

Title	SK1 (Z [G]) of finite solvable groups which act linearly and freely on spheres
Author(s)	牛瀧, 文宏
Citation	大阪大学, 1991, 博士論文
Version Type	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.11501/2964347">https://doi.org/10.11501/2964347</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

## 【1】

氏名・(本籍)	牛 瀧 文 宏
学位の種類	理 学 博 士
学位記番号	第 9 6 2 7 号
学位授与の日付	平成 3 年 3 月 26 日
学位授与の要件	理学研究科 数学専攻 学位規則第 5 条第 1 項該当
学位論文題目	$SK_1(Z[G])$ of finite solvable groups which act linearly and freely on spheres (球面に線型かつ自由に作用する有限可解群 $G$ の $SK_1(Z[G])$ )
論文審査委員	(主査) 教授 川久保勝夫 (副査) 教授 村上 信吾 教授 尾関 英樹

## 論 文 内 容 の 要 旨

有限群  $G$  に対して定義された 1 次の代数的  $K$  理論  $K_1(Z[G])$  と  $K_1(Q[G])$  に関して, 自然な準同型写像,

$$i : K_1(Z[G]) \rightarrow K_1(Q[G])$$

の核を  $SK_1(Z[G])$  と定義する。これは有限可換群となり, C. T. C. Wall により  $G$  のホワイトヘッド群  $Wh(G)$  のねじれ部分群に同型であることが示されている。今日まで, この  $SK_1(Z[G])$  は Bass-Milnor-Serre をはじめとして, 多くの研究者により研究されてきている。

この論文は, 球面への線型かつ自由な作用を持つ有限可解群  $G$  に対して, その  $SK_1(Z[G])$  の構造を完全に決定したものである。

このような有限群  $G$  は, J. A. Wolf によって, I 型, II 型, III 型, IV 型, と分類されており, それぞれを  $G_1, G_2, G_3, G_4$  と表すとき, 次の結果を得た。

定理(1)  $SK_1(Z[G_1]) = 0$ .

$$(2) SK_1(Z[G_2]) \cong Z_2^{t(2)} \quad (d \text{ が奇数の時}),$$

$$SK_1(Z[G_2]) \cong Z_2^{t'(2)} \quad (d \text{ が偶数の時}).$$

$$(3) SK_1(Z[G_3]) \cong Z_2^{t(3)}.$$

$$(4) SK_1(Z[G_4]) \cong Z_2^{t(4)}.$$

ここで  $t(2), t'(2), t(3), t(4)$  は, それぞれの群に対して決定される整数であり,  $d$  は群の定義の中で与えられる整数である。

紙面の都合上,  $t(i)$  や  $d$  については詳しくは述べられないが例えば  $t(3)$  は次のように与えられる。

$m, n, r$  を  $G_3$  の定義に用いられる数とし、整数  $b$  に対して  $M_b$  で  $r^b - 1$  と  $m$  の最大公約数を表し、 $D(M_b)$  で  $M_b$  の約数の集合を  $D(n, 3)$  で  $n$  の約数のうち  $3$  の倍数である数の集合を表すとき、

$$t(3) = \sum_{b \in D(n, 3)} \# D(M_b) - 1$$

となる。

この定理の証明は次のようにして行われる。まずこれらの群に関しては、奇素数  $p$  に対して、シロー  $p$  部分群が巡回群であることが Zassenhaus により示されているので、その結果一般に  $p$  トーションが現れないことが証明される。

$G_1$  のシロー  $2$  部分群は巡回群であるので、 $SK_1(Z[G_1]) = 0$  が示される。その他の群に関しては、シロー  $2$  部分群は四元数群または一般四元数群であることが知られており、これより  $2$  トーションについては  $Z_2$  の直積になることが示される。そして  $Z_2$  の階数は、ある条件を満たす巡回部分群の共役類の個数で与えられ、その個数は群論や整数論の方法を用いて計算される。

この我々の定理の幾何学的応用として、 $5$  次元以上のレンズ空間  $L, L'$  の間の任意の  $h$ -同境 ( $W; L, L'$ ) に対し、 $W$  は  $L \times I$  に微分同相であるという Milnor の定理の一般化が得られる。

### 論文審査の結果の要旨

単純ホモトピー理論に端を発した Whitehead 群の研究は多様体の分類へと発展し、 $s$  同境定理として結実した。

他方、Whitehead 群は純粋に代数的にも定義され、M. Cohen により両者は同型であることが示された。有限群  $G$  に対して定義された  $1$  次の代数的  $K$  理論  $K_1(Z[G])$  と  $K_1(Q[G])$  に関して、自然な準同型写像、

$$i : K_1(Z[G]) \rightarrow K_1(Q[G])$$

の核を  $SK_1(Z[G])$  と定義する。これは有限可換群となり、C. T. C. Wall により  $G$  の Whitehead 群のねじれ部分群に同型であることが示されている。今日まで、この  $SK_1(Z[G])$  は Bass, Milnor, Serre をはじめとして多くの研究者により研究されてきている。

牛瀧君は球面に線型かつ自由に作用する有限可解群  $G$  に対して、その  $SK_1(Z[G])$  の構造を完全に決定することに成功した。このような有限群  $G$  に対して、 $SK_1(Z[G])$  に  $p$  トーション ( $p$  : 奇素数) が現れないこと、及び  $2$  トーションは  $Z_2$  の直積になり、その階数は具体的に計算されることを示した。

この定理は次のような幾何学的応用を持つ。ある種のタイプの群  $G$  に対しては、 $SK_1(Z[G])$  が消滅し、その結果  $G$  が自由に作用している  $G$ - $h$  同境 ( $W; X, X'$ ) で、 $X, X'$  がホモトピー球面ならば、 $W$  は  $X \times I$  ( $I = [0, 1]$ ) に  $G$  微分同相であることを示した。これは Milnor の  $5$  次元以上の二つのレンズ空間  $L, L'$  の間の任意の  $h$  同境は  $L \times I$  に微分同相であるという定理の一般化を与えている。

以上、牛瀧君の研究は  $SK_1(Z[G])$  の代数的な構造を明らかにしたものであり、多様体の研究に貢献するところ大である。よって本論文は理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。