| | |
|---|---|
| Title | On the cohomology of Coxeter groups and their finite parabolic subgroups |
| Author(s) | 秋田, 利之 |
| Citation | 大阪大学, 1995, 博士論文 |
| Version Type | VoR |
| URL | https://doi.org/10.11501/3100495 |
| rights | |
| Note | |

【1】

| | |
|---|---|
| 氏　　　　名 | 秋田利之（あきた　としゆき） |
| 博士の専攻分野の名称 | 博　士（理　学） |
| 学　位　記　番　号 | 第　11713　号 |
| 学位授与年月日 | 平成 7 年 3 月 23 日 |
| 学位授与の要件 | 学位規則第 4 条第 1 項該当<br>理学研究科数学専攻 |
| 学　位　論　文　名 | On the cohomology of Coxeter groups and their finite parabolic subgroups<br>（Coxeter 群とその有限位数の放物的部分群のコホモロジーについて） |
| 論　文　審　査　委　員 | （主査）<br>教　授　川久保勝夫<br>（副査）<br>教　授　尾関　英樹　　教　授　満渕　俊樹 |

## 論文内容の要旨

当論文では Coxeter 群のコホモロジーとその有限位数の放物的部分群のコホモロジーとの関係を考察した。有限集合 $S$ と $\{m_{ij}\}$, $(i, j) \in S\times S$, ただし $m_{ij}$ は整数または記号$\infty$で $m_{ii}=1$, $2 \leq m_{ij}=m_{ji} \leq \infty$ $(i\neq j)$ をみたすとする。そのとき生成元 $\{r_i\}_{i\in S}$ と基本関係 $(r_i r_j)^{m_{ij}}=1$ $(m_{ij}\neq\infty)$ で定義される群を Coxeter 群と呼ぶ。生成元の集合 $S$ を強調するために $(W, S)$ と書く。$S$ の部分集合 $T$ によって生成される $(W, S)$ の部分群を放物的部分群と呼び $W_T$ であらわす。放物的部分群 $W_T$ も Coxeter 群となる。

Coxeter 群のコホモロジー環の具体的構造に関する過去の研究では Rusin (1984) および Davis-Januszkiewicz (1991) によるものがある。$(W, S)$ を Coxeter 群とする。$\mathscr{F}$ を $S$ の部分集合 $F\subseteq S$ の族で放物的部分群 $W_F$ の位数が有限となるもの全体からなる半順序集合とする ($\phi\in\mathscr{F}$ とする)。
任意の $W$- 加群 $M$ に対して

$$\mathscr{H}^*(W, M) = \text{inv.lim.}_{F\in\mathscr{F}} \mathrm{H}^*(W_F, M),$$

と置く（ただし射影的極限は制限写像に対して取る）。

$$\rho : H^*(W, M) \to \mathscr{H}^*(W, M)$$

を制限写像が誘導する自然な準同型とする。とくに $M$ が自明な $W$- 加群でかつ可換環のとき $\rho$ は環準同型となる。この準同型 $\rho$ を使うと先に触れた Rusin と Davis-Januszkiewicz の結果は $M=Z/2Z$ のときに $\rho$ が同型となる十分条件を与えていると解釈できる（実際かれらはコホモロジー環を具体的に計算している)。これら二つの研究はともに Coxeter 群とその有限位数の放物的部分群のコホモロジーの関係を示唆している。

われわれは一般の場合に準同型 $\rho$ がどのように振舞うのかを調べ，次の結果を得た。

定理 1　任意の Coxeter 群 W と可換環 k に対して環準同型

$$\rho : \mathrm{H}^*(W, k) \to \mathscr{H}^*(W, k)$$

は次の二つの性質を満たす。

1. $u\in\ker\rho$ ならば $u$ は冪零元である。
2. $k$ が標数 $p$ $(p\neq 0)$ の体のとき，任意の $v\in\mathscr{H}^*(W, k)$ に対してある整数 $n \geq 0$ があって $v^{p^n}\in\mathrm{Im}\,\rho$ を満たす。

準同型 $\rho$ は一般には自明でない核をもつが，自明でない余核をもつかどうかは今のところわからない。われわれは

準同型$\rho$が全射になる十分条件を求めた。Coxeter群の生成元$S$の任意の相異なる三つの元が生成する放物的部分群の位数が常に無限大のとき，そのCoxeter群はasphericalと呼ばれる。

定理2　任意のasphericalなCoxeter群Wに対して$\rho : H^*(W, M) \to \mathscr{H}^*(W, M)$は全射である。ただし$M$は$W$が自明に作用する$W$-加群である。

係数が$k = Z/2Z$のときには定理1，2よりもさらに強いことがいえる。

定理3　任意のCoxeter群$W$に対して写像$\rho$は単射

$$H^*(W, Z/2Z)/\sqrt{0} \to \mathscr{H}^*(W, Z/2Z)$$

を誘導する。ただし$\sqrt{0}$はnilradicalをあらわす。さらに$W$がasphericalならば上の写像は同型である。

Serreによりcoxeter群のvirtual cohomological dimensionが有限であることが証明されている。したがってCoxeter群に対してそのFarrellコホモロジーが定義される。Farrellコホモロジーの場合にも準同型$\rho : H^*(W, M) \to \mathscr{H}^*(W, M)$が同様に定義できる。われわれは定理1と定理2がFarrellコホモロジーに対しても同様に成り立つことを示した。とくに定理2は任意の$W$-加群にたいしてなりたつ（つまり$W$の$M$への作用は自明でなくてもよい)。

## 論文審査の結果の要旨

本論文では，Coxeter群のコホモロジー環からその有限位数の放物的部分群のコホモロジー環の射影的極限への自然な環準同型写像について考察し，主な結果として係数が正標数の体であるとき，この環準同型の核と余核がべき零元のみからなること，とくにCoxeter群がasphericalのときにはこの環準同型が全射になることを証明した。これらは，群のコホモロジーの研究に貢献するところ大であり，博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。