OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	On the cohomology of Coxeter groups and their finite parabolic subgroups
Author(s)	秋田, 利之
Citation	大阪大学, 1995, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.11501/3100495
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

【1】

氏名	秋田利之（あきた としゆき）
博士の専攻分野の名称	博士（理学）
学位記番号	第 11713 号
学位授与年月日	平成7年3月23日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当 理学研究科数学専攻
学位論文名	On the cohomology of Coxeter groups and their finite parabolic subgroups （Coxeter群とその有限位数の放物的部分群のコホモロジーについて）
論文審査委員	（主査） 教授 川久保勝夫 （副査） 教授 尾関 英樹　教授 満淵 俊樹

論文内容の要旨

当論文ではCoxeter群のコホモロジーとその有限位数の放物的部分群のコホモロジーとの関係を考察した。有限集合Sと$\{m_{ij}\}$, $(i, j) \in S\times S$, ただしm_{ij}は整数または記号∞で$m_{ii}=1$, $2 \leq m_{ij}=m_{ji} \leq \infty$ $(i \neq j)$をみたすとする。そのとき生成元$\{r_i\}_{i\in S}$と基本関係$(r_i r_j)^{m_{ij}}=1$ $(m_{ij}\neq\infty)$で定義される群をCoxeter群と呼ぶ。生成元の集合Sを強調するために(W, S)と書く。Sの部分集合Tによって生成される(W, S)の部分群を放物的部分群と呼びW_Tであらわす。放物的部分群W_TもCoxeter群となる。

Coxeter群のコホモロジー環の具体的構造に関する過去の研究ではRusin（1984）およびDavis-Januszkiewicz（1991）によるものがある。(W, S)をCoxeter群とする。$\mathcal{F}$をSの部分集合$F\subseteq S$の族で放物的部分群W_Fの位数が有限となるもの全体からなる半順序集合とする（$\phi\in\mathcal{F}$とする）。

任意のW-加群Mに対して

$$\mathcal{H}^*(W, M) = \mathrm{inv.lim}_{F\in\mathcal{F}} \mathrm{H}^*(W_F, M),$$

と置く（ただし射影的極限は制限写像に対して取る）。

$$\rho : H^*(W, M) \to \mathcal{H}^*(W, M)$$

を制限写像が誘導する自然な準同型とする。とくにMが自明なW-加群でかつ可換環のときρは環準同型となる。この準同型ρを使うと先に触れたRusinとDavis-Januszkiewiczの結果は$M=Z/2Z$のときにρが同型となる十分条件を与えていると解釈できる（実際かれらはコホモロジー環を具体的に計算している）。これら二つの研究はともにCoxeter群とその有限位数の放物的部分群のコホモロジーの関係を示唆している。

われわれは一般の場合に準同型ρがどのように振舞うのかを調べ，次の結果を得た。

定理1　任意のCoxeter群Wと可換環kに対して環準同型

$$\rho : \mathrm{H}^*(W, k) \to \mathcal{H}^*(W, k)$$

は次の二つの性質を満たす。

1．$u\in\ker\rho$ならばuは冪零元である。

2．kが標数p（$p\neq 0$）の体のとき，任意の$v\in\mathcal{H}^*(W, k)$に対してある整数$n \geq 0$があって$v^{p^n}\in\mathrm{Im}\,\rho$を満たす。

準同型ρは一般には自明でない核をもつが，自明でない余核をもつかどうかは今のところわからない。われわれは

準同型ρが全射になる十分条件を求めた。Coxeter群の生成元Sの任意の相異なる三つの元が生成する放物的部分群の位数が常に無限大のとき，そのCoxeter群はaspherical と呼ばれる。

定理2　任意のasphericalなCoxeter群Wに対して$\rho : H^*(W, M) \to \mathscr{H}^*(W, M)$は全射である。ただし$M$は$W$が自明に作用する$W$-加群である。

係数が$k = Z/2Z$のときには定理1，2よりもさらに強いことがいえる。

定理3　任意のCoxeter群Wに対して写像ρは単射

$$H^*(W, Z/2Z)/\sqrt{0} \to \mathscr{H}^*(W, Z/2Z)$$

を誘導する。ただし$\sqrt{0}$はnilradicalをあらわす。さらにWがasphericalならば上の写像は同型である。

Serreにより Coxeter群の virtual cohomological dimensionが有限であることが証明されている。したがってCoxeter群に対してそのFarrellコホモロジーが定義される。Farrellコホモロジーの場合にも準同型$\rho : H^*(W, M) \to \mathscr{H}^*(W, M)$が同様に定義できる。われわれは定理1と定理2がFarrellコホモロジーに対しても同様に成り立つことを示した。とくに定理2は任意のW-加群にたいしてなりたつ（つまりWのMへの作用は自明でなくてもよい)。

論文審査の結果の要旨

本論文では，Coxeter群のコホモロジー環からその有限位数の放物的部分群のコホモロジー環の射影的極限への自然な環準同型写像について考察し，主な結果として係数が正標数の体であるとき，この環準同型の核と余核がべき零元のみからなること，とくにCoxeter群がasphericalのときにはこの環準同型が全射になることを証明した。これらは，群のコホモロジーの研究に貢献するところ大であり，博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。