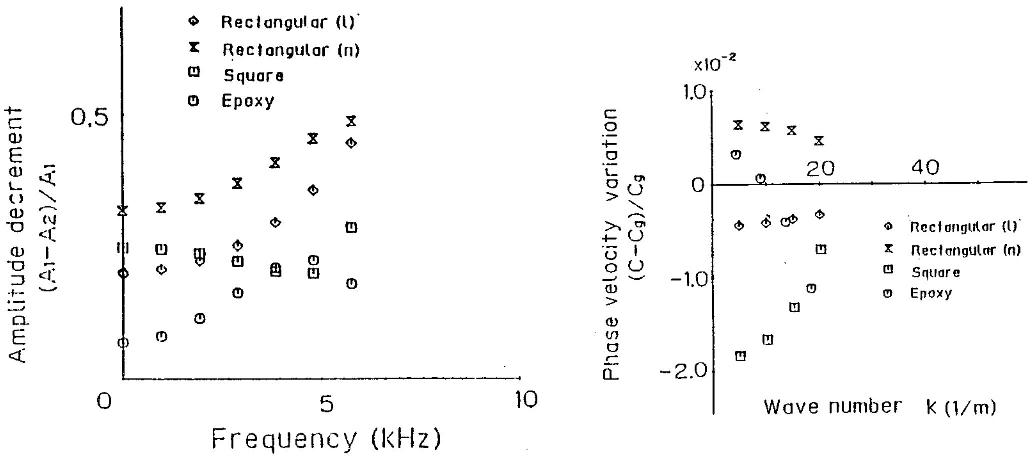


（a）振幅減衰率の分布



（b）位相速度変化

図6-16　Fourier 解析による解析結果（実験）：10 mm 球による入力の場合



（a）振幅減衰率の分布　　　　　　　（b）位相速度変化

図6-17　Fourier 解析による解析結果（実験）：15 mm 球による入力の場合

とんど無く、ここで用いた粒子の大きさに対して75μs 程度のパルス幅では粒子形状による影響が現れないことを示している。

また、図6-13（b）の波数－位相速度変化の関係では、単体と複合材の間で速度の変化に明らかな差を生じていることがわかる。ここで解析した周波数帯域では、単体はほとんど位相速度の変化を示さないのに対して、複合材では波数の増加とともに大きく増加している。材料が完全な非分散性媒質の場合には波数（周波数）に対して位相速度は一定であるが、この結果は粒子の充塡によって複合材が分散性を示すようになるということを表している。これは、応力波ピーク値の減少やエネルギの減衰に対する考察において予測した粒子充塡による分散効果を明らかに示している。また、粒子形状の違いに対して分散的な性質にはほとんど変化が無く、振幅の減衰同様、複合材モデルに用いた粒子の大きさに対してここで入力した範囲のパルス幅では影響を受けないことがわかる。これらの傾向は、図6-14に示したパルス幅150 μs の場合の結果に対しても同様に現れている。

図6-15，16，17は、各々３mm，5 mm，15 mm 径の球による入力の場合の結果を示している。振幅減衰率の分布では、単体と複合材の間に計算で得られたほ

どの差を見いだすことはできないが、いずれのパルス幅に対しても単体の減衰率が最小になっており、複合材ではやはり粒子の充塡によって応力波の減衰が単体よりも増大する傾向がみられる。また、粒子形状の違いに対しては、どの場合にもほぼ正方形，長方形（平行），長方形（垂直）の順に減衰が大きくなっていることがわかる。

位相速度の変化をみると、粒子形状やパルス幅に対する明瞭な傾向は現れなかったが、各々の結果では単体の位相速度が減少しているのに対して、複合材では高周波数になるにしたがって増加するかあるいは横這いになっており、単体との間に明確な傾向の相違がみられる。これは、粒子を充塡することによって材料の分散的な性質に変化が生じることを示している。

このように、計算結果及び実験結果のいずれのFourier 解析においても、粒子充塡の効果として複合材では減衰効果の増大や分散性の変化を得ることができた。

6．4　結　論

本研究では理論的及び数値解析・実験によって、粒子分散形複合材の動的挙動について次のような結果を得ることができた。

まず、粒子分散形複合材中での応力波の伝ぱ速度について、軟らかい母材中に硬い強化材を混合して平均的な弾性率が増加するにもかかわらず、粒子を混合することによって、伝ぱ速度が小さくなる場合のあることを理論的考察によって示した。伝ぱ速度は、体積濃度の変化に伴って濃度が小さい範囲では初め減少し、ある濃度で最小値をとった後増加するという変化を示すことがわかった。また、粒子の体積濃度が等しくても、その変化は粒子の形状によって異なり、粒子形状に対する依存性を持つこともわかった。

応力波の減衰について理論的に考察した結果、粒子の混合に対して一定距離

の伝ぱに伴なう減衰量は粒子の形状に依存して変化するが、一定の伝ぱ時間に対する減衰を考えると、粒子形状にだけでなく粒子の混合そのものにも依存せず母材での減衰と同一の減衰を生じることがわかった。

また、体積濃度変化に対しては、伝ぱ速度とは逆に、粒子を充填していくと減衰量は増加し、ある濃度で最大値をとった後小さくなる。

複合材モデルを考えて有限要素法で数値解析を行った結果、体積濃度の変化に対して、初め伝ぱ速度は徐々に減少し、15%付近で最小値を示した後増加した。エネルギの減衰では逆に15%付近までは増加して最大値をとった後小さくなった。これらの結果は、理論的考察に一致するものである。

体積濃度を10%で一定にして粒子形状を変えて複合材モデルを作り、波長の異なる衝撃負荷に対する挙動を数値解析及び実験によって調べた。計算，実験どちらの結果においても粒子の充填による効果が現れ、全てのモデルで理論的考察に一致した伝ぱ速度の減少を示し、また応力波のピーク値の減少も大きくなり、応力波の減衰が粒子の充填によってより激しくなることを示している。また、計算結果では伝ぱ速度の変化が理論的考察に一致して長方形（垂直），正方形，長方形（平行）の順に大きくなり、粒子形状及び粒子の配向に対して大きな依存性が認められた。

計算及び実験で観測した応力波形をFourier 解析して、周波数成分に分解して応力波の減衰や分散的な挙動を調べた。計算結果の解析では、単体に比べて複合材では全ての周波数成分にわたって振幅が減衰しており、高周波数成分ほどその割合が大きくなった。また、波数に対する位相速度変化は複合材では単体に比べて大きく増加し、充填粒子による複合材の分散的な性質を示した。

これらの結果から、粒子分散形複合材中での応力波の変化は、波自身の減衰と充填粒子による分散的な効果の複合効果であることがわかった。

第７章　短繊維強化複合材の材料特性の解析

７．１　まえがき

繊維強化複合材の特性解析のために、複合材の構造に対応した種々のモデルが考えて有限要素法を適用している。例えば、平井ら（31）は、平織りの繊維強化複合材の解析に対して分割要素の中から強化材となる要素を選び出し、その要素の材料定数を変えて全体剛性マトリックスを作って解析を行っている。また、石川ら（32）は、織布複合材の挙動解析に対して、織布の規則的なパターンの一部分を取り出したモザイク・モデルを考えている。これらの手法ではいずれも、連続体に対する有限要素法において繊維強化の効果を平均的に考慮し、剛性マトリックス中の材料定数を局所的に変えることによって解析を試みている。

本章では、短繊維を分散させた繊維強化複合材の静的及び動的な特性について、粒子分散形複合材の場合と同様に有限要素法を用いて数値的に解析を行った。そのために、連続体とトラス構造とを合成した複合材モデルを考え、これに対して短繊維の充塡効果を調べた。

７．２　解析方法

ここでは、短繊維を分散させた繊維強化複合材の特性解析に対して適用できるように、母材を連続体とし，短繊維に対してはトラス構造を考え、連続体の中にトラス構造を分散させて複合材モデルを考えた。図 7-1（a）に示すように、連続体の母材は三角形要素に分割し、その分割と同一のトラス構造で短繊維の配合を考える。（図 7-1（b））　節点変位ベクトルを［$\boldsymbol{u}$］，節点力ベクトルを［$\boldsymbol{F}$］，剛性マトリックスを［$\boldsymbol{D}$］とすると、各々のモデルに対する剛性方程式は次のように書ける。

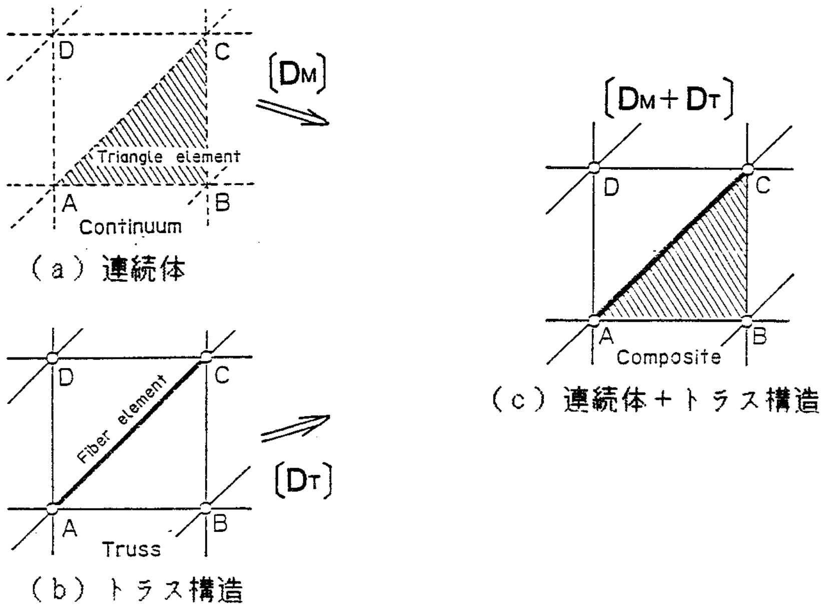


図 7-1　連続体とトラス構造の合成

連続体　：$[D_M]\ [U_M] = [F_M]$　　(7-1)

トラス構造：$[D_T]\ [U_T] = [F_T]$　　(7-2)

分散させる短繊維は、トラス構造の中から乱数によって充塡量に相当するだけのトラス部材を選び出す。図 7-1（b）に示すように短繊維となるトラス部材ＡＣに対しては強化材質の材料定数を与え、他の部材はトラスとしての効果が無くなり母材と同化するように材料定数を０として、剛性マトリックスを形式的に作る。両モデルの節点は互いに離れないものとすると、

$[U_M] = [U_T] = [U]$　　(7-3)

であるから、式（7-1 ）と（7-2 ）の辺々を加えると、複合材に対する剛性方程式として次式を得る。（図 7-1（c））

$[D_M + D_T]\ [U] = [F_M + F_T]$　　(7-4)

実際には、複合材に対する式（7-4 ）で境界条件を与えて剛性方程式を解いて解析を行う。

このようにして考えた短繊維強化複合材のモデルの一例を図7-2 に示してい

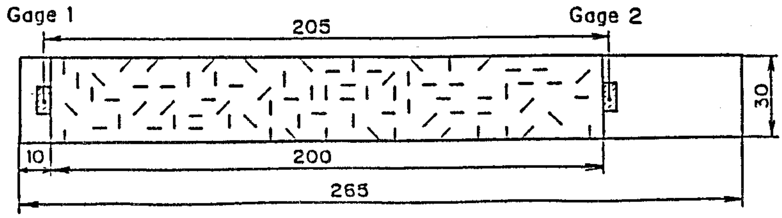


図 7-2　短繊維強化複合材モデル

る。モデルは短繊維の分布状態を変えて五種類作り、分散させる短繊維は全トラス長さの10%，複合材中での充塡体積濃度では0.72%で一定にしている。

粒子分散形複合材の場合と同様に、静的な特性としては弾性率変化について解析し、動的な問題としては衝撃に対する挙動を調べた。

7．3　解析結果及び考察

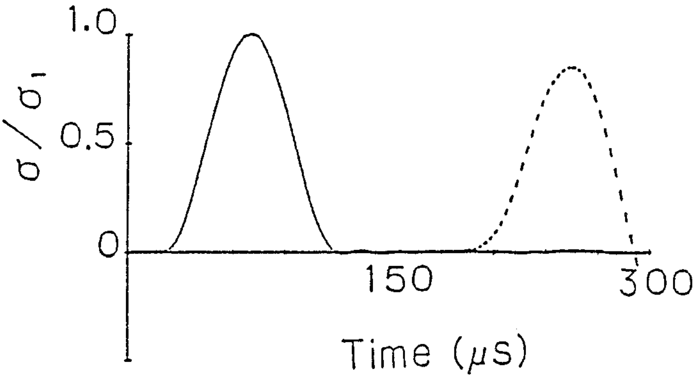
7.3.1　弾性率変化の解析結果

表7-Ｉに、弾性率変化及び複合材中を伝ぱする応力波の伝ぱ速度，応力波ピーク値の減衰率，エネルギ減少率をまとめている。

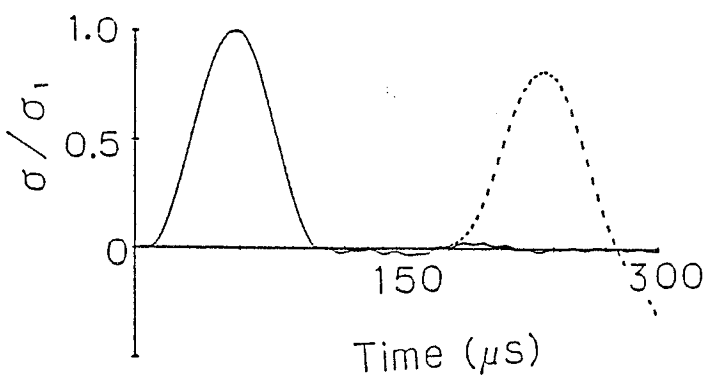
弾性率変化をみると、すべての複合材が単体に比べて約16～20%の増加を示している。短繊維の充塡量が体積濃度で１%にも満たないわずかな量であることを考えるとかなり大きな変化を生じている。短繊維の充塡による強化の度合を粒子分散形複合材の場合と比較すると、後者が正方形粒子，体積濃度10%の充塡によって約28%増加するのに対して、短繊維は非常に大きな補強効果を持っていることがわかる。このように、短繊維の充塡効果は材料強化に対しては顕著に現れている。

7.3.2　衝撃に対する動的挙動の解析

図7-3 は、粒子分散形複合材の場合と同様に、山形波形の衝撃を試験片モデルに加えたときに内部に生じる応力波の波形を示したものである。図 7-3（a



（a）単体中での応力波形



（b）短繊維強化複合材中での応力波形

図 7-3　有限要素法による応力波の解析結果

表７－I　繊維強化複合材の特性の数値解析結果　―　ランダム配列

pattern	単体	1	2	3	4	5
ΔE　%	――	17.9	19.6	16.6	15.5	17.1
C　m／s	1110	1150	1160	1160	1160	1160
Δσ　%	15.9	19.0	18.5	19.9	17.8	23.0
ΔK　%	34.5	33.5	32.9	33.2	34.0	33.4

体積濃度： $\phi=0.72$ %, $\Delta E=(E^{*}-E)/E$, $\Delta\sigma=(\sigma_1-\sigma_2)/\sigma_1$,
$\Delta K=(K_1-K_2)/K_1$

）は単体，－（b）は複合材の場合のものである。横軸は衝撃後の時間，縦軸は入力波のピーク値で正規化した値である。実線が入力波形，破線は試料通過後の出力波形である。波形図を比較すると、両者の間に顕著な差を認めることはできないが、わずかに複合材中での方が単体に比べてピーク値間の時間間隔がせまくなっており、伝ぱ速度が速くなっている。また、ピーク値の減少も複合材中での方が若干大きくなっていることがわかる。伝ぱ速度やピーク値の減少量を計算結果から実際に数値をとって表7-Ⅰに示している。これをみると、伝ぱ速度はわずかであるが母材単体に比べて速くなっており、ピーク値の減少は大きくなっていることが示されている。また、これらの値は短繊維の分布状態にはあまり依存せずほぼ一定になっており、ここで用いた複合材モデルによって短繊維の充塡効果が統計的にも十分よく表されていることがわかる。

速度変化については、6.1.1で考察したように、複合材中での伝ぱ速度が

$$C^{*} = \alpha C \tag{7-5}$$

$$\alpha = \left\{ \frac{1 + k\phi}{1 + \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1\right)\phi} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{7-6}$$

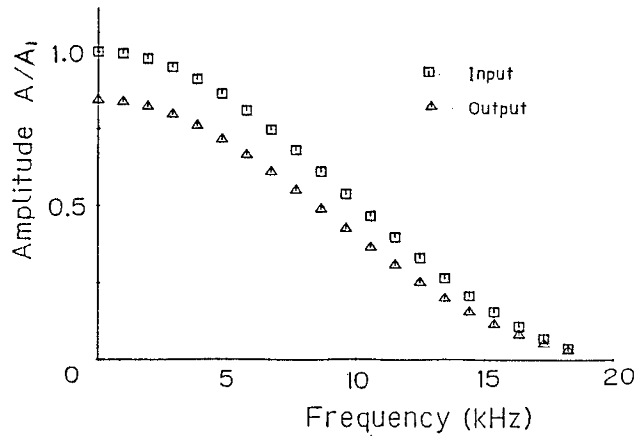
と表されるものとして、解析を行った際の数値をとって係数αの値を調べてみる。7.2.1 の結果から弾性率変化は平均で17.3%となるから、$\phi = 0.72$として平均的な弾性率変化の係数kは

$$k \times 0.72 = 17.3 \ , \qquad \therefore \ k = 24.0$$

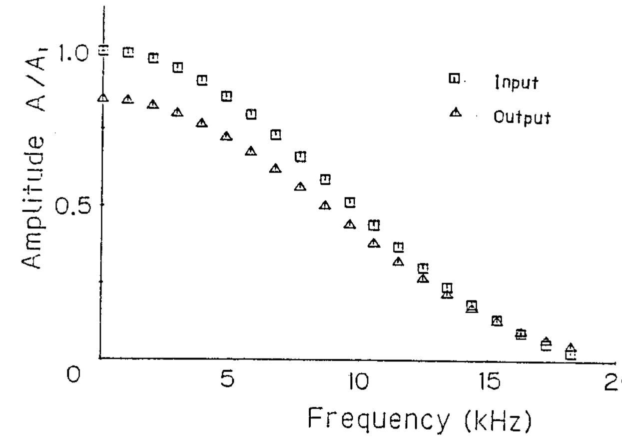
となる。一方、密度変化は$\rho p = 7.86 \times 10^{-6}$ kg／mm^3，　$\rho = 1.27 \times 10^{-6}$ kg／mm^{3}であるから

$$\frac{\rho_p}{\rho} - 1 = \frac{7.86}{1.27} - 1 \fallingdotseq 5.19$$

となる。従って、



（a）単体



（b）複合材

図 7-4　振幅分布の解析結果

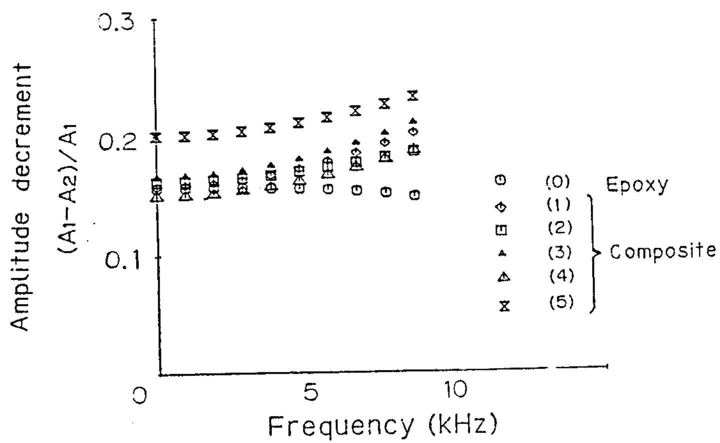


図 7-5　振幅減衰率の分布

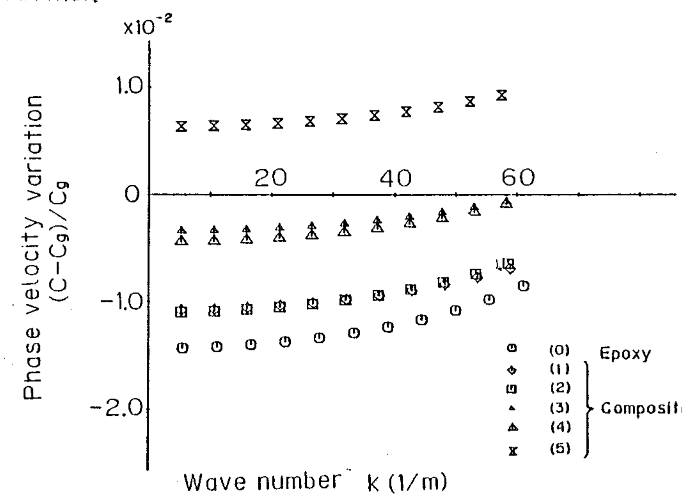


図 7-6　位相速度変化

$$k > \frac{\rho_p}{\rho} - 1$$

となり、今の場合複合材中での伝ば速度は速くなることがわかる。実際に、

$$\alpha = \sqrt{\frac{1.173}{1 + 5.19 \times 0.0072}} = \sqrt{\frac{1.173}{1.037}} = 1.063$$

$$C^{*} = \alpha C = 1.063 \times 1110 = 1180 \text{ m/s}$$

となって、解析結果にほぼ一致する値が得られる。

各モデルに対する応力波形をFourier 解析した結果を図7-4 以下に示す。図7-4 は周波数に対する入出力波の各成分の振幅分布を示している。図 7-4（a）は単体，－（b）は複合材の場合である。各成分の振幅減衰率及び位相速度の変化を調べた結果が図7-5 ，7-6 である。これらの結果からわかるように、単体と複合材の間には振幅の減衰に対しても速度変化の傾向にもほとんど差は無く、ピーク値の減少率の結果でも示されているように短繊維の充填効果は応力波の減衰に対してほとんど影響を及ぼさないことがわかる。

7．4　結　論

本章では、短繊維強化複合材の特性解析のために連続体とトラス構造を合成した有限要素法を考え、弾性率の変化及び動的な特性について数値解析を行った。

弾性率について調べた結果、短繊維強化複合材はごく僅かな繊維の充填によって大きな弾性率増分を示し、粒子状強化材に比べて材料強化に大きな効果を持つことがわかった。

動的な特性については、衝撃によって生じる応力波の挙動を解析した。短繊維の充填により応力波の伝ば速度は速くなり、またピーク値の減少量も増加したが、充填量が少ないためにその増分量はわずかであった。さらに、エネルギ

の減衰やFourier 解析によって調べた応力波の振幅分布，振幅減衰率及び位相速度の変化においても、単体と複合材との差は小さく、短繊維の充填効果は動的な特性変化に対するよりも弾性率の向上に対して非常に大きな影響を及ぼすことがわかった。

第8章　総　括

複合材は、構成媒質の特性を適当に組み合わせたり，構成状態を工夫することによって、異方性を生じたり複合材としての平均的な材料特性を変化させることができ、用途に応える新しい材料を生み出す可能性を持っている。そのために、複合材の応用及び開発に対する研究が盛んに行われているが、特に、近年関心の高まっている原子炉関係の部材や騒音公害防止用の防振材として注目され、複合材の動的な特性も重要な研究対象となっている。

そこで、本研究では複合材をその構造から大きく積層系と分散系の複合材に分け、各々代表的なモデルに対して静的な材料特性及び衝撃に対する動的な挙動について調べることを目的とした。積層系複合材のモデルとしては三層のサンドウィッチ形層状複合材を考え、これが衝撃を受けたときの挙動を調べるために、これまで実験的には報告されていなかった層内の変形，特に層間に生じるせん断応力について解析を行った。分散系複合材としては、分散させる強化材が粒子状の場合と短繊維の場合を考え、静的な特性では弾性率変化や粘性に対して，動的な問題としては衝撃によって生じる応力波の挙動に対して、これら強化材の充塡効果を理論的に考察すると同時に有限要素法及び実験による解析を行った。

以上、本研究を行って得た結果は、次のようにまとめることができる。

まず、層状複合材中を伝ぱする応力波による変形を可視化するために、本研究ではホログラフィ干渉法を用いた。第2章では、このホログラフィ干渉法の変位測定法としての有効性を調べ、変位量の測定範囲や測定精度を検討した。その結果、従来までは主に面外方向の変位測定に応用されていたが、面内方向の変位に対しても十分な精度で測定できることを示した。

第3章では、ダブルパルス・ルビーレーザ光を光源としてこのホログラフィ干渉法を用いて、層状複合材中を伝ぱする応力波を観測することができた。こ

の結果から、層内の変形を定量的に解析することができ、異種媒質の層間に生じるせん断応力の分布を得た。

粒子分散形複合材については、第４章で粒子形状を楕円形とした理論的考察から弾性率変化の粒子形状に対する依存性を示した。この結果を数値解析及び実験で調べるために、有限要素法に対する連続体の分割モデルの中に乱数を使って粒子を分散させた複合材モデルを考えた。以下第６章，７章での解析においても同じモデルを使い、それらの結果から粒子の効果が統計的に扱われる実際の複合材に対して、このモデルが十分その特性を表し得ることがわかった。弾性率変化に対しても、このモデルで解析した結果、理論的な考察結果に一致する充塡効果を得た。

第５章では、母材が粘弾性媒質の場合の粘性変化を議論するために対応原理を用いた。それによって粘性に対する粒子の充塡効果を簡単に議論することができ、得られた結果はモデルによる解析結果においても確かめられた。

第６章では、粒子分散形複合材が衝撃を受けたときの挙動を一次元の波の伝ぱ問題として取り扱い、複合材中での応力波の伝ぱ速度変化や減衰について理論的に考察することができた。モデルによる解析，さらにその結果のFourier解析から、伝ぱ速度の変化及び応力波の減衰だけでなく粒子の充塡による複合材の分散的な性質も確かめた。

最後に、第７章では、短繊維の充塡効果を解析するために、連続体とトラス構造を合成し有限要素法を考えた。この計算による解析の結果、短繊維の充塡は材料の補強に大きな効果があることを明らかにした。

以上のように、本研究では複合材の静的及び動的な特性の中で基礎的な事項に注目して解析を行った。これらの結果が、今後の複合材のさらなる応用開発に役立ち、貢献することができればこのうえない幸いである。

参考文献

1. Bedford, A. and Stern, M., " Toward a diffusing continuum theory of composite materials", Joul. of Appl. Mech., 38, 1 (Mar. 1971), p 8-14

2. Hegemier, G. A., " A continuum mixture theory of wave propagation in laminated and reinforced composites", Int. Joul. Solids Struct., 9, 3 (Mar. 1973), p 395-414

3. Hegemier, G. A. and Bach, T. C., " A continuum theory for wave propagation in laminated composites ／ Case 2 : Propagation parallel to the laminates", Joul. of Elasticity, 3, 2 (1973), p 125-140

4. Hayashi, T. and others, " Experimental study on cut-off phenomenon for layered composite", Bulletin of JSME, Vol. 26, No. 211, June, 1983

5. Achenbach, J. D. and Reddy, D. P., " Note on wave propagation in linearly viscoelastic media", Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik, 18 (1967), p 141-144

6. Peck, J. C. and Gurtman, G. A., " Dispersive pulse propagation parallel to the interfaces of a laminated composite", Joul. of Appl. Mech., 36, 3 (Sep. 1969), p 479-484

7. Hayashi, T., Arakawa, K., Morimoto, Y., " Transient wave propagation in elastic laminated composites", Trans. Japan Soc. Space Sci., May, Vol. 4, No. 1-2, (1982) p 8-14

8. Payton, R. G., " Dynamic bond stress in a composite structure subjected to a sudden rise", Joul. of Appl. Mech., 32, 3 (Sep. 1965), p 643-650

9. Pryputniewicz, R. J. and Bowley, W. W., " Technique of holographic displacement measurement : an experimental comparison", Appl. Opt., 17, 11 (1978), p 1748－1756

10. Dir, S. K. and Sikora, J. P., " An improved method for obtaining the general-displacement field from a holographic interferometry", Exp. Mech., 12, 7 (1972), p 323-327

11. Ennos, A. E., " Measurement of in-plane surface strain by hologram-interferometry", Joul. Sci. Instrum., (1968), p 731-734

12. Aleksandrov, E. B. and Bonch-Bruevich, A. M., " Investigation of surface strains by the hologram technique", Sov. Phys.-Tech. Phys., 12, 2 (1967), p 258-265

13. Gottenberg, W. G., " Some applications of holographic interferometry", Exp. Mech., 8, 9 (1968), p 405-410

14. King, W., “Observation of a transient wave motion from a single doubly-exposed hologram”, Opt. Laser Technol., 9, 5 (1977), p 203-206
15. Hayashi, T., Ugo, R. and Morimoto, Y., “The observation of stress wave in a rectangular bar using the high-speed holographic interferometry ”, Photo-Elasticity in Japan, 4 (1-2), (1982) p 8-14

16. Einstein, A., “Eine neue bestimmung der molekul-dimensionen”, Ann. Phys., 4, Vol.19, (1906), p289

17. Mooney, M., “The viscosity of a concentrated suspension of spherical particles ”, Joul. of Colloid Sci., Vol.6 (1951), p162

18. Robinson, James V., “The viscosity of suspension of spherers ”, Joul. & Colloid Chem., Vol.53 (1949), p1042

19. Rehner, John Jr., “Theory of filler reinforcement in natural and synthetic rubber. The stresses in and about the particles ”, Joul. of Appl. Phys., Vol.14, Dec. (1943), p638

20. Marson, Samuel H., and Fok, Shiu-Ming, “Effect of concentration on flow behavior of glass sphere suspension ”, Joul. of Colloid Sci., 8 (1953), p540

21. Smallwood, Hugh M., “ Limiting law of the reinforcement of rubber ”, Joul. of Appl. Phys., Vol.15, Nov., (1944) p758

22. Guth, Eugene, “Theory of filler reinforcement”, Joul. of Appl. Phys., Vol.16, Jan., (1945) p20

23. Frohlich, H., Sack, R., “Theory of the rheological properties of dispersios ”, Vol. A 185, (1946) p415

24. Sadia,R., Eirich, F. R., “Viscoelastic behaviour of plasticized polyvinl chloride at large deformations. Ⅲ. The effect of filler”, Jps, Vol. A-2, (1964) p1909

25. Radok, J. R. M., Tai, C. L., “A theory of inclusions in viscoelastic materials”, JAPS, Vol. 6, (1962) p518

26. 岡野光治, 「分散系の見掛けの粘弾性定数」, 応用物理, Vol.36, No. 12, (1967) p1003

27. 山田嘉昭, 「コンピュータによる構造工学講座Ⅱ-2-A, 塑性・粘弾性」, 培風館.

28. 曾我部雄次, 岸田敬三, 中川憲治, 「応力波伝ぱによる高減衰能合金の減衰特性の研究」, 日本機械学会論文集 47 巻 419号, 昭 56. 7, p 748-756

29.　Bland, D. R., and Lee, E. H., " On the determination of a visco-elastic model for stress analysis of plastics ", Joul. of Appl. Mech. , 23, (Sep. 1956) , p 416-420

30.　松本浩之，中原一郎，関野　斎，「縦衝撃による粘弾性定数の推定（三要素標準固体モデルの場合）」，日本機械学会論文集 45 巻 399号，昭 54.11 , p 1409-1417

31.　平井恒夫，木村照夫，他，「衝撃曲げ負荷の与えられたＧＲＰはりの応力波伝ぱを考慮した破壊挙動に関する一考察」，日本機会学会論文集 45 巻 400 号，昭54. 12

32.　石川隆司，Chou，Tsu-Wei，「織布複合材の線形および非線形挙動」，日本航空宇宙学会誌　第 32 巻　第 362号（1984年 3月）

謝　　　辞

本研究は、大阪大学基礎工学部機械工学科機械力学林研究室において、昭和54年から60年にわたって行ったものである。本研究を進めるにあたり、大阪大学基礎工学部　林　卓夫　教授には、終始、懇切，丁寧な御指導と多大なる御鞭撻をいただきました。ここに、心から深く御礼を申し上げます。

また、本研究をまとめるに際して、貴重な御教示と御助言を下さいました大阪大学基礎工学部　山本　明　教授，福岡秀和　教授に感謝の意を表します。

本研究の実験及び計算を実施するにあたり、森本吉春講師をはじめとする大阪大学基礎工学部機械工学科機械力学研究室の皆様には、常に温かい御協力および援助をいただきました。特に、前半の層状複合材に対する研究では、当時九州大学応用力学研究所の新川和夫氏及び四年次学生であった田辺　等，宮川知之，紀藤真治各氏に、後半の粒子分散形複合材の研究では大学院前期課程二年次学生池田直人，同一年次宮川和仁及び四年次学生であった北野彰彦，竹中弘明，林　哲史，林　寛之，広川勝士の諸氏に多大なる御協力をいただきました。ここに、深く御礼を申し上げます。

弾性率の測定では、通商産業省工業技術院大阪工業技術試験所の近藤春樹氏に、実験装置の借用及び測定方法の御教示において数多くの御援助をいただきました。厚く御礼を申し上げます。

また、粒子分散形複合材の特性について、貴重な資料を提供していただきました日本電気中央研究所資源開発研究所の皆様に御礼を申し上げます。

実験装置の借用などでは、大阪大学基礎工学部機械工学科の皆様に数々の労をわずらわしました。誠に、有難うございました。

その他、研究の過程で数多くの方々から、御協力や御支援のあったことを、ここに心から感謝いたします。

最後に、長い間、温かく見守ってきてくれた父，母に感謝します。